Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Многочастотный параметрический резонанс в нелинейном волновом уравнении, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 6, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:11:27

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Многочастотный параметрический резонанс в нелинейном волновом уравнении

Рассматривается краевая задача

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + \left(1 + \varepsilon \sum_{k=1}^m \alpha_k \cos 2\varphi_k\right) u = a^2 u_{xx} - u^2 u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a > 0$, $\varphi_k = \sigma_k t + c_k$, $k = 1, \dots, m$. Показывается, что при подходящем выборе натурального m и вещественных параметров α_k, σ_k , $k = 1, \dots, m$, можно добиться существования у нее любого фиксированного числа экспоненциально устойчивых квазипериодических по t решений, бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$.

Библиография: 10 наименований.

Физические основы теории параметрических колебаний представлены в классических работах Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, а математический аспект проблемы изложен, например, в монографиях [1]–[3], содержащих теорию параметрического резонанса как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для некоторых классов волновых уравнений. Следует отметить еще работы [4], [5], в которых в линейной постановке изучался параметрический резонанс в случае квазипериодической внешней силы.

В настоящей статье рассматривается новый в данной тематике вопрос о нелинейных эффектах, вызванных многочастотным параметрическим внешним воздействием. Основная идея здесь заключается в следующем. Пусть имеется некоторая потенциально автоколебательная нелинейная система с достаточно большим набором собственных частот ω_k , $k = 1, \dots, m$, причем эта система недовозбуждена: ее нулевое состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Предположим, далее, что на такую систему начинает действовать многочастотная параметрическая внешняя сила с частотами, близкими к $2\omega_{k_s}$, $s = 1, \dots, n$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq m$ – произвольно фиксированный набор индексов. В результате нулевое решение этой системы может стать неустойчивым сразу на всех рассматриваемых собственных частотах ω_{k_s} , $s = 1, \dots, n$, т.е. может наступить так называемый *многочастотный параметрический резонанс*.

Описанную идею нетрудно реализовать в случае многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако наиболее естественным представляется исследование явления многочастотного параметрического резонанса в нелинейных волновых уравнениях, обладающих бесконечным набором собственных

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-01286).

частот. В связи с этим ниже рассматривается простейшая нелинейная гиперболическая краевая задача и показывается, что посредством многочастотного параметрического внешнего воздействия можно возбудить в ней любое наперед заданное число устойчивых одномодовых квазипериодических по времени колебательных режимов. Более того, за счет подходящего выбора параметров внешнего воздействия любыми можно сделать и номера возбуждаемых мод.

1. Постановка задачи и описание результата. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + [1 + \varepsilon f(\varphi)]u = a^2 u_{xx} - u^2 u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $a = \text{const} > 0$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, внешняя параметрическая сила имеет вид

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cos 2\varphi_k, \quad \varphi_k = \sigma_k t + c_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

а натуральное m и наборы вещественных постоянных α_k, σ_k, c_k , $k = 1, \dots, m$, произвольно фиксированы. Зададимся, далее, произвольным набором натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ и потребуем, чтобы в краевой задаче (1) параметрический резонанс наблюдался на модах $\sin nx$ с номерами $n = n_k$, $k = 1, \dots, m$. Добиться этого можно за счет подходящего выбора фигурирующих в (2) параметров α_k, σ_k , $k = 1, \dots, m$. Способ такого выбора описывается ниже.

Отбросим в (1) нелинейность, а затем применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе функций $\sin nx$, $n = 1, 2, \dots$. В результате убедимся, что устойчивость нулевого решения задачи (1) определяют характеристические показатели линейных уравнений

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + [\omega_n^2 + \varepsilon f(\varphi)]u = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}$, а дифференцирование проводится по t . Будем считать, далее, что частоты σ_k , $k = 1, \dots, m$, параметрического внешнего воздействия (2) задаются равенствами

$$\sigma_k = (1 + \varepsilon \delta_k) \omega_{n_k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где δ_k , $k = 1, \dots, m$, – некоторые фиксированные постоянные, связанные с амплитудами α_k , $k = 1, \dots, m$, соотношениями

$$\alpha_k^2 / (4\omega_{n_k}^2) - 4\delta_k^2 \omega_{n_k}^2 - 1 > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Тогда, как следует, например, из содержащихся в [1], [2] результатов, каждое уравнение (3) при $n = n_k$, $k = 1, \dots, m$, имеет экспоненциально растущее решение. При $n \neq n_k$ все решения уравнений (3) при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально затухают.

