Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Симметризация Штейнера и начальные коэффициенты однолистных функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 4, 75–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:35:56

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

Симметризация Штейнера и начальные коэффициенты однолистных функций

Для начальных коэффициентов мероморфной и однолистной в области $D = \{z: |z| > 1\}$ функции $f(z) = a_1 z + a_0 + a_{-1}/z + \dots$ установлено неравенство $|a_1|^2 - \operatorname{Re} a_1 a_{-1} \geq |a_1^*|^2 - \operatorname{Re} a_1^* a_{-1}^*$, где a_1^* и a_{-1}^* – соответствующие коэффициенты из разложения функции $f^*(z)$, конформно и однолистно отображающей область D на внешность результата симметризации Штейнера относительно вещественной оси дополнения множества $f(D)$. Ранее было известно неравенство Поля и Сегё $|a_1| \geq |a_1^*|$. Приводятся некоторые приложения полученного неравенства для функций класса Σ .

Библиография: 7 наименований.

Ключевые слова: симметризация Штейнера, емкость множества, однолистные функции, теоремы покрытия.

§ 1. Введение и формулировки результатов

Для произвольного вещественного u обозначим через $l(u)$ вертикальную прямую $\operatorname{Re} w = u$. Симметризацией Штейнера замкнутого ограниченного множества $E \subset \mathbb{C}_w$ относительно вещественной оси называется преобразование этого множества в симметричное множество E^* , определенное следующим образом:

$$E^* = \{w = u + iv: E \cap l(u) \neq \emptyset, 2|v| \leq \mu(E \cap l(u))\},$$

где μ – линейная мера Лебега. Пусть E – невырожденный континуум, и пусть функция

$$f(z) = a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots$$

конформно и однолистно отображает внешность круга $D := \{z: |z| > 1\}$ на связную компоненту дополнения $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus E$, содержащую бесконечно удаленную точку. Обозначим через

$$f^*(z) = a_1^* z + a_0^* + \frac{a_{-1}^*}{z} + \dots$$

функцию, конформно и однолистно отображающую область D на $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus E^*$. Хорошо известно неравенство Поля и Сегё [1]

$$|a_1| \geq |a_1^*|, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00028) и ДВО РАН (грант № 09-III-A-01-007).

эквивалентное неравенству для логарифмических емкостей

$$\operatorname{cap} E \geq \operatorname{cap} E^*.$$

Естественно поставить вопрос о поведении последующих коэффициентов в разложении функции f при симметризации Штейнера. Не существует содержательного неравенства между $|a_0|$ и $|a_0^*|$. Действительно, сдвиг множества E вдоль мнимой оси не меняет $\operatorname{Re} a_0, \operatorname{Re} a_0^*$ и $\operatorname{Im} a_0^* = 0$ и делает любым значение $\operatorname{Im} a_0$. С другой стороны, можно привести примеры, когда $\operatorname{Re} a_0 \neq \operatorname{Re} a_0^*$, и в этом случае сдвиг множества E вдоль вещественной оси приводит к неравенству $|\operatorname{Re} a_0| < |\operatorname{Re} a_0^*|$. Далее, если множество E есть отрезок, наклоненный к вещественной оси под острым углом, то $|a_{-1}| > |a_{-1}^*|$. В случае, когда $E = \{w: |w| = 1\}$, имеем противоположное неравенство: $|a_{-1}| = 0 < 1/2 = |a_{-1}^*|$. В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Для определенных выше функций f и f^* справедливо неравенство*

$$|a_1|^2 - \operatorname{Re} a_1 a_{-1} \geq |a_1^*|^2 - \operatorname{Re} a_1^* a_{-1}^*. \quad (2)$$

Неравенство (2) имеет следующую емкостную интерпретацию. Пусть множество E симметрично относительно вещественной оси, и пусть $H \setminus E$ — односвязная область, $H := \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$. Обозначим через g функцию, которая конформно и однолистно отображает область $H \setminus E$ на полуплоскость H так, что

$$\lim_{w \rightarrow \infty} [g(w) - w] = 0.$$

Предел

$$\operatorname{hcap}(E \cap H) = \lim_{w \rightarrow \infty} w[g(w) - w]$$

называется *относительной емкостью* множества $E \cap H$ (half-plane capacity) [2, с. 69]. Учитывая разложение функции f , заключаем, что функция g в окрестности бесконечности имеет вид

$$g(w) = w + \frac{a_1^2 - a_1 a_{-1}}{w} + \dots,$$

где a_1 и a_{-1} — вещественные числа. Таким образом,

$$\operatorname{hcap}(E \cap H) = |a_1|^2 - \operatorname{Re} a_1 a_{-1},$$

и неравенство (2) запишется в виде

$$\operatorname{hcap}(E \cap H) \geq \operatorname{hcap}(E^* \cap H).$$

Теорему 1 дополняет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $\tilde{f}(z) = \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0 + \tilde{a}_{-1}/z + \dots$ конформно и однолистно отображает область D на внешность континуума $\tilde{E} \subset E^*$. Тогда*

$$|a_1^*|^2 - \operatorname{Re} a_1^* a_{-1}^* \geq |\tilde{a}_1|^2 - \operatorname{Re} \tilde{a}_1 \tilde{a}_{-1}. \quad (3)$$

