Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Ш. Ильясов, Нелокальные исследования бифуркаций решений нелинейных эллиптических уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 6, 19–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:11:23

УДК 517.95

Я. Ш. Ильясов

Нелокальные исследования бифуркаций решений нелинейных эллиптических уравнений

Обосновывается процедура проективного расслоения для функционалов, заданных на банаховых пространствах. Используя данную процедуру и динамический подход в исследовании по параметрам, доказываются существование ветвей положительных решений нелинейных эллиптических уравнений с индефинитными нелинейностями. В точках бифуркационных значений исследуется асимптотическое поведение этих ветвей решений. Для общего случая уравнений с p -лапласианом доказывается теорема о существовании по рассматриваемому параметру верхней грани для ветвей положительных решений.

Библиография: 21 наименование.

§ 1. Введение

Целью настоящей работы является исследование критических точек следующего семейства функционалов Эйлера:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int |\nabla u|^p - \lambda \frac{1}{p} \int |u|^p - \frac{1}{\gamma} \int f(x)|u|^\gamma, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad (1.1)$$

здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, с гладкой границей $\partial\Omega$, интегрирование проводим по области Ω , $W_0^{1,p}(\Omega)$ – обычное соболевское пространство функций, $f \in C(\Omega)$,

$$1 < p < \gamma < p^*, \quad p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{если } p < N, \\ +\infty, & \text{если } p \geq N. \end{cases} \quad (1.2)$$

Параметром данного семейства является $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Критические точки функционала (1.1) являются слабыми решениями следующей краевой задачи Дирихле с p -лапласианом:

$$-\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2} u = f(x) |u|^{\gamma-2} u \quad \text{в } \Omega, \quad (1.3)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (1.4)$$

и, наоборот, любое слабое решение задачи (1.3), (1.4) представляет собой критическую точку функционала (1.1), поэтому проблему исследования критических точек функционала (1.1) можно переформулировать так же, как проблему исследования слабых решений краевой задачи (1.3), (1.4).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00069) и INTAS (грант № 97-30551).

На данном этапе достаточно хорошо изучены функционалы (1.1) с обычными лапласианами ($p = 2$) и случаи, когда функция f в (1.1) ((1.3)) не меняет знака, т. е. когда $f > 0$ или $f < 0$ всюду на Ω (см., например, [1]). Гораздо менее изучены функционалы (1.1) при $p \neq 2$ и с индефинитными нелинейностями, когда функция f может быть знакопеременной. Такие функционалы характеризуются более сложной зависимостью от параметра λ . Так, в работах [2]–[8] и ряде других доказано, что для эллиптических краевых задач с индефинитными нелинейностями, таких как (1.3), (1.4), возможно существование при одних значениях параметра λ двух положительных решений, при других – одного и, наконец, при третьих – отсутствие таких решений. При этом является более сложной (а во многих случаях остается и открытой) проблема анализа бифуркаций, т. е. *нахождение бифуркационных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, построение ветвей критических состояний функционала и асимптотическое исследование их поведения в точках бифуркаций $(\lambda_1, u_{\lambda_1}), (\lambda_2, u_{\lambda_2}), \dots$*

Хорошо известны (см., например, [13]–[15]) так называемые локальные методы исследований бифуркаций, в которых используется линейное и квадратичное приближение функционалов в точках бифуркаций $(\lambda_1, u_{\lambda_1}), (\lambda_2, u_{\lambda_2}), \dots$. Однако не во всех случаях представляется возможным применять в полной мере такие методы.

В настоящей работе предлагается нелокальный подход для анализа бифуркаций, который основан на том, что, в отличие от локальных методов, исследования начинаются вне точек бифуркаций, а именно сначала находятся бифуркационные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, затем строятся ветви критических состояний вне бифуркационных значений и в заключение исследуется поведение этих ветвей при приближении к этим значениям.

В основе нашего подхода лежат две идеи: идея метода расслоений, предложенного С. И. Похожаевым [9] для доказательства существования решений нелинейных эллиптических уравнений, и идея динамического метода минимизации с навязанными ограничениями, предложенного автором в [7]. В §1 на основе идеи метода расслоений [9] приведем общую конструктивную процедуру проективного (грасманового) расслоения для абстрактного вариационного функционала, заданного на банаховом пространстве. Одним из элементов данной процедуры является конструктивная схема исчисления бифуркационных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, в некотором смысле являющаяся нелинейным аналогом метода *характеристических уравнений*. Важно отметить, что разрабатываемая нами более общая конструкция метода расслоений Похожаева оказывается не чем иным, как обобщением на случай банаховых пространств такого инструмента алгебраической геометрии, как *σ -процесс* (см., например, [12]). Такой более общий подход позволяет применять метод расслоений не только для доказательства существования критических состояний, но и дает возможность в дальнейшем исследовать асимптотическое поведение ветвей решений в бифуркационных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и находить точки бифуркаций $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots$.

Изложение настоящей работы можно условно разделить на две части: теоретическую (§2) и прикладную (§3–5). В теоретической части вводится проективная процедура расслоений критических точек для абстрактного функционала, заданного на банаховом пространстве. Основными результатами теоретической части

являются лемма 2.3, обосновывающая σ -расслоение, теорема 2.13, обосновывающая конструктивное построение кратных минимизационных проблем с навязанными ограничениями, и лемма 2.14 об исчислении бифуркационных значений.

В §3 проективная процедура расслоений применяется для доказательства существования кратных положительных критических точек функционала (1.1) (см. теорему 3.3). Основным результатом здесь является также лемма 3.2 об исчислении характеристических (априорных бифуркационных) значений для (1.1). В §4, используя динамический метод минимизации с навязанными ограничениями, доказывается, что найденные в §3 критические точки образуют ветви по проективной процедуре (см. теорему 4.6). В §5 выводятся основные качественные результаты о функционале (1.1). В теоремах 5.1, 5.3 в рамках теории σ -расслоения удается обосновать свойство о попарном рождении и уничтожении ветвей критических точек функционала (1.1) в априорных бифуркационных значениях, вычисленных в §3, и тем самым доказать, что эти значения являются действительно бифуркационными. В теореме 5.4 метод нелокального анализа применяется качественно для других целей, а именно для доказательства существования критических точек функционала (1.1) при предельных значениях параметра λ , где метод расслоений Похожаева вырождается.

Автор выражает глубокую признательность С.И. Похожаеву, привлечшему внимание автора к рассматриваемым в настоящей работе проблемам, за постоянное участие в обсуждении полученных результатов. Автор также благодарен В.И. Вишику, А.И. Комечу и В.В. Курте за внимание и поддержку в данных исследованиях.

§2. Проективные процедуры расслоений

В этом параграфе обоснуем так называемые проективные процедуры σ -расслоения и тривиального расслоения критических точек функционалов. В основе этих процедур лежит известный метод расслоений Похожаева [9]. Сначала обоснуем более обобщенную и универсальную процедуру, а именно σ -расслоение. Аппарат σ -расслоения позволяет комплексно решать проблемы нелокального анализа бифуркаций, а именно доказывать существование критических точек функционалов, находить априорные значения бифуркаций и исследовать асимптотическое поведение критических ветвей при этих значениях. Однако на начальном этапе, при доказательстве существования критических точек функционалов, часто бывает достаточен более простой аппарат, так называемый *метод тривиального расслоения*, в то время как σ -расслоение используется лишь в дальнейшем, при анализе асимптотики ветвей решений в точках бифуркаций.

2.1. σ -расслоение. Обоснуем проективную процедуру σ -расслоения. Рассмотрим банахово пространство $(W, \|\cdot\|)$ над вещественным полем $\mathbb{R}$. Будем предполагать, что норма $\|\cdot\|$ принадлежит классу C^r -дифференцируемых функционалов на $W \setminus 0$, $r \geq 1$. В этом случае шар $S_1 = \{v \mid v \in W, \|v\| = 1\}$ является замкнутым подмногообразием в W класса C^r , а отображение $b_1 =: v/\|v\|: W \rightarrow S_1$ является C^r -морфизмом (см. [10]).

Введем проективное пространство $P(W)$. Для этого рассмотрим действие $R_t u$ группы $(\mathbb{R} \setminus 0, \times)$ на пространство $W \setminus 0$ как умножение элементов из $W \setminus 0$ на $t \in \mathbb{R} \setminus 0$. Таким образом, здесь будет определено отношение эквивалентности R :

$v \sim v'$ тогда и только тогда, когда существует вещественная константа $s \neq 0$ такая, что $v = sv'$. Проективное пространство $P(W)$ есть факторпространство $(W \setminus 0)/R$, наделенное фактортопологией пространства W . Обозначим через $p: W \setminus 0 \rightarrow P(W)$ соответствующую каноническую проекцию.

Рассмотрим отношение эквивалентности R_1 , индуцированное в S_1 отношением R . Легко видеть, что данное отношение эквивалентности R_1 определяется действием группы G_1 , состоящим из тождественного отображения на S_1 и преобразования отражения $v \rightarrow -v \in S_1$. Эта группа является дискретной и, как легко видеть, действует на S_1 свободно и собственнo (см. [10]). Отсюда вытекает, что на факторпространстве S_1/G_1 существует структура C^r -дифференцируемого многообразия такая, что каноническая проекция $p_1: S_1 \rightarrow S_1/G_1$ есть локальный C^r -диффеоморфизм.

Поскольку отображение b_1 пространства $W \setminus 0$ в S_1 непрерывно и $b_1(v)$ при любом $v \in W \setminus 0$ принадлежит классу эквивалентности элемента v по R , то отсюда вытекает [10], что S_1/G_1 и $P(W)$ гомеоморфны. Определим на $P(W)$ дифференциальную структуру как поднятие дифференциальной структуры из S_1/G_1 при отображении гомеоморфизма $\vartheta: S_1/G_1 \rightarrow P(W)$. Тогда $P(W)$ будет являться многообразием класса C^r . Из локальной C^r -диффеоморфности S_1 и S_1/G_1 вытекает, что многообразия S_1 и $P(W)$ также являются локально C^r -диффеоморфными. Для соответствующего диффеоморфизма сохраним обозначение $p_1: S_1 \rightarrow P(W)$. Таким образом, для каждой точки $\xi \in P(W)$ найдутся окрестность $U \subset P(W)$, содержащая ξ , и окрестность $V \subset S_1$, содержащая $p_1^{-1}(\xi)$, такие, что $p_1: V \rightarrow U$ будет являться C^r -диффеоморфизмом. В дальнейшем ограничения p_1 на те области $V \subset S_1$, где $p_1: V \rightarrow p_1(V) \equiv U$ является диффеоморфизмом, будем обозначать $p_{1,V} \equiv p_{1,V,U}$.

Отметим также, что поскольку $b_1: W \rightarrow S_1$ является C^r -морфизмом, то отображение канонической проекции $p: W \rightarrow P(W)$ также является C^r -морфизмом.

Пусть $\Gamma = \{v, p(v)\} \subset (W \setminus 0) \times P(W)$ – график отображения p . Поскольку отображение $p: W \rightarrow P(W)$ есть C^r -морфизм, то Γ является C^r -подмногообразием в $(W \setminus 0) \times P(W)$. При этом отображение естественной проекции $\text{pr}_1: (W \setminus 0) \times P(W) \rightarrow W$ индуцирует C^r -диффеоморфизм из Γ в $W \setminus 0$.

Определим действие однопараметрической группы $(\mathbb{R} \setminus 0, \times)$ на Γ следующим образом:

$$\overline{R}_t(v, p(v)) = (tv, p(v)),$$

и введем отображение проекции $p_\Gamma: \Gamma \rightarrow P(W)$ как ограничение на Γ естественной проекции $\text{pr}_2: (W \setminus 0) \times P(W) \rightarrow P(W)$, т.е. положим $p_\Gamma = \text{pr}_2|_\Gamma$.

ЛЕММА 2.1. *Четверка $\mathcal{P} = (\Gamma, P(W), (\mathbb{R} \setminus 0, \times), p_\Gamma)$ является главным расслоением (определение см. в [10]).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение проекции $p_\Gamma: \Gamma \rightarrow P(W)$ является C^r -морфизмом. Действительно, естественная проекция $\text{pr}_2: (W \setminus 0) \times P(W) \rightarrow P(W)$ является C^r -морфизмом. Отсюда, поскольку Γ – C^r -подмногообразие в $(W \setminus 0) \times P(W)$, получаем требуемое.

Покажем, что Γ локально тривиально. Пусть $\xi \in P(W)$. Тогда, поскольку $p_1: S_1 \rightarrow P(W)$ является локальным C^r -диффеоморфизмом, найдутся такие

окрестности $U \subset P(W)$, $\xi \in U$, и $V \subset S_1$, $p_1^{-1}(\xi) \in V$, что $p_{1,V,U}: V \rightarrow U$ будет C^r -диффеоморфизмом.

Рассмотрим следующее отображение $\phi_{V,U}: p_{\Gamma}^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$:

$$\phi_{V,U}(\omega) = D\| \operatorname{pr}_1 \omega \| (p_{1,V,U}^{-1}(p_{\Gamma}(\omega))), \quad \omega \in p_{\Gamma}^{-1}(U), \quad (2.1)$$

где $D\|v\|(\cdot)$ – дифференциал отображения $\| \cdot \|: W \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $v \in W \setminus \{0\}$. Несложно доказывається, что отображение $\psi_{V,U}(\omega) = (\phi_U(\omega), p_{\Gamma}(\omega))$ будет C^r -диффеоморфизмом из $p_{\Gamma}^{-1}(U)$ на $(\mathbb{R} \setminus 0) \times U$. При этом

$$\phi_{V,U}(\overline{R_t} \omega) = t \phi_{V,U}(\omega) \quad (2.2)$$

для всех $\omega \in p_{\Gamma}^{-1}(U)$ и $t \in \mathbb{R} \setminus 0$. Следовательно, Γ локально тривиально. Лемма доказана.

Отметим, что обратное отображение к $\psi_{V,U}$ задается следующим образом:

$$\psi_{V,U}^{-1}(t, \xi) = (tp_{1,V,U}^{-1}(\xi), \xi), \quad (t, \xi) \in (\mathbb{R} \setminus 0) \times U, \quad (2.3)$$

где V такое же, как в (2.1). Это отображение осуществляет C^r -диффеоморфизм $(\mathbb{R} \setminus 0) \times U$ на $p_{\Gamma}^{-1}(U)$.