Итак, при условиях (4), (5) в рамках краевой задачи (1) реализуется многочастотный параметрический резонанс: нулевое решение этой задачи неустойчиво на

модах $\sin n_k x$, $k = 1, \dots, m$. Поэтому естественным образом возникают вопросы о существовании и устойчивости квазипериодических по t решений задачи (1), бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$. Устойчивость будем понимать в метрике фазового пространства (пространства начальных условий (u, u_t)) $\overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi) \times \overset{\circ}{W}_2^1(0, \pi)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2, \overset{\circ}{W}_2^1$ – соболевские пространства функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Дирихле. Использование понятия фазового пространства позволяет практически без изменений переносить на бесконечномерный случай основные положения теории нелинейных колебаний.

Предположим, что при условиях (4), (5) краевая задача (1) имеет некоторое нетривиальное квазипериодическое по t решение

$$u = u(\varphi, x, \varepsilon), \quad \varphi = \sigma(\varepsilon)t + c, \quad (6)$$

где

$$\sigma(\varepsilon) = ((1 + \varepsilon\delta_1)\omega_{n_1}, (1 + \varepsilon\delta_2)\omega_{n_2}, \dots, (1 + \varepsilon\delta_m)\omega_{n_m}), \quad c = (c_1, \dots, c_m).$$

Тогда, как нетрудно видеть, фигурирующая в (6) 2π -периодическая по векторному аргументу φ функция $u(\varphi, x, \varepsilon)$ с необходимостью удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} L^2(\varepsilon)u + \varepsilon L(\varepsilon)u + [1 + \varepsilon f(\varphi)]u &= a^2 u_{xx} - u^2 L(\varepsilon)u, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $L(\varepsilon) = \sum_{k=1}^m (1 + \varepsilon\delta_k)\omega_{n_k} \partial/\partial\varphi_k$. Таким образом, интересующая нас проблема сводится, в первую очередь, к нахождению нетривиальных 2π -периодических по φ решений задачи (7).

Асимптотику возможных решений краевой задачи (7) будем строить в виде рядов по нечетным степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(\varphi, x) + \dots, \quad (8)$$

где $u_0(\varphi, x)$ – решение линейной краевой задачи ($L_0 = L(0)$)

$$L_0^2 u_0 + u_0 = a^2 \partial^2 u_0 / \partial x^2, \quad u_0|_{x=0} = u_0|_{x=\pi} = 0. \quad (9)$$

Выбирая, далее, в качестве $u_0(\varphi, x)$ различные 2π -периодические по φ решения задачи (9), в принципе, можно найти все интересующие нас решения задачи (7). Однако ниже ограничимся анализом так называемых одномодовых периодических решений (8), поскольку, как будет показано в дальнейшем, только они могут порождать устойчивые квазипериодические решения (6) исходной краевой задачи (1).

Для построения асимптотики одномодовых квазипериодических решений (6) фиксируем произвольное натуральное k_0 , $k_0 \leq m$, и в качестве решения задачи (9) рассмотрим функцию

$$u_0(\varphi, x) = [\xi_{k_0} \exp(i\varphi_{k_0}) + \bar{\xi}_{k_0} \exp(-i\varphi_{k_0})] \sin n_{k_0} x, \quad (10)$$

где ξ_{k_0} – некоторая неизвестная (подлежащая определению) комплексная постоянная. Подставляя, далее, равенства (8), (10) в (7) и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для нахождения $u_1(\varphi, x)$ получаем линейную неоднородную краевую задачу

$$L_0^2 u_1 + u_1 = a^2 \partial^2 u_1 / \partial x^2 + g(\varphi, x), \quad u_1|_{x=0} = u_1|_{x=\pi} = 0, \quad (11)$$

где

$$g(\varphi, x) = 2\delta_{k_0} \omega_{n_{k_0}}^2 u_0 - f(\varphi) u_0 - \omega_{n_{k_0}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{k_0}} \left(u_0 + \frac{u_0^3}{3} \right). \quad (12)$$

Анализ краевой задачи (11) существенно опирается на тот факт, что в силу соотношений (10), (12) фигурирующая в ней неоднородность g представляет собой линейную комбинацию гармоник

$$\begin{aligned} & \exp(\pm i p \varphi_{k_0}) \sin n_{k_0} x, \quad \exp(\pm i p \varphi_{k_0}) \sin 3n_{k_0} x, \quad p = 1, 3; \\ & \exp[\pm i(2\varphi_s + \varphi_{k_0})] \sin n_{k_0} x, \quad \exp[\pm i(2\varphi_s - \varphi_{k_0})] \sin n_{k_0} x, \\ & s = 1, \dots, m, \quad s \neq k_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Поэтому для определения решения u_1 в классе тригонометрических многочленов аналогичной структуры необходимо и достаточно отсутствие в неоднородности (12) гармоник

$$\exp(\pm i \varphi_{k_0}) \sin n_{k_0} x. \quad (14)$$

Добиться этого можно выбором имеющейся в запасе комплексной амплитуды ξ_{k_0} .