Доказательства теорем 1, 2 будут даны в заключительной части статьи. При этом для получения неравенства (2) нам потребуется симметризация относительно окружности [3], представленная в § 2. Неравенство (3) вытекает из результата Шиффера, установленного с помощью формулы Адамара для вариации функции Грина [4, § 3]. В качестве приложений теорем 1, 2 приведем утверждения о покрытии в известном классе Σ функций $f(z) = z + a_0 + a_{-1}/z + \dots$, мероморфных и однолистных в области D [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция f принадлежит классу Σ , и пусть w_0 – произвольная точка дополнения $E = \mathbb{C}_w \setminus f(D)$. Тогда для любого вещественного числа φ справедливо неравенство

$$\frac{m_f^4(w_0, \varphi) + 16R_f^4(w_0)}{8m_f^2(w_0, \varphi)} \leq 1 + \operatorname{Re} e^{-2i\varphi} a_{-1},$$

где $R_f(w_0) \geq 0$ – радиус наибольшего круга с центром в точке w_0 , принадлежащего множеству E , а $m_f(w_0, \varphi)$ – линейная мера Лебега пересечения E с прямой $\{w = w_0 + te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$. Знак равенства достигается для функций $f(z) = w_0 + e^{i\varphi} \lambda^{-1} h^{-1}(\lambda h(e^{-i\varphi} z))$ при $h(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ и любом $\lambda > 1$.

В частности, имеют место неравенства

$$\frac{1}{8} m_f^2\left(w_0, \frac{\arg a_{-1}}{2}\right) - 1 \leq |a_{-1}| \leq 1 - \frac{1}{8} m_f^2\left(w_0, \frac{\arg a_{-1} + \pi}{2}\right).$$

Правое неравенство уточняет хорошо известное следствие теоремы площадей: $|a_{-1}| \leq 1$ [5, гл. II, § 4]. Оба неравенства дополняют классическую оценку

$$m_f(w_0, \varphi) \leq 4 \quad \forall \varphi,$$

вытекающую из (1). Именно,

$$\begin{aligned} m_f\left(w_0, \frac{\arg a_{-1}}{2}\right) &\leq \sqrt{8(1 + |a_{-1}|)} \leq 4, \\ m_f\left(w_0, \frac{\arg a_{-1} + \pi}{2}\right) &\leq \sqrt{8(1 - |a_{-1}|)}. \end{aligned}$$

Равенства выполняются в случае $|a_{-1}| = 1$, $f(z) = z + w_0 + e^{2i\varphi}/z$. Интересно было бы получить точные оценки в случае фиксированного $|a_{-1}|$, отличного от единицы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Предположим, что при некоторых α, β и γ для функции $f(z) = z + a_0 + a_{-1}/z + \dots$ класса Σ выполняется неравенство

$$\mu((\mathbb{C}_w \setminus f(D)) \cap l(u)) \geq \alpha \quad \forall u, \quad \beta \leq u \leq \gamma.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} a_{-1} \leq 1 - \frac{c^2}{2}(1 - k^2),$$

где вещественные постоянные c и k находятся из условия

$$c \int_0^1 \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2}{\zeta^2 - 1}} d\zeta = \frac{\gamma - \beta}{2} - \frac{i\alpha}{2}, \quad c > 0, \quad 0 < k < 1.$$

Знак равенства имеет место для функции f класса Σ , конформно и однолистно отображающей область D на внешность прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых $u = \beta$, $u = \gamma$, $\gamma - \beta < 4$, и с подходящей высотой α .

Следствия 1, 2 получаются последовательным применением неравенств (2) и (3). Список таких утверждений легко продолжить аналогично известным приложениям симметризации Штейнера в теории функций [3], [6].