В дальнейшем тройку $(p_{\Gamma}^{-1}(U), (\mathbb{R} \setminus 0) \times U, \psi_U)$, где $\psi_U: p_{\Gamma}^{-1}(U) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus 0) \times U$ – C^r -диффеоморфизм, причем для всех $\omega \in p_{\Gamma}^{-1}(U)$ и $t \in \mathbb{R} \setminus 0$ выполняются равенства $\pi_1(\psi_U(\overline{R_t} \omega)) = t\pi_1(\psi_U(\omega))$ и $\pi_2(\psi_U(\omega)) = p_{\Gamma}(\omega)$, будем называть *локально тривиальными координатами*. (Здесь и далее $\pi_1: \mathbb{R} \times P(W) \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_2: \mathbb{R} \times P(W) \rightarrow P(W)$ – операторы проекций.) Локально тривиальные координаты, в которых $\pi_1(\psi_U)$ задается по формуле (2.1), будем в дальнейшем называть *каноническими* на Γ .

Продолжим график $\Gamma = \{v, p(v)\}$ в $\{0\} \times P(W)$ следующим образом: для каждого $\omega = (v, p(v)) \in \Gamma$ доопределим множество $\{\overline{R_t} \omega\}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, предельной при $t \rightarrow 0$ точкой $(0, p(v))$. Обозначим полученное замыкание $\Gamma_1 = \Gamma \cup (\{0\} \times P(W))$. Очевидно, Γ_1 является топологическим подпространством в $W \times P(W)$. Зададим проекцию $p_{\Gamma_1}: \Gamma_1 \rightarrow P(W)$, положив $p_{\Gamma_1} = \operatorname{pr}_2|_{\Gamma_1}$, где $\operatorname{pr}_2: W \times P(W) \rightarrow P(W)$ – естественная проекция.

ЛЕММА 2.2. *Замыкание $\Gamma_1 = \Gamma \cup (0 \times P(W))$ в $W \times P(W)$ графика Γ канонической проекции $p: W \setminus 0 \rightarrow P(W)$ является подмногообразием класса C^1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega = (0, \xi) \in \{0\} \times P(W)$ выбрано произвольно. Рассмотрим в окрестности точки ω канонические локально тривиальные координаты $(p_{\Gamma}^{-1}(U), (\mathbb{R} \setminus 0) \times U, \psi_{V,U})$ на Γ . Продолжим отображение (2.3) на $(\mathbb{R}) \times U$, положив

$$\psi_{V,U}^{-1}(t, \xi) = (tp_{1,V,U}^{-1}(\xi), \xi), \quad (t, \xi) \in \mathbb{R} \times U. \quad (2.4)$$

Данное отображение является гомеоморфизмом из открытого подмножества $\mathbb{R} \times U$ в открытое подмножество $p_{\Gamma_1}^{-1}(U) \subset \Gamma_1$. Отсюда и из сепарабельности $P(W)$, а также в силу того, что Γ является многообразием класса C^1 , вытекает доказательство леммы.

Поскольку Γ_1 является C^1 -подмногообразием в $W \times P(W)$, то ограничение pr_2 на Γ_1 является C^1 -морфизмом. Отсюда вытекает, что $\mathcal{P}_1 = (\Gamma_1, P(W), p_{\Gamma_1})$ является расслоением. Действительно [10], Γ_1 и $P(W)$ являются многообразиями класса C^1 , проекция $p_{\Gamma_1} - C^1$ -морфизм из Γ_1 в $P(W)$. При этом выполняется условие локальной тривиальности: для каждой точки $\xi \in P(W)$ найдется такая окрестность U , что продолженное отображение (2.4) C^1 -диффеоморфно отображает $\mathbb{R} \times U$ на $p_{\Gamma_1}^{-1}(U)$ и $p_{\Gamma_1}(\psi_{V,U}^{-1}(\xi, t)) = \xi$ для всякого $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times U$.

Назовем $\mathcal{P}_1 = (\Gamma_1, P(W), p_{\Gamma_1})$ σ -расслоением над банаховым пространством W .

Отсюда имеем следующую основную лемму.

ЛЕММА 2.3. Пусть $(W, \|\cdot\|)$ – банахово пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$, где норма $\|\cdot\|$ принадлежит классу C^r , $r \geq 1$, дифференцируемых функционалов на $W \setminus \{0\}$ и классу C^1 на W . Тогда существует σ -расслоение $\mathcal{P}_1 = (\Gamma_1, P(W), p_{\Gamma_1})$ над W , где пространство расслоения Γ_1 есть замыкание в $W \times P(W)$ графика Γ канонической проекции $p: W \setminus 0 \rightarrow P(W)$, база расслоения $P(W)$ есть проективное пространство над $W \setminus 0$, проекция расслоения p_{Γ_1} есть ограничение на Γ_1 естественной проекции $\text{pr}_2: W \times P(W) \rightarrow P(W)$. При этом в каждой точке $\xi \in P(W)$ слой $p_{\Gamma_1}^{-1}(\xi)$ диффеоморфен прямой $tp_1^{-1}(\xi) \in W$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть задан функционал $I(u)$ на W такой, что $I \in C^r(W \setminus 0) \cap C^1(W)$, $r \geq 1$. Функционал $\bar{I}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ назовем σ -представлением в Γ для I :

$$\bar{I}(\omega) = I(p_{\Gamma_1}(\omega)), \quad \omega \in \Gamma.$$

Поскольку отображение $p_{\Gamma_1}: \Gamma \rightarrow W \setminus 0$ – локальный C^r -диффеоморфизм и $I \in C^r(W \setminus 0)$, то $\bar{I} \in C^r(\Gamma)$. Из соотношения (2.3) и локальной тривиальности расслоения $(\Gamma_1, P(W), p_{\Gamma_1})$ вытекает, что функционал $\bar{I}$ допускает продолжение на Γ_1 и при этом $\bar{I} \in C^1(\Gamma_1)$. Таким образом, существует σ -представление в Γ_1 для I и $\bar{I} \in C^r(\Gamma) \cap C^1(\Gamma_1)$, $r \geq 1$.

Важно выделить следующее утверждение о локальном свойстве функционала $\bar{I}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для любого $\omega_0 \in \Gamma_1$ найдется такая область $U \subset P(W)$, что $\omega_0 \in p_{\Gamma_1}^{-1}(U) \subset \Gamma_1$ и в области $p_{\Gamma_1}^{-1}(U)$ будет справедливо следующее локально тривиальное представление:

$$\bar{I}(\omega) = I(p_{\Gamma_1}(\psi_U^{-1}(t, \xi))) := \check{I}_U(t, \xi), \quad (t, \xi) \in \mathbb{R} \times U, \quad \omega \in p_{\Gamma_1}^{-1}(U) \subset \Gamma, \quad (2.5)$$

где $\omega = \psi_U^{-1}(t, \xi)$. При этом в канонических локально тривиальных координатах

$$I(p_{\Gamma_1}(\psi_{V,U}^{-1}(t, \xi))) = \check{I}_{V,U}(t, \xi) = I(tp_{1,V,U}^{-1}(\xi)), \quad (t, \xi) \in \mathbb{R} \times U.$$

Доказательство этого предложения непосредственно следует из (2.4) и из локальной тривиальности расслоения $(\Gamma_1, P(W), p_{\Gamma_1})$.

Из диффеоморфности многообразий Γ и $W \setminus 0$ следует, что множества критических точек функционала I на $W \setminus 0$ и функционала $\bar{I}$ на Γ находятся во взаимно однозначном соответствии. Из (2.5) видно, что если существует критическая точ-

ка $\omega \in 0 \times P(W)$ функционала $\bar{I}$ на Γ_1 , то она проектируется в критическую точку $0 \in W$ функционала I на W . Таким образом, σ -расслоение позволяет расширить (“раздуть в нуле”) проблему исследования критических точек функционала I до исследования критических точек функционала σ -представления $\bar{I}$ на Γ_1 .

2.2. Тривиальное расслоение. В настоящей работе будем рассматривать только четные функционалы $I(u)$. В этом случае при доказательстве существования критических точек и нахождении априорных бифуркационных значений технически более удобно иметь дело с тривиальным расслоением. В этом пункте мы обоснуем на основе процедуры тривиального расслоения метод конструктивного построения кратных минимизационных задач с ограничением и метод конструктивного вычисления априорных бифуркационных точек.

Пусть $(W, \|\cdot\|)$ – банахово пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$ класса C^r на $W \setminus \{0\}$, $r \geq 1$. Тогда шар $S_1 = \{v \mid v \in W, \|v\| = 1\}$ является замкнутым подмногообразием в W класса C^r , а отображение $b_1 =: v/\|v\|: W \setminus \{0\} \rightarrow S_1$ является C^r -морфизмом [10]. Очевидно также, что $\mathbb{R}^+ \times S^1$ C^r -диффеоморфно $W \setminus \{0\}$. Рассмотрим тривиальное расслоение $\mathcal{T} = (\mathbb{R}^+ \times S^1, S^1, (\mathbb{R}^+, \times), p_r)$, где p_r – естественная проекция пространства расслоения $\mathbb{R}^+ \times S^1$ на базу S^1 , а $(\mathbb{R}^+, \times)$ является структурной группой расслоения.

Пусть $I(u)$ – четный функционал на W , $I \in C^r(W \setminus 0) \cap C^1(W)$. Функционал $\tilde{I}: \mathbb{R}_0^+ \times P(W) \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *представлением* в $\mathbb{R}^+ \times S^1$ функционала $I(u)$:

$$\tilde{I}(s, v) = I(sv), \quad (s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1. \quad (2.6)$$

Отметим, что из четности функционала I вытекает

$$\bar{I}(\omega) = \bar{I}(\bar{R}_{-1}\omega) = \tilde{I}(s, v) = I(sv), \quad (s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1, \quad (2.7)$$

где $\omega = \psi_U^{-1}(s, p_1(v))$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 2.5. Пусть $(s_0, v_0) \in \mathbb{R}^+ \times S^1$ – критическая точка функционала $\tilde{I}(s, v)$. Тогда точки $\omega_0^+ = (s_0 p_{1,V,U}^{-1}(v_0), v_0) \in \Gamma_1$ и $\omega_0^- = \bar{R}_{-1}\omega_0^+ = (-s_0 p_{1,V,U}^{-1}(v_0), v_0) \in \Gamma_1$ являются критическими для $\bar{I}(\omega)$ на Γ_1 .

Введем дополнительное допущение. Будем предполагать, что выполнено следующее свойство.

RD.0. При каждом $u \in W \setminus 0$ функция $\tilde{I}(t, u)$ дифференцируема по t на $\mathbb{R}^+$, и при этом $\partial \tilde{I} / \partial t$ является отображением класса C^1 на $\mathbb{R}^+ \times S^1$.

Пусть функционал I удовлетворяет условию RD.0. Пусть

$$Q(s, v) = \frac{\partial}{\partial s} \tilde{I}(s, v), \quad L(s, v) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \tilde{I}(s, v), \quad (s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1. \quad (2.8)$$

Тогда в $\mathbb{R}^+ \times S^1$ можно однозначно выделить подмножества

$$\Sigma^1 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid Q(s, v) = 0, L(s, v) < 0\}, \quad (2.9)$$

$$\Sigma^2 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid Q(s, v) = 0, L(s, v) > 0\}. \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2.6. Пусть выполняется условие RD.0. Тогда подмножества Σ^j , $j = 1, 2$, являются C^1 -подмногообразиями в $\mathbb{R}^+ \times S^1$, локально диффеоморфными S^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть задана точка $(s_0, v_0) \in \Sigma^j$, $j = 1, 2$. Тогда найдутся такие окрестность $\Lambda(v_0) \subset S^1$ точки $v_0 \in S^1$ и единственное в этой окрестности C^1 -отображение $s^j: \Lambda(v_0) \rightarrow \mathbb{R}$, что будет выполнено

$$s^j(v_0) = s_0, \quad (s^j(v), v) \in \Sigma^j, \quad v \in \Lambda(v_0), \quad j = 1, 2. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем предложение в случае $j = 1$. Пусть $(s_0, v_0) \in \Sigma^1$. Тогда $\partial Q(s_0, v_0)/\partial s = L(s_0, v_0) \neq 0$. Отсюда, поскольку по предположению RD.0 $Q \in C^1(\mathbb{R} \times W)$, по теореме о неявной функции найдутся окрестность $\Lambda(v_0) \subset S^1$ точки $v_0 \in S^1$ и гладкое отображение $s: \Lambda(v_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $s(v_0) = s_0$, такие, что будут выполняться все утверждения предложения.

Пусть функционал $I(u)$ является четным. Из предложения 2.7 вытекает, что если задана точка $(s_0, v_0) \in \Sigma^j$, $j = 1$ ($j = 2$), то найдутся окрестность $\Lambda(v_0)$ точки v_0 и единственное в этой окрестности C^1 -отображение $s^j: \Lambda(v_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1$ ($j = 2$), такие, что будет выполняться:

$$\begin{aligned} s(v_0) = s_0, \quad Q(s(v), v) &= 0, \\ L(s(v), v) < 0 \quad (L(s(v), v) > 0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Будем называть процедуру расслоения *процедурой расслоения с разделяющимися переменными* в Σ^1 (Σ^2), если при каждом $v \in S^1$ на множестве $\{s \in \mathbb{R}^+ \mid L(s, v) < 0\}$ ($\{s \in \mathbb{R}^+ \mid L(s, v) > 0\}$) существует не более одного решения $s^1(v) \in \mathbb{R}^+$ ($s^2(v) \in \mathbb{R}^+$) уравнения $Q(s, v) = 0$. (Если это выполняется в обоих случаях, будем называть такую процедуру *процедурой проективного расслоения с разделяющимися переменными*.) Если дополнительно известно, что решения $s^j(v)$ выражаются в явном виде, то будем называть процедуру тривиального расслоения *точно разрешимой*.

