Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Индекс Боля однородного параболического включения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 127–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:25:51

УДК 517.956

В. С. Климов

Индекс Боля однородного параболического включения

Однопараметрическому семейству многозначных отображений эллиптического типа $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t < \infty$, сопоставляется индекс Боля, определяющий асимптотику решений параболического включения $0 \in y' + \mathcal{F}(t)y$. Основное внимание уделяется получению оценок снизу индекса Боля. Исследуется вопрос о характере зависимости решений включения $0 \in y' + \mathcal{F}(t)y$ от начального значения и отображения $\mathcal{F}$. Доказывается устойчивость индекса Боля по отношению к малым в среднем возмущениям.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: включение, однородность, устойчивость, многозначное отображение, решение.

Введение

В теории устойчивости важную роль играют числовые характеристики роста решений дифференциальных уравнений. Наряду с показателями Ляпунова широко применяются их модификации, известные под различными названиями: индексы Боля [1], особые (генеральные) показатели [2] и т. п. (см., например, [3] и приведенную в этой работе библиографию). Основное внимание исследователей привлекали обыкновенные дифференциальные уравнения с линейными ограниченными операторами. Существенно в меньшей степени соответствующие вопросы обсуждались для неограниченных операторов.

В настоящей статье используются идеи теории параболических уравнений [4]–[9], аппарат многозначных отображений и методы дифференциальных включений [10]–[15]. В ряде мест автор существенным образом опирался на собственные результаты из работ [16]–[19].

В § 1 изучаются числовые характеристики однородного многозначного отображения $\mathcal{F}$, имеющие первостепенное значение при исследовании асимптотики решений параболического включения $0 \in y' + \mathcal{F}(t)y$. Приведено определение индекса Боля $\beta(\mathcal{F})$ отображения $\mathcal{F}$ и найдены оценки снизу для $\beta(\mathcal{F})$. Доказывается устойчивость индекса Боля по отношению к малым в среднем возмущениям. В § 2 содержатся достаточно общие результаты о зависимости решений включения $0 \in y' + \mathcal{F}(t)y$ от начального значения и отображения $\mathcal{F}$. На их основе устанавливается слабая полунепрерывность снизу индекса Боля. В § 3 рассматриваются параболические включения на пространствах Соболева. Как полагает автор, большинство результатов ново и для линейных параболических уравнений второго порядка.

Приняты следующие обозначения: $\|x; E\| = \|x\|_E$ – норма элемента x в B -пространстве E ; E^* – сопряженное к E пространство; (x, x^*) – значение функционала x^* из E^* на элементе x из E ; $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ – слабые топологии на E и E^* , порождаемые билинейной формой (x, x^*) ; $L^p(J, E)$, $1 \leq p \leq \infty$,

и $C(J, E)$ – банаховы пространства измеримых по Лебегу–Бохнеру (непрерывных) на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функций со значениями в пространстве E ; как обычно, совпадающие почти всюду (п.в.) относительно лебеговой меры mes_1 функции отождествляются; нормы в пространствах $L^p(J, E)$, $C(J, E)$ вводятся стандартным образом (см., например, [4, гл. IV]); $C_w(J, E)$ – топологическое пространство слабо непрерывных на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функций со значениями в E ; определяющая в $C_w(J, E)$ топологию система полунорм задается равенством $\|v\|_l = \|l(v), C(J)\|$, где $l \in E^*$, $C(J) = C(J, \mathbb{R})$. Все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Далее, $s(x^*, \mathcal{M}) = \sup\{(x, x^*), x \in \mathcal{M}\}$, $x^* \in E^*$ – опорная функция множества $\mathcal{M} \subset E$; $d_E(x, \mathcal{M}) = \inf\{\|x - v\|_E, v \in \mathcal{M}\}$ – расстояние от элемента x из E до множества $\mathcal{M}$, $\|\mathcal{M}\|_E = \sup\{\|x\|_E, x \in \mathcal{M}\}$; $\Theta_E(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \sup\{d_E(x, \mathcal{M}_2), x \in \mathcal{M}_1\}$ – уклонение множества $\mathcal{M}_1$ от множества $\mathcal{M}_2$. Пусть $Cv(E)$ ($Kv(E)$) – совокупность непустых выпуклых замкнутых (компактных) подмножеств пространства E ; $Kv_w(E)$ – часть $Cv(E)$, состоящая из компактных в топологии $\sigma(E, E^*)$ множеств. Через $E_1 \times E_2$ обозначается прямое произведение банаховых пространств E_1, E_2 ; если E_1, E_2 непрерывно вложены в локально выпуклое топологическое пространство E_0 , то с E_1, E_2 связаны банаховы пространства $E_1 \cap E_2$ и $E_1 + E_2$ (см. [4, гл. 1, § 5]); запись $E_1 \rightarrow E_2$ ($E_1 \Rightarrow E_2$) означает, что E_1 непрерывно (соответственно, компактно) вложено в пространство E_2 .

Мнозначное отображение (m -отображение) $\mathcal{F}$ множества Q_1 в множество Q_2 – это оператор, сопоставляющий каждой точке v из Q_1 непустое множество $\mathcal{F}(v) \subset Q_2$, называемое *образом* точки v ; если $Q \subset Q_1$, то $\mathcal{F}(Q) = \bigcup_{v \in Q} \mathcal{F}(v)$ – область значений отображения $\mathcal{F}$ на множестве Q . Для m -отображений, определенных на топологических пространствах (пространствах с мерой) вводятся понятия непрерывности, полунепрерывности и измеримости (см., например, [10]–[15]). В частности, многозначное отображение Γ из топологического пространства $\mathcal{M}$ в банахово пространство E называют *полунепрерывным сверху*, если для любого открытого множества $G \subset E$ его малый прообраз $\Gamma_+^{-1}(G) = \{v \in \mathcal{M}, \Gamma(v) \subset G\}$ есть открытое подмножество в $\mathcal{M}$. Многозначное отображение $\mathcal{F}: Q_1 \rightarrow Q_2$ (где Q_1, Q_2 – подмножества банаховых пространств E_1, E_2) называют [13] *хеминепрерывным сверху*, если для каждого x^* из E_2^* функция $v \rightarrow s(x^*, \mathcal{F}(v))$ полунепрерывна сверху на множестве Q_1 . Если образы m -отображения $\mathcal{F}: Q_1 \rightarrow Q_2$ принадлежат классу $Cv(E_2)$ ($Kv(E_2)$, $Kv_w(E_2)$), будем использовать запись $\mathcal{F}: Q_1 \rightarrow Cv(E_2)$ (соответственно, $\mathcal{F}: Q \rightarrow Kv(E_2)$, $\mathcal{F}: Q_1 \rightarrow Kv_w(E_2)$). Измеримость многозначного отображения $\mathcal{F}: Q_1 \rightarrow Kv(E_2)$ эквивалентна измеримости скалярной функции $v \rightarrow s(x^*, \mathcal{F}(v))$ для каждого x^* из E_2^* . Многозначное отображение $\mathcal{F}: E_1 \rightarrow E_2$ положительно однородно, если $\mathcal{F}(kv) = k\mathcal{F}(v)$ для любой точки $v \in E_1$, $k \geq 0$.

§ 1. Определение и простейшие свойства индекса Боля

1.1. Специальные пространства и отображения. Пусть V – рефлексивное сепарабельное B -пространство с нормой $\|\cdot\|$, H – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$, $V \Rightarrow H$ и V плотно в H , V^* – сопряженное к V пространство, $\|\cdot\|_*$ – норма в V^* . Пространство H отождествляется с сопряженным

к нему H^* , а H^* — с некоторым подпространством пространства V^* . Число (v, v^*) означает и скалярное произведение элементов v, v^* из H , и значение функционала $v^* \in V^*$ на элементе v из V . В наших предположениях операторы вложения

$$j: V \rightarrow H, \quad \tilde{j}: H \rightarrow V^*, \quad I = \tilde{j}j: V \rightarrow V^*$$

ограничены и удовлетворяют условию $(Iu, v) = (ju, jv)$ при любых u, v из V . Сопоставим отрезку $J = [\alpha, \omega] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < \alpha < \omega < +\infty$, банаховы пространства $Y = Y_1 \cap Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$, где

$$Y_1 = L^2(J, V), \quad Y_2 = L^\infty(J, H), \quad Z_1 = L^2(J, V^*), \quad Z_2 = L^1(J, H).$$

Пространство Y (или Y_1, Y_2) можно идентифицировать с сопряженным к пространству Z (соответственно, Z_1, Z_2) посредством билинейной формы

$$\langle y, z \rangle = \int_J (y(t), z(t)) dt. \quad (1)$$

Для того чтобы отметить зависимость пространств Y, Z от J , будем обозначать их $Y(J), Z(J)$ соответственно.

Положим $W = \{y \in Y, y' \in Z\}$. Равенство $y' + z = 0$ означает, что

$$\langle y, \varphi'v \rangle = \langle \varphi v, z \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(J), \quad v \in V.$$

Пространство W с нормой $\|y\|_W = \|y\|_Y + \|y'\|_Z$ непрерывно вложено в пространство $C(J, H)$; это позволяет ввести понятие значения функции y из W в каждой точке отрезка J . Если $y \in W$, то функция $t \rightarrow |y(t)|^2$ абсолютно непрерывна на J и справедлива формула $(|y(t)|^2)' = 2(y(t), y'(t))$ п. в. [4, гл. IV].

Билинейная форма (1), рассматриваемая на прямом произведении пространств $L^\infty(J, H), L^1(J, H)$, определяет топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$ и $\sigma(L^1, L^\infty)$ в пространствах $L^\infty(J, H)$ и $L^1(J, H)$ соответственно. Напомним критерий Данфорда–Петтиса слабой относительной компактности множеств в пространстве $L^1(J, H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [20]. Пусть $\mathfrak{M} \subset L^1(J, H)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) из любой последовательности $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $\mathfrak{M}$ можно извлечь сходящуюся в топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$ подпоследовательность;
- 2) множество $\mathfrak{M}$ равномерно суммируемо, т. е.

$$\int_e |z(t)| dt \leq \omega_1(\text{mes}_1 e)$$

для любых z из $\mathfrak{M}$ и измеримых множеств $e \subset J$ (здесь $\text{mes}_1 e$ — лебегова мера множества e , $\omega_1(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$);

- 3) существует выпуклая функция $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\xi)}{\xi} = \infty \quad \text{и} \quad \sup_{v \in \mathfrak{M}} \int_J \Phi(|v(t)|) dt < \infty.$$

Назовем последовательность ζ_i из Z полусходящейся, если она представима в виде $\zeta_i = f_i + g_i$, где $f_i \in Z_1$, $g_i \in Z_2$ и $f_i \rightarrow f$ в Z_1 , а $g_i \rightarrow g$ в $\sigma(Z_2, Y_2)$. В этом случае будем записывать $\zeta_i \rightarrow \zeta = f + g$.

