Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. А. Хачатрян, Разрешимость одного класса интегродифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 5, 191–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:43:16

УДК 517.968

Х. А. Хачатрян

Разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с локально монотонной нелинейностью. С помощью применения специальных факторизационных методов доказана разрешимость этого уравнения в пространстве Соболева $W_{\infty}^2(0, +\infty)$. В некоторых случаях вычислен также предел решения в бесконечности.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: пространство Соболева, итерация, монотонность решения, условие Каратеодори.

§ 1. Введение

В последние годы в связи с бурным развитием современной физической кинетики возрос интерес к нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям, в которых возможно одновременное дифференцирование и интегрирование по одним и тем же аргументам. Подобные уравнения возникают в теории нелокального взаимодействия волн, в кинетической теории металлов, в теории бифуркации рождения цикла, в теории популяции (см. [1]–[5]). Кроме того, уравнения указанного характера возникают в эконометрике, а именно в теории распределения национального дохода в однопродуктовой экономике (см. [6], [7]).

В настоящей работе исследуются вопросы существования и асимптотические свойства решения для следующего класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$-y'' + \lambda y = \int_0^{\infty} K(x, t, y(t)) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad (1.1)$$

относительно искомой функции $y(x)$ с граничными условиями

$$y(0) = y_0 \geq 0, \quad (1.2)$$

$$y \in W_{\infty}^2(0, +\infty) \equiv \{f: f^{(j)} \in L_{\infty}(0, +\infty), j = 0, 1, 2\}, \quad (1.3)$$

где через $f^{(j)}$ обозначена j -я производная функции $f(x)$. Здесь $\lambda > 0$ – числовой коэффициент уравнения (1.1), а $K(x, t, \tau)$ – определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ неотрицательная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- а) $K(x, t, 0) \equiv 0$, $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $K(x, t, \tau) > 0$, $(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 б) существует число $\eta \geq y_0$ такое, что $\int_0^\infty K(x, t, \eta) dt \leq \lambda \eta$, $x \in \mathbb{R}^+$;
 в) при фиксированном $\tau \in [0, \eta]$ функция $K(x, t, \tau)$ измерима по $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и почти для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ непрерывна по τ на множестве $[0, \eta]$;
 д) при фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $K(x, t, \tau)$ является монотонно неубывающей по $\tau \in [0, \eta]$.

Условие в) принято называть *локальным условием Каратедори* (см. [8]).

Уравнение (1.1) (с условиями (1.2), (1.3) и а)–д)) возникает в различных областях математической физики, в частности в теории нелокального взаимодействия волн, квантовой механике, эконометрике (см., например, [1]–[7]). В частном случае, когда

$$K(x, t, \tau) = K_0(x - t)\tau, \quad (1.4)$$

где

$$0 \leq K_0 \in L_1(-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x) dx = \lambda,$$

уравнение (1.1) и его векторный аналог исследованы в работах [9], [10].

Задачу (1.1)–(1.3) назовем *однородной*, если $y_0 = 0$, и *неоднородной*, если $y_0 > 0$.

В настоящей работе при выполнении условий а)–д) доказано, что неоднородная задача (1.1)–(1.3) в пространстве $W_\infty^2(0, +\infty)$ имеет положительное решение, более того, описывается структура этого решения. В том случае, когда оператор типа свертки служит локальной минорантой для исходного оператора Урысона, также доказано существование положительного решения однородной задачи (1.1)–(1.3). Вычислен предел этого решения в бесконечности. В одном важном частном случае доказано, что решение однородной задачи (1.1)–(1.3) представляет собой монотонно неубывающую функцию.

§ 2. Вспомогательные сведения

2.1. Об одном классе нелинейных интегральных операторов типа Урысона. Обозначим через Ω_c класс нелинейных интегральных операторов $\mathbf{K} \in \Omega_c$, если $\mathbf{K}: M(0, +\infty) \rightarrow M(0, +\infty)$ задается посредством формулы

$$(\mathbf{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x, t, f(t)) dt, \quad f \in M(0, +\infty), \quad x > 0, \quad (2.1)$$

где $M(0, +\infty)$ – пространство ограниченных функций на $(0, +\infty)$ и $K(x, t, \tau) \geq 0$ удовлетворяет следующим условиям:

- i) существует число $\eta > 0$ такое, что

$$\int_0^\infty K(x, t, \eta) dt \leq c\eta, \quad (2.2)$$

где $x \in (0, +\infty)$, $c > 0$;

ii) при каждом фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $K(x, t, \tau) \uparrow$ по τ на отрезке $[0, \eta]$;

iii) функция $K(x, t, \tau)$ удовлетворяет условию Каратеодори на множестве $D_\eta \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \eta]$ (см. § 1, условие с)).