Обозначим через $\tilde{J}^i$ при $i = 1, 2$ ограничения $\tilde{I}$ на подмногообразия Σ^i , $i = 1, 2$: $\tilde{J}^i(s, v) = \tilde{I}(s, v)$, $s, v \in \Sigma^i$. Справедлива следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть выполняется условие RD.0 и (s_0, v_0) – критическая точка функционала $\tilde{J}^i$ на Σ^i при $i = 1, 2$, т. е.

$$d_{(s_0, v_0)} \tilde{J}^i(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in T_{(s_0, v_0)}(\Sigma^i). \quad (2.13)$$

Тогда эта точка является критической для функционала $\tilde{I}$ на $\mathbb{R}^+ \times S^1$, т. е.

$$d_{(s_0, v_0)} \tilde{I}(h) = 0 \quad \forall h \in T_{(s_0, v_0)}(\mathbb{R}^+ \times S^1). \quad (2.14)$$

Здесь $d_{(s_0, v_0)} \tilde{J}^i(\cdot)$ ($d_{(s_0, v_0)} \tilde{I}(\cdot)$) – дифференциал морфизма $J^i: \Sigma^i \rightarrow \mathbb{R}$ ($\tilde{I}: \mathbb{R}^+ \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$) в точке (s_0, v_0) , $T_{(s_0, v_0)}(\Sigma^i)$ ($T_{(s_0, v_0)}(\mathbb{R}^+ \times S^1)$) – касательное пространство к Σ^i ($\mathbb{R}^+ \times S^1$) в точке (s_0, v_0) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на примере случай $i = 1$. Пусть (s_0, v_0) – критическая точка функционала $\tilde{J}^1$ на Σ^1 . Отметим, что

$$d_{(s_0, v_0)} \tilde{I}(s, \phi) = \frac{\partial}{\partial s} \tilde{I}(s_0, v_0)(s) + \frac{\partial}{\partial v} \tilde{I}(s_0, v_0)(\phi) \quad (2.15)$$

при любых $s \in T_{(s)}(\mathbb{R}^+)$ и $\phi \in T_{(v)}(S^1)$. Здесь $\frac{\partial}{\partial s} \tilde{I}(s, v)(\cdot)$ ($\frac{\partial}{\partial v} \tilde{I}(s, v)(\cdot)$) – касательное линейное отображение к частичному отображению $s \rightarrow \tilde{I}(s, v)$ ($v \rightarrow \tilde{I}(s, v)$) из $\mathbb{R}^+$ (S^1) в $\mathbb{R}$. В силу соотношения (2.9) первое слагаемое в правой части равно нулю, поэтому для доказательства (2.14) достаточно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{I}(s_0, v_0)(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in T_{(v_0)}(S^1). \quad (2.16)$$

По предложению 2.7 найдутся окрестность $\Lambda(v_0) \subset S^1$ точки $v_0 \in S^1$ и гладкое отображение $s^1: \Lambda(v_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что будет выполняться (2.11). Отсюда при $(s, v) \in \Sigma^1 \cap \mathbb{R}^+ \times \Lambda(v_0)$

$$\tilde{I}(s^1(v), v) = \tilde{J}^1(s^1(v), v) =: J^1(v), \quad v \in \Lambda(v_0), \quad (2.17)$$

и v_0 является критической точкой функционала $J^1(v)$ на $\Lambda(v_0)$, т.е. $d_{(v_0)} J^1(\phi) = 0$ $\forall \phi \in T_{(v_0)}(S^1)$. Из (2.17) вытекает

$$\begin{aligned} 0 = d_{(v_0)} J^1(\phi) &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{I}(s^1(v_0), v_0)(s^1(v_0))'(\phi) \\ &+ \frac{\partial}{\partial v} \tilde{I}(s^1(v_0), v_0)(\phi) \quad \forall \phi \in T_{v_0}(S^1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

В силу соотношения (2.9) первое слагаемое в правой части (2.18) равно нулю. Отсюда получаем (2.16). Теорема доказана.

Пусть выполняется условие RD.0. Следующие конструктивно определяемые вариационные задачи с навязанными ограничениями назовем *основными минимизационными проблемами по расслоению $\mathcal{T}$* :

$$\hat{I}^j = \inf \{ \tilde{I}(s, v) \mid (s, v) \in \Sigma^j \}, \quad j = 1, 2, \quad (2.19)$$

где по определению

$$\hat{I}^j = +\infty, \quad \text{если } \Sigma^j = \emptyset, \quad j = 1, 2. \quad (2.20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть $|\hat{I}^j| < \infty$. Точку $(s_0, v_0) \in \Sigma^j$, доставляющую минимум в (2.19), $\hat{I}^j = \tilde{I}(s_0, v_0)$, будем называть *решением задачи* (2.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Здесь наряду с задачами (2.19) на минимум естественно рассматривать аналогичные задачи на максимум. Однако поскольку замена $I' = -I$ позволяет задачу на максимум свести к эквивалентной задаче на минимум, то в дальнейшем достаточно рассматривать только минимизационные проблемы (2.19).

Из теоремы 2.8 вытекает следующая основная теорема, обосновывающая процедуру расслоения как метод построения кратных критических точек функционала I .

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть функционал $I(u)$ является четным и выполняется условие RD.0. Пусть точка $(s_0, v_0) \in \Sigma^j$ – решение задачи (2.19) при $j = 1, j = 2$ соответственно. Тогда точки $\omega_0^{(+),j} = (s_0 v_0, p_1(v_0)) \in \Gamma$ и $\omega_0^{(-),j} = (-s_0 v_0, p_1(v_0)) \in \Gamma$, $j = 1, 2$, являются критическими для функционала $\bar{I}(\omega)$ на Γ_1 , а точки $u^{(+),j} = s_0 v_0 \in W \setminus \{0\}$ и $u^{(-),j} = -s_0 v_0 \in W \setminus \{0\}$, $j = 1, 2$, являются критическими для функционала $I(u)$ на W .

2.3. Основные свойства проективных процедур расслоений. Приведем некоторые основные свойства введенных выше проективных процедур расслоений критических точек.

1) *Основные состояния по проективной процедуре.* С точки зрения приложений (ср. [16]) и глобального анализа функционалов, первоначально важным является нахождение так называемого основного состояния (ground state) функционала. Напомним, критическая точка $u_0 \in W \setminus \{0\}$ называется *основным состоянием* (ground state) функционала I , если она удовлетворяет следующему условию минимальности:

$$-\infty < I(u_0) \leq I(u), \quad (2.21)$$

где $u \in W \setminus \{0\}$ – любая другая критическая точка этого функционала.

Первое основное свойство вариационных проблем (2.19), получаемых в силу процедуры проективного расслоения, заключается в том, что эти проблемы позволяют находить критические точки типа основных состояний.

Действительно, рассмотрим действие $R_t u$ группы $(\mathbb{R} \setminus 0, \times)$ на пространстве $W \setminus 0$ как умножение элементов из $W \setminus 0$ на $t \in \mathbb{R} \setminus 0$. Будем называть критическую точку $u \neq 0$ функционала $I(u)$ *невырожденной по проективной процедуре*, если $\frac{\partial^2}{\partial t^2} I(R_t u)|_{t=1} \neq 0$, и будем называть ее *критической точкой типа (0)* (типа (-1)), если дополнительно известно, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I(R_t u)|_{t=1} > 0 \quad (< 0).$$

Введем следующие понятия, уточняющие определения основного состояния.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Основным состоянием типа (0) (основным состоянием типа (-1)) функционала I по проективной процедуре на $W \setminus 0$ называется такая критическая точка u_{gr}^2 (u_{gr}^1) типа (0) (типа (-1)) функционала I , которая удовлетворяет условию минимальности:

$$-\infty < I(u_{\text{gr}}^2) \leq I(w) \quad (-\infty < I(u_{\text{gr}}^1) \leq I(w))$$

для любой другой критической точки $w \in W \setminus \{0\}$ типа (0) (типа (-1)) этого функционала.

Непосредственно из теоремы 2.11 и определения 2.9 вытекает

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть функционал $I(u)$ является четным и выполняется условие RD.0. Предположим, что существует решение $(s_0^1, v_0^1) \in \Sigma^1$ ($(s_0^2, v_0^2) \in \Sigma^2$) задачи (2.19) при $j = 1$ ($j = 2$). Тогда точки $u_{\text{gr}}^{+,1} = s_0^1 v_0^1$ и $u_{\text{gr}}^{-,1} = -s_0^1 v_0^1 \in W \setminus \{0\}$ ($u_{\text{gr}}^{+,2} = s_0^2 v_0^2$ и $u_{\text{gr}}^{-,2} = -s_0^2 v_0^2 \in W \setminus \{0\}$) являются основными состояниями типа (-1) (типа (0)) функционала I .

Более того, если дополнительно известно, что функционал I не имеет критических точек $w \in W \setminus \{0\}$ таких, что $(w/\|w\|, \|w\|) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \setminus (\bar{\Sigma}^1 \cup \bar{\Sigma}^2)$, и $\hat{I}^1 \leq \hat{I}^2$ ($\hat{I}^2 \leq \hat{I}^1$), то $u_0^1 = s_0^1 v_0^1$ ($u_0^2 = s_0^2 v_0^2$) является основным состоянием функционала I .

Здесь и в дальнейшем $\bar{\Sigma}^j$ обозначают сильные замыкания в $\mathbb{R}^+ \times S^1$ множеств Σ^j , $j = 1, 2$, где $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ – компактификация $\mathbb{R}^+$. При этом полагаем $\partial\Sigma^j =: \bar{\Sigma}^j \setminus \Sigma^j$, $j = 1, 2$.

2) *Спектральный анализ по проективной процедуре расслоений.* Другим важным свойством проективной процедуры является то, что она позволяет конструктивно выделять априорные бифуркационные точки. Действительно, рассмотрим семейство функционалов I_μ , $\mu \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Предположим, что при каждом $\mu \in (a, b)$ функционал I_μ удовлетворяет условию RD.0. Тогда согласно процедуре проективного расслоения при каждом $\mu \in (a, b)$ можно определить представления $\tilde{I}_\mu$ на $\mathbb{R}^+ \times S^1$ и $\tilde{I}_\mu$ на Γ_1 и выделить множества Σ_μ^j при $j = 1, 2$. По теореме 2.11 если при $\mu \in (a, b)$ существует решение $(s_\mu^j, v_\mu^j) \in \Sigma_\mu^j$ минимизационной проблемы (2.19) при $j = 1$ ($j = 2$), то $u_\mu = s_\mu^j v_\mu^j \in W$ является невырожденной по проективной процедуре критической точкой функционала $I_\mu(u)$. Особым является случай, когда инфимум (s_μ^j, v_μ^j) в (2.19) принадлежит множеству $\partial\Sigma_\mu^j$ при $j = 1, 2$. В общей ситуации нельзя утверждать, что такое решение является критическим для функционала $\tilde{I}_\mu$. Однако если такая точка является критической, то она будет вырожденной по проективной процедуре и, следовательно, может быть бифуркационной точкой для ветви основных состояний функционала $I_\mu(u)$. Таким образом, границы $\partial\Sigma_\mu^j$ при $j = 1, 2$ представляют собой множества возможных (априорных) бифуркационных точек функционала $I_\mu(u)$.

Приведем некоторую схему исчисления априорных бифуркационных значений, которую мы именуем *спектральным анализом относительно проективной процедуры расслоений*. На данном этапе термин “бифуркация” нами понимается в смысле проективной процедуры, т.е. точка (μ_0, u_{μ_0}) называется *бифуркационной*, если u_{μ_0} является вырожденной критической точкой по проективной процедуре. Пусть $j = 1, 2$. Условия разрешимости относительно параметра $\mu \in \mathbb{R}$

$$\delta_\mu^j = \delta_\mu^j(\Sigma_\mu^j) := \partial\Sigma_\mu^j \neq \emptyset, \quad j = 1, 2,$$

назовем *системами уравнений разрешимости первого порядка для критических точек типа (0) и типа (−1) относительно проективной процедуры соответственно*. Иногда спектральный анализ удобно начать с исследования более простого условия

$$\delta_\mu =: \{(s, v) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times S^1 \mid Q_\mu(s, v) = 0, L_\mu(s, v) = 0\} \neq \emptyset,$$

которое мы назовем *единой системой уравнений разрешимости первого порядка*. Легко заметить, что $\delta_\mu \cap \bar{\Sigma}_\mu^j \subseteq \delta_\mu^j$ при $j = 1, 2$. Предположим, что определена декомпозиция $\delta_\mu^j = \delta_\mu^{j,u} \cup \delta_\mu^{j,d}$, где

$$\delta_\mu^{j,u} = \{(t_0, v_0) \in \delta_\mu^j \mid \tilde{I}(t_0, v_0) > \hat{I}^j\} \quad \text{и} \quad \delta_\mu^{j,d} = \delta_\mu^j \setminus \delta_\mu^{j,u}. \quad (2.22)$$

В дальнейшем

$$\sigma^j := \{\mu \in \mathbb{R} : \delta_\mu^j \neq \emptyset\} \equiv \{\mu \in \mathbb{R} : \Sigma_\mu^j \neq \emptyset\}, \quad j = 1, 2,$$

будем называть *характеристическими условиями*, а множества

$$\sigma^{j,u} := \{\mu \in \mathbb{R} : \delta_\mu^{j,u} \neq \emptyset\}, \quad j = 1, 2, \quad (2.23)$$

$$\sigma^{j,d} := \{\mu \in \mathbb{R} : \delta_\mu^{j,d} \neq \emptyset\}, \quad j = 1, 2, \quad (2.24)$$

будем называть *верхними характеристическими и остаточными характеристическими условиями первого порядка* соответственно. Рассмотрим крайние точки этих характеристических множеств при $j = 1, 2$:

$$\mu_{\inf}^j = \inf\{\sigma^j\}, \quad \mu_{\sup}^j = \sup\{\sigma^j\}, \quad (2.25)$$

$$\mu_{d,\inf}^j = \inf\{\sigma^{j,d}\}, \quad \mu_{d,\sup}^j = \sup\{\sigma^{j,d}\}. \quad (2.26)$$

Здесь мы полагаем

$$\mu_{d,\inf}^j = +\infty, \quad \mu_{d,\sup}^j = +\infty \quad \text{при } \sigma^{j,d} = \emptyset. \quad (2.27)$$

Легко видеть, что $\mu_{\inf}^j \leq \mu_{d,\inf}^j \leq \mu_{d,\sup}^j \leq \mu_{\sup}^j$ при условии $\sigma^j \neq \emptyset$, $j = 1, 2$.

Назовем точки $\mu_{\inf}^j$, $\mu_{d,\inf}^j$, $\mu_{d,\sup}^j$, $\mu_{\sup}^j$ при $j = 1, 2$ *характеристическими значениями первого порядка по проективной процедуре*.

Несложно доказывается следующая лемма о необходимых условиях для характеристических значений $\mu_{\inf}^j$, $\mu_{d,\inf}^j$, $\mu_{d,\sup}^j$, $\mu_{\sup}^j$ при $j = 1, 2$ быть бифуркационными относительно проективного расслоения.