ЛЕММА 1. Пусть $\|y_i\|_W \leq R$, $i = 1, 2, \dots$, $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$, $\zeta_i \rightarrow \zeta$. Пусть $y_i \rightarrow y$ в $C(J_1, H)$ для каждого отрезка $J_1 = [\alpha_1, \omega]$, $\alpha < \alpha_1 < \omega$. Тогда $(y_i, \zeta_i) \rightarrow (y, \zeta)$ в $\sigma(L^1(J), L^\infty(J))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\zeta_i = f_i + g_i$, $i = 1, 2, \dots$, $f_i \rightarrow f$ в Z_1 , $g_i \rightarrow g$ в $\sigma(Z_2, Y_2)$. Поскольку $y_i \rightarrow y$ в $\sigma(Y, Z)$ и $f_i \rightarrow f$ в Z_1 , то $(y_i, f_i) \rightarrow (y, f)$ в $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Пусть 1_e – индикатор (характеристическая функция) измеримого множества $e \subset J$. Установим равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle 1_e y_i, 1_e g_i \rangle = \langle 1_e y, 1_e g \rangle. \quad (2)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, что

$$\int_{[\alpha, \alpha+\delta]} |(y_i, g_i)| dt + \int_{[\alpha, \alpha+\delta]} |(y, g)| dt < \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Положим $e_1 = [\alpha, \alpha + \delta] \cap e$, $e_2 = [\alpha + \delta, \omega] \cap e$; тогда

$$\langle 1_e y_i, 1_e g_i \rangle = \langle 1_{e_1} y_i, 1_{e_1} g_i \rangle + \langle 1_{e_2} y_i, 1_{e_2} g_i \rangle, \quad |\langle 1_{e_1} y_i, 1_{e_1} g_i \rangle - \langle 1_{e_1} y, 1_{e_1} g \rangle| < \varepsilon.$$

Поскольку $y_i \rightarrow y$ в $C(J_1, H)$, $J_1 = [\alpha + \delta, \omega]$, то $|\langle 1_{e_2} y_i, 1_{e_2} g_i \rangle - \langle 1_{e_2} y, 1_{e_2} g \rangle| < \varepsilon$ при $i > i_0(\varepsilon)$. Из проведенных рассуждений вытекает неравенство

$$|\langle 1_e y_i, 1_e g_i \rangle - \langle 1_e y, 1_e g \rangle| < 2\varepsilon, \quad i > i_0(\varepsilon).$$

Равенство (2), а вместе с ним и лемма доказаны.

Пусть c_1, c_2 – положительные постоянные, $\varphi(t), \gamma(t), \lambda(t)$ – суммируемые на отрезке J функции. Положим для краткости $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $\vec{\psi}(t) = (\varphi(t), \gamma(t), \lambda(t))$. Пусть $\mathcal{F}(t)$, $t \in J$, – семейство многозначных отображений из пространства V в сопряженное к нему пространство V^* . Будем записывать $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi})$, если выполнены условия:

(I) отображения $\mathcal{F}(t)$ допускают представление $\mathcal{F}(t) = \mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)$, где многозначные отображения $\mathcal{A}(t): V \rightarrow Cv(V^*)$, $\mathcal{B}(t): V \rightarrow Cv(V^*)$ положительно однородны, хеминепрерывны сверху и удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathcal{A}(t)v\|_* \leq c_1 \|v\|, \quad |\mathcal{B}(t)v| \leq \varphi(t)|v|, \quad (3)$$

для любого v из V многозначные отображения $t \rightarrow \mathcal{A}(t)v$, $t \rightarrow \mathcal{B}(t)v$ измеримы;

(II) $(v, v^*) + \gamma(t)|v|^2 \geq c_2 \|v\|^2$, $v \in V$, $v^* \in \mathcal{F}(t)v$;

(III) $(v_1 - v_2, v_1^* - v_2^*) \geq -\lambda(t)|v_1 - v_2|^2$, $v_i^* \in \mathcal{F}(t)v_i$, $i = 1, 2$.

Условие (I) влечет за собой суперпозиционную измеримость отображения $\mathcal{F}$: множество $F(y)$ измеримых сечений отображения $t \rightarrow \mathcal{F}(t)y(t)$ непусто для каждого измеримого отображения $y: J \rightarrow V$; сужение F на пространство $Y(J)$ есть отображение со значениями в $Cv(Z(I))$. Справедливо равенство $F(y) = A(y) + B(y)$, где $A(y)$ и $B(y)$ – множества измеримых сечений отображений $t \rightarrow \mathcal{A}(t)y(t)$ и $t \rightarrow \mathcal{B}(t)y(t)$ соответственно. Из оценок (3) вытекают неравенства

$$\|A(y)\|_{Z_1} \leq c_1 \|y\|_{Y_1}, \quad |(By)(t)| \leq \varphi(t)\|y\|_{Y_2} \quad \text{п. в.} \quad (4)$$

Следствием неравенств (4) является усиленная ограниченность отображения F : для каждого ограниченного множества $N \subset Y$ область значений $F(N)$ предкомпактна в топологии $\sigma(Z, Y)$.

Кратко обсудим условия (II), (III). Можно показать, что эллиптические операторы на пространствах Соболева в естественных предположениях относительно коэффициентов удовлетворяют этим условиям (см., например, [16]–[19], а также § 3 настоящей статьи). Для линейных и однозначных операторов $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)$ условие (III) вытекает из условия (II), представляющего вариант неравенства Гординга. В общем случае отображения $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{B}(t)$ многозначны и нелинейны. Условие (III) можно рассматривать как одностороннее условие Липшица; оно аналогично условию полуограниченности вариации отображения $F: Y \rightarrow Cv(Z)$ (см. [5]). Краткости ради данное условие будем обозначать OSL. В близких ситуациях подобное обозначение применялось рядом авторов [21], [22].

1.2. Задача Коши и индекс Боля. Пусть $\mathcal{F}(t)$ – семейство многозначных отображений, принадлежащее классу $\mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi})$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$0 \in y' + \mathcal{F}(t)y. \quad (5)$$

Под его решением будем понимать функцию y класса W , для которой $-y' \in F(y)$. Задача Коши для включения (5) состоит в нахождении решения y , удовлетворяющего начальному условию

$$y(\alpha) = h, \quad h \in H. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi})$, то:

1) задача (5), (6) имеет единственное решение для каждого элемента h из H ;

2) для любых решений $y_1(t), y_2(t)$ включения (5) справедлива оценка

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1(\alpha) - y_2(\alpha)| \exp\left(\int_{\alpha}^t \lambda(\tau) d\tau\right); \quad (7)$$

3) при произвольном $t > \alpha$ оператор $S_t: H \rightarrow H$, сопоставляющий элементу h значение решения $y(t)$ задачи (5), (6) в точке t , вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения задачи (5), (6) следует из результатов работы [16]. Если $y_1(t), y_2(t)$ – два решения включения (5), то, используя (5) и условие (III), получаем

$$\frac{1}{2}(|y_1 - y_2|^2)' = (y_1 - y_2, y_1' - y_2') \leq \lambda(\cdot)|y_1 - y_2|^2.$$

Это дифференциальное неравенство обычным образом влечет за собой оценку (7) и, в частности, единственность решения задачи (5), (6). Из (7) вытекает непрерывность оператора сдвига S_t . Компактность оператора S_t при $t > \alpha$ установлена в [16]. Лемма доказана.

Если $y(t)$ – решение включения (5), то из условия (II) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}(|y(t)|^2)' + c_2\|y(t)\|^2 \leq \gamma(t)|y(t)|^2.$$

Это дифференциальное неравенство влечет за собой оценки

$$|y(t)| \leq |y(\alpha)| \exp\left(\int_{\alpha}^t \gamma(\tau) d\tau\right), \quad (8)$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \|y(t)\|^2 dt \leq k^2(T)|y(\alpha)|^2. \quad (9)$$

Заметим, что оценка (8) сохраняется и в случае, когда условие (II) выполняется с константой $c_2 = 0$. Постоянная $k(T)$ в неравенстве (9) зависит лишь от T и постоянной $c_2 > 0$ в условии (II).

Предшествующие построения легко переносятся на случай, когда t изменяется на луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Пусть c_1, c_2 – положительные постоянные, $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – суммируемые на каждом отрезке $[0, l]$ функции. Положим, как и ранее, $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $\vec{\psi}(t) = (\varphi(t), \gamma(t), \lambda(t))$ и обозначим через $\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+, \vec{c}, \vec{\psi})$ совокупность многозначных отображений $\mathcal{F}(t): V \rightarrow V^*$, $0 \leq t < \infty$, сужение которой на любой содержащийся в $\mathbb{R}_+$ конечный отрезок J принадлежит классу $\mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi})$. Условие $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}_+, \vec{c}, \vec{\psi})$ гарантирует однозначную разрешимость задачи (5), (6) для любого отрезка $J = [\alpha, \omega] \subset \mathbb{R}_+$ и произвольного элемента h из H . Каждое решение задачи (5), (6) может быть продолжено на весь луч $[\alpha, \infty)$.

Будем говорить, что отображение $\mathcal{F}$ класса $\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+, \vec{c}, \vec{\psi})$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$, где $\nu \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N} > 0$, если все решения включения (5) подчиняются оценке

$$|y(t)| \leq \mathcal{N} e^{-\nu(t-s)} |y(s)|, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (10)$$

Точную верхнюю грань чисел ν , для которых $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\nu)$, назовем *индексом Боля* и обозначим через $\beta(\mathcal{F})$. Основное внимание далее уделяется оценкам снизу индекса Боля. Достаточно простая оценка следует из неравенства (8). Справедлива

ЛЕММА 3. Пусть отображение $\mathcal{F}$ удовлетворяет оценке

$$(v, v^*) \geq \mu(t) |v|^2, \quad v \in V, \quad v^* \in \mathcal{F}(t)v, \quad (11)$$

где $\mu(t)$ – суммируемая на каждом конечном интервале J функция, причем

$$\inf_{0 \leq t-s \leq 1} \int_s^t \mu(\tau) d\tau > -\infty. \quad (12)$$

Тогда для любого положительного числа T справедливо неравенство

$$\beta(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{T} \inf_{t_0 \geq 0} \int_{t_0}^{t_0+T} \mu(\tau) d\tau. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – положительное число. Из условия (12) вытекает конечность правой части неравенства (13). Фиксируем число ν_1 так, чтобы при любом $t_0 \geq 0$ имело место неравенство

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mu(\tau) d\tau \geq \nu_1.$$

Условие (12) влечет за собой оценку

$$\int_{t_0}^{t_0+\theta T} \mu(\tau) d\tau \geq \nu_0, \quad t_0 \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

где постоянная ν_0 не зависит от t_0 и θ .