Введем также классы $V_\pm \in \Omega^\pm$ верхних и нижних интегральных операторов типа Волтерра:

$$(V_+ f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t) dt, \quad (V_- f)(x) = \int_x^\infty v_-(t-x)f(t) dt, \\ f \in M(0, +\infty), \quad 0 \leq v_\pm \in L_1(0, +\infty). \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что $V_\pm: M(0, +\infty) \rightarrow M(0, +\infty)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

ЛЕММА 2.1. Если $V_- \in \Omega^-$, $\mathbf{K} \in \Omega_c$, то существует число $c_0 > 0$ такое, что $V_- \mathbf{K} \in \Omega_{c_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in M(0, +\infty)$ имеем

$$(V_- \mathbf{K} f)(x) = \int_x^\infty v_-(t-x) \int_0^\infty K(t, \tau, f(\tau)) d\tau dt.$$

Меняя порядок интегрирования в последней формуле, получим

$$(V_- \mathbf{K} f)(x) = \int_0^\infty \int_x^\infty v_-(t-x) K(t, \tau, f(\tau)) dt d\tau \equiv \int_0^\infty W(x, \tau, f(\tau)) d\tau,$$

где

$$W(x, \tau, z) = \int_x^\infty v_-(t-x) K(t, \tau, z) dt. \quad (2.4)$$

Далее убедимся в том, что W удовлетворяет условиям i)–iii). Действительно, выбирая $c_0 = c \int_0^\infty v_-(x) dx$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W(x, t, \eta) dt &= \int_0^\infty \int_x^\infty v_-(\tau-x) K(\tau, t, \eta) dt d\tau \\ &= \int_x^\infty v_-(\tau-x) \int_0^\infty K(\tau, t, \eta) dt d\tau \\ &\leq c\eta \int_x^\infty v_-(t-x) dt = c_0\eta. \end{aligned}$$

Условия ii), iii) сразу следуют из (2.4), (2.3). Лемма доказана.

2.2. Задача факторизации. Уравнение (1.1) запишем в операторной форме:

$$(D^2 - \lambda I + \mathbf{K})y = 0, \quad (2.5)$$

где $(Dy)(x) \equiv y'(x)$ – оператор дифференцирования, $\mathbf{K} \in \Omega_\lambda$, а I – единичный оператор. Рассмотрим следующую задачу факторизации: для заданного оператора $\mathbf{K} \in \Omega_\lambda$ найти такой оператор $H \in \Omega_{\sqrt{\lambda}}$, чтобы имела место факторизация:

$$D^2 - \lambda I + \mathbf{K} = (D - \sqrt{\lambda}I)(D + \sqrt{\lambda}I - H). \quad (2.6)$$

Справедлива

ЛЕММА 2.2. *Имеет место факторизация (2.6), где $H \in \Omega_{\sqrt{\lambda}}$, причем*

$$\begin{aligned} (Hf)(x) &= \int_0^\infty h(x, t, f(t)) dt, \quad f \in M(0, +\infty), \\ h(x, t, \tau) &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z} K(x+z, t, \tau) dz. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{F}_{\sqrt{\lambda}}$ – обратный оператор дифференциального оператора $\sqrt{\lambda}I - D$ в пространстве $M(0, +\infty) \cap C_A(0, +\infty)$, где $C_A(0, +\infty)$ – пространство абсолютно непрерывных функций на $(0, +\infty)$. Тогда нетрудно убедиться в том, что

$$(\mathbf{F}_{\sqrt{\lambda}}f)(x) = \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(t-x)} f(t) dt, \quad f \in M(0, +\infty). \quad (2.8)$$

Из леммы 2.1 следует, что $H \equiv \mathbf{F}_{\sqrt{\lambda}}\mathbf{K} \in \Omega_{\sqrt{\lambda}}$. Следовательно, имеем

$$D^2 - \lambda I + \mathbf{K} = (D - \sqrt{\lambda}I)(D + \sqrt{\lambda}I) + \mathbf{K} = (D - \sqrt{\lambda}I)(D + \sqrt{\lambda}I - H).$$

Лемма доказана.