§ 2. Симметризация относительно окружности

Следуя [3, § 3], обозначим через $r(w)$ регулярную ветвь функции $\zeta = i \log w$, отображающую плоскость $\mathbb{C}_w$ с разрезом по вещественной отрицательной полуоси на полосу $-\pi < \operatorname{Re} \zeta < \pi$. Доопределим функцию $r(w)$ на разрезе в смысле граничного соответствия. Пусть E – произвольное замкнутое множество в плоскости $\overline{\mathbb{C}}_w$, не содержащее начало координат и бесконечно удаленную точку. Симметризацией множества E относительно окружности $|w| = 1$ называется переход от множества E к симметричному относительно $|w| = 1$ множеству

$$RE = r^{-1}((r(E))^*),$$

где, как и выше, $*$ означает симметризацию Штейнера относительно вещественной оси, выполненную в полосе $-\pi \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \pi$. Дадим теперь прямое определение этого преобразования. Для замкнутого множества E , принадлежащего $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$, введем обозначения

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E \cap \{w: \arg w = \theta\}, & R(\theta) &= \exp\left(\frac{1}{2} \int_{E(\theta)} \frac{d\rho}{\rho}\right), \\ \tilde{E}(\theta) &= \begin{cases} \{w = \rho e^{i\theta}: R^{-1}(\theta) \leq \rho \leq R(\theta)\}, & \text{если } E(\theta) \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{если } E(\theta) = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$RE = \bigcup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \tilde{E}(\theta).$$

При фиксированном $v > 0$ пусть $L_v(w) := w/v - i$ – линейное преобразование, переводящее окружность $|w - iv| = v$ в единичную окружность $|w| = 1$, и пусть L_v^{-1} – обратное отображение. Результатом симметризации замкнутого ограниченного множества E относительно окружности $|w - iv| = v$ назовем множество

$$R_v E = L_v^{-1}(R L_v(E)).$$

Для открытого множества B , содержащего точки iv и ∞ , положим

$$S_v B = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus R_v(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus B).$$

ЛЕММА 1. Если открытые множества B_1 и B_2 удовлетворяют условиям $\infty \in B_1$ и $\overline{B}_1 \subset B_2$, то для достаточно больших $v > 0$ выполняется включение

$$S_v B_1 \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus (\overline{\mathbb{C}}_w \setminus B_2)^* \quad (R_v(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus B_1) \supset (\overline{\mathbb{C}}_w \setminus B_2)^*).$$

Доказательство леммы 1 очевидно, носит технический характер и поэтому здесь не проводится. Отметим лишь важность того факта, что множество B_1 лежит компактно в B_2 . В этом случае замкнутое множество $\overline{C}_w \setminus B_2$ принадлежит $\overline{C}_w \setminus B_1$ вместе с некоторой окрестностью U . Лучи, проходящие через точку iv и пересекающие окрестность U , стремятся при $v \rightarrow \infty$ вблизи вещественной оси к прямым, параллельным мнимой оси. При этом “логарифмическая мера” в окрестности окружности $|w - iv| = v$ стремится к евклидовой.

Обозначим через $g_B(z, z_0)$ функцию Грина связной компоненты открытого множества B , содержащей точку z_0 (с полюсом в этой точке), доопределенную нулем вне этой связной компоненты. Пусть $r(B, z_0)$ – внутренний радиус указанной компоненты относительно точки z_0 [3].

ЛЕММА 2. *Если связные компоненты открытого множества B имеют функции Грина, а точки iv и ∞ принадлежат B , то*

$$\log[r(B, iv)r(B, \infty)] + 2g_B(iv, \infty) \leq \log[r(S_v B, iv)r(S_v B, \infty)] + 2g_{S_v B}(iv, \infty)$$

для любого $v > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из [3, теорема 1.7, предложение 1.11] (см. также [7, теорема 1]).

§ 3. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ – исчерпание области $f(D)$ односвязными областями B_n , $\infty \in B_n$, $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = f(D)$. Для каждого n и достаточно большого $v > 0$ функция $u_n(w) := g_{B_n}(w, iv) - g_{B_n}(w, \infty)$ является гармонической в области $B_n \setminus \{iv, \infty\}$, причем $u_n(w) \rightarrow +\infty$ при $w \rightarrow iv$ и $u_n(w) \rightarrow -\infty$, когда $w \rightarrow \infty$. Отсюда следует, в частности, что множества $B_n^1 := \{w: u_n(w) > 0\}$ и $B_n^2 := \{w: u_n(w) < 0\}$ являются непересекающимися областями. Функция Грина области B_n^1 с полюсом в точке iv совпадает в B_n^1 с функцией $u_n(w)$. Следовательно,

$$\log r(B_n^1, iv) = \lim_{w \rightarrow iv} (u_n(w) + \log |w - iv|) = \log r(B_n, iv) - g_{B_n}(iv, \infty).$$