Пусть $t > s \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ и $t - s = (k + \theta)T$, $0 \leq \theta < 1$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_s^t \mu(\tau) d\tau &= \int_s^{s+\theta T} \mu(\tau) d\tau + \int_{s+\theta T}^t \mu(\tau) d\tau \geq \nu_0 + kT\nu_1 \\ &\geq \nu_0 + T\nu_1 \left(\frac{t-s}{T} - 1 \right) = \nu_0 - T\nu_1 + \nu_1(t-s). \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство с оценкой (8), относящейся к случаю $c_2 = 0$, $\psi(t) = -\mu(t)$, получаем

$$|y(t)| \leq e^{T\nu_1 - \nu_0} e^{-\nu_1(t-s)} |y(s)|.$$

Это и приводит к оценке (13). Лемма доказана.

Класс $\mathfrak{A}$ инвариантен относительно сдвигов: вместе с отображением $\mathcal{F}$ в класс $\mathfrak{A}$ входят m -отображения $\mathcal{F} + kI$, $k \in \mathbb{R}$, и $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}(\cdot + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Если $y(t)$ – решение включения (5), то функция $u(t) = y(t)e^{-kt}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(t)e^{-kt} - ky(t)e^{-kt} \in -\mathcal{F}(t)y(t)e^{-kt} - ky(t)e^{-kt} \\ &= -\mathcal{F}(t)u(t) - ku(t) = -(\mathcal{F} + kI)(t)u(t), \end{aligned}$$

т.е. u – решение включения $0 \in u' + \mathcal{F}(t)u + ku$; верно и обратное: каждое решение включения $0 \in u' + \mathcal{F}(t)u + ku$ порождается указанным выше образом. Поэтому включения $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$ и $\mathcal{F} + kI \in \mathfrak{B}(\nu + k, \mathcal{N})$ эквивалентны.

Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$, то $\mathcal{F}_\tau \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$ при любом $\tau > 0$. В определенном смысле верно и обратное: включение $\mathcal{F}_\tau \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$ влечет за собой включение $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N}_1)$ с некоторым $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(\tau)$, это следует из оценки (8). Из проведенных рассуждений вытекает

ЛЕММА 4. *Справедливы равенства*

$$\beta(\mathcal{F} + kI) = \beta(\mathcal{F}) + k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \beta(\mathcal{F}_\tau) = \beta(\mathcal{F}), \quad \tau > 0.$$

Равенство $\beta(\mathcal{F}_\tau) = \beta(\mathcal{F})$ позволяет утверждать, что индекс Боля $\beta(\mathcal{F})$ зависит лишь от поведения m -отображения $\mathcal{F}(t)$ при достаточно больших t . Например, из (13) и леммы 4 вытекает оценка

$$\beta(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{T} \inf_{t \geq s_0} \int_t^{t+T} \mu(\tau) d\tau,$$

в которой s_0, T – произвольные положительные числа.

Более подробно рассмотрим равенства $\beta(\mathcal{F} + kI) = \beta(\mathcal{F}) + k$, $k \in \mathbb{R}$. Назовем нулевое решение включения (5) *экспоненциально устойчивым*, если $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$ при некоторых положительных числах $\nu, \mathcal{N}$. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения включения (5) эквивалентна неравенству $\beta(\mathcal{F}) > 0$. Объединяя это замечание с леммой 4, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Оценка $\beta(\mathcal{F}) > \beta_0$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости нулевого решения включения $0 \in y' + \mathcal{F}(t)y - \beta_0 y$.*

ЛЕММА 5. Если существуют такие числа $T > 0$, $K > 0$ и $q \in (0, 1)$, что для любого решения y включения (5) и любого $t_0 \geq 0$ верны оценки

$$\max\{|y(t)|, t_0 \leq t \leq t_0 + T\} \leq K|y(t_0)|, \quad (14)$$

$$\min\{|y(t)|, t_0 \leq t \leq t_0 + T\} \leq q|y(t_0)|, \quad (15)$$

то $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$, $\mathcal{N} = K/q$, $\nu = -\ln q/T$, и, таким образом, нулевое решение включения (5) экспоненциально устойчиво, $\beta(\mathcal{F}) \geq \nu$.

Обратно, если $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$ с положительными ν , $\mathcal{N}$, то справедливы оценки (14), (15) при $K = \mathcal{N}$, $q = \mathcal{N}e^{-\nu T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первого утверждения составляет содержание леммы 1 работы [19]. Второе утверждение вытекает из оценки (10). Лемма доказана.

1.3. Полунепрерывность снизу индекса Боля. Пусть $1 \leq p < \infty$. Введем пространство $M_p(\mathbb{R}_+, E)$ ограниченных по Степанову функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в B -пространстве E . Оно состоит из измеримых по Лебегу–Бохнеру функций $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow E$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|f; M_p\| = \sup\{\|f; L^p(J_1, E)\|\},$$

где точная верхняя грань $\sup$ берется по всем отрезкам $J_1 \subset \mathbb{R}_+$ единичной длины. Полагаем $M_p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = M_p(\mathbb{R}_+)$.

Пусть ρ_1 – неотрицательная постоянная, $\rho_2(t)$ – неотрицательная функция класса $M_1(\mathbb{R}_+)$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ и $\|\rho\| = |\rho_1| + \|\rho_2; M_1(\mathbb{R}_+)\|$. Введем в рассмотрение семейство многозначных отображений $\mathcal{F}^\rho(t): V \rightarrow V^*$, полагая

$$\mathcal{F}^\rho(t)v = \mathcal{F}(t)v + \rho_1\|v\|\mathbf{B}_{V^*} + \rho_2(t)|v|\mathbf{B}_H,$$

где $t \geq 0$, $v \in V$, $\mathbf{B}_{V^*} = \{v^* \in V^*, \|v^*\|_* \leq 1\}$, $\mathbf{B}_H = \{h \in H, |h| \leq 1\}$. В пределах этого пункта считаем, что $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}_+, \vec{c}, \vec{\psi})$, причем

$$\vec{\psi} \in M_1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3). \quad (16)$$

Семейство m -отображений $\mathcal{F}^\rho(t)$ удовлетворяет условию (I). Действительно, достаточно положить

$$\mathcal{A}^\rho(t)v = \mathcal{A}(t)v + \rho_1\|v\|\mathbf{B}_{V^*}, \quad \mathcal{B}^\rho(t)v = \mathcal{B}(t)v + \rho_2(t)|v|\mathbf{B}_H.$$

Легко проверяются аналоги соотношений (3), (4):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\rho(t) &= \mathcal{A}^\rho(t) + \mathcal{B}^\rho(t), & \|\mathcal{A}^\rho(t)v\|_* &\leq (c_1 + \rho_1)\|v\|, \\ |\mathcal{B}^\rho(t)v| &\leq (\varphi(t) + \rho_2(t))|v|, \end{aligned}$$

а также свойства однородности и хеминепрерывности отображений $\mathcal{F}^\rho(t)$. При достаточно малой величине ρ_1 отображение $\mathcal{F}^\rho(t)$ удовлетворяет некоторому аналогу условия (II). В самом деле, при $0 \leq \rho_1 < c_2$ справедливо вытекающее из включения $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, \vec{c}, \vec{\psi})$ неравенство

$$(v, v^*) + (\gamma(t) + \rho_2(t))|v|^2 \geq (c_2 - \rho_1)\|v\|^2, \quad (17)$$

где $v \in V$, $v^* \in \mathcal{F}^\rho(t)v$.

Дифференциальное включение

$$0 \in u' + \mathcal{F}^\rho(t)u \quad (18)$$

можно рассматривать как возмущение дифференциального включения (5). Под его решением будем понимать функцию $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow H$, сужение которой на любой содержащийся в луче $\mathbb{R}_+$ отрезок J принадлежит классу $W(J)$, при этом $-u'(t)$ есть измеримое сечение многозначного отображения $\mathcal{F}^\rho(t)u(t)$. Неравенство (17) аналогично условию (II), поэтому для решений $u(t)$ включения (18) имеют место следующие варианты оценок (8), (9):

$$|u(t)| \leq |u(t_0)| \exp\left(\int_{t_0}^t (\gamma(\tau) + \rho_2(\tau)) d\tau\right), \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \|u(t)\|^2 dt \leq \kappa^2(T) |u(t_0)|^2, \quad (19)$$

постоянная $\kappa(T)$ в (19) зависит лишь от $\|\psi; M_1\|$, T и постоянной $c_2 - \rho_1 > 0$.

Однородность отображения $\mathcal{F}^\rho$ позволяет так же, как и выше, определить индекс Боля $\beta(\mathcal{F}^\rho)$. Именно, запишем $\mathcal{F}^\rho \in \mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)$, если для всех решений $u(t)$ включения (18) выполняется неравенство

$$|u(t)| \leq \mathcal{N}_1 \exp(-\nu_1(t-s)) |u(s)|, \quad 0 \leq s \leq t.$$

По определению $\beta(\mathcal{F}^\rho) = \sup\{\nu_1, \mathcal{F}^\rho \in \mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)\}$. Условие $\beta(\mathcal{F}^\rho) > 0$ эквивалентно экспоненциальной устойчивости нулевого решения включения (18).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{F} \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}_+, \vec{c}, \vec{\psi})$ и выполнено условие (16). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $\rho = (\rho_1, \rho_2(t))$, $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$, $\rho_2(t) -$ неотрицательная функция класса $M_1(\mathbb{R}_+)$ и

$$\rho_1 + \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} \rho_2(\tau) d\tau < \delta, \quad (20)$$

то $\beta(\mathcal{F}^\rho) > \beta(\mathcal{F}) - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО удобно разбить на три части.

1. Предположим сначала, что $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$ с положительными $\nu, \mathcal{N}$. Установим следующее: существуют такие положительные числа $\nu_1, \mathcal{N}_1, \delta_1$, зависящие лишь от $\nu, \mathcal{N}$ и $\|\psi; M_1\|$, что если $\|\rho\| = \rho_1 + \|\rho_2; M_1\| < \delta_1$, то $\mathcal{F}^\rho \in \mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)$.