2.3. Существование монотонного решения одного класса интегральных уравнений типа свертки. В этом пункте мы рассмотрим вопросы существования монотонного решения для следующего консервативного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K_0(x-t)\varphi(t) dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad (2.9)$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$. Предполагается, что

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda(x) \leq 1, \quad 1 - \lambda \in L_1(0, +\infty), \quad 0 \leq K_0 \in L_1(-\infty, +\infty), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x) dx = 1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\nu(K_0) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x K_0(x) dx < 0, \quad (2.11)$$

причем считается, что последний интеграл абсолютно сходится. Известно, что при выполнении условий (2.10), (2.11) уравнение (2.9) имеет нетривиальное, неотрицательное и ограниченное решение $\varphi_0(x)$ (см. [11]).

Далее мы докажем, что если дополнительно $\lambda \uparrow$, то уравнение (2.9) обладает монотонно возрастающим и ограниченным решением.

Справедлива

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что $\lambda \uparrow$ по x на $(0, +\infty)$. Тогда при выполнении условий (2.10), (2.11) уравнение (2.9) обладает монотонно возрастающим и ограниченным решением $\varphi(x) \geq \varphi_0(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $0 \leq \varphi_0 \in M(0, +\infty)$, $\varphi_0(x) \not\equiv 0$, то $C = \sup_{x>0} \varphi_0(x) > 0$. Рассмотрим следующие итерации:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K_0(x-t) \varphi^{(n)}(t) dt, \quad \varphi^{(0)}(x) \equiv C, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Убедимся в том, что $\varphi^{(n)}(x) \downarrow$ по n . Действительно, сначала докажем, что $\varphi^{(1)}(x) \leq \varphi^{(0)}(x)$. Имеем

$$\varphi^{(1)}(x) \leq C \int_0^\infty K_0(x-t) dt \leq C = \varphi^{(0)}(x).$$

Предполагая, что $\varphi^{(n)}(x) \leq \varphi^{(n-1)}(x)$, из (2.12) получаем $\varphi^{(n+1)}(x) \leq \varphi^{(n)}(x)$. Теперь докажем, что $\varphi^{(n)}(x) \geq \varphi_0(x)$. В случае $n = 0$ это неравенство очевидно, так как $\varphi_0(x) \leq \sup_{x>0} \varphi_0(x)$. Пусть $\varphi^{(k)}(x) \geq \varphi_0(x)$; из (2.12) имеем

$$\varphi^{(k+1)}(x) \geq \lambda(x) \int_0^\infty K_0(x-t) \varphi_0(t) dt = \varphi_0(x).$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ точно сходится к некоторой функции $\varphi(x)$, причем

$$\varphi_0(x) \leq \varphi(x) \leq C. \quad (2.13)$$

Используя известные предельные теоремы Б. Леви и А. Лебега (см. [12]), можно убедиться в том, что предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.9). Для завершения доказательства остается показать, что $\varphi(x) \uparrow$ по x . Действительно, сначала по индукции докажем, что $\varphi^{(n)}(x) \uparrow$ по x . Для $n = 0$ это очевидно. Пусть $\varphi^{(n)}(x) \uparrow$ по x . Докажем, что $\varphi^{(n+1)}(x) \uparrow$ по x . Предположим, что $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 > x_2$ — произвольные числа. Тогда из (2.12) с учетом того факта, что $\lambda(x), \varphi^{(n)}(x) \uparrow$ по x , будем иметь

$$\begin{aligned} & \varphi^{(n+1)}(x_1) - \varphi^{(n+1)}(x_2) \\ &= \lambda(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} K_0(\tau) \varphi^{(n)}(x_1 - \tau) d\tau - \lambda(x_2) \int_{-\infty}^{x_2} K_0(\tau) \varphi^{(n)}(x_2 - \tau) d\tau \\ &\geq \lambda(x_2) \left(\int_{-\infty}^{x_1} K_0(\tau) \varphi^{(n)}(x_1 - \tau) d\tau - \int_{-\infty}^{x_2} K_0(\tau) \varphi^{(n)}(x_2 - \tau) d\tau \right) \\ &\geq \lambda(x_2) \int_{-\infty}^{x_2} K_0(\tau) (\varphi^{(n)}(x_1 - \tau) - \varphi^{(n)}(x_2 - \tau)) d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi^{(n+1)}(x_1) \geq \varphi^{(n+1)}(x_2).$$

В последнем неравенстве, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. Лемма доказана.