ЛЕММА 2.14. Пусть функционал $I_\mu(u) \in C^1(W \setminus \{0\})$ при $\mu \in \mathbb{R}$ является четным и удовлетворяет условию RD.0. Пусть $j = 1, 2$. Предположим, что $\mu_{\inf}^j < \mu_{d,\inf}^j$ ($\mu_{d,\sup}^j < \mu_{\sup}^j$) и при $\mu \in (\mu_{\inf}^j, \mu_{d,\inf}^j)$ ($\mu \in (\mu_{d,\sup}^j, \mu_{\sup}^j)$) существует такая точка $(s_\mu^j, v_\mu^j) \in \bar{\Sigma}_\mu^j$, что $\tilde{I}_\mu(s_\mu^j, v_\mu^j) = \hat{I}_\mu^j$.

Тогда $u_\mu^j = s_\mu^j v_\mu^j$ есть критическая точка функционала I_μ , являющаяся невырожденной относительно проективной процедуры.

§ 3. О существовании критических точек функционала (1.1)

В этом параграфе процедуру тривиального расслоения применим к исследованию задачи существования критических точек функционала (1.1). Сначала, используя эту процедуру, мы конструктивно введем соответствующие (2.19) минимизационные проблемы с навязанными ограничениями. Затем вычислим априорные бифуркационные значения относительно параметра $\lambda \in \mathbb{R}$. И в заключение докажем теорему о существовании критических точек функционала (1.1). Отметим, что впервые метод расслоений при доказательстве существования критических точек (1.1) был применен в работе [5].

3.1. Спектральный анализ относительно проективной процедуры критических точек функционала (1.1). Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим соболевское пространство $W \equiv W_0^{1,p}$, $p > 1$, заданное как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_W = \left(\int |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad (3.1)$$

где $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_N)$.

Непосредственно проверяется, что норма (3.1) при $p \in (1, \infty)$ есть функционал класса C^1 на W . Так что определено тривиальное расслоение $\mathcal{T} = (\mathbb{R}^+ \times S^1, S^1, (\mathbb{R}^+, \times), p_r)$.

Рассмотрим на W функционал I_λ , заданный по формуле (1.1). Введем следующие обозначения:

$$T(u) = \int |\nabla u|^p dx, \quad G(u) = \int |u|^p dx, \quad F(u) = \int f(x)|u|^\gamma dx, \quad (3.2)$$

$$H_\lambda(u) = T(u) - \lambda G(u), \quad u \in W. \quad (3.3)$$

Тогда

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p} H_\lambda(u) - \frac{1}{\gamma} F(u), \quad u \in W. \quad (3.4)$$

Поскольку $1 < p < \gamma < p^*$, выполняются условия (1.2) и $f \in C(\overline{\Omega})$, то, как легко видеть, $I_\lambda \in C^1(W)$.

Рассмотрим тривиальное представление $\tilde{I}_\lambda(s, u)$ в $\mathbb{R}^+ \times S^1$ функционала I_λ :

$$\tilde{I}_\lambda(s, v) = \frac{1}{p} s^p H_\lambda(v) - \frac{1}{\gamma} s^\gamma F(v), \quad (s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1. \quad (3.5)$$

Поскольку справедливо (1.2) и $f \in C(\overline{\Omega})$, то

$$\text{при } p > 1, \lambda \in \mathbb{R} \text{ функционал (1.1) удовлетворяет условию RD.0.} \quad (3.6)$$

Непосредственно вычисляем:

$$Q(s, v) = \frac{\partial}{\partial s} \tilde{I}_\lambda(s, v) = s^{p-1} (H_\lambda(v) - s^{\gamma-p} F(v)), \quad (3.7)$$

$$L(s, v) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \tilde{I}_\lambda(s, v) = s^{p-2} ((p-1)H_\lambda(v) - (\gamma-1)s^{\gamma-p} F(v)), \quad (3.8)$$

где $s \in \mathbb{R}^+$, $v \in S^1$. Отсюда вытекает

$$\Sigma_\lambda^1 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid (H_\lambda(v) - s^{\gamma-p} F(v)) = 0, \\ ((p-1)H_\lambda(v) - (\gamma-1)s^{\gamma-p} F(v)) < 0\}, \quad (3.9)$$

$$\Sigma_\lambda^2 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid (H_\lambda(v) - s^{\gamma-p} F(v)) = 0, \\ ((p-1)H_\lambda(v) - (\gamma-1)s^{\gamma-p} F(v)) > 0\}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим единую систему уравнений разрешимости первого порядка: при $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H_\lambda(v) - s^{\gamma-p} F(v) &= 0, \\ (p-1)H_\lambda(v) - (\gamma-1)s^{\gamma-p} F(v) &= 0, \quad (s, v) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times S^1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Легко видеть, что данная система распадается на следующие подсистемы:

$$\chi_{0,\lambda} = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid H_\lambda(v) = 0, s = 0\}, \quad (3.12)$$

$$\chi_{0,0,\lambda} = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid H_\lambda(v) = 0, F(v) = 0\}. \quad (3.13)$$

Отсюда находим следующие характеристические значения λ_1, λ_1^0 :

$$\lambda_1 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \in S^1: H_\lambda(v) = 0\}, \quad (3.14)$$

$$\lambda_1^0 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \in S^1: H_\lambda(v) = 0, F(v) = 0\}. \quad (3.15)$$

Достижимым минимумом $0 < \lambda_1 < \infty$ в (3.14) является первое собственное значение оператора $-\Delta_p$ в Ω с граничными условиями Дирихле:

$$-\Delta_p \phi_1 = \lambda_1 |\phi_1|^{p-2} \phi_1, \quad (3.16)$$

$$\phi_1|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.17)$$

Хорошо известно (см. [18]), что λ_1 является простым и изолированным и что соответствующая собственная функция (слабое решение задачи (3.16), (3.17)) положительна, т.е. $\phi_1 > 0$ на Ω , при этом $\phi_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap W$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Существование же решения задачи (3.15) зависит от конкретно исследуемых функционалов, в частности от свойств $F(v)$. Отметим, что если $F(\phi_1) = 0$, то очевидным образом $\lambda_1^0 = \lambda_1$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega^- &= \{x \in \Omega \mid f^-(x) \neq 0\}, \quad \Omega^+ = \{x \in \Omega \mid f^+(x) \neq 0\}, \\ \Omega_0 &= \Omega \setminus (\Omega^- \cup \Omega^+), \quad \Omega_0^+ = \Omega \setminus (\Omega^-). \end{aligned}$$

Поскольку $f \in C(\overline{\Omega})$, то Ω^- , Ω^+ и $\Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$ являются открытыми областями. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие.

$\partial\Omega$. Лебегова мера множеств $\partial\Omega^-$, $\partial\Omega^+$, $\partial\Omega_0$ равна нулю.

Легко заметить, что тогда, если $\Omega_0 \neq \emptyset$ и $f^+ = 0$ или $f^- = 0$ (т.е. при $f(x) \leq 0$, $x \in \Omega$, или $f(x) \geq 0$, $x \in \Omega$), константа λ_1^0 в (3.15) совпадает со значением

$$\lambda_1(\Omega_0) =: \inf \left\{ \frac{\int |\nabla u|^p dx}{\int |u|^p dx} \mid v \in W_p^{1,*}(\Omega_0) \right\}, \quad (3.18)$$

где $W_p^{1,*}(\Omega_0) = \{v \in W_p^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ п.в. на } \Omega \setminus \Omega_0^+\}$ — замкнутое подпространство $W_p^1(\Omega)$. Существование неотрицательного решения $\phi_1^0 =: \phi_1(\Omega_0) \in W_p^{1,*}(\Omega_0)$ задачи (3.18) доказывается хорошо известными способами [18], [17]. Аналогичный результат можно привести и при не столь сильных ограничениях на функцию f .

Однако нам удобнее это сделать после анализа соответствующих для (1.1) систем уравнений разрешимости первого порядка для критических точек типа (0) и типа (-1).

Отметим, что в областях Σ_λ^1 , Σ_λ^2 переменные s и v разделяются так, что

$$\Sigma_\lambda^1 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid s = s_1(v), H_\lambda(v) > 0, F(v) > 0\}, \quad (3.19)$$

$$\Sigma_\lambda^2 = \{(s, v) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid s = s_2(v), H_\lambda(v) < 0, F(v) < 0\}, \quad (3.20)$$

где

$$s_1(v) = \left(\frac{H_\lambda(v)}{F(v)} \right)^{1/(\gamma-p)}, \quad s_2(v) = \left(\frac{|H_\lambda(v)|}{|F(v)|} \right)^{1/(\gamma-p)}. \quad (3.21)$$

Таким образом, рассматриваемый случай (1.1) является точно разрешимым. В связи с этим имеет смысл выделить следующие множества:

$$\Theta_\lambda^1 = \{v \in S^1 \mid H_\lambda(v) > 0, F(v) > 0\}, \quad (3.22)$$

$$\Theta_\lambda^2 = \{v \in S^1 \mid H_\lambda(v) < 0, F(v) < 0\}. \quad (3.23)$$

Так что в силу (3.21) будем иметь

$$\tilde{J}_\lambda(s^1(v), v) := J_\lambda^1(v) = \frac{(H_\lambda(v))^{\gamma/(\gamma-p)}}{(F(v))^{p/(\gamma-p)}}, \quad v \in \Theta_\lambda^1, \quad (3.24)$$

$$\tilde{J}_\lambda(s^2(v), v) := J_\lambda^2(v) = -\frac{|H_\lambda(v)|^{\gamma/(\gamma-p)}}{|F(v)|^{p/(\gamma-p)}}, \quad v \in \Theta_\lambda^2. \quad (3.25)$$

Отметим, что

$$J_\lambda^1(v) \geq 0, \quad v \in \Theta_\lambda^1, \quad J_\lambda^2(v) \leq 0, \quad v \in \Theta_\lambda^2. \quad (3.26)$$

Несложный анализ (3.22), (3.23) с учетом (3.26) позволяет выделить соответствующие верхние и остаточные характеристические условия

$$\delta_\lambda^{1,d} = \{v \in S^1 \mid H_\lambda(v) = 0, F(v) \geq 0\}, \quad \delta_\lambda^{1,u} = \partial\Theta_\lambda^1 \setminus \delta_\lambda^{1,d}, \quad (3.27)$$

$$\delta_\lambda^{2,d} = \{v \in S^1 \mid H_\lambda(v) \leq 0, F(v) = 0\}, \quad \delta_\lambda^{2,u} = \partial\Theta_\lambda^2 \setminus \delta_\lambda^{2,d}. \quad (3.28)$$

Здесь, как и выше в определении $\partial\Sigma_\lambda^j$, граница $\partial\Theta_\lambda^j$ есть разность $\overline{\Theta}_\lambda^j$ и Θ_λ^j . При этом важно отметить, что $\overline{\Theta}_\lambda^j$ определяется как замыкание Θ_λ^j в сильной топологии W .

Из условия (3.27) вытекает следующая формула для характеристического значения $\lambda_{d,\inf}^1$ (обозначаемого в дальнейшем λ_1^*):

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &:= \lambda_{d,\inf}^1 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists v \in S^1: H_\lambda(v) = 0, F(v) \geq 0\} \\ &= \inf\left\{ \frac{\int |\nabla v|^p dx}{\int |v|^p dx} \mid v \in S^1: F(v) \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Легко видеть, что

$$F(\phi_1) \geq 0 \implies \lambda_1^* = \lambda_1. \quad (3.30)$$

Для исчисления точек $\lambda_{d,\inf}^2$ заметим, что если $H_\lambda(v) \leq 0$, $v \in S^1$, то найдется такое $\delta \geq 0$, что $H_{\lambda-\delta}(v) = 0$. Отсюда, из (3.27) и (3.28) вытекает, что

$$F(\phi_1) < 0 \implies \lambda_{d,\inf}^2 = \lambda_1^0 = \lambda_1^* > \lambda_1. \quad (3.31)$$

Таким образом, спектральный анализ позволяет выделить два характеристических значения λ_1 и λ_1^* . Нам достаточно описания λ_1 посредством хорошо изученной вариационной задачи Дирихле (3.18) при $\Omega_0 = \Omega$. Следующая лемма дает такое описание для значения λ_1^* .

ЛЕММА 3.1. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$, функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$. Предположим, что $\Omega_0^+ \neq \emptyset$. Тогда:

- 1) при $\lambda_1 \leq \lambda_1^* < \infty$ существует $\phi_1^* \in W \setminus 0$, доставляющее минимум в (3.29), так что $F(\phi_1^*) \geq 0$, более того $\phi_1^* \geq 0$;
- 2) если при этом $f \leq 0$ при $x \in \Omega$, то $\phi_1^* = \phi_1^0(\Omega_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в приложении.

Докажем теперь следующую лемму о характеристических условиях, соответствующих (1.1).

ЛЕММА 3.2. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$, функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$.

1. Предположим, что $f^+ \neq 0$. Тогда:
 - а) $\lambda_1^* < \infty$, при этом если $F(\phi_1) \geq 0$, то $\lambda_1 = \lambda_1^*$;
 - б) при $\lambda \leq \lambda_1^*$ множество Θ_λ^1 не является пустым, а при $\lambda < \lambda_1^*$ множество Θ_λ^1 замкнуто в слабой топологии W и $\delta_\lambda^{1,d} = \emptyset$.
2. Пусть $F(\phi_1) < 0$. Тогда:
 - а) $\lambda_1 < \lambda_1^*$, при этом если $\Omega_0^+ \neq \emptyset$, то $\lambda_1 < \lambda_1^* < \infty$;
 - б) при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*]$ множество Θ_λ^2 не является пустым, а при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*)$ множество Θ_λ^2 замкнуто в слабой топологии W и $\delta_\lambda^{2,d} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1,а). Пусть $f^+ \neq 0$. Тогда найдется такое $\psi \in W$, для которого $F(\psi) > 0$. Следовательно, множество допустимых функций в (3.29) непусто, и поэтому $\lambda_{d,\inf}^1 < \infty$. Отсюда из (3.30) и (3.31) получаем, что $\lambda_1^* < \infty$. Вторая часть утверждения 1,а) следует из (3.30). Аналогично доказывается утверждение 2,а).