Пусть $y(t)$ – решение включения (5), $u(t)$ – решение включения (18), и пусть $y(t_0) = u(t_0)$ при некотором $t_0 \geq 0$. Не нарушая общности, будем считать, что $\|\rho\| = \rho_1 + \|\rho_2; M_1\| \leq 1$, $2\rho_1 < c_2$. Справедливы равенства $0 = y' + z$, $0 = u' + w + \zeta_1 + \zeta_2$, где z, w, ζ_1, ζ_2 – измеримые функции,

$$\begin{aligned} z(t) &\in \mathcal{F}(t)y(t), & w(t) &\in \mathcal{F}(t)u(t), \\ \|\zeta_1(t)\|_* &\leq \rho_1 \|u(t)\|, & |\zeta_2(t)| &\leq \rho_2(t) |u(t)| \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Используя данные соотношения и условие (III), получаем последовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|y - u|^2)' &= (y - u, y' - u') = (y - u, w - z + \zeta_1 + \zeta_2) \\ &= (y - u, w - z) + (y - u, \zeta_1 + \zeta_2) \\ &\leq \lambda |y - u|^2 + \|y - u\| \|\zeta_1\| + |y - u| |\zeta_2| \\ &\leq \lambda |y - u|^2 + \|y - u\| \rho_1 \|u\| + |y - u| \rho_2(t) |u(t)| \\ &\leq \lambda |y - u|^2 + \frac{\rho_1}{2} (\|y - u\|^2 + \|u\|^2) + \frac{\rho_2}{2} (|y - u|^2 + |u|^2). \end{aligned}$$

Установленное дифференциальное неравенство и условие $u(t_0) = y(t_0)$ приводят при $t \geq t_0$ к оценке

$$|y(t) - u(t)|^2 \leq \int_{t_0}^t \mathcal{K}(t, s) (\rho_1 (\|y(s) - u(s)\|^2 + \|u(s)\|^2) + \rho_2(s) |u(s)|^2) ds, \quad (21)$$

в которой

$$\mathcal{K}(t, s) = \exp \left(\int_s^t [2\lambda(\tau) + \rho_2(\tau)] d\tau \right).$$

Из условий $\lambda(\cdot) \in M_1(\mathbb{R}_+)$, $\rho_2(\cdot) \in M_1(\mathbb{R}_+)$ вытекает ограниченность функции $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$. Объединяя оценку (21) для $|y(t) - u(t)|$ с оценками (19), приходим к неравенству

$$|y(t) - u(t)| \leq \mu(T) \left(\rho_1 + \int_{t_0}^{t_0+T} \rho_2(\tau) d\tau \right)^{1/2} |y(t_0)|, \quad (22)$$

где постоянная $\mu(T)$ зависит лишь от $\|\vec{\psi}; M_1\|$ и T .

Пусть $|y(t_0)| = 1$. Для $y(t)$ имеет место оценка (10) с положительными $\nu, \mathcal{N}$. Положим $T = \nu^{-1} \ln(4\mathcal{N}) > 0$. Подобный выбор числа T и оценка (10) приводят к неравенству $|y(t_0 + T)| \leq \frac{1}{4}$. Если $\|\rho\| < \delta_1$ и положительное число δ_1 настолько мало, что

$$\mu(T) \left(\rho_1 + \int_{t_0}^{t_0+T} \rho_2(\tau) d\tau \right)^{1/2} < \frac{1}{4} \quad \forall t_0 \geq 0,$$

то из (22) следуют оценки

$$|u(t)| \leq |u(t) - y(t)| + |y(t)| \leq \left(\mathcal{N} + \frac{1}{4} \right) |u(t_0)|, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

$$|u(t_0 + T)| \leq |u(t_0 + T) - y(t_0 + T)| + |y(t_0 + T)| \leq \frac{1}{2} |u(t_0)|,$$

аналогичные (14), (15). В силу леммы 5 отображение $\mathcal{F}$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)$, где $\nu_1, \mathcal{N}_1$ – положительные постоянные, зависящие лишь от чисел $\nu, \mathcal{N}$ и величины $\|\vec{\psi}; M_1\|$.

2. Теперь откажемся от предположения $\beta(\mathcal{F}) > 0$. Докажем следующее утверждение: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящее лишь от ε и $\|\vec{\psi}; M_1\|$, что если $\|\rho\| < \delta$, то $\mathcal{F}^\rho \in \mathfrak{B}(\beta(\mathcal{F}) - \varepsilon, \mathcal{N})$ с некоторым положительным $\mathcal{N}$.

Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ имеем $\beta(\mathcal{F} - (\beta(\mathcal{F}) - \varepsilon)I) = \varepsilon > 0$. В силу только что доказанного отображение $\mathcal{F}^\rho - (\beta(\mathcal{F}) - \varepsilon)I$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)$ с некоторыми $\nu_1, \mathcal{N}_1$, если только норма $\|\rho\|$ достаточно мала. Отсюда вытекает требуемый результат.

3. Индексы Боля отображений $\mathcal{F}(t + t_0)$, $\mathcal{F}^\rho(t + t_0)$ совпадают с индексами Боля отображений $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^\rho$ соответственно. Функция $\tilde{\rho}(t) = \rho(t + t_0)$ при любом $t_0 \geq 0$ принадлежит $M_1(\mathbb{R}_+)$; из (20) следует оценка $\rho_1 + \|\tilde{\rho}; M_1\| < \delta$ при достаточно большом t_0 . Поэтому теорема вытекает из установленного в п. 2 утверждения. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, в частности, что экспоненциальная устойчивость тривиального решения включения (5) влечет за собой экспоненциальную устойчивость нулевого решения включения (18) при $\|\rho\| < \delta$, где δ – достаточно малое положительное число. Утверждения такого рода называют теоремами об устойчивости по первому приближению; подобные теоремы хорошо известны для дифференциальных уравнений.

§ 2. Последовательность дифференциальных включений

2.1. Леммы о компактности. Рассмотрим аналогичную (5) *последовательность дифференциальных включений* (3_i):

$$0 \in y' + \mathcal{F}_i(t)y,$$

где $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi}_i)$, промежуток $J = [\alpha, \omega]$, $-\infty < \alpha < \omega < \infty$, и вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависят от i , а последовательность $\vec{\psi}_i = (\varphi_i, \gamma_i, \lambda_i): J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \mathbb{N}$, равномерно суммируема по отрезку J .

ЛЕММА 6. *Последовательность y_i решений дифференциальных включений (3_i) компактна в пространстве $C(J, H)$ в том и только в том случае, если последовательность $y_i(\alpha)$ компактна в пространстве H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить следующее: *если последовательность $h_i = y_i(\alpha)$ сходится в пространстве H , то из последовательности y_i можно извлечь сходящуюся в пространстве $C(J, H)$ подпоследовательность.* Функции y_i принадлежат пространству $W = W(J)$, и $-y'_i = z_i \in F_i(y_i)$; здесь и далее через F_i обозначается оператор суперпозиции, порождаемый многозначным отображением $\mathcal{F}_i$. Поскольку $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi}_i)$, справедливы соотношения

$$\frac{1}{2}(|y_i(t)|^2)' + c_2 \|y_i(t)\|^2 \leq \gamma_i(t) |y_i(t)|^2,$$

приводящие к оценкам

$$|y_i(t)| \leq |y_i(\alpha)| \exp\left(\int_{\alpha}^t \gamma_i(\tau) d\tau\right), \quad \int_J \|y_i(t)\|^2 dt \leq k^2 |y_i(\alpha)|^2, \quad (23)$$

$$|y_i(t)|^2 - |y_i(s)|^2 \leq 2 \int_s^t \gamma_i(\tau) |y_i(\tau)|^2 d\tau, \quad \alpha \leq s < t \leq \omega. \quad (24)$$

Первая из оценок (23) влечет за собой ограниченность последовательности y_i в пространстве $C(J, H)$. Постоянная k во второй оценке не зависит от i , поэтому из (23) вытекает ограниченность последовательности y_i в пространстве $Y = L^2(J, V) \cap L^\infty(J, H)$. Неравенство (24) ограничивает сверху скорость роста функций $|y_i(t)|^2$ на отрезке J .

Не нарушая общности, можно считать, что последовательности y_i , z_i сходятся к элементам y , z в слабых топологиях $\sigma(Y, Z)$ и $\sigma(Z, Y)$ соответственно. Поскольку оператор дифференцирования слабо замкнут, то равенство $-y'_i = z_i$, $i \in \mathbb{N}$, при $i \rightarrow \infty$ переходит в равенство $-y' = z$; в частности, $y \in W$. Для любого элемента v из V справедливо равенство

$$(y_i(t), v)' = -(v, z_i(t)) \quad \text{п.в. на } J.$$

Ввиду ограниченности последовательности y_i в пространстве $C(J, H)$ последнее равенство влечет компактность последовательности y_i в пространстве $C_w(J, H)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y_i \rightarrow y$ в $C_w(J, H)$. Отсюда, в свою очередь (см., например, [8, гл. IX, § 2]), вытекает сходимость $y_i \rightarrow y$ в пространстве $L^2(J, H)$. Проведем, если это необходимо, прореживание последовательности y_i , можно добиться того, что последовательность $y_i(t)$ почти всюду на отрезке J сходится к $y(t)$ в метрике пространства H . Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что последовательность y_i обладает свойством

$$y_i \rightarrow y \quad (25)$$

в топологиях $\sigma(Y, Z)$, $C_w(J, H)$, $L^2(J, H)$ и п.в. на отрезке J , кроме того, $y_i(\alpha) \rightarrow y(\alpha)$ в метрике пространства H . Из оценки (24) вытекает неравенство

$$|y_i(t)|^2 - |y_i(s)|^2 \leq \phi(t - s), \quad (26)$$

в котором $\alpha \leq s \leq t \leq \omega$, функция $\phi(\vartheta)$ определена равенством

$$\phi(\vartheta) = \sup \left\{ 2 \int_s^t \gamma_k(\tau) |y_k(\tau)|^2 d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq t - s \leq \vartheta \right\}.$$

Функция ϕ одинакова для всех индексов i и возрастает. Поскольку последовательность y_k ограничена в пространстве $C(J, H)$, то $|y_k(\tau)| < M_0$, где постоянная M_0 не зависит от k и τ . Справедлива оценка

$$\phi(\vartheta) \leq 2M_0^2 \sup \left\{ \int_s^t |\gamma_k(\tau)| d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq t - s \leq \vartheta \right\}.$$

Так как последовательность γ_k равномерно суммируема по отрезку J , то из последней оценки вытекает равенство $\phi(+0) = 0$.

Установим сходимость $y_i \rightarrow y$ в $C(J, H)$. В предположении противного найдутся положительное число ε и последовательность t_m из J , сходящаяся к t_0 и такая, что $|y_m(t_m) - y(t_m)| > 2\varepsilon$ для любого числа m . Поскольку $y \in C(J, H)$, отсюда следует неравенство $|y_m(t_m) - y(t_0)| > \varepsilon$ при $m > m_0$. С другой стороны, из (25) вытекает сходимость $y_m(t_m) \rightarrow y(t_0)$ в $\sigma(H, H)$.

Поскольку $|y_m(t_m) - y(t_0)| > \varepsilon$, справедливы оценки

$$|y_m(t_m)|^2 > |y(t_0)|^2 + 3\varepsilon_1, \quad (27)$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $m > m_1$.

Докажем неравенство $t_0 > \alpha$. Действительно, предположение $t_0 = \alpha$ и неравенство (27) влекут за собой оценку $|y_m(t_m)|^2 > |y(\alpha)|^2 + 3\varepsilon_1$, $m > m_1$. Соединяя эту оценку с неравенством (26), получаем

$$|y(\alpha)|^2 + 3\varepsilon_1 < |y_m(t_m)|^2 \leq |y_m(\alpha)|^2 + \phi(t_m - \alpha).$$

Поскольку $y_m(\alpha) \rightarrow y(\alpha)$ при $m \rightarrow \infty$, $\phi(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, последнее неравенство противоречиво, а это и доказывает неравенство $t_0 > \alpha$.