§ 3. Решение неоднородной задачи (1.1)–(1.3)

Используя факторизацию (2.6), запишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$(D - \sqrt{\lambda}I)(D + \sqrt{\lambda}I - H)y = 0. \quad (3.1)$$

Положим

$$f = (D + \sqrt{\lambda}I - H)y. \quad (3.2)$$

Тогда функция f будет удовлетворять уравнению $f'(x) = \sqrt{\lambda}f(x)$, общее решение которого задается посредством равенства

$$f(x) = \gamma e^{\sqrt{\lambda}x}, \quad \gamma = \text{const}. \quad (3.3)$$

Поскольку искомое решение y принадлежит $W_{\infty}^2(0, +\infty)$, из (3.2) следует, что функция $f(x)$ должна быть по крайней мере почти всюду ограниченной. Однако это возможно лишь в том случае, когда $\gamma = 0$.

Теперь рассмотрим уравнение (3.2):

$$y'(x) + \sqrt{\lambda}y(x) = \int_0^{\infty} h(x, t, y(t)) dt, \quad (3.4)$$

где h определяется формулой (2.7).

Обозначим $\phi(x) = y'(x) + \sqrt{\lambda}y(x)$. Тогда с учетом начального условия (1.2), $y_0 \neq 0$, получаем следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau\right) dt, \quad x > 0. \quad (3.5)$$

Рассмотрим следующие простые итерации:

$$\begin{aligned} \phi^{(n+1)}(x) &= \int_0^{\infty} h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi^{(n)}(\tau) d\tau\right) dt, \\ \phi^{(0)} &\equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Убедимся в том, что $\phi^{(n)}(x) \uparrow$ по n и $0 \leq \phi^{(n)}(x) \leq \sqrt{\lambda}\eta$, $\phi^{(n)}(x) \neq 0$. Сначала докажем, что $\phi^{(n)} \in [0, \sqrt{\lambda}\eta]$, $\phi^{(n)}(x) \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x) &= \int_0^{\infty} h(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t}) dt \geq 0 \quad (\neq 0), \\ \phi^{(1)}(x) &\leq \int_0^{\infty} h(x, t, \eta e^{-\sqrt{\lambda}t}) dt \leq \int_0^{\infty} h(x, t, \eta) dt \leq \sqrt{\lambda}\eta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

так как $H \in \Omega_{\sqrt{\lambda}}$.

Пусть $\phi^{(n-1)} \in [0, \sqrt{\lambda}\eta]$ ($\neq 0$). Докажем, что таким свойством также обладает и $\phi^{(n)}(x)$. Из (3.6) с учетом условия d) из § 1 имеем

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(x) &\geq \int_0^{\infty} h(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t}) dt \geq 0 \quad (\neq 0), \\ \phi^{(n)}(x) &\leq \int_0^{\infty} h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \sqrt{\lambda}\eta \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} d\tau\right) dt \leq \int_0^{\infty} h(x, t, \eta) dt \leq \sqrt{\lambda}\eta. \end{aligned}$$

Покажем, что $\phi^{(n)} \uparrow$ по n . Из (3.7) следует, что $\phi^{(1)}(x) \geq \phi^{(0)}(x) \not\equiv 0$. Предположим, что $\phi^{(n)}(x) \geq \phi^{(n-1)}(x)$. Тогда из (3.6) с учетом d) и того факта, что $\phi^{(n)} \in [0, \sqrt{\lambda}\eta]$, получим

$$\phi^{(n+1)}(x) \geq \int_0^\infty h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi^{(n-1)}(\tau) d\tau\right) dt = \phi^{(n)}(x).$$

Следовательно, последовательность функций $\{\phi^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет точечный предел: $\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(x)$, причем

$$\phi^{(1)}(x) \leq \phi(x) \leq \sqrt{\lambda}\eta. \quad (3.8)$$

Докажем, что предельная функция удовлетворяет уравнению (3.5). Согласно соотношениям (3.6) имеем

$$\phi^{(n+1)}(x) \leq \int_0^\infty h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau\right) dt.$$

Устремляя n к бесконечности, получим

$$\phi(x) \leq \int_0^\infty h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau\right) dt. \quad (3.9)$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi^{(n)}(\tau) d\tau\right) dt \leq \phi(x). \quad (3.10)$$

Поскольку $\phi^{(n)}(x) \uparrow$ по n , $h(x, t, \tau) \uparrow$ по τ , учитывая теорему Б. Леви, из условия с) и неравенства (3.10) заключаем, что в (3.10) под знаком интеграла можно совершить предельный переход, когда $n \rightarrow \infty$. В результате получим

$$\int_0^\infty h\left(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau\right) dt \leq \phi(x). \quad (3.11)$$

Комбинируя неравенства (3.9) и (3.11), заключаем, что $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению (3.5). Поскольку

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} K(u, t, \tau) du \right) = -K(x, t, \tau) + \sqrt{\lambda}h(x, t, \tau) \quad (3.12)$$

и $\phi \in M(0, +\infty)$, из (3.5) с учетом леммы 2.2 получим $\phi \in W_\infty^1(0, +\infty)$. Решая уравнение $y'(x) + \sqrt{\lambda}y(x) = \phi(x)$ с начальным условием (1.2), приходим к следующему результату.