Доказательства утверждений 1,б) и 2,б) аналогичны. Приведем, например, доказательство утверждения 2,б). Предположим, что $F(\phi_1) < 0$. Тогда поскольку $H_\lambda(\phi_1) < 0$ при $\lambda_1 < \lambda$, то по определению (3.23) имеем $\phi_1 \in \Theta_\lambda^2$. Пусть $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*)$. Покажем, что $\bar{\Theta}_\lambda^2$ замкнуто в слабой топологии W . Пусть задана последовательность $\{v^i\} \subset \bar{\Theta}_\lambda^2$. Предположим, что $v^i \rightharpoonup v$ слабо в W при $i \rightarrow \infty$ для некоторого $v \in W$. Отсюда несложно доказывается, что для некоторой подпоследовательности (обозначаемой снова $\{v^i\}$) мы имеем также $v^i \rightarrow v$ в L_γ при $\gamma < p^*$. Тогда при $i \rightarrow \infty$ выполнено

$$H_\lambda(v) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_\lambda(v^i) \leq 0, \quad F(v^i) \rightarrow F(v), \quad (3.32)$$

при этом $v \neq 0$. Действительно, предположим, что $v = 0$. Тогда $G(v_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда поскольку $H_\lambda(v_i) = T(v_i) - \lambda G(v_i)$ и $T(v_i) = 1$, $j = 1, 2, \dots$, то $H_\lambda(v_i) > 0$ при достаточно больших i . Противоречие.

Поскольку в силу (3.32) $H_\lambda(v) \leq 0$, то из (3.30), (3.31) и ввиду (3.29) при $\lambda < \lambda_1^*$ необходимо вытекает условие $F(v) < 0$. Следовательно, принимая во внимание (3.23), имеем, что $v \in \overline{\Theta_\lambda^2}$. Доказательство остальной части утверждения 2, б) не вызывает сложности. Лемма доказана.

Отметим, в [8] доказано, что при условии $F(\phi_1) > 0$ не существует неотрицательных критических точек функционала (1.1) при $\lambda > \lambda_1$.

3.2. Теорема о существовании критических точек функционала (1.1). Согласно процедуре проективного расслоения, учитывая, что данный случай точно разрешим, будем рассматривать следующие две минимизационные проблемы:

$$\hat{J}_\lambda^j = \inf\{J_\lambda^j(v) \mid v \in \Theta_\lambda^j\}, \quad j = 1, 2. \quad (3.33)$$

Следующая теорема является основной в этом пункте.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$, функция $f \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$.

1. Предположим, что $f^+ \neq 0$. Тогда $\lambda_1^* < \infty$ и при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$:

а) существует основное состояние u_λ^1 типа (-1) функционала (1.1), при этом $u_\lambda^1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$;

б) во множестве $\{u_\lambda^1\}$ основных состояний типа (-1) можно выделить два подмножества положительных $u_\lambda^{(+),1}$ и отрицательных $u_\lambda^{(-),1}$ функций таких, что $u_\lambda^{(+),1} = -u_\lambda^{(-),1}$.

2. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$. Тогда $\lambda_1 < \lambda_1^*$ и при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*)$:

а) существует основное состояние u_λ^2 типа (0) функционала (1.1), при этом $u_\lambda^2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$;

б) во множестве $\{u_\lambda^2\}$ основных состояний типа (0) можно выделить два подмножества положительных $u_\lambda^{(+),2}$ и отрицательных $u_\lambda^{(-),2}$ функций таких, что $u_\lambda^{(+),2} = -u_\lambda^{(-),2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1. По теореме 2.11 для доказательства существования решения $u_\lambda^1 \in W$ достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.4. Предположим, что $f^+ \neq 0$. Тогда при каждом $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$ существует решение $v_\lambda \in \Theta_\lambda^1$ задачи (3.33) при $j = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 1, а) леммы 3.2 имеем $\Theta_\lambda^1 \neq \emptyset$ при $\lambda < \lambda_1^*$. Поэтому $\hat{J}_\lambda^1 < +\infty$ при $\lambda < \lambda_1^*$. По утверждению 1, б) леммы 3.2 имеем $\delta_\lambda^{1,d} = \emptyset$ при $\lambda < \lambda_1^*$. Отсюда $0 < \hat{J}_\lambda^1$ при $\lambda < \lambda_1^*$. Таким образом, в задаче (3.33) при $j = 1$ существует инфимум. Для доказательства леммы остается показать, что существует решение $v_\lambda \in \Sigma_\lambda^1$, доставляющее этот минимум. Пусть $\{v^i\} \subset \Sigma_\lambda^1$ — минимизирующая последовательность для (3.33):

$$J_\lambda^1(v^i) \rightarrow \hat{J}_\lambda^1, \quad i \rightarrow \infty.$$

Поскольку $v^i \in S_1$, то эта последовательность ограничена в W . Отсюда из рефлексивности банахова пространства W и из компактности вложения $W \subset L_\gamma$ при $\gamma < p^*$ вытекает существование такой подпоследовательности в $\{v^i\}$ (снова обозначаемой $\{v^i\}$), что при $i \rightarrow \infty$

$$v^i \rightharpoonup v_\lambda \text{ слабо в } W, \quad v^i \rightarrow v_\lambda \text{ в } L_\gamma \quad (3.34)$$

для некоторого $v_\lambda \in W$. Тогда, во-первых,

$$H_\lambda(v_\lambda) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_\lambda(v^i), \quad (3.35)$$

а во-вторых, поскольку по условию $f \in C(\bar{\Omega})$ и $1 < \gamma < p^*$, то

$$F(v^i) \rightarrow F(v_\lambda) \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (3.36)$$

Тогда $J_\lambda^1(v_\lambda) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} J_\lambda^1(v^i) = \hat{J}_\lambda^1$. Отсюда, учитывая, что по утверждению 1,b) леммы 3.2 множество $\bar{\Theta}_\lambda^1$ замкнуто в слабой топологии W и $\delta_\lambda^{1,d} = \emptyset$, выводим, что в (3.35) возможно только равенство. Следовательно, v_λ есть решение (3.33). Лемма доказана.

По теореме 2.13 найденное решение $u_\lambda^1 = s_\lambda^1 v_\lambda$ и является основным состоянием типа (-1) функционала I_λ .

Функция $u_\lambda^1 \in W \setminus 0$, будучи критической точкой функционала (1.1), является также и слабым решением краевой задачи (1.3), (1.4). Отсюда, используя метод разворачивания (bootstrap argument [1]) и применяя теоремы вложения Соболева, выводим, что $u_\lambda^1 \in W_q^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ при $2 \leq q < \infty$. Далее, используя регуляризационные результаты [19], [20], получим, что $u_\lambda^1 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$. Таким образом, утверждение 1,a) теоремы доказано.

Докажем 1,b). Во множестве $\{v_\lambda\}$ точек, доставляющих инфимум в (3.33), можно выделить неотрицательные функции $v_\lambda \geq 0$. Действительно, пусть инфимум в (3.33) достигается на некоторой точке v_λ , тогда в силу четности функционалов $J_\lambda^j(v)$, $H_\lambda(v)$, $F(v)$ он достигается и на $|v_\lambda| \geq 0$. Таким образом, существует неотрицательное решение $v_\lambda \geq 0$ проблемы (3.33), и, следовательно, существуют неотрицательное $u_\lambda^{(+),1} \geq 0$ и неположительное $u_\lambda^{(-),1} = -u_\lambda^{(+),1}$ основные состояния типа (-1) функционала (1.1). Эти функции являются также и слабым решением краевой задачи (1.3), (1.4). Отсюда и из строгого принципа максимума [21] следует, что $u_\lambda^{(+),1} > 0$, $u_\lambda^{(-),1} < 0$. Утверждение 1,b) теоремы доказано.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1. Теорема доказана.

§ 4. Ветви основных состояний

Поскольку теорема о единственности решений задачи (1.3), (1.4) не доказана, доказательство того, что найденные выше решения u_λ^1 и u_λ^2 образуют ветви в общепринятом смысле, на данном этапе представляется затруднительным. Однако использование процедуры проективного расслоения вместе с методом динамической минимизации с навязанными ограничениями (см. [7]) позволяет получить некоторые новые качественные результаты в этом направлении. В этом параграфе

докажем, что основные состояния u_λ^1 и u_λ^2 функционала (1.1) образуют так называемые *ветви относительно проективной процедуры*.

Приведем сначала необходимые определения. Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство. Будем обозначать через $\{w\}$ подмножество в X , т.е. $\{w\} \subset X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $\{w(\cdot)\}: (a, b) \rightarrow X$ – некоторое многозначное отображение, где X – хаусдорфово топологическое пространство. Будем говорить, что это отображение *непрерывно в точке* $\lambda \in (a, b)$, если для любой последовательности λ^i такой, что $\lambda^i \rightarrow \lambda$ при $i \rightarrow \infty$, и любой последовательности $w_{\lambda^i} \in \{w_{\lambda^i}\}$ найдутся такое $w_\lambda \in \{w_\lambda\}$ и такая подпоследовательность (снова обозначаемая w_{λ^i}), что имеет место сходимость в X : $w_{\lambda^i} \rightarrow w_\lambda$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\{w(\cdot)\}: (a, b) \rightarrow X$ *непрерывно на* (a, b) , если оно непрерывно в каждой точке $\lambda \in (a, b)$.

Дадим определение ветви критических точек относительно проективной процедуры расслоения. В случае четных функционалов, если интересоваться только существованием и поведением ветвей вне точки $\{0\} \in W$, на первоначальном этапе достаточно использовать тривиальное расслоение. Однако, поскольку в дальнейшем мы намерены исследовать асимптотику ветвей именно в точке $\{0\} \in W$, приведем сразу построение ветвей критических функций в терминах σ -расслоения. Для этого дадим сначала необходимые определения.

Пусть I_λ – семейство функционалов, заданных на банаховом пространстве W при $\lambda \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $I_\lambda \in C^1(W) \cap C^r(W \setminus \{0\})$ при каждом $\lambda \in (a, b)$ и что $I_\lambda(u) \in C(a, b)$ при каждом $u \in W$. Рассмотрим главное расслоение $\mathcal{P} = (\Gamma, P(W), (\mathbb{R} \setminus 0, \times), p_\Gamma)$, σ -расслоение $\mathcal{P}_1 = (\Gamma_1, P(W), p_{\Gamma_1})$ и представление $\bar{I}_\lambda$ на Γ_1 .

Пусть задано отображение $\omega(\cdot): (a, b) \rightarrow \Gamma_1$. Тогда из локальной тривиальности $\mathcal{P}_1$ для любого $\omega_{\lambda_0} \in \Gamma_1$ определены локально тривиальные координаты в окрестности этой точки, а именно существуют область $U \subset P(W)$, $\omega_{\lambda_0} \in p_{\Gamma_1}^{-1}(U) \subset \Gamma_1$, и диффеоморфизм $\psi_U: p_{\Gamma_1}^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R} \times U$ такие, что для каждого $\omega_\lambda \in p_{\Gamma_1}^{-1}(U) \subset \Gamma_1$

$$\psi_U(\omega_\lambda) = (t_\lambda, \xi_\lambda) \in \mathbb{R} \times U. \quad (4.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Многозначное отображение $\{\omega(\cdot)\}: (a, b) \rightarrow \Gamma_1$ *образует ветвь относительно проективной процедуры* при почти всех $\lambda \in (a, b)$, если при каждом $\lambda_0 \in (a, b)$ найдется интервал $(a', b') \subseteq (a, b)$, содержащий λ_0 и такой, что в локально тривиальных координатах $(p_{\Gamma_1}^{-1}(U), \mathbb{R} \times U, \psi_U)$, где $\omega_{\lambda_0} \in p_{\Gamma_1}^{-1}(U)$, выполняются следующие два условия:

1) отображение $\pi_1(\psi_U(\{\omega(\cdot)\})) = \{t(\cdot)\}: (a', b') \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно и непрерывно при почти всех $\lambda \in (a, b)$;

2) многозначное отображение $\pi_2(\psi_U(\{\omega(\cdot)\})) = \{\xi(\cdot)\}: (a', b') \rightarrow P(W)$ непрерывно.

Легко видеть, что справедливость условий 1), 2) не зависит от выбора локально тривиальных координат $(p_{\Gamma_1}^{-1}(U), \mathbb{R} \times U, \psi_U)$.

В дальнейшем также будем использовать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Семейство $\{\omega_\lambda\} \subset \Gamma_1(\{u_\lambda\} \subset W)$ критических точек функционала $\bar{I}_\lambda(I_\lambda)$ образует ветвь по модулю значений функционала (ветвь по модулю значений), если отображение $\bar{I}_\lambda(\cdot)(\{\omega_\lambda(\cdot)\}): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($I_\lambda(\cdot)(\{u_\lambda(\cdot)\}): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$) однозначно и непрерывно.

Приступим теперь к доказательству существования ветвей критических точек функционала (1.1). Из результатов статьи [7] вытекает следующая лемма о локальном существовании ветвей критических точек по модулю значений функционала (1.1).

ЛЕММА 4.4. *Предположим, что на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ при каждом $\lambda \in (a, b)$ функционал (1.1) обладает основным состоянием $\{u_\lambda^1\}$ типа (-1) (основным состоянием $\{u_\lambda^2\}$ типа (0)). При этом $\hat{I}_\lambda^1 > \delta > 0$ ($\rho < \hat{I}_\lambda^2 < \delta_0 < 0$), $\lambda \in (a, b)$ для некоторого $\delta > 0$ (для некоторых $-\infty < \rho < \delta_0 < 0$). Тогда соответственно при $j = 1$ или $j = 2$ выполняется:*

- 1) *отображение $G(\{u_\lambda^j\})/|I_\lambda(\{u_\lambda^j\})|^{p/\gamma}$ однозначно при почти всех $\lambda \in (a, b)$ и монотонно возрастает по $\lambda \in (a, b)$;*
- 2) *функция $I_\lambda(\{u_\lambda^j\})$ по переменной $\lambda \in (a, b)$ непрерывна при всех $\lambda \in (a, b)$ и дифференцируема при почти всех $\lambda \in (a, b)$;*
- 3) *при почти всех $\lambda \in (a, b)$ справедливо тождество*

$$\frac{dI_\lambda(u_\lambda^j)}{d\lambda} = -\frac{1}{p}G(u_\lambda^j). \quad (4.2)$$

Здесь и далее, когда функционал $S: W \rightarrow \mathbb{R}$ принимает одно и то же значение при всех точках из $\{w\}$, будем использовать сокращенное обозначение $S(w) \equiv S(\{w\})$.

Напомним, что проективная процедура, примененная к (1.1), является точно разрешимой. В связи с этим важно отметить следующее. Рассмотрим отображения $s_\lambda^j: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2$, задаваемые по формулам (3.21). Тогда справедливо

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *В условиях леммы 4.4 отображения*

$$s_\lambda^j(\{b_1(u_\lambda^j)\}): \lambda \rightarrow s_\lambda^j(\{b_1(u_\lambda^j)\}), \quad j = 1, 2,$$

являются однозначными и непрерывными функциями при почти всех $\lambda \in (a, b)$.