Фиксируем положительное число δ так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] &\subset (\alpha, \omega), & \phi(4\delta) &< \varepsilon_1, \\ |y(t_0)|^2 &> |y(s)|^2 - \varepsilon_1 & \forall s &\in [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta]. \end{aligned}$$

Так как последовательность t_m сходится к t_0 , то $t_m \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ при достаточно больших m , $m_2 < m$. Если $s \in [t_0 - 2\delta, t_0 - \delta]$, то $s < t_m$ при $m > m_2$. Из (26), (27) вытекают соотношения

$$|y_m(s)|^2 \geq |y_m(t_m)|^2 - \phi(t_m - s) \geq |y(t_0)|^2 + 2\varepsilon_1 \geq |y(s)|^2 + \varepsilon_1 \quad \forall s \in [t_0 - 2\delta, t_0 - \delta].$$

Полученное неравенство противоречит тому, что последовательность $y_i(t)$ сходится к $y(t)$ в норме H почти всюду в отрезке J . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Последовательность y_i решений дифференциальных включений (3_i) ограничена в пространстве $C(J, H)$ в том и только в том случае, если последовательность $y_i(\alpha)$ ограничена в пространстве H ; при этом последовательность $(t - \alpha)y_i(t)$, $t \in J$, компактна в пространстве $C(J, H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $y_i(\alpha)$ начальных значений решений y_i дифференциальных включений (3_i) ограничена в пространстве H . Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 6, нетрудно установить следующее:

- 1) последовательность y_i ограничена в пространствах $C(J, H)$, Y и W ;
- 2) после некоторого прореживания последовательность y_i обладает свойствами (25);
- 3) в частности, $y_i(t)$ сходится к $y(t)$ в норме H почти всюду на отрезке J .

Фиксируем число α_1 из (α, ω) так, что $y_i(\alpha_1) \rightarrow y(\alpha_1)$ в метрике H . На отрезке $J_1 = [\alpha_1, \omega]$ последовательность y_i удовлетворяет условиям леммы 6, поэтому последовательность y_i компактна в пространстве $C(J_1, H)$. В качестве α_1 можно взять сколь угодно близкое к α число, поэтому установленный результат влечет за собой компактность последовательности $(t - \alpha)y_i(t)$ в пространстве $C(J, H)$. Лемма доказана.

2.2. Последовательность задач Коши. Ниже E_0 – плотное в пространстве V подпространство, $\Pi(J, E_0)$ – совокупность функций $u: J \rightarrow E_0$, постоянных на промежутках, образующих конечное разбиение отрезка J . Через $\bar{\Pi}(J, E_0)$ обозначим замыкание множества $\Pi(J, E_0)$ в метрике Y . Очевидно, что $L^2(J, V) \cap C(J, H) \subset \bar{\Pi}(J, E_0)$. Далее $\langle w, z \rangle$ – билинейная форма (1), определяющая слабые топологии $\sigma(Y, Z)$, $\sigma(Z, Y)$ в пространствах Y и Z соответственно. Введем последовательность m -отображений $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющих условиям:

- a₁) $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi}_i)$, где вектор $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависит от i , последовательность $\vec{\psi}_i$ равномерно суммируема на отрезке J ;
- a₂) для любого отрезка $\Delta \subset J$ и любых v, w из V справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \int_{\Delta} s(w, \mathcal{F}_i(t)v) dt \leq \int_{\Delta} s(w, \mathcal{F}_0(t)v) dt.$$

Обозначим через F_i оператор суперпозиции, порождаемый m -отображением $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$. Многозначное отображение $F_i: Y \rightarrow Cv(Z)$ положительно однородно и хеминепрерывно сверху. Для любой функции v из Y опорная функция $s(\cdot, F_i(v)): Y \rightarrow \mathbb{R}$ множества $F_i(v)$ класса $Kv_w(Z)$ определяется равенством $s(w, F_i(v)) = \max\{\langle w, z \rangle, z \in F_i(v)\}$. Если $u \in \Pi(J, E_0)$, то многозначное отображение $t \rightarrow \mathcal{F}_i(t)u(t)$ измеримо и

$$s(w, F_i(u)) = \int_J s(w(t), \mathcal{F}_i(t)u(t)) dt.$$

Положим

$$\mathcal{P}_i(w) = \int_J \lambda_i(t) |w(t)|^2 dt, \quad w \in Y.$$

ЛЕММА 8. Для всех функций $w \in \overline{\Pi(J, E_0)}$, $u \in \Pi(J, E_0)$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} s(w, F_i(u)) \leq s(w, F_0(u)). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u, w – функции класса $\Pi(J, E_0)$. Без ограничения общности можно считать, что функции u, w постоянны на промежутках $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, образующих разбиение отрезка J : $u(t) = u_p$, $w(t) = w_p$, $t \in \Delta_p$, $p = 1, \dots, k$. Тогда

$$s(w, F_i(u)) = \int_J s(w(t), \mathcal{F}_i(t)u(t)) dt = \sum_{p=1}^k \int_{\Delta_p} s(w_p, \mathcal{F}_i(t)u_p) dt.$$

В силу условия a_2) имеем

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \int_{\Delta_p} s(w_p, \mathcal{F}_i(t)u_p) dt \leq \int_{\Delta_p} s(w_p, \mathcal{F}_0(t)u_p) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} s(w, F_i(u)) &= \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^k \int_{\Delta_p} s(w_p, \mathcal{F}_i(t)u_p) dt \leq \sum_{p=1}^k \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \int_{\Delta_p} s(w_p, \mathcal{F}_i(t)u_p) dt \\ &\leq \sum_{p=1}^k \int_{\Delta_p} s(w_p, \mathcal{F}_0(t)u_p) dt = s(w, F_0(u)), \end{aligned}$$

что и доказывает (28) для функций w из $\Pi(J, E_0)$. По непрерывности оценка (28) может быть распространена на все функции w из $\overline{\Pi(J, E_0)}$. В частности, она имеет место для всех функций w из $L^2(J, V) \cap C(J, H)$. Лемма доказана.

Введем теперь следующее условие:

a_3) если $u \in \Pi(J, E_0)$, то для каждого бесконечного множества $\mathbb{N}_1$ натуральных чисел существует такая полусходящаяся подпоследовательность ζ_i , что $\zeta_i \in F_i(u)$, $i \in \mathbb{N}_1$.

Способы проверки условия a_3) обсуждаются в следующем пункте. Нам требуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство, $\mathcal{M} \in Kv_w(\mathcal{E})$. Пусть $\mathcal{U}_0$ – линейное подпространство пространства $\mathcal{E}^*$ и замыкание $\mathcal{U}_0$ в топологии $\sigma(\mathcal{E}^*, \mathcal{E})$ совпадает с пространством $\mathcal{E}^*$. Если $z \in \mathcal{E}$ и

$$s(v, \mathcal{M}) \geq \langle v, z \rangle \quad \forall v \in \mathcal{U}_0, \quad (29)$$

то $z \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w – произвольный элемент из $\mathcal{E}^*$. Поскольку пространство $\mathcal{U}_0$ выпукло и слабо плотно в пространстве $\mathcal{E}^*$, существует (обобщенная) последовательность v_k , сходящаяся к w в топологии Макки $\tau(\mathcal{E}^*, \mathcal{E})$ –

наиболее сильной из топологий, согласующихся с двойственностью между пространствами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$. Функциональная последовательность $u \rightarrow \langle v_k, u \rangle$ сходится равномерно на каждом множестве класса $Kv_w(\mathcal{E})$. Отсюда следует, что числовые последовательности $\langle v_k, z \rangle$, $s(v_k, \mathcal{M})$ сходятся к $\langle w, z \rangle$ и $s(w, \mathcal{M})$ соответственно. Переходя к пределу в неравенстве (29), получаем соотношение $s(w, \mathcal{M}) \geq \langle w, z \rangle$, справедливое для произвольного w из $\mathcal{E}$. Теперь включение $z \in \mathcal{M}$ очевидно. Предложение доказано.

Из предложения 2 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $y \in Y$, $z \in Z$. Если $s(v, F_0(y)) \geq \langle v, z \rangle$ для всех функций v класса $L^2(J, V) \cap C(J, H)$, то $z \in F_0(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться предложением 2 в случае $\mathcal{E} = Z$, $\mathcal{E}^* = Y$, $\mathcal{M} = F_0(y)$, $\mathcal{Y}_0 = L^2(J, V) \cap C(J, H)$. Определяемые таким образом пространства $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{Y}_0$ и множество $\mathcal{M}$ обладают требуемыми свойствами. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность m -отображений $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет условиям $a_1)$ – $a_3)$. Пусть y_i , $i \in \mathbb{N}$, – решение включения (3_i) и последовательность y_i сходится к y в топологии $\sigma(Y, Z)$. Тогда:

- 1) y – решение включения (3₀);
- 2) если последовательность $y_i(\alpha)$, $i \in \mathbb{N}$, сходится в метрике пространства H , то $y_i \rightarrow y$ – в пространстве $C(J, H)$;
- 3) в общем случае $(t - \alpha)y_i(t) \rightarrow (t - \alpha)y(t)$ в $C(J, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если последовательность $y_i(\alpha)$, $i \in \mathbb{N}$, сходится в пространстве H , то сходимость $y_i \rightarrow y$ в $C(J, H)$ вытекает из леммы 7. Докажем, что y – решение включения (3₀). Поскольку y_i – решение включения (3_i), то $0 = y'_i + z_i$, где $z_i \in F_i(y_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность z_i сходится к z в топологии $\sigma(Z, Y)$. Ввиду слабой замкнутости оператора дифференцирования справедливо равенство $0 = y' + z$, в частности $y \in W$. Имеют место соотношения

$$2 \lim_{i \rightarrow \infty} \langle y_i, z_i \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} (|y_i(\alpha)|^2 - |y_i(\omega)|^2) = |y(\alpha)|^2 - |y(\omega)|^2 = 2\langle y, z \rangle. \quad (30)$$

Не нарушая общности, будем считать, что последовательность λ_i , $i \in \mathbb{N}$, сходится к функции λ_0 в топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$. Положим

$$\mathcal{P}_0(w) = \int_J \lambda_0(t) |w(t)|^2 dt, \quad w \in Y.$$

Фиксируем функцию u класса $\Pi(J, E_0)$ и последовательность ζ_i из $F_i(u)$, полусходящуюся к элементу $\zeta: \zeta_i \rightarrow \zeta$. Поскольку $z_i \in F_i(y_i)$, $\zeta_i \in F_i(u)$, в силу условия $a_1)$ имеет место неравенство

$$\langle y_i - u, z_i - \zeta_i \rangle \geq -\mathcal{P}_i(y_i - u).$$

Из (30) и леммы 1 вытекает оценка $\langle y - u, z - \zeta \rangle \geq -\mathcal{P}_0(y - u)$. Поскольку

$$\langle u - y, \zeta \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle u - y, \zeta_i \rangle \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} s(u - y, F_i(u)) \leq s(u - y, F_0(u)),$$

имеем

$$s(u - y, F_0(u)) \geq \langle u - y, z \rangle - \mathcal{P}_0(y - u). \quad (31)$$

В этом неравенстве u – произвольный элемент из $\Pi(J, E_0)$. Используя хеминепрерывность сверху m -отображения $F_0: Y \rightarrow Cv(Z)$ и плотность класса $\Pi(J, E_0)$ в пространстве $L^2(J, V) \cap C(J, H)$, распространим неравенство (31) на все функции u из $L^2(J, V) \cap C(J, H)$. Полагая $u = y + \tau v$, $v \in L^2(J, V) \cap C(J, H)$, $\tau \geq 0$, в (31), приходим к оценкам

$$\tau s(v, F_0(y + \tau v)) \geq \tau \langle v, z \rangle - \tau^2 \mathcal{P}_0(v), \quad s(v, F_0(y)) \geq \langle v, z \rangle.$$

В силу произвольности функции v из $L^2(J, V) \cap C(J, H)$ и предложения 3 отсюда следует включение $z \in F_0(y)$. Это и доказывает утверждения 1), 2).