ЛЕММА 3.1. При выполнении условий а)–d) неоднородная задача (1.1)–(1.3) имеет неотрицательное решение вида

$$y(x) = y_0 e^{-\sqrt{\lambda}x} + \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)} \phi(t) dt \in W_\infty^2(0, +\infty), \quad (3.13)$$

где $\phi \in W_\infty^1(0, +\infty)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\int_0^\infty h(x, t, y_0 e^{-\sqrt{\lambda}t}) dt \leq \phi(x) \leq \sqrt{\lambda}\eta.$$

§ 4. Разрешимость однородной задачи (1.1)–(1.3)

Заметим, что в случае $y_0 = 0$ для построения нетривиального решения задачи (1.1)–(1.3) итерационный процесс (3.6) уже нельзя использовать, так как из условия а) следует, что последовательность $\phi^{(n)}(x)$ (поскольку $y_0 = 0$) сходится к нулю. В настоящем параграфе, в предположении, что оператор типа свертки служит локальной минорантой для исходного оператора Урысона, мы предложим другой итерационный процесс, с помощью которого будет доказано, что задача (1.1)–(1.3) при $y_0 = 0$ имеет ненулевое, неотрицательное и ограниченное решение. Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 4.1 (основная). Пусть выполнены следующие условия:

i) существует число $\eta > 0$ такое, что

$$\int_0^\infty K(x, t, \eta) dt \leq \lambda \eta; \quad (4.1)$$

ii) функция $K(x, t, \tau)$ удовлетворяет условиям а), с), d);

iii) существуют неотрицательная функция $K_0 \in L_1(-\infty, +\infty)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x) dx = \lambda, \quad \nu(K_0) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x K_0(x) dx < 0,$$

и измеримая функция $\mu(x)$, $x \in (0, +\infty)$, $0 \leq \mu(x) \leq 1$, $\mu \uparrow$ по x , $1 - \mu \in L_1(0, +\infty)$, такие, что

$$K(x, t, \tau) \geq \mu(x) K_0(x - t) \tau, \quad (x, t, \tau) \in D_\eta. \quad (4.2)$$

Тогда однородная задача (1.1)–(1.3) обладает неотрицательным нетривиальным решением вида

$$y(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)} Q(t) dt \in W_\infty^2(0, +\infty), \quad (4.3)$$

где $0 \leq Q \in W_\infty^1(0, +\infty)$. Более того, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку уравнение $(D - \sqrt{\lambda}I)f = 0$ в $W_\infty^1(0, +\infty)$ имеет лишь тривиальное решение, то рассмотрим уравнение (3.4). Обозначая

$$Q(x) = y'(x) + \sqrt{\lambda}y(x) \quad (4.4)$$

и используя начальное значение $y(0) = 0$, из (3.4) приходим к следующему однородному нелинейному интегральному уравнению:

$$Q(x) = \int_0^\infty h\left(x, t, \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} Q(\tau) d\tau\right) dt, \quad x > 0. \quad (4.5)$$

Наряду с уравнением (4.5) рассмотрим следующее интегральное уравнение типа свертки:

$$\varphi(x) = \mu(x) \int_0^\infty K^*(x-t)\varphi(t) dt, \quad (4.6)$$

где

$$K^*(x) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}u} K_0(x+u-z) du dz. \quad (4.7)$$