Аналогично, функция $-u_n(w)$ совпадает в B_n^2 с функцией Грина этой области с полюсом в точке $w = \infty$. Поэтому

$$\log r(B_n^2, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} (-u_n(w) - \log |w|) = \log r(B_n, \infty) - g_{B_n}(\infty, iv).$$

Суммируя полученные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \log[r(B_n, iv)r(B_n, \infty)] - 2g_{B_n}(iv, \infty) &= \log[r(B_n^1, iv)r(B_n^2, \infty)] \\ &= \log[r(B_n^1 \cup B_n^2, iv)r(B_n^1 \cup B_n^2, \infty)] + 2g_{B_n^1 \cup B_n^2}(iv, \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

По лемме 2 последнее выражение не превосходит суммы

$$\log[r(S_v(B_n^1 \cup B_n^2), iv)r(S_v(B_n^1 \cup B_n^2), \infty)] + 2g_{S_v(B_n^1 \cup B_n^2)}(iv, \infty).$$

Поскольку $B_n^1 \cap B_n^2 = \emptyset$, для любого θ луч $w = iv + \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \rho \leq \infty$, пересекает множество $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus (B_n^1 \cup B_n^2)$. Следовательно, по определению симметризации относительно окружности множество $R_v(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus (B_n^1 \cup B_n^2))$ содержит окружность $|w - iv| = v$. Поэтому связные компоненты $\tilde{B}_n^1$ и $\tilde{B}_n^2$ множества $S_v(B_n^1 \cup B_n^2)$, содержащие соответственно точки iv и $w = \infty$, не пересекаются, и мы имеем

$$\begin{aligned} r(S_v(B_n^1 \cup B_n^2), iv) &= r(\tilde{B}_n^1, iv), & r(S_v(B_n^1 \cup B_n^2), \infty) &= r(\tilde{B}_n^2, \infty), \\ g_{S_v(B_n^1 \cup B_n^2)}(iv, \infty) &= g_{\tilde{B}_n^1 \cup \tilde{B}_n^2}(iv, \infty) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \log[r(B_n, iv)r(B_n, \infty)] - 2g_{B_n}(iv, \infty) &\leq \log[r(\tilde{B}_n^1, iv)r(\tilde{B}_n^2, \infty)] - 2g_{\tilde{B}_n^1 \cup \tilde{B}_n^2}(iv, \infty) \\ &= \log[r(S_v B_n, iv)r(S_v B_n, \infty)] - 2g_{S_v B_n}(iv, \infty). \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее равенство устанавливается аналогично (4) с учетом симметрии области $S_v B_n$ относительно окружности $|w - iv| = v$. Далее воспользуемся следующим фактом, доказанным впервые Шиффером [4, §3]: если области G_1 и G_2 имеют функции Грина, $G_1 \subset G_2$ и ζ, w – различные точки области G_1 , то справедливо неравенство

$$\log[r(G_1, \zeta)r(G_1, w)] - 2g_{G_1}(\zeta, w) \leq \log[r(G_2, \zeta)r(G_2, w)] - 2g_{G_2}(\zeta, w). \quad (6)$$

По лемме 1 имеем

$$S_v B_n \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus (\overline{\mathbb{C}}_w \setminus f(D))^* \subset f^*(D).$$

Таким образом, из (5) и (6) следует неравенство

$$\begin{aligned} \log[r(B_n, iv)r(B_n, \infty)] - 2g_{B_n}(iv, \infty) \\ \leq \log[r(f^*(D), iv)r(f^*(D), \infty)] - 2g_{f^*(D)}(iv, \infty). \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим через

$$f_n(z) = a_1^n z + a_0^n + \frac{a_{-1}^n}{z} + \dots$$

функцию, конформно и однолистно отображающую область D на область B_n , и пусть

$$h_n(w) = \frac{w}{a_1^n} - \frac{a_0^n}{a_1^n} - \frac{a_{-1}^n}{w} + \dots$$

– разложение обратного отображения в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда при достаточно большом v выполняются равенства