Для доказательства утверждения 3) следует заметить, что в наших предположениях последовательность y_i компактна в пространстве $L^2(J, H)$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что последовательность y_i сходится к y в $L^2(J, H)$ и $y_i(t) \rightarrow y(t)$ в метрике H почти при всех t из отрезка J . Фиксируем число α_1 из интервала (α, ω) так, что $y_i(\alpha_1) \rightarrow y(\alpha_1)$ в метрике H . Предшествующие рассуждения применимы к отрезку $J_1 = [\alpha_1, \omega]$. Ввиду имеющегося произвола в способе выбора числа α_1 и ограниченности последовательности y_i в пространстве $C(J, H)$ приходим к доказываемому утверждению в полном объеме.

2.3. Дополнения. Условия $a_1)$ – $a_3)$ проверяются достаточно просто в случае однозначных отображений $\mathcal{A}_i(t): V \rightarrow V^*$, $\mathcal{B}_i(t): H \rightarrow H$ и $\mathcal{F}_i(t) = \mathcal{A}_i(t) + \mathcal{B}_i(t): V \rightarrow V^*$, $i \in \mathbb{N}_0$. Условие $a_1)$ означает следующее: при любом t из отрезка J отображения $\mathcal{A}_i(t): V \rightarrow V^*$, $\mathcal{B}_i(t): H \rightarrow H$, $i \in \mathbb{N}$, положительно однородны и непрерывны, а при любом v отображения $t \rightarrow \mathcal{A}_i(t)v$, $t \rightarrow \mathcal{B}_i(t)v$ измеримы (условия Каратеодори); имеют место следующие оценки:

$$\|\mathcal{A}_i(t)v\|_* \leq c_1 \|v\|, \quad |\mathcal{B}_i(t)v| \leq \varphi_i(t)|v|$$

(ограниченность отображений),

$$(v, \mathcal{F}_i(t)v) + \gamma_i(t)|v|^2 \geq c_2 \|v\|^2$$

(условие эллиптичности),

$$(v_1 - v_2, \mathcal{F}_i(t)v_1 - \mathcal{F}_i(t)v_2) \geq -\lambda_i(t)|v_1 - v_2|^2$$

(условие OSL); здесь c_1, c_2 – положительные постоянные, последовательность $(\varphi_i(t), \gamma_i(t), \lambda_i(t))$ равномерно суммируема на отрезке J . Условия $a_2)$, $a_3)$ выполнены в совокупности, если для любого промежутка Δ и любого элемента v из пространства E_0 последовательность $\mathcal{A}_i(t)v$ сходится к $\mathcal{A}_0(t)v$ в метрике $Z_1(\Delta)$, а последовательность $\mathcal{B}_i(t)v$ сходится к $\mathcal{B}_0(t)v$ в слабой топологии $\sigma(Z_2(\Delta), Y_2(\Delta))$. Дальнейшие упрощения в формулировках условий возможны в случае линейности отображений $\mathcal{A}_i(t), \mathcal{B}_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_0$. В этой ситуации условие эллиптичности влечет за собой условие OSL. Достаточно часто ограничиваются рассмотрением случая, когда $\mathcal{B}_i(t) = 0$, а $\varphi_i(t), \gamma_i(t), \lambda_i(t)$ – нулевые функции; такого рода ограничения естественны при изучении последовательности параболических уравнений [6].

При отдельном рассмотрении условия $a_3)$ можно заметить, что оно выполнено, если для каждого промежутка $\Delta \subset J$ и любого элемента v из E_0 последовательность $\mathcal{A}_i(t)v$, $i \in \mathbb{N}$, компактна в пространстве $Z_1(\Delta)$. Из оценки $|\mathcal{B}_i(t)v| \leq \varphi_i(t)|v|$, $i \in \mathbb{N}$, вытекает компактность последовательности $\mathcal{B}_i(t)v$,

$i \in \mathbb{N}$, в топологии $\sigma(Z_2(\Delta), Y_2(\Delta))$. В этой ситуации отображение $\mathcal{F}_0$, удовлетворяющее условию a_2), может быть многозначным; среди подобных отображений желательно искать наименьшее по включению. Таким образом, даже при рассмотрении последовательности однозначных отображений $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$, возникает необходимость привлечения многозначного отображения $\mathcal{F}_0$.

Обсудим одну из модификаций условия a_3). Пусть W_1 – рефлексивное банахово пространство вектор-функций $y: J \rightarrow V$, причем $W \Rightarrow W_1, Y \rightarrow W_1$. В качестве W_1 можно взять, например, $W_1 = L^2(J, E) \cap L^r(J, H)$, где E – рефлексивное пространство, $V \Rightarrow E \rightarrow H$, $1 < r < \infty$; в этом случае сопряженное к W_1 пространство W_1^* можно идентифицировать с пространством $L^q(J, E^*) + L^s(J, H)$, $1/r + 1/s = 1$.

Возвращаясь к общему случаю, назовем W_1 -полусходящейся последовательность ζ_i из Z , если $\zeta_i = f_i + g_i$, где $f_i \rightarrow f$ в Z , $g_i \rightarrow g$ в $\sigma(W_1^*, W_1)$. Будем записывать $\zeta_i \xrightarrow{W_1} \zeta = f + g$. Рассмотрим следующее условие:

a_4) если $u \in \Pi(J, E_0)$, то для каждого бесконечного множества $\mathbb{N}_1$ натуральных чисел существует W_1 -полусходящаяся подпоследовательность $\zeta_i \in F_i(u)$, $i \in \mathbb{N}_1$.

Можно показать, что утверждение теоремы 2 сохранится, если в ее предположениях заменить условие a_3) условием a_4). Близкий результат (для несколько иного класса пространств и операторов) установлен в [18]. В частности, при достаточно естественных предположениях относительно многозначных отображений $\mathcal{F}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$, $\mathcal{F}_0: V \rightarrow V^*$ для последовательности отображений

$$\mathcal{F}_i(t) = \mathcal{F}(k_i t + \tau_i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad k_i \rightarrow \infty, \quad k_i > 1, \quad \tau_i \geq 0,$$

имеет место аналог теоремы 2.

Как видно из доказательства теоремы 2, условие однородности отображений $\mathcal{F}_i(t): V \rightarrow Cv(V^*)$, $i \in \mathbb{N}_0$, $t \in J$, не является существенным. Теорема 2 близка к некоторым утверждениям работ по усреднению дифференциальных включений (см., например, [18], [22] и приведенный в этих работах список литературы).

Рассмотрим приложения теоремы 2 к оценкам снизу индекса Боля. Пусть $\mathcal{U}(\mathcal{F}_i, h)$, $i \in \mathcal{N}_0$, $h \in H$, – решение включения $(\mathfrak{F}_i)$, удовлетворяющее начальному условию $y(\alpha) = h$. Положим

$$\mathcal{U}_1(\mathcal{F}_i, J) = \bigcup_{|h| \leq 1} \mathcal{U}(\mathcal{F}_i, h), \quad \eta(\mathcal{F}_i, J) = \sup_{y \in \mathcal{U}_1(\mathcal{F}_i, J)} |y(\omega)|.$$

ЛЕММА 9. Если последовательность $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет условиям $a_1)$ – a_3), то

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \eta(\mathcal{F}_i, J) \leq \eta(\mathcal{F}_0, J).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_i \in \mathcal{U}_1(\mathcal{F}_i, J)$ и

$$|y_i(\omega)| > \eta(\mathcal{F}_i, J) - \frac{1}{i}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность y_i сходится к y в смысле топологий $C_w(J, H)$ и $\sigma(Y, Z)$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что y – решение включения $(\mathfrak{F}_0)$ и последовательность $(t - \alpha)y_i(t)$ сходится

к $(t-\alpha)y(t)$ в метрике пространства $C(J, H)$. Поскольку $y_i(\alpha) \rightarrow y(\alpha)$ в $\sigma(H, H)$, то $|y(\alpha)| \leq 1$, поэтому $y \in \mathcal{U}_1(\mathcal{F}_0, J)$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \eta(\mathcal{F}_i, J) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} |y_i(\omega)| = |y(\omega)| \leq \eta(\mathcal{F}_0, J).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть семейство отображений $\mathcal{F}_i(t): V \rightarrow Cv(V^*)$ периодически по t с положительным периодом l :

$$\mathcal{F}_i(t+l) = \mathcal{F}_i(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть последовательность отображений $\mathcal{F}_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_0$, $t \in J = [0, l]$, удовлетворяет условиям $a_1)$ – $a_3)$. Тогда имеет место неравенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \beta(\mathcal{F}_i) \geq \beta(\mathcal{F}_0). \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты выкладок будем считать, что $l = 1$. Пусть сначала $\beta(\mathcal{F}_0) > 0$. В силу определения индекса Боля отсюда вытекает существование таких положительных чисел ν , $\mathcal{N}$, что $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}(\nu, \mathcal{N})$. Из условия $a_1)$ и периодичности по t операторных функций $\mathcal{F}_i(t)$ следует включение $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)$, где положительная постоянная $\mathcal{N}_1$ и действительная постоянная ν_1 не зависят от номера i . Фиксируем положительные постоянные q и δ так, чтобы имело место неравенство $\mathcal{N}_1^2(q + \delta) < \frac{1}{2}$.