Используя теорему Фубини (см. [12]), убедимся в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\tau) d\tau = 1, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \nu(K^*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x K^*(x) dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}u} \int_{-\infty}^{+\infty} x K_0(x+u-z) dx du dz \\ &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}u} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u+z) K_0(t) dt du dz = \frac{\nu(K_0)}{\lambda} < 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.8), (4.9) следует, что для уравнения (4.6) выполнены все условия леммы 2.3. Следовательно, уравнение (4.6) имеет неотрицательное, монотонно неубывающее и ограниченное решение $\varphi(x) \not\equiv 0$. Обозначим через ξ супремум этой функции: $\xi = \sup_{x>0} \varphi(x)$. Из линейности уравнения (4.6) следует, что функция

$$\varphi^*(x) = \frac{\sqrt{\lambda}\eta}{\xi} \varphi(x) \quad (4.10)$$

также будет удовлетворять (4.6), причем $\sup_{x>0} \varphi^*(x) = \sqrt{\lambda}\eta$.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} Q^{(n+1)}(x) &= \int_0^\infty h\left(x, t, \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} Q^{(n)}(\tau) d\tau\right) dt, \\ Q^{(0)}(x) &\equiv \sqrt{\lambda}\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Докажем следующие свойства последовательности $\{Q^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$:

$$\varphi^*(x) \leq Q^{(n)}(x) \leq \sqrt{\lambda}\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

$$Q^{(n)}(x) \downarrow \quad \text{по } n. \quad (4.13)$$

В случае $n = 0$ соотношение (4.12) очевидно. Предположим, что оно верно для $n = p$, и убедимся в его достоверности в случае $n = p + 1$. Из (4.11) с учетом условий i)–iii) имеем

$$\begin{aligned} Q^{(p+1)}(x) &\leq \int_0^\infty h\left(x, t, \sqrt{\lambda}\eta \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} d\tau\right) dt \leq \int_0^\infty h(x, t, \eta) dt \leq \sqrt{\lambda}\eta, \\ Q^{(p+1)}(x) &\geq \int_0^\infty h\left(x, t, \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \varphi^*(\tau) d\tau\right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z} K\left(x+z, t, \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \varphi^*(\tau) d\tau\right) dz dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} K\left(u, t, \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \varphi^*(\tau) d\tau\right) du dt \\
&\geq \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} \mu(u) K_0(u-t) \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \varphi^*(\tau) d\tau du dt \\
&\geq \mu(x) \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} K_0(u-t) \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \varphi^*(\tau) d\tau du dt \\
&= \mu(x) \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} \int_0^\infty K_0(u-t) \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} \varphi^*(\tau) d\tau du dt \\
&= \mu(x) \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} \int_0^\infty \varphi^*(\tau) \int_\tau^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} K_0(u-t) dt d\tau du \\
&= \mu(x) \int_0^\infty \varphi^*(\tau) \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}(u-x)} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z} K_0(u-z-\tau) dz du d\tau \\
&= \mu(x) \int_0^\infty K^*(x-\tau) \varphi^*(\tau) d\tau = \varphi^*(x).
\end{aligned}$$

Теперь докажем (4.13). Неравенство $Q^{(1)}(x) \leq Q^{(0)}(x)$ сразу следует из (4.2). Предполагая, что $Q^{(n)}(x) \leq Q^{(n-1)}(x)$, в силу локальной монотонности функции $h(x, t, \tau)$ из (4.11) получим

$$Q^{(n+1)}(x) \leq \int_0^\infty h\left(x, t, \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)} Q^{(n-1)}(\tau) d\tau\right) dt = Q^{(n)}(x).$$

Таким образом, из (4.12), (4.13) следует точечная сходимость последовательности $\{Q^{(n)}(x)\}_{n=0}^\infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}(x) = Q(x)$, где

$$\varphi^*(x) \leq Q(x) \leq \sqrt{\lambda}\eta. \quad (4.14)$$

Аналогично, как и при доказательстве леммы 3.1, используя предельную теорему Б. Леви, можно убедиться в том, что $Q(x)$ удовлетворяет уравнению (4.5). Поскольку $\varphi^* \uparrow \sqrt{\lambda}\eta$, из (4.14) следует, что существует $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = \sqrt{\lambda}\eta$. Решая теперь уравнение (4.4) (с учетом $y(0) = 0$), приходим к формуле (4.3). Из (4.5) с учетом (3.12) имеем $Q \in W_\infty^1(0, +\infty)$. Для завершения доказательства остается показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \eta$. С этой целью сначала выберем число $\delta_1 > 0$ такое, что при $x \geq \delta_1$ имеет место неравенство $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}x} \leq \varepsilon$. Оценим величину

$$\begin{aligned}
|y(x) - \eta| &= \left| \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}t} Q(x-t) dt - \eta \sqrt{\lambda} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}t} dt \right| \\
&\leq \int_0^{\delta_1} e^{-\sqrt{\lambda}t} |Q(x-t) - \eta \sqrt{\lambda}| dt + \left| \int_{\delta_1}^x e^{-\sqrt{\lambda}t} |Q(x-t) - \eta \sqrt{\lambda}| dt \right| \\
&\quad + \sqrt{\lambda} \eta \int_x^\infty e^{-\sqrt{\lambda}t} dt \equiv I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $|Q(x) - \sqrt{\lambda}\eta| \leq \varepsilon$ при $x > \delta_2$. Тогда при $x > \delta_1 + \delta_2$ имеют место неравенства