$$\begin{aligned} r(B_n, \infty)|a_1^n| &= r(D, \infty) = 1, & r(B_n, iv)|h'_n(iv)| &= r(D, h_n(iv)) = |h_n(iv)|^2 - 1, \\ g_{B_n}(iv, \infty) &= g_D(h_n(iv), \infty) = \log|h_n(iv)|. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} r(B_n, iv)r(B_n, \infty)e^{-2g_{B_n}(iv, \infty)} &= \frac{|h_n(iv)|^2 - 1}{|a_1^n h'_n(iv)||h_n(iv)|^2} \\ &= \frac{1 - \left|\frac{iv}{a_1^n} + O(1)\right|^{-2}}{\left|1 - \frac{a_1^n a_{-1}^n}{v^2} + o\left(\frac{1}{v^2}\right)\right|} = 1 - (|a_1^n|^2 - \operatorname{Re} a_1^n a_{-1}^n) \frac{1}{v^2} + o\left(\frac{1}{v^2}\right), \quad v \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущие выкладки для функции f^* вместо f_n , из неравенства (7) получаем

$$|a_1^n|^2 - \operatorname{Re} a_1^n a_{-1}^n \geq |a_1^*|^2 - \operatorname{Re} a_1^* a_{-1}^*.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство (2). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 вытекает из неравенства (6), где необходимо положить $G_1 = f^*(D)$, $G_2 = \tilde{f}(D)$, $\zeta = iv$, $w = \infty$ и где v достаточно большое. Далее приводятся вычисления для функций f^* и $\tilde{f}$, повторяющие концовку доказательства теоремы 1 для функции f_n . В итоге получаем неравенство (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Рассмотрим сначала случай, когда $w_0 = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Функция

$$\tilde{f}(z) := iR_f(0)h^{-1}(\lambda h(z)) = i\lambda R_f(0)z + \frac{iR_f(0)}{z} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + \dots$$

при $\lambda = [m_f^2(0, \pi/2)/(4R_f^2(0)) + 1][m_f(0, \pi/2)/R_f(0)]^{-1}$ конформно и однолистно отображает область D на дополнение к множеству $\tilde{E} := \{w: |w| \leq R_f(0)\} \cup \{w: \operatorname{Re} w = 0, |\operatorname{Im} w| \leq m_f(0, \pi/2)/2\}$. В условиях следствия имеем $\tilde{E} \subset E^*$ ($E = \overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(D)$). Поэтому из неравенств (2) и (3) получаем

$$1 - \operatorname{Re} a_{-1} \geq R_f^2(0)(2\lambda^2 - 1) = \frac{m_f^4(0, \pi/2) + 16R_f^4(0)}{8m_f^2(0, \pi/2)}.$$

В случае произвольных w_0 и φ необходимо применить предыдущее заключение к функции

$$e^{i(\pi/2-\varphi)}[f(e^{i(\varphi-\pi/2)}z) - w_0] = z + \tilde{a}_0 - e^{-2i\varphi} \frac{a_{-1}}{z} + \dots$$

Условие равенства проверяется непосредственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Можно считать, что $\beta = -\gamma$. Функция

$$F(\zeta) = c \int_0^\zeta \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2}{\zeta^2 - 1}} d\zeta + \frac{i\alpha}{2} = c\zeta + c_0 - \frac{c(1 - k^2)}{2\zeta} + \dots$$

конформно и однолистно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ на четырехугольник $\{w: \operatorname{Im} w > 0\} \setminus \tilde{E}$, где на этот раз $\tilde{E} = \{w: |\operatorname{Re} w| \leq \gamma, |\operatorname{Im} w| \leq \alpha/2\}$. По принципу симметрии Римана–Шварца функция

$$\tilde{f}(z) := F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{c}{2}z + c_0 - c\left(\frac{1}{2} - k^2\right)\frac{1}{z} + \dots$$

конформно и однолистно отображает область D на внешность прямоугольника $\tilde{E}$. В условиях следствия имеем $\tilde{E} \subset (\overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(D))^*$. Осталось воспользоваться неравенствами (2) и (3).

Список литературы

1. Г. Поля, Г. Серё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, ГИФМЛ, М., 1962; пер. с англ.: G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Stud., **27**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1951.

2. G. F. Lawler, *Conformally invariant processes in the plane*, Math. Surveys Monogr., **114**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
3. В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49:1** (1994), 3–76; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable”, *Russian Math. Surveys*, **49:1** (1994), 1–79.
4. М. Шиффер, Некоторые новые результаты в теории конформных отображений, Приложение к кн.: Курант Р., *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, ИЛ, М., 1953; пер. с англ.: M. Schiffer, Appendix: R. Courant, *Dirichlet's Principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Interscience Publ., New York, 1950.
5. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
6. В. К. Хейман, *Многолистные функции*, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.
7. В. Н. Дубинин, “Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **35:4** (1994), 774–792; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Some properties of the reduced inner modulus”, *Siberian Math. J.*, **35:4** (1994), 689–705.

В. Н. Дубинин (V. N. DUBININ)
Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило в редакцию
27.01.2009