Поскольку $\beta(\mathcal{F}_0) > 0$, найдется такое натуральное число $m > 2$, что для отрезка $J_0 = [0, m-1]$ выполняется неравенство $\eta(\mathcal{F}_0, J_0) < q$. В силу леммы 9 существует такое натуральное число i_0 , что $\eta(\mathcal{F}_i, J_0) < q + \delta$ при $i > i_0$. В частности, для любого решения y включения $(\mathfrak{Z}_i)$, $i > i_0$, верна оценка $|y(m-1)| \leq (q + \delta)|y(0)|$. В предположениях теоремы операторная функция $\mathcal{F}_i(t)$ периодична (с периодом 1), поэтому

$$|y(k+m)| \leq (q + \delta)|y(k+1)|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0. \quad (33)$$

Пусть $s \geq 0$, $k = [s]$ – целая часть числа s . Из включения $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{B}(\nu_1, \mathcal{N}_1)$ вытекают неравенства

$$|y(k+1)| \leq \mathcal{N}_1 e^{-\nu_1(k+1-s)} |y(s)|, \quad |y(m+s)| \leq \mathcal{N}_1 e^{-\nu_1(s-k)} |y(k+m)|,$$

комбинируя которые с оценкой (33), приходим к соотношениям

$$|y(m+s)| \leq \mathcal{N}_1^2(q + \delta) |y(s)| \leq \frac{1}{2} |y(s)|,$$

непосредственным следствием которых является включение $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{B}(\nu_0, \mathcal{N}_0)$, где $i > i_0$, ν_0 , $\mathcal{N}_0$ – положительные постоянные.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\mathcal{G}_i(t) = \mathcal{F}_i(t) - (\beta(\mathcal{F}_0) - \varepsilon)I$, $i \in \mathbb{N}_0$. Справедливо равенство $\beta(\mathcal{G}_0) = \varepsilon > 0$. В силу только что доказанного отображение $\mathcal{G}_i$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(\nu_0, \mathcal{N}_0)$, если только число i достаточно велико. Следовательно, $\beta(\mathcal{G}_i) \geq \nu_0 > 0$ при $i > i_0$. Поскольку $\beta(\mathcal{G}_i) = \beta(\mathcal{F}_i) - \beta(\mathcal{F}_0) + \varepsilon$, то $\beta(\mathcal{F}_i) > \beta(\mathcal{F}_0) - \varepsilon$ при $i > i_0$. Теорема доказана.

Предположение о периодичности по t может быть ослаблено. Оно связано с методом доказательства теоремы 3, но не с существом вопроса. Как полагает автор, условие периодичности по t можно заменить менее ограничительным предположением о равномерной почти периодичности последовательности отображений $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$.

§ 3. Примеры и замечания

3.1. Параболические включения на пространствах Соболева. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\dot{W}_2^1(\Omega)$ – пространство Соболева [7] функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω . Норма в пространстве $V = \dot{W}_2^1(\Omega)$ определена равенством $\|u\| = \|\nabla u; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)\|$; здесь и далее

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

– градиент функции u . Сопряженное к V пространство состоит из функционалов Λ , допускающих представление

$$\Lambda(u) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \nabla u(x) dx,$$

где $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\xi \cdot \xi^*$ – скалярное произведение векторов ξ и ξ^* из $\mathbb{R}^n$. Пространство V компактно и плотно вложено в пространство $H = L^2(\Omega)$ с нормой $|u| = \|u; L^2(\Omega)\|$. Пара пространств V, H однозначно определяет соответствующие им пространства Y, Z, W на отрезке $J \subset \mathbb{R}$. В частности, $Y = L^2(J, \dot{W}_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(J, L^2(\Omega))$; Y можно интерпретировать как пространство функций на цилиндре $Q = \Omega \times J$. Аналогично, с каждой функцией $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ можно связать функцию $y(x, t)$, определенную на цилиндре $Q_+ = \Omega \times \mathbb{R}_+$. Далее используем обозначения

$$\nabla_x y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right);$$

$|\xi| = \sqrt{\xi \cdot \xi}$ – евклидова норма элемента ξ из $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{V}(Q_+, \mathbb{R}^n)$ – совокупность многозначных отображений $a: Q_+ \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям:

1°) при любом ξ из $\mathbb{R}^n$ отображение $a(\cdot, \xi): Q_+ \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ измеримо, при всех (x, t) из Q отображение $a(x, t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху и положительно однородно;

2°) справедливы неравенства

$$(\xi_1 - \xi_2) \cdot (\xi_1^* - \xi_2^*) \geq 0, \quad |\xi^*| \leq \kappa_1 |\xi|, \quad \kappa_2 |\xi|^2 \leq \xi \cdot \xi^*,$$

в которых $\xi_i, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i^* \in a(x, t, \xi_i)$, $\xi^* \in a(x, t, \xi)$, $\kappa_i, i = 1, 2$, – положительные постоянные, постоянные κ_1, κ_2 могут быть различными для различных отображений.

Условие 1°) можно рассматривать как некоторый вариант условия Каратеодори [14]. Первое из неравенств в условии 2°) означает монотонность отображения $a(x, t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$, два последних представляют собой оценки роста этого отображения. Условия 1°), 2°) выполнены, например, если m -отображение a имеет вид $a(x, t, \xi) = a_0(x, t) \partial_\xi \|\xi\|^2$, где $a_0 \in L^\infty(Q_+)$, $a_0(x, t) \geq \alpha_0$ (α_0 – положительная постоянная), $\|\xi\|$ – произвольная норма в $\mathbb{R}^n$, ∂_ξ – субдифференциал функции $\xi \rightarrow \|\xi\|^2$ [12].

Пусть $b: Q_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – функция класса $M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$. Определим отображения $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t), \mathcal{F}(t): V \rightarrow V^*$, $t \in \mathbb{R}_+$, равенствами

$$\mathcal{A}(t)v = -\operatorname{div} a(\cdot, t, \nabla v), \quad \mathcal{B}(t)v = b(\cdot, t)v, \quad \mathcal{F}(t)v = \mathcal{A}(t)v + \mathcal{B}(t)v. \quad (34)$$

Более точно, функционал v^* на пространстве V принадлежит $\mathcal{A}(t)v$, если существует такое измеримое сечение f отображения $\Gamma(x) = a(x, t, \nabla v(x))$, что

$$(w, v^*) = \int_{\Omega} f \cdot \nabla w \, dx \quad \forall w \in V.$$

В силу результатов из работ [10]–[15] m -отображение $\mathcal{A}(t): V \rightarrow C^0(V^*)$ почти при всех t из $\mathbb{R}_+$ хеминепрерывно сверху, положительно однородно, при любом v из пространства V m -отображение $t \rightarrow \mathcal{A}(t)v$ измеримо. Из условия 2°) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(t)v\|_* &\leq \kappa_1 \|v\|, \quad (v, v^*) \geq \kappa_2 \|v\|^2, \quad v \in V, \quad v^* \in \mathcal{A}(t)v, \\ (v_1 - v_2, v_1^* - v_2^*) &\geq 0, \quad v_i \in V, \quad v_i^* \in \mathcal{A}(t)v_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Поскольку b – функция класса $M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$, функция $\varphi(t) = \|b(\cdot, t), L^\infty(\Omega)\|$ принадлежит пространству $M_1(\mathbb{R}_+)$. Отображение $\mathcal{B}(t)$ может быть продолжено (с помощью равенства $\mathcal{B}(t)v = b(\cdot, t)v$) на пространство H . Продолженное таким образом отображение почти при всех t линейно и непрерывно в пространстве H , справедлива оценка $|\mathcal{B}(t)v| \leq \varphi(t)|v|$, и при любом v из H отображение $v: t \rightarrow \mathcal{B}(t)v$ измеримо.

Из установленных выше свойств отображений $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)$ вытекает, что определяемое равенством (34) отображение $\mathcal{F}(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathbb{R}_+, \vec{c}, \vec{\psi})$, где $\vec{c} = (\kappa_1, \kappa_2)$, $\vec{\psi}(t) = (\varphi(t), \varphi(t), -\varphi(t))$. В рассматриваемом случае решения задачи Коши (5), (6) совпадают с обобщенными решениями начально-краевой задачи

$$0 \in \frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(a(\cdot, t, \nabla_x y)) + b(\cdot, t)y, \quad (35)$$

$$y(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad y(\cdot, \alpha) = h. \quad (36)$$

Для однозначного отображения a данное определение решения согласуется с принятым в теории параболических уравнений (см., например, [4]–[9]). Задача (35), (36) имеет единственное решение y при любых $\alpha \geq 0$, $h \in L^2(\Omega)$.

Индексом Боля параболического включения (35) назовем индекс Боля $\beta(\mathcal{F})$ определяемого равенством (34) отображения $\mathcal{F}$. Для оценок снизу индекса Боля можно использовать предшествующие результаты. В качестве иллюстрации рассмотрим примеры применения лемм 3, 4 и теоремы 1. В изучаемом случае отображение a принадлежит классу $\mathcal{V}$. Справедливо вытекающее из условия 2°) неравенство

$$(v, v^*) \geq \int_{\Omega} (\kappa_2 |\nabla v|^2 + b(\cdot, t)v^2) \, dx,$$

где $v \in V$, $v^* \in \mathcal{F}(t)v$, $t \geq 0$. Обозначим через $\mu(t)$ первое собственное значение задачи

$$-\kappa_2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + b(\cdot, t)u = \mu u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Поскольку $b \in M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$, имеем $\mu(\cdot) \in M_1(\mathbb{R}_+)$. Из условия 2°) и определения функции $\mu(t)$ вытекают оценки

$$(v, v^*) \geq \int_{\Omega} (\kappa_2 |\nabla v|^2 + b(\cdot, t)v^2) \, dx \geq \mu(t) \int_{\Omega} v^2 \, dx, \quad v \in V, \quad v^* \in \mathcal{F}(t)v,$$

означающие, что отображение $\mathcal{F}$ удовлетворяет неравенству (11). Из лемм 3, 4 следует оценка

$$\beta(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{T} \inf_{t \geq s_0} \int_t^{t+T} \mu(\tau) d\tau,$$

в которой s_0, T – произвольные положительные числа. В частности, нулевое решение включения (35) экспоненциально устойчиво, если при некоторых положительных числах s_0, T имеет место неравенство

$$\inf_{t \geq s_0} \int_t^{t+T} \mu(\tau) d\tau > 0.$$

Наряду с включением (35) рассмотрим его возмущение – включение

$$0 \in \frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(\widehat{a}(\cdot, t, \nabla_x y)) + \widehat{b}(\cdot, t)y,$$

где $\widehat{a} \in \mathcal{V}(Q_+, \mathbb{R}^n)$, $\widehat{b} \in M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$. Так же, как и выше, паре $(\widehat{a}, \widehat{b})$ можно сопоставить однопараметрическое семейство отображений $\widehat{\mathcal{F}}(t): V \rightarrow V^*$, $t \in \mathbb{R}_+$, и индекс Боля $\beta(\widehat{\mathcal{F}})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть имеют место включения

$$a, \widehat{a} \in \mathcal{V}(Q_+, \mathbb{R}^n), \quad b, \widehat{b} \in M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega)).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если

$$\Theta(\widehat{a}(x, t, \xi), a(x, t, \xi)) \leq \delta |\xi|, \quad \|\widehat{b} - b; M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))\| \leq \delta, \quad (37)$$

то $\beta(\widehat{\mathcal{F}}) > \beta(\mathcal{F}) - \varepsilon$.