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}, \quad I_2 \leq 2\sqrt{\lambda}\eta\varepsilon, \quad I_3 \leq \varepsilon\sqrt{\lambda}\eta,$$

стало быть,

$$|y(x) - \eta| \leq \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 3\sqrt{\lambda}\eta \right),$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \eta$. Таким образом, теорема доказана.

§ 5. Некоторые частные случаи однородной задачи (1.1)–(1.3)

В настоящем параграфе рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (1.1), для которых выполняются все условия теоремы 4.1. В одном из этих частных случаев будет доказано, что $y(x)$ – монотонно неубывающая функция:

$$-y'' + \lambda y = \int_0^\infty K_0(x-t)G(y(t))dt. \quad (5.1)$$

Здесь G – определенная на $(-\infty, +\infty)$ измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) существует число $\eta > 0$ такое, что $G \in C[0, \eta]$;
- 2) $G(x) \geq x$, $x \in [0, \eta]$, $G(0) = 0$, $G(\eta) = \eta$;
- 3) $G(x) \uparrow$ по x на отрезке $[0, \eta]$.

В качестве функции G можно рассмотреть, например, функции

$$G(x) = \begin{cases} \sqrt{xe^{x-1}}, & \eta = 1, \\ x + \sin x, & \eta = \pi, \\ \sqrt{x}, & \eta = 1. \end{cases}$$

Уравнение (5.1) (вместе с условиями 1)–3)) является частным случаем уравнения (1.1).

Также можно рассматривать следующие частные случаи уравнения (1.1):

$$-y'' + \lambda y = \mu(x) \int_0^\infty K_0(x-t)G(y(t))dt, \quad (5.2)$$

где $\mu(x)$ удовлетворяет условию iii) теоремы 4.1;

$$-y'' + \lambda y = \int_0^\infty R(x,t)K_0(x-t)G(y(t))dt, \quad (5.3)$$

где $R(x,t)$ – измеримая функция на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующему двойному неравенству:

$$\mu(x) \leq R(x,t) \leq \frac{\lambda}{\int_{-\infty}^x K_0(t)dt}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \quad (5.4)$$

и наконец,

$$-y'' + \lambda y = \mu(x) \int_0^\infty K_0(x-t)G(y(t)) dt + \int_0^\infty K_1(x+t)G_1(y(t)) dt, \quad x > 0, \quad (5.5)$$

где $G_1(x)$ – определенная на $(-\infty, +\infty)$ измеримая функция, удовлетворяющая следующим (более слабым, чем 1)–3)) условиям:

- 1') $G_1(x) \in C[0, \eta]$;
- 2') $G_1(x) \geq 0$, $x \in [0, \eta]$, $G_1(0) = 0$, $G_1(\eta) = \eta$;
- 3') $G_1(x) \uparrow$ по x на отрезке $[0, \eta]$.

Ядро K_1 – неотрицательная суммируемая на $(0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая неравенству

$$\int_x^\infty K_1(t) dt \leq \int_x^\infty K_0(t) dt, \quad x > 0. \quad (5.6)$$

В случае (5.1) докажем, что $y(x) \uparrow$ по x . Действительно, сначала убедимся в том, что $Q(x) \uparrow$ по x . С этой целью рассмотрим итерации (4.11) в случае уравнения (5.1):

$$Q^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty h(x-t)G\left(\int_0^t e^{-\sqrt{\lambda}(t-\tau)}Q^{(n)}(\tau) d\tau\right)dt, \quad (5.7)$$

$$Q^{(0)} \equiv \sqrt{\lambda}\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x > 0,$$

где

$$h(x) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}z}K_0(x+z) dz. \quad (5.8)$$

По индукции докажем, что $Q^{(n)}(x) \uparrow$ по x . Для $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что $Q^{(n-1)}(x) \uparrow$ по x , и докажем, что $Q^{(n)}(x) \uparrow$ по x . Для произвольных чисел $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, из (5.7) с учетом условий 1)–3) имеем