Доказательство вытекает из леммы 4.4, соотношений (3.21) и из тождества

$$I_\lambda(u_\lambda) = (1/p - 1/\gamma)H_\lambda(u_\lambda) = (1/p - 1/\gamma)F(u_\lambda), \quad (4.3)$$

справедливого для любого решения u_λ краевой задачи (1.3), (1.4).

Отметим, что из четности функционала (1.1) и точной разрешимости проективного расслоения для (1.1) выполнено следующее: пусть ω_λ – критические точки функционала (1.1) типа (0) (типа (-1)) и в канонических локально тривиальных координатах $(p_\Gamma^{-1}(U), \mathbb{R} \times U, \psi_U)$, где $\omega_\lambda \in p_\Gamma^{-1}(U)$, справедлива замена переменных $\psi_U(\omega_\lambda) = (t_\lambda, p_\Gamma(\omega_\lambda)) \in \mathbb{R} \times U$; тогда при $\omega_\lambda \in p_\Gamma^{-1}(U)$ выполняется

$$|t_\lambda| = s_\lambda^2(\{b_1(p_\Gamma(\omega_\lambda))\}) \quad (|t_\lambda| = s_\lambda^1(\{b_1(p_\Gamma(\omega_\lambda))\})), \quad (4.4)$$

где отображения $s_\lambda^j: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2$, задаются по формулам (3.21).

При этом, учитывая предложение 2.4, имеем

$$\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda) = I_\lambda(t_\lambda p_{1,V,U}^{-1}(\xi_\lambda)) = \bar{I}_\lambda(|t_\lambda|, |p_{1,V,U}^{-1}(\xi_\lambda)|) \quad (4.5)$$

при $(t_\lambda, \xi_\lambda) \in \mathbb{R} \times U$, где $\omega_\lambda = \psi_{V,U}^{-1}(t_\lambda, \xi_\lambda) \in p_\Gamma^{-1}(U) \subset \Gamma_1$, $p_{1,V,U}^{-1}$ — диффеоморфизм из $U \subset P(W)$ в $V \subset S^1$.

Будем называть точку $\omega_0 = (u_0, p_1(u_0)) \in \Gamma \subset (W \setminus 0) \times P(W)$ *положительной* (отрицательной), если $u_0 = \text{pr}_1(\omega_0) > 0$ ($u_0 = \text{pr}_1(\omega_0) < 0$). При этом формула $\omega_0 = -\omega'_0$ будет означать, что $u_0 = \text{pr}_1(\omega_0) = -u'_0 = \text{pr}_1(\omega'_0)$ и $p_1(u_0) = \text{pr}_2(\omega_0) = p_1(u'_0) = \text{pr}_2(\omega'_0)$.

Докажем теперь теорему о существовании глобальных ветвей основных состояний по проективной процедуре.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$, функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$.

1. Предположим, что $f^+ \neq 0$. Тогда $\lambda_1^* < \infty$ и при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$:

а) множество $\{\omega_\lambda^1\}$ основных состояний типа (-1) функционала (1.1) образует ветвь по модулю проективной процедуры и по модулю значений функционала, при этом функция $\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^1): \lambda \mapsto \bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^1)$ является положительной при всех $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$ и монотонно убывает; более того, при почти всех $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$ выполняется тождество (4.2);

б) во множестве $\{\omega_\lambda^1\}$ можно выделить две ветви основных состояний типа (-1) по модулю проективной процедуры и по модулю значений функционала: положительную $\{\omega_\lambda^{(+),1}\}$ и отрицательную $\{\omega_\lambda^{(-),1}\}$.

2. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$. Тогда $\lambda_1 < \lambda_1^*$ и при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*)$:

а) множество $\{\omega_\lambda^2\}$ основных состояний типа (0) функционала (1.1) образует ветвь по модулю проективной процедуры и по модулю значений функционала, при этом функция $\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^2): \lambda \mapsto \bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^2)$ является отрицательной, конечной при всех $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*)$ и монотонно убывает; более того, при почти всех $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^*)$ выполняется тождество (4.2);

б) во множестве $\{\omega_\lambda^2\}$ можно выделить две ветви основных состояний типа (0) по модулю проективной процедуры и по модулю значений функционала: положительную $\{\omega_\lambda^{(+),2}\}$ и отрицательную $\{\omega_\lambda^{(-),2}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждений 1 и 2 аналогичны. Приведем, например, доказательство утверждения 1.

Доказательство того, что $\lambda_1^* < \infty$, вытекает из леммы 3.2. Существование основных состояний типа (-1) $\{\omega_\lambda^1\}$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$ следует из теоремы 3.3. Из (3.29)–(3.31) вытекает, что $H_\lambda(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1)) > 0$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$. Далее, рассуждая от противного, выводим, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что будет выполнено $H_\lambda(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1)) > \delta > 0$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^* - \epsilon]$. Отсюда и из (4.3) вытекает положительность $\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^1)$ и выполнение необходимых условий леммы 4.4, откуда следует, что основные состояния типа (-1) $\{\omega_\lambda^1\}$ образуют ветви по модулю значений и что при почти всех $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$ выполняется тождество (4.2). Наконец, отсюда и в силу того, что $G(w) \geq 0$, $w \in W$, получаем монотонное убывание функции $\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^1)$ при возрастании λ .

Из следствия 4.5 и формулы (4.4) вытекает, что в канонических локально тривиальных координатах отображение $\{|t(\cdot)|\}: (-\infty, \lambda_1^*) \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно и непрерывно при почти всех $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$. Отсюда следует справедливость условия 1) определения 4.2.

Таким образом, для завершения доказательства утверждения 1 теоремы остается проверить условие 2) определения 4.2, т. е. доказать, следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Многозначное отображение $p_\Gamma(\{\omega_\lambda^1\}): (-\infty, \lambda_1) \rightarrow P(W)$ непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_0 \in (-\infty, \lambda_1)$. Рассмотрим произвольно выбранную последовательность λ^i , $i = 1, 2, \dots$, такую, что $\lambda^i \rightarrow \lambda_0$ при $i \rightarrow \infty$, и произвольную последовательность $p_\Gamma(\omega_{\lambda^i}^1)$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть $V_i \subset S^1$ таковы, что отображение $p_{1,V_i,U_i}: V_i \rightarrow U_i$ является диффеоморфизмом, и при этом $p_\Gamma(\omega_{\lambda^i}^1) \in U_i \subset P(W)$. Рассмотрим $v_i^1 = p_{1,V_i,U_i}^{-1}(p_\Gamma(\omega_{\lambda^i}^1))$. Эта последовательность ограничена в W . Отсюда так же, как и при доказательстве леммы 3.4, выводится, что существуют подпоследовательность (снова обозначаемая v_i^1) и предельная точка $v \in W$ такие, что $v_i^1 \rightarrow v$ слабо в W и $v_i^1 \rightarrow v$ в L_γ . При этом

$$H_{\lambda_0}(v) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda^i}(v_i^1), \quad F(v_i^1) \rightarrow F(v). \quad (4.6)$$

С другой стороны, ранее нами уже доказано, что $\{u_\lambda^1\}$ образуют ветви по модулю значений функционала (1.1), так что $I_\lambda(u_\lambda^1)$ непрерывно по λ . Отсюда и по формуле (4.3) непрерывны также и $H_\lambda(u_\lambda^1)$, $F(u_\lambda^1)$, и поэтому

$$H_{\lambda_0}(v_{\lambda_0}^1) = \lim_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^1), \quad F(v_{\lambda^i}^1) \rightarrow F(v_{\lambda_0}^1) \quad (4.7)$$

для некоторого $v_{\lambda_0}^1 = u_{\lambda_0}^1 / \|u_{\lambda_0}^1\|_W \in \{u_{\lambda_0}^1 / \|u_{\lambda_0}^1\|_W\}$. Отсюда и из (4.6)

$$H_{\lambda_0}(v) \leq H_{\lambda_0}(v_{\lambda_0}^1), \quad F(v) = F(v_{\lambda_0}^1) > 0. \quad (4.8)$$

Из последнего неравенства вытекает, во-первых, что $v \neq 0$, а во-вторых, учитывая (3.29)–(3.31), что $H_{\lambda_0}(v) > 0$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1^*)$. Тогда по определению (3.22) мы имеем $v \in \Theta_{\lambda_0}$. Рассуждая далее от противного, выводим, что $H_{\lambda_0}(v) = H_{\lambda_0}(v_{\lambda_0}^1)$ и что v есть решение (3.33) при $\lambda = \lambda_0$, $j = 1$. Отсюда вытекает сильная сходимость $v_{\lambda^i}^1 \rightarrow v$ при $i \rightarrow \infty$ в W . Далее, используя полученное, можно доказать, что имеется сильная сходимость $p_\Gamma(\omega_{\lambda^i}^1) = p_{1,V_i,U_i}(v_i^1) \rightarrow p_\Gamma(\omega) =: p_{1,V,U}(v)$ и что $p_\Gamma(\omega) \in \{p_\Gamma(\omega_{\lambda_0}^1)\}$, где $\omega_{\lambda_0}^1$ – основное состояние типа (-1) функционала (1.1). Таким образом, предложение 4.7, а следовательно, и утверждение 1,а) теоремы 4.6 доказаны. Доказательство утверждения 1,б) вытекает из утверждения 1,б) теоремы 3.3. Теорема 4.6 доказана.

§ 5. Асимптотика ветвей основных состояний в бифуркационных точках

В этом параграфе мы исследуем поведение ветвей основных состояний функционала (1.1) в априорных бифуркационных точках λ_1 и λ_1^* . При этом наше внимание будет обращено на доказательство свойства попарного рождения и уничтожения

ветвей критических точек функционала (1.1) в λ_1 и λ_1^* , что является, как известно [12], одним из необходимых условий общего положения в поведении ветвей критических точек.

Предварительно введем некоторые дополнительные определения и понятия. В этом параграфе будем рассматривать критические точки функционала представления $\bar{I}_\lambda(\omega)$ на многообразии Γ_1 . Наряду с этим будем рассматривать также одноточечное бикомпактное расширение $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ по Александрову [11] и $\bar{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \cup (\infty \times P(W))$. Пусть задана некоторая функция $\phi \in S^1$, $\phi \geq 0$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $\omega^0(\phi) = (0, p_1(\phi_1)) \in \Gamma_1$ и $\omega^\infty(\phi) = (\infty, p_1(\phi)) \in \Gamma_1 \cup (\infty \times P(W))$.

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что на некотором полуинтервале (a, λ_0) , $a < \lambda_0$ (либо на (λ_0, b) , $\lambda_0 < b$) существует многозначная ветвь критических точек $\{\omega_\lambda\} \subset \Gamma$, $\lambda \in (a, \lambda_0)$, функционала $\bar{I}_\lambda$. Рассмотрим такую однозвязанную окрестность $V \subset S^1$ точки $\phi \in V$, где определен диффеоморфизм $p_{1,V,U}: V \rightarrow U$ для некоторого $U \subset P(W)$. Пусть в канонических локально тривиальных координатах $\psi_{U,V}(\omega) = (\phi_{U,V}(\omega), p_\Gamma(\omega)) = (t, \xi) \in \mathbb{R} \times U$ (см. (2.1)) выполняется следующее: найдется такое $\delta(U) > 0$, что:

1°) $p_{\Gamma_1}(\omega_\lambda) \in U$ при $|\lambda - \lambda_0| < \delta(U)$;

2°) многозначная ветвь $\{\omega_\lambda\}$ локально в $p_{\Gamma_1}^{-1}(U)$ разделяется на две равномошные половины: $\{\omega_\lambda\} = \{\omega_{(+),\lambda}\} \cup \{\omega_{(-),\lambda}\}$, в том смысле, что

$$\phi_{U,V}(\omega_{(+),\lambda})\phi_{U,V}(\omega_{(-),\lambda}) < 0 \quad \text{при} \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta(U); \quad (5.1)$$

3°) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$

$$\phi_{U,V}(\omega_\lambda) = \phi_{U,V}(\omega_{(+),\lambda}) = \phi_{U,V}(\omega_{(-),\lambda}) \rightarrow 0 \quad (\infty), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \{p_{\Gamma_1}(\omega_\lambda)\} &= \{p_{\Gamma_1}(\omega_{(+),\lambda})\} \\ &= \{p_{\Gamma_1}(-), \omega_\lambda\} \rightarrow p_{\Gamma_1}(\omega^0(\phi)) \quad (p_{\Gamma_1}(\omega^\infty(\phi))). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Тогда при выполнении приведенных выше условий мы будем говорить, что при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ в точке $\omega^0(\phi)$ ($\omega^\infty(\phi)$) справедливо свойство *попарного рождения и уничтожения критических точек* $\{\omega_\lambda\}$, и символически записывать:

$$\{\omega_{(+),\lambda}\} \rightarrow \omega^0(\phi), \quad (\omega^\infty(\phi)) \leftarrow \{\omega_{(-),\lambda}\} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0. \quad (5.4)$$

При этом, если уже изначально известно существование двух отдельных ветвей критических точек $\{\omega_{(+),\lambda}\}$, $\{\omega_{(-),\lambda}\} \subset \Gamma_1$ и справедливы условия 1°)–3°), также будем говорить, что в точке $\omega^0(\phi)$ ($\omega^\infty(\phi)$) при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ выполняется свойство попарного рождения и уничтожения критических точек.

5.1. Асимптотика ветвей основных состояний в точке λ_1 . Рассмотрим $\omega^0(\phi_1) = (0, p_1(\phi_1)) \in \Gamma_1$, где $\phi_1 > 0$, $\|\phi_1\| = 1$, – решение задачи Дирихле (3.26), (3.27). Легко видеть, что эта точка является критической для функционала $\bar{I}_{\lambda_1}(\omega)$. Отметим, что в то же время ϕ_1 не является критической для I_{λ_1} .

Основной здесь является следующая

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$, функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$.

I. Предположим, что $F(\phi_1) > 0$. Тогда при $\lambda \uparrow \lambda_1$ ветвь основных состояний типа (-1) относительно проективной процедуры $\{\omega_\lambda^1\}$ функционала (1.1) в точке $\omega^0(\phi_1)$ обладает свойством попарного рождения и уничтожения критических точек:

$$\{\omega_{(+),\lambda}^1\} \rightarrow \omega^0(\phi_1) \leftarrow \{\omega_{(-),\lambda}^1\}. \quad (5.5)$$

Более того, существует предел $\bar{I}_\lambda(\omega_{(+),\lambda}^1) = \bar{I}_\lambda(\omega_{(-),\lambda}^1) \downarrow 0$.

II. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$. Тогда при $\lambda \downarrow \lambda_1$ ветвь основных состояний типа (0) относительно проективной процедуры $\{\omega_\lambda^2\}$ функционала (1.1) в точке $\omega^0(\phi_1)$ обладает свойством попарного рождения и уничтожения критических точек:

$$\{\omega_{(+),\lambda}^2\} \rightarrow \omega^0(p_1(\phi_1)) \leftarrow \{\omega_{(-),\lambda}^2\}. \quad (5.6)$$

Более того, существует предел $\bar{I}_\lambda(\omega_{(+),\lambda}^2) = \bar{I}_\lambda(\omega_{(-),\lambda}^2) \uparrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем I. Пусть $F(\phi_1) > 0$. Тогда $f^+ \neq 0$, и по лемме 3.2 мы имеем $\lambda_1 = \lambda_1^*$. Далее, по теореме 4.6 при $\lambda < \lambda_1$ существует ветвь основных состояний типа (-1) $\{\omega_\lambda^1\}$. Отсюда функция $v_\lambda^1 = b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1))$ является решением задачи (3.33) при $j = 1$. С другой стороны, поскольку $F(\phi_1) > 0$ и при этом $H_\lambda(\phi_1) > 0$, когда $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$, то $\{\phi_1\} \in \Theta_\lambda^1$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. Поэтому $J_\lambda^1(v_\lambda^1) \leq J_\lambda^1(\phi_1)$ при $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. Отсюда, поскольку $J_\lambda^1(\phi_1) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$, то

$$J_\lambda^1(\{b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1))\}) = J_\lambda^1(v_\lambda^1) \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

Далее, принимая во внимание, что по теореме 4.6 функция $\bar{I}_\lambda(\{\omega_\lambda^1\})$ монотонно убывает при $\lambda \rightarrow \lambda_1$, выводим из (5.7), что $\bar{I}_\lambda(\{\omega_\lambda^1\}) = J_\lambda^1(\{b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1))\}) \downarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$. Таким образом, последняя часть утверждения I доказана.

Докажем (5.5). Для этого сначала докажем, что имеется следующая сходимость в W :

$$\{v_\lambda^1\} \rightarrow \{\phi_1\} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_1, \quad (5.8)$$

где $v_\lambda^1 = b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1))$, $\{\phi_1\} = \phi_1 \cup (-\phi_1)$. Предположим противное, т.е. что (5.8) неверно. Тогда существуют такие последовательность λ^i ($\lambda^i \rightarrow \lambda_1$ при $i \rightarrow \infty$) и некоторое $\sigma > 0$, что

$$\|v_{\lambda^i}^1 - \{\phi_1\}\|_W > \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

что подразумевает выполнение следующих двух условий:

$$\|v_{\lambda^i}^1 - \phi_1\|_W > \sigma, \quad \|v_{\lambda^i}^1 - (-\phi_1)\|_W > \sigma, \quad i = 1, 2, \dots$$

Последовательность $v_{\lambda^i}^1$ ограничена в W , так как $v_{\lambda^i}^1 \in S_1$. Отсюда так же, как и при доказательстве леммы 3.4, выводится, что существует предельная точка $v \in$

W такая, что $v_{\lambda^i}^1 \rightarrow v$ слабо в W и $v_{\lambda^i}^1 \rightarrow v$ в L_γ , $2 \leq \gamma < p^*$, для некоторой последовательности $\lambda^i \rightarrow \lambda_1$ при $i \rightarrow \infty$. При этом будем иметь

$$H_{\lambda_1}(v) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^1), \quad F(v_{\lambda^i}^1) \rightarrow F(v). \quad (5.10)$$

Из соотношения (5.7) следует $H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^1) \rightarrow 0$. Отсюда несложно выводится, что

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^1) = 0. \quad (5.11)$$

Следовательно, $H_{\lambda_1}(v) \leq 0$. Однако $H_{\lambda_1}(w) \geq 0 \ \forall w \in W$, поэтому $H_{\lambda_1}(v) = 0$. Из (5.11) и сходимости $v_{\lambda^i}^1 \rightarrow v$ в L_p , учитывая, что $v_{\lambda^i}^1 \in S_1$, выводим, что $v \neq 0$, $v \in S_1$ и что имеет место сильная сходимость в W : $v_{\lambda^i}^1 \rightarrow v$ при $i \rightarrow \infty$. Принимая во внимание теперь, что $H_{\lambda_1}(v) = 0$, заключаем: $v \in \{\phi_1\}$. Но это противоречит предположению (5.9). Следовательно, справедливо (5.8).

Несложно вывести из доказанных сходимостей (5.7), (5.8), что

$$s_\lambda^1(\{b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1))\}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_1. \quad (5.12)$$

Без ограничения общности можно считать далее, что одна из предельных точек в (5.8) положительна, $\phi_1 > 0$. Пусть $V \subset S^1$ — односвязная окрестность точки $\phi_1 \in V$, где определен диффеоморфизм $p_{1,V,U}: V \rightarrow U$ для некоторого $U \subset P(W)$. Рассмотрим канонические локально тривиальные координаты $\psi_{U,V}(\omega) = (\phi_{U,V}(\omega), p_\Gamma(\omega)) = (t, \xi) \in \mathbb{R} \times U$. Тогда из (5.8) вытекает, что для некоторой последовательности $\omega_{\lambda^i}^1 \subset \{\omega_\lambda^1\}$ такой, что $\lambda^i \rightarrow \lambda_1$ при $i \rightarrow \infty$, будет выполняться $p_{1,V,U}^{-1}(p_{\Gamma_1}(\omega_{\lambda^i}^1)) \in V$ при достаточно больших i и $p_{1,V,U}^{-1}(p_{\Gamma_1}(\omega_{\lambda^i}^1)) \rightarrow \phi_1$ при $i \rightarrow \infty$. Принимая теперь во внимание, что $p_{1,V,U}: V \rightarrow U$ есть диффеоморфизм, выводим $p_{\Gamma_1}(\omega_{\lambda^i}^1) \rightarrow p_{\Gamma_1}(\omega^0(\phi_1))$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда и из (5.8), учитывая равенство $p_1(\phi_1) = p_1(-\phi_1)$, выводим, что $\{p_{\Gamma_1}(\omega_\lambda^1)\} \rightarrow p_{\Gamma_1}(\omega^0(\phi_1))$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$. Следовательно, справедливы условие 3°) и условие 1°) определения (5.4).

Из условия 1°) вытекает, что локально при $\lambda \in (\lambda_1 - \delta(U), \lambda_1)$ множество основных состояний $\{\omega_\lambda^1\}$ типа (-1) можно разделить на две части следующим образом:

$$\{\omega_{(+),\lambda}^1\} = \{\omega_\lambda^1 \in \{\omega_\lambda^1\} \mid \phi_{U,V}(\omega_\lambda^1) = t_\lambda > 0\}, \quad (5.13)$$

$$\{\omega_{(-),\lambda}^1\} = \{\omega_\lambda^1 \in \{\omega_\lambda^1\} \mid \phi_{U,V}(\omega_\lambda^1) = t_\lambda < 0\}. \quad (5.14)$$

При этом из четности функционала I_λ вытекает, что эти части равномошны. Следовательно, справедливо условие 2°) определения (5.4)

Наконец, из доказанной сходимости (5.12) и из того, что в данном случае мы имеем точно разрешимое проективное расслоение такое, что $|t_\lambda| = s_\lambda^1(\{b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^1))\})$ при $\lambda \in (\lambda_1 - \delta(U), \lambda_1)$, вытекает сходимость (5.1). Утверждение I доказано.

Утверждение II доказывается аналогично. Теорема доказана.

Используя сходимость (5.8), а также точную разрешимость проективного расслоения критических точек функционала (1.1), несложно показать, что существующие по теореме 4.6 две ветви основных состояний типа (-1) относительно проективной процедуры, а именно положительная $\{\omega_\lambda^{(+),1}\}$ и отрицательная $\{\omega_\lambda^{(-),1}\}$, вкладываются раздельно при достаточно малом $|\lambda - \lambda_1|$ в найденные по теореме 5.1 локальные ветви $\{\omega_{(+),\lambda}^1\}$, $\{\omega_{(-),\lambda}^1\}$. Так что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$ и функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$.

I. Предположим, что $F(\phi_1) > 0$. Тогда при $\lambda \uparrow \lambda_1$ две ветви основных состояний типа (-1) относительно проективной процедуры функционала (1.1): положительная ветвь $\{\omega_\lambda^{(+),1}\}$ и отрицательная ветвь $\{\omega_\lambda^{(-),1}\}$, в точке $\omega^0(\phi_1)$ обладают свойством попарного рождения и уничтожения критических точек. Более того, найдется такое $\delta_0(U) > 0$, что при $\lambda \in (\lambda_1 - \delta_0(U), \lambda_1)$ справедливо вложение $\{\omega_\lambda^{(+),1}\} \subseteq \{\omega_{(+),\lambda}^1\}$ либо вложение $\{\omega_\lambda^{(+),1}\} \subseteq \{\omega_{(-),\lambda}^1\}$.

II. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$. Тогда при $\lambda \downarrow \lambda_1$ две ветви основных состояний типа (-1) относительно проективной процедуры функционала (1.1): положительная ветвь $\{\omega_\lambda^{(+),2}\}$ и отрицательная ветвь $\{\omega_\lambda^{(-),2}\}$, в точке $\omega^0(\phi_1)$ обладают свойством попарного рождения и уничтожения критических точек. Более того, найдется такое $\delta_0(U) > 0$, что при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_0(U))$ справедливо вложение $\{\omega_\lambda^{(+),1}\} \subseteq \{\omega_{(+),\lambda}^1\}$ либо вложение $\{\omega_\lambda^{(+),1}\} \subseteq \{\omega_{(-),\lambda}^1\}$.

5.2. Асимптотика ветвей основных состояний в точке λ_1^* . В этом пункте будут получены результаты об асимптотическом поведении ветвей основных состояний $\{u_\lambda^1\}$, $\{u_\lambda^2\}$ в точке λ_1^* , где λ_1^* – значение инфимума в (3.29).

Рассмотрим $\omega^\infty(\phi_1^0) = (\infty, p_1(\phi_1)) \in \Gamma_1$, где $\phi_1^0 =: \phi_1(\Omega_0) \geq 0$, $\|\phi_1^*(\Omega_0)\| = 1$, – решение задачи (3.18). Справедлива следующая теорема о попарном рождении и уничтожении критических точек при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$ и функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$. Предположим, что $f(x) \leq 0$ при $x \in \Omega$, и при этом $\Omega_0 \neq \emptyset$. Тогда при $\lambda \uparrow \lambda_1^*$ ветвь основных состояний типа (0) относительно проективной процедуры $\{\omega_\lambda^2\}$ функционала (1.1) обладает в точке $\omega^\infty(\phi_1^*(\Omega_0))$ свойством попарного рождения и уничтожения критических точек:

$$\{\omega_{(+),\lambda}^2\} \rightarrow \omega^\infty(\phi_1^*(\Omega_0)) \leftarrow \{\omega_{(-),\lambda}^2\}. \quad (5.15)$$

Более того, при $\lambda \uparrow \lambda_1^*$ существует предел $\bar{I}_\lambda(\omega_{(+),\lambda}^2) = \bar{I}_\lambda(\omega_{(-),\lambda}^2) \downarrow -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ϕ_1^0 – решение задачи (3.18). По строгому принципу максимума [21] следует, что ϕ_1^0 не может быть решением задачи Дирихле (3.16), (3.17) в Ω , поэтому существует $\theta \in W$ такое, что $(H'_{\lambda_1^*}(\phi_1^0), \theta) < 0$ и $F(\theta) < 0$. Рассмотрим $\theta_t = \theta + t\phi_1^0$. Тогда $F(\theta_t) = F(\theta) < 0$ при $t \in \mathbb{R}$, и поскольку $H_{\lambda_1^*}(\theta_t) = t^p H_{\lambda_1^*}(\phi_1^0 + \frac{1}{t}\theta) = t^{p-1}[(H'_{\lambda_1^*}(\phi_1^0), \theta) + \bar{o}(1)] \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$J_{\lambda_1^*}^2(\theta_t) = -\frac{|H_{\lambda_1^*}(\theta_t)|^{\gamma/(\gamma-p)}}{|F(\theta_t)|^{p/(\gamma-p)}} \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из непрерывности по $\lambda \in \mathbb{R}$ функции $J_\lambda^2(v)$ при $v \in \Theta^2$ выводится, что $J_\lambda^2(v_\lambda^2) = J_\lambda^2(b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^2))) \rightarrow -\infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$. Следовательно, $\bar{I}_\lambda(\{\omega_\lambda^2\}) \rightarrow -\infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$. Дальнейшее доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1.

Докажем теперь следующую основную теорему об асимптотическом исчислении предельных значений ветвей основных состояний при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $1 < p < \gamma < p^*$, функция $f \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию $\partial 0$. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$ и $f^+ \neq 0$. Тогда:

I) Ветвь основных состояний типа (0) $\{\omega_\lambda^2\}$ непрерывно продолжается в точку λ_1^* , так что:

- 1) существует критическая точка $\omega_{\lambda_1^*}^2 \in \Gamma$ функционала (1.1);
- 2) при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$ существует предел $\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^2) \rightarrow \bar{I}_{\lambda_1^*}(\omega_{\lambda_1^*}^2)$;
- 3) при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$ имеет место сходимость в Γ_1 :

$$\{\omega_\lambda^2\} \rightarrow \{\omega_{\lambda_1^*}^2\}. \quad (5.16)$$

II) Ветвь основных состояний типа (-1) $\{\omega_\lambda^1\}$ непрерывно продолжается в точку λ_1^* при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$, так что:

- 1) существует вырожденная относительно проективной процедуры критическая точка $\omega_{\lambda_1^*}^1$ функционала (1.1);
- 2) при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$ существует предел $\bar{I}_\lambda(\omega_\lambda^1) \rightarrow \bar{I}_{\lambda_1^*}(\omega_{\lambda_1^*}^1) = 0$;
- 3) при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$ имеет место сходимость в Γ_1 :

$$\{\omega_\lambda^1\} \rightarrow \{\omega_{\lambda_1^*}^1\}. \quad (5.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем сначала общую часть доказательства утверждений I), II). Пусть $j = 1, 2$. По теореме 4.6 существует ветвь критических точек $\{\omega_\lambda^j\}$. Рассмотрим функции $v_\lambda^j = b_1(\text{pr}_1(\omega_\lambda^j))$. Эти функции ограничены в W , поэтому (см. доказательство леммы 3.4) при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$ существует предельная точка $v^j \in W$ такая, что

$$v_{\lambda^i}^j \rightarrow v^j \text{ слабо в } W, \quad v_{\lambda^i}^j \rightarrow v^j \text{ в } L_\gamma, \quad p \leq \gamma < p^*, \quad (5.18)$$

для некоторой последовательности $\lambda^i, \lambda^i \uparrow \lambda_1^*$. Отсюда

$$-\infty < H_{\lambda_1^*}(v^j) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^j), \quad F(v_{\lambda^i}^j) \rightarrow F(v). \quad (5.19)$$

Докажем утверждение I). Заметим, что $v^2 \neq 0$. Действительно, в противном случае $\liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^2) > 0$, что не согласуется с тем, что $H_{\lambda^i}(v_{\lambda^i}^2) < 0$ при $\lambda_1 < \lambda^i < \lambda_1^*$, $i = 1, 2, \dots$.