Теорема 4 представляет вариант теоремы 1, относящийся к параболическому включению (35). На основании леммы 4 второе из ограничений (37) можно ослабить, заменив его условием $\|\widehat{b}_0 - b_0; M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))\| \leq \delta$, где $\widehat{b}_0(x, t) = \widehat{b}(x, t + s_0)$, $b_0(x, t) = b(x, t + s_0)$, s_0 – некоторое положительное число.

3.2. Последовательность параболических уравнений. Ниже Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $J = [\alpha, \omega]$, $Q = \Omega \times J$ – цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{V}_1(Q, \mathbb{R}^n)$ совокупность однозначных отображений $a: Q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям:

3°) почти при всех $(x, t) \in Q$ определяемое равенством $a(x, t)\xi = a(x, t, \xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя линейно и симметрично, а при любом ξ из $\mathbb{R}^n$ отображение $(x, t) \rightarrow a(x, t, \xi)$ измеримо;

4°) справедливы оценки

$$|a(x, t)\xi| \leq \kappa_1 |\xi|, \quad \xi \cdot a(x, t)\xi \geq \kappa_2 |\xi|^2,$$

где κ_1, κ_2 – положительные постоянные, не зависящие от x, t, ξ .

Пусть b – функция класса $L^1(J, L^\infty(\Omega))$. Следуя (34), определим действующие из пространства $V = W_2^1(\Omega)$ в сопряженное к нему пространство $V^* = W_2^{-1}(\Omega)$ линейные операторы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{F}(t)$, $t \in J$; отображения $\mathcal{B}(t)$ могут быть продолжены на пространство $H = L^2(\Omega)$. Отображение $\mathcal{F}$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(J, \vec{c}, \vec{\psi})$; здесь $\vec{c} = (\kappa_1, \kappa_2)$, $\vec{\psi}(t) = (\varphi(t), \varphi(t), -\varphi(t))$, при этом $\varphi(t) = \|b(\cdot, t); L^\infty(\Omega)\|$.

В рассматриваемом случае включение (35) становится линейным параболическим уравнением вида

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x, t) \nabla_x y) + b(x, t)y = 0. \quad (38)$$

Условия 3°), 4°) и предположение $b \in L^1(J, L^\infty(\Omega))$ гарантируют однозначную разрешимость начально-краевой задачи (38), (36) для произвольного элемента h из пространства H .

Приведем аналог теоремы 2 для последовательности параболических уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(a_i(x, t) \nabla_x y) + b_i(x, t)y = 0. \quad (39)$$

Предполагается, что отображения $a_i(x, t, \xi) = a_i(x, t)\xi$ удовлетворяют условиям 3°), 4°) с независимыми от индекса $i \in \mathbb{N}$ константами κ_1, κ_2 , а функции $b_i, i \in \mathbb{N}$, принадлежат пространству $L^1(J, L^\infty(\Omega))$. Ниже пространства Y_1, Y_2, Y, Z_1, Z_2, Z определены так же, как и в п. 3.1,

$$\mathcal{A}_i(t)v = -\operatorname{div} a_i(\cdot, t) \nabla v, \quad i \in \mathbb{N}, \quad v \in V.$$

Отображения $\mathcal{A}_i(t), i \in \mathbb{N}, \mathcal{A}(t)$ порождают линейные операторы $A_i, A: Y_1 \rightarrow Z_1$, определяемые естественным образом:

$$(A_i y)t = \mathcal{A}_i(t)y(t), \quad (Ay)(t) = \mathcal{A}(t)y(t), \quad i \in \mathbb{N}, \quad y \in Y_1.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть операторная последовательность $A_i: Y_1 \rightarrow Z_1$ сильно сходится к оператору $A: Y_1 \rightarrow Z_1$, а последовательность $b_i(x, t)$ сходится к $b(x, t)$ в слабой топологии $\sigma(Z_2, Y_2)$. Пусть y_i – решение уравнения (39), $i \in \mathbb{N}$, и последовательность y_i сходится к y в топологии $\sigma(Y, Z)$. Тогда:

- 1) y – решение уравнения (38);
- 2) если последовательность $y_i(\alpha), i \in \mathbb{N}$, сходится в метрике пространства H , то $y_i \rightarrow y$ в пространстве $C(J, H)$;
- 3) в общем случае $(t - \alpha)y_i(t) \rightarrow (t - \alpha)y(t)$ в $C(J, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в проверке условий а₁)–а₃) теоремы 2. Однозначность и линейность отображений $\mathcal{A}_i(t), \mathcal{B}_i(t), \mathcal{F}_i(t)$ значительно облегчает проверку этих условий; соответствующие рассуждения уже проводились в п. 2.3. Выполнимость условия а₁) вытекает из условий 3°), 4°) и слабой сходимости $b_i \rightarrow b$. Условия а₂), а₃) выполнены в совокупности. Действительно, так как операторная последовательность A_i сильно сходится к линейному оператору A , то для любого элемента y из пространства Y_1 последовательность $A_i y$ сходится к Ay в метрике пространства Z_1 . В частности, для любого промежутка $\Delta \subset J$ и любого элемента u из $E_0 = C_0^\infty(\Omega)$ последовательность $\mathcal{A}_i(t)v, i \in \mathbb{N}$, сходится в пространстве $Z_1(\Delta)$. Поскольку $b_i \rightarrow b$ в $\sigma(Z_2, Y_2)$, последовательность $\mathcal{B}_i(t)v$ сходится к $\mathcal{B}(t)v$ в $\sigma(Z_2(\Delta), Y_2(\Delta))$.

Условия а₁)–а₃) выполнены, поэтому утверждения 1)–3) вытекают из теоремы 2. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ – пространство действующих в $\mathbb{R}^n$ линейных операторов с операторной нормой. Если последовательность $a_i(x, t)$ сходится к $a(x, t)$ в пространстве $L^2(Q, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n))$, то последовательность A_i сходится к A в равномерной операторной топологии. Это позволяет сформулировать грубые, но достаточно

обозримые (выраженные в терминах коэффициентов) предположения, гарантирующие выполнение условий теоремы 5.

Приведем теперь вариант теоремы 3 для параболических уравнений (38) и (39). Будем считать, что коэффициенты $a(x, t)$, $b(x, t)$, $a_i(x, t)$, $b_i(x, t)$, $i \in \mathbb{N}$, этих уравнений определены на цилиндре $Q_+ = \Omega \times \mathbb{R}_+$ и периодичны по переменному t с положительным периодом l . Через $\beta(\mathcal{F})$ и $\beta(\mathcal{F}_i)$ обозначим индексы Боля параболических уравнений (38) и (39) соответственно.

ТЕОРЕМА 6. Пусть сужения коэффициентов $a(x, t)$, $b(x, t)$, $a_i(x, t)$, $b_i(x, t)$ на цилиндр $Q = \Omega \times [0, l]$ удовлетворяют условиям теоремы 5. Тогда имеет место неравенство (32), где $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Теорема 6 есть очевидное следствие теорем 3, 5.

Развитая выше схема применима и к более общим, чем (35), параболическим включениям. В частности, можно рассматривать параболические уравнения произвольного порядка.

Автор искренне благодарит рецензента за ряд полезных замечаний и предложений.

Список литературы

1. П. Боль, *Собрание трудов*, Зинатне, Рига, 1974.
2. Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.
3. Н. А. Изобов, “Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **12**, ВИНТИ, М., 1974, 71–146; англ. пер.: N. A. Izobov, “Linear systems of ordinary differential equations”, *J. Soviet Math.*, **5**:1 (1976), 46–96.
4. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
5. Ю. А. Дубинский, “Нелинейные эллиптические и параболические уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **9**, ВИНТИ, М., 1976, 5–130; англ. пер.: Yu. A. Dubinskii, “Nonlinear elliptic and parabolic equations”, *J. Soviet Math.*, **12**:5 (1979), 475–554.
6. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, “О G -сходимости параболических операторов”, *УМН*, **36**:1 (1981), 11–58; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, “ G -convergence of parabolic operators”, *Russian Math. Surveys*, **36**:1 (1981), 9–60.
7. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
8. Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978; англ. пер.: B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
9. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

10. В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, “Дифференциальные включения и оптимальное управление”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Тр. МИАН СССР, **169**, Наука, М., 1985, 194–252; англ. пер.: V. I. Blagodatskikh, A. F. Filippov, “Differential inclusions and optimal control”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 199–259.
11. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений*, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986.
12. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
13. Ж. П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Wiley, New York, 1984.
14. А. А. Толстоногов, *Дифференциальные включения в банаховых пространствах*, Наука, Новосибирск, 1986; англ. пер.: A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space*, Math. Appl., **524**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
15. А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985; англ. пер.: A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **18**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.
16. В. С. Климов, “Эволюционные параболические неравенства с многозначными операторами”, *Матем. сб.*, **184**:8 (1993), 37–54; англ. пер.: V. S. Klimov, “Evolution parabolic inequalities with multivalued operators”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **79**:2 (1994), 365–380.
17. В. С. Климов, “Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:4 (2000), 109–130; англ. пер.: V. S. Klimov, “Bounded solutions of differential inclusions with homogeneous principal parts”, *Izv. Math.*, **64**:4 (2000), 755–776.
18. В. С. Климов, “Усреднение параболических включений”, *Матем. сб.*, **195**:1 (2004), 21–36; англ. пер.: V. S. Klimov, “Averaging of parabolic inclusions”, *Sb. Math.*, **195**:1 (2004), 19–34.
19. В. С. Климов, “Теоремы об устойчивости по первому приближению для дифференциальных включений”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 517–530; англ. пер.: V. S. Klimov, “Stability theorems in the first-order approximation for differential inclusions”, *Math. Notes*, **76**:4 (2004), 478–489.
20. И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.
21. Т. Donchev, Е. Farki, “Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions”, *SIAM J. Control Optim.*, **36**:2 (1998), 780–796.
22. Е. В. Соколовская, О. П. Филатов, “Аппроксимация сверху систем дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 763–772; англ. пер.: E. V. Sokolovskaya, O. P. Filatov, “Approximation from above of systems of differential inclusions with non-Lipschitzian right-hand side”, *Math. Notes*, **78**:5 (2005), 709–718.

В. С. Климов (V. S. Klimov)
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
E-mail: klimov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
 16.02.2009
 13.04.2009