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(x_2) - Q^{(n)}(x_1) &= \int_{-\infty}^{x_2} h(u)G\left(\int_0^{x_2-u} e^{-\sqrt{\lambda}z}Q^{(n-1)}(x_2-u-z) dz\right)du \\ &\quad - \int_{-\infty}^{x_1} h(u)G\left(\int_0^{x_1-u} e^{-\sqrt{\lambda}z}Q^{(n-1)}(x_1-u-z) dz\right)du \\ &\geq \int_{-\infty}^{x_1} h(u)\left[G\left(\int_0^{x_2-u} e^{-\sqrt{\lambda}z}Q^{(n-1)}(x_2-u-z) dz\right) \right. \\ &\quad \left. - G\left(\int_0^{x_1-u} e^{-\sqrt{\lambda}z}Q^{(n-1)}(x_1-u-z) dz\right)\right]du \\ &\geq \int_{-\infty}^{x_1} h(u)\left[G\left(\int_0^{x_1-u} e^{-\sqrt{\lambda}z}Q^{(n-1)}(x_2-u-z) dz\right) \right. \\ &\quad \left. - G\left(\int_0^{x_1-u} e^{-\sqrt{\lambda}z}Q^{(n-1)}(x_1-u-z) dz\right)\right]du \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. $Q^{(n)}(x_2) \geq Q^{(n)}(x_1)$, и при $n \rightarrow \infty$ получим $Q(x_2) \geq Q(x_1)$. Теперь докажем, что $y(x) \uparrow$ по x . Для этого формулу (4.3) запишем в следующем виде:

$$y(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{\lambda}z} Q(x-z) dz,$$

и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} y(x_2) - y(x_1) &= \int_0^{x_2} e^{-\sqrt{\lambda}z} Q(x_2-z) dz - \int_0^{x_1} e^{-\sqrt{\lambda}z} Q(x_1-z) dz \\ &\geq \int_0^{x_1} e^{-\sqrt{\lambda}z} (Q(x_2-z) - Q(x_1-z)) dz \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. $y(x) \uparrow$ по x .

Итак, из теоремы 4.1 с учетом доказанного выше получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.1 (о монотонности решения). *Задача (5.1), (1.2), (1.3) в условиях 1)–3) обладает монотонно возрастающим решением вида (4.3).*

Автор выражает благодарность И. В. Воловичу за постановку задачи.

Список литературы

1. G. A. Baraff, "Transmission of electromagnetic waves through a conducting slab. I. The two-sided Wiener-Hopf solution", *J. Math. Phys.*, **9**:3 (1968), 372–384.
2. J. Casti, R. Kalaba, *Imbedding methods in applied mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA–London–Amsterdam, 1973.
3. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10, *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979; фр. пер.: Е. Lifchitz, L. Pitayevski, *Physique théorique*, v. 10, *Cinétique physique*, Mir, Moscow, 1990.
4. B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wan, *Theory and applications of Hopf bifurcation*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **41**, Cambridge, 1981.
5. P. J. Wengersky, W. J. Cunningham, *Gold spring harbor symposia on quantitative biology*, **22**, 1957.
6. J. D. Sargan, "The distribution of wealth", *Econometrica*, **25**:4 (1957), 568–590.
7. А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одного интегро-дифференциального уравнения в задаче распределения дохода", VII-я *Международная школа-семинар "Многомерный статистический анализ и эконометрика"*, М., 2008, 151–153.
8. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skij, P. P. Zabrejko, E. I. Pustynnik, P. E. Sobolevskij, *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff, Leyden, 1976.
9. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "Интегро-дифференциальное уравнение нелокального взаимодействия волн", *Матем. сб.*, **198**:6 (2007), 89–106; англ. пер.: N. B. Yengibaryan, A. Kh. Khachatryan, "Integro-differential equation of non-local wave interaction", *Sb. Math.*, **198**:6 (2007), 839–855.

10. Х. А. Хачатрян, “О разрешимости интегро-дифференциального уравнения на полуплоскости”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **43**:5 (2008), 73–82; англ. пер.: Kh. A. Khachatryan, “Solvability of vector integro-differential equations of convolution type on the semiaxis”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **43**:5 (2008), 305–316.
11. Л. Г. Арабаджян, “Об одном интегральном уравнении теории переноса излучения в неоднородной среде”, *Дифференц. уравн.*, **23**:9 (1984), 1618–1622.
12. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.

Х. А. ХАЧАТРЯН (Kh. A. KHACHATRYAN)
Институт математики НАН Республики Армении,
г. Ереван
E-mail: Khach82@rambler.ru

Поступило в редакцию
11.02.2009