Предположим, что $F(v^2) = 0$. Тогда из (3.29) получаем $H_{\lambda_1^*}(v^2) = 0$, $v^2 \in \{\phi_1^*\}$, где ϕ_1^* – решение (3.29). Отсюда и из (5.19) вытекает, что $v_{\lambda^i}^2 \rightarrow \{\phi_1^*\}$ сильно в W . Функция $I_\lambda(u_\lambda^2)$ монотонно убывает. Поэтому

$$0 > I_\lambda(u_\lambda^2) \rightarrow I(\lambda_1^*) \geq -\infty \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_1^*. \quad (5.20)$$

Отсюда и из предположения $F(v^2) = 0$ вытекает, что $s_2(v_{\lambda^i}^2) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Подставим $u_{\lambda^i}^2 = s_2(v_{\lambda^i}^2)v_{\lambda^i}^2$ в (1.3) и разделим полученное на $|s_2(v_{\lambda^i}^2)|^{\gamma-1}$. Тогда

$$(|s_2(v_{\lambda^i}^2)|^{-(\gamma-p)})[-\Delta_p v_{\lambda^i}^2 - \lambda^i |v_{\lambda^i}^2|^{p-2} v_{\lambda^i}^2] = f(x) |v_{\lambda^i}^2|^{\gamma-2} v_{\lambda^i}^2. \quad (5.21)$$

Отсюда и из сходимости $v_{\lambda_i}^2 \rightarrow \phi_1^*$, поскольку $s_2(v_{\lambda_i}^2) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, будем иметь $f(x)|\phi_1^*|^{\gamma-2}\phi_1^* = 0$ при почти всех $x \in \Omega$. Это возможно лишь в том случае, если носитель функции ϕ_1^* находится в Ω_0 . Но отсюда из определения (3.15) константы $\lambda_1(\Omega_0)$, поскольку $H_{\lambda_1^*}(\phi_1^*) = 0$, вытекает $\lambda_1(\Omega_0) \leq \lambda_1^*$. С другой стороны, поскольку $\Omega_0 \subseteq \Omega_0^+$, то мы имеем $\lambda_1(\Omega_0^+) < \lambda_1(\Omega_0)$. Отметим, что $F(\phi(\Omega_0^+)) \geq 0$ для любой функции $\phi(\Omega_0^+) \in W$ с носителем в Ω_0^+ . Поэтому по определению (3.29) имеем $\lambda_1^* \leq \lambda_1(\Omega_0^+)$. Отсюда $\lambda_1^* < \lambda_1(\Omega_0)$. Противоречие. Следовательно, $F(v^2) \neq 0$.

Предположим, что в (5.20) $I(\lambda_1^*) = -\infty$. Это возможно, с учетом (5.19), лишь при условии, что $F(v^2) = 0$. Противоречие. Следовательно, $I(\lambda_1^*) > -\infty$. Используя это и то, что $F(v^2) \neq 0$, выводим существование конечного предела $s_2(v_{\lambda_i}^2) \rightarrow s_2(\lambda_1^*) < \infty$. Отсюда, переходя к пределу в (1.3) для $u_{\lambda_i}^2 = s_2(v_{\lambda_i}^2)v_{\lambda_i}^2$ при $i \rightarrow \infty$, получаем, что предельная точка $u_{\lambda_1^*}^2 = s_2(\lambda_1^*)v^2$ есть слабое решение (1.3), (1.4). Таким образом, нами доказаны утверждения I,1) и I,2). Последняя часть п. 3) утверждения I) доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 4.6.

Докажем утверждение II). По лемме 3.1 существует решение $\phi_1^* \geq 0$ задачи (3.29). При этом $F(\phi_1^*) \geq 0$. Поскольку $f^+ \neq 0$, то найдется такое $\theta \in W$, что $(F'(\phi_1^*), \theta) > 0$. Тогда $F(\phi_1^* + \varepsilon\theta) = F(\phi_1^*) + \varepsilon(F'(\phi_1^*), \theta) + \bar{o}(\varepsilon) > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Отсюда и из (3.29) несложно вывести, что при таких $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $H_{\lambda_1^*}(\phi_1^* + \varepsilon\theta) = \varepsilon(H'_{\lambda_1^*}(\phi_1^*), \theta) + \bar{o}(\varepsilon) > 0$. Тогда $\tau(\phi_1^* + \varepsilon\theta) \in \Theta_{\lambda_1^*}$ при некотором $\tau > 0$ и при $\lambda < \lambda_1^*$. Поэтому

$$J_{\lambda_1^*}^1(\phi_1^* + \varepsilon\theta) = \frac{(\varepsilon(H'_{\lambda_1^*}(\phi_1^*), \theta) + \bar{o}(\varepsilon))^{\gamma/(\gamma-p)}}{(\varepsilon(F'(\phi_1^*), \theta) + \bar{o}(\varepsilon))^{p/(\gamma-p)}} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда $J_{\lambda_1^*}^1(\phi_1^* + \varepsilon\theta) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda \downarrow \lambda_1^*$. Тогда, поскольку $J_{\lambda_1^*}^1(\phi_1^* + \varepsilon\theta) \geq J_{\lambda_1^*}^1(v_{\lambda_1^*}^1)$ при $\lambda \leq \lambda_1^*$ и $\varepsilon > 0$, получаем $J_{\lambda_1^*}^1(v_{\lambda_1^*}^1) \rightarrow 0$ при $\lambda \downarrow \lambda_1^*$. Отсюда $I_{\lambda_1^*}(u_{\lambda_1^*}^1) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$. Следовательно, утверждение II,2) доказано.

Предположим $v^1 = 0$. Тогда из (5.18) вытекает $\liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda_i}(v_{\lambda_i}^2) > 0$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} F(v_{\lambda_i}^1) = 0$. Но в этом случае $J_{\lambda_1^*}^1(v_{\lambda_1^*}^1) \rightarrow \infty$ при $\lambda \downarrow \lambda_1^*$, что не согласуется с доказанным выше. Следовательно, $v^1 \neq 0$.

Из сходимости $I_{\lambda_1^*}(u_{\lambda_1^*}^1) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$ вытекает (см. (4.3)), что выполнено $\liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda_i}(v_{\lambda_i}^2) = 0$, $F(v^1) = 0$. Отсюда и из (5.19), (3.29) получаем, что $H_{\lambda_1^*}(v^1) = 0$. Следовательно, $v^1 \in \{\phi_1^*\}$, где ϕ_1^* – решение (3.29), и $v_{\lambda_i}^1 \rightarrow \{\phi_1^*\}$ сильно в W .

Докажем теперь, что существует ненулевой конечный предел $s_1(v_{\lambda_i}^1) \rightarrow s_{\lambda_1^*}$. Конечность $s_{\lambda_1^*} \neq \infty$ доказывается так же, как и аналогичное утверждение в доказательстве I) данной теоремы. Докажем, что $s_{\lambda_1^*} \neq 0$. Поскольку $u_{\lambda_1^*}^1 = s_1(v_{\lambda_1^*}^1)v_{\lambda_1^*}^1$, то из (1.3) имеем

$$-\Delta_p v_{\lambda_1^*}^1 - \lambda |v_{\lambda_1^*}^1|^{p-2} v_{\lambda_1^*}^1 = |s_1(v_{\lambda_1^*}^1)|^{\gamma-p} f(x) |v_{\lambda_1^*}^1|^{\gamma-2} v_{\lambda_1^*}^1. \quad (5.22)$$

Предположим, что $s_1(v_{\lambda_1^*}^1) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$. Тогда из (5.22) и из сходимости (5.18) вытекает слабое равенство $-\Delta_p \phi_1^* - \lambda_1^* |\phi_1^*|^{p-2} \phi_1^* = 0$. Однако, поскольку $\phi_1^* \geq 0$, данное равенство невозможно при $\lambda_1^* > \lambda_1$. Таким образом, $s_{\lambda_1^*} \neq 0$.

Перейдем к пределу в (5.22) при $\lambda \rightarrow \lambda_1^*$. Тогда из сходимости (5.18) и из $s_1(v_\lambda^1) \rightarrow s_{\lambda_1^*}$ получаем

$$-\Delta_p \phi_1^* - \lambda |\phi_1^*|^{p-2} \phi_1^* = |s_{\lambda_1^*}|^{\gamma-p} f(x) |\phi_1^*|^{\gamma-2} \phi_1^*. \quad (5.23)$$

Отсюда вытекает, что точка $\{s_{\lambda_1^*}^1 \phi_1^*\}$ удовлетворяет (1.3) и, следовательно, является критической точкой функционала (1.1). Поскольку $F(\phi_1^*) = 0$, $H_{\lambda_1^*}(\phi_1^*) = 0$, то это решение вырождено относительно проективной процедуры. Таким образом, нами доказано утверждение II, 1). Последняя часть 3) утверждения II) доказывается так же, как и аналогичное утверждение в теореме 4.6. Теорема доказана.

§6. Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Неравенство $\lambda_1 \leq \lambda_1^*$ очевидно. Далее, из предположения $f^+ \neq \emptyset$ вытекает, что множество допустимых точек в (3.29) непусто, и поэтому $\lambda_1^* < \infty$. Следовательно, инфимум λ_1^* в (3.29) существует. Покажем, что этот инфимум достижим. Для этого, как легко видеть, достаточно доказать существование решения задачи

$$0 = \inf \{H_{\lambda_1^*}(v) \mid v \in S^1: F(v) \geq 0\}. \quad (6.1)$$

Пусть $v^i \in S^1$ — минимизирующая последовательность для (6.1): $H_{\lambda_1^*}(v^i) \rightarrow 0$, $F(v^i) \geq 0$. Несложно доказать, что для $v^i \in S^1$ существует предельная точка $\phi_1^* \in W$ (см. доказательство леммы 3.4) и что

$$H_{\lambda_1^*}(\phi_1^*) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\lambda_1^*}(v^i) = 0, \quad (6.2)$$

$$F(v^i) \rightarrow F(\phi_1^*) \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (6.3)$$

Заметим, что здесь $H_{\lambda_1^*}(\phi_1^*) \geq 0$. Действительно, в противном случае мы будем иметь $H_{\lambda_1^* - \delta}(\phi_1^*) = 0$ для некоторого $\delta > 0$. Но в этом случае, поскольку $F(\phi_1^*) \geq 0$ (см. (6.3)), получаем противоречие с тем, что λ_1^* доставляет инфимум в (3.29). Отсюда и из (6.2) вытекает, что $H_{\lambda_1^*}(\phi_1^*) = 0$.

Из (6.2), рассуждая от противного, выводим, что $\phi_1^* \neq 0$. Следовательно, ϕ_1^* является решением (6.1). Поскольку $H_{\lambda_1^*}(v)$, $F(v)$ — четные функции, то решением является и $|\phi_1^*|$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что найденное ϕ_1^* неотрицательно. Лемма доказана.

Список литературы

1. *Struwe M.* Variational Methods, Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
2. *Alama S., Tarantello G.* Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign // J. Funct. Anal. 1996. V. 141. № 1. P. 159–215.
3. *Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L.* Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems // NoDEA. 1995. V. 2. № 4. P. 553–572.
4. *Del Pino M.* Positive solutions of a semilinear elliptic equation on a compact manifold // Nonlinear Anal. 1994. V. 22. P. 1423–1430.

5. *Drabek P., Pohozaev S. I.* Positive solution for the p -Laplacian: application of the fibering method // Proc. Royl. Soc. Edinburgh. A. 1997. V. 127. P. 703–726.
6. *Tehrani H. T.* On indefinite superlinear elliptic equations // Calc. Var. 1996. V. 4. P. 139–153.
7. *Ильясов Я. Ш.* Функционал Эйлера для уравнений с p -лапласианом как функция спектрального параметра // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1996. Т. 214. С. 182–193.
8. *Ильясов Я. Ш.* Об одном необходимом условии существования положительных решений для класса уравнений с p -лапласианом // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 312–314.
9. *Похожяев С. И.* Об одном подходе к нелинейным уравнениям // ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 1327–1331.
10. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975.
11. *Келли Дж. Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981.
12. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
13. *Crandall M. G., Rabinowitz P.* Bifurcation from simple eigenvalues // J. Funct. Anal. 1971. V. 8. P. 321–340.
14. *Prodi G., Ambrosetti A.* Analisi Nonlineare. Pisa: Scuola Normale Superiore, 1973.
15. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвлений решений нелинейных уравнений. М.: Гостехиздат, 1969.
16. *Coleman S., Glazer V., Martin A.* Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations // Commun. Math. Phys. 1978. V. 58. № 2. P. 211–221.
17. *Lindvist P.* On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ // Proc. Amer. Math. Society. 1990. V. 109. № 1. P. 157–164.
18. *Vazquez J. L., Véron L.* Solutions positives d'équations elliptiques semi-linéaires sur des variétés riemanniennes compactes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1991. V. 312. P. 811–815.
19. *Tolksdorf P.* Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations // J. Diff. Eq. 1984. V. 51. P. 126–150.
20. *Lieberman G.* Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations // Non-linear Anal. 1988. V. 12. № 11. P. 1203–1219.
21. *Vazquez J. L.* A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations // Appl. Math. Optim. 1984. V. 12. P. 191–202.

E-mail: IlyasovYS@ic.bashedu.ru

Поступило в редакцию
23.IX.1999
15.IX.2000