Действительно, приравнивая в (12) к нулю коэффициенты при гармониках (14), для определения ξ_{k_0} приходим к уравнению

$$-2i\delta_{k_0} \omega_{n_{k_0}} \xi_{k_0} + \frac{i\alpha_{k_0}}{2\omega_{n_{k_0}}} \bar{\xi}_{k_0} - \xi_{k_0} - \frac{3}{4} |\xi_{k_0}|^2 \xi_{k_0} = 0. \quad (15)$$

Полагая в (15) $\xi_{k_0} = \rho_{k_0} \exp(i\psi_{k_0})$, $\rho_{k_0} > 0$, для нахождения ρ_{k_0} , ψ_{k_0} получаем систему

$$\frac{\alpha_{k_0}}{2\omega_{n_{k_0}}} \cos 2\psi_{k_0} = 2\delta_{k_0} \omega_{n_{k_0}}, \quad \frac{\alpha_{k_0}}{2\omega_{n_{k_0}}} \sin 2\psi_{k_0} = 1 + \frac{3}{4} \rho_{k_0}^2. \quad (16)$$

Дальнейшая последовательность действий такова. Возведем левые и правые части уравнений этой системы в квадрат и сложим получившиеся равенства. В итоге убеждаемся, что

$$\rho_{k_0} = \sqrt{\eta_{k_0}}, \quad \eta_{k_0} = \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{\alpha_{k_0}^2}{4\omega_{n_{k_0}}^2} - 4\delta_{k_0}^2 \omega_{n_{k_0}}^2} - 1 \right) \quad (17)$$

(положительность η_{k_0} вытекает из условия (5) при $k = k_0$). В качестве ψ_{k_0} , $|\psi_{k_0}| < \pi/2$, выберем тот из корней первого уравнения (16), для которого

$$\alpha_{k_0} \sin 2\psi_{k_0} > 0$$

(см. второе уравнение (16)).

После определения ξ_{k_0} решение u_1 задачи (11) находится уже однозначно в виде линейной комбинации оставшихся гармоник (13) и, следовательно, приближенное одномодовое квазипериодическое решение

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(\varphi, x), \quad \varphi = \sigma(\varepsilon)t + c, \quad (18)$$

краевой задачи (1) удастся построить с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке. Как будет показано ниже, в принципе, этого достаточно для доказательства существования соответствующего ему точного решения.

Перед формулировкой основного результата введем в рассмотрение числа η_k , $k = 1, \dots, m$, определяющиеся с помощью второго равенства из (17) (при замене в ней k_0 на k) и положительные в силу условий (5).

ТЕОРЕМА. Пусть в дополнение к условиям (4), (5) выполняется неравенство

$$\eta_{k_0} > (3/4) \max_{1 \leq s \leq m} \eta_s. \quad (19)$$

Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ краевая задача (1) имеет экспоненциально устойчивые одномодовые квазипериодические решения

$$u = \pm u_{k_0}(\varphi, x, \varepsilon), \quad \varphi = \sigma(\varepsilon)t + c. \quad (20)$$

Здесь 2π -периодическая по φ функция u_{k_0} такова, что

$$u_{k_0} = \sqrt{\varepsilon} [\xi_{k_0} \exp(i\varphi_{k_0}) + \bar{\xi}_{k_0} \exp(-i\varphi_{k_0})] \sin n_{k_0} x + \varepsilon^{3/2} \Delta_{k_0}(\varphi, x, \varepsilon), \quad (21)$$

а для остатка $\Delta_{k_0}(\varphi, x, \varepsilon)$ справедлива оценка

$$\max_{\varphi} \|\Delta_{k_0}\|_{\dot{W}_2^2} + \max_{\varphi} \|L(\varepsilon)\Delta_{k_0}\|_{\dot{W}_2^1} \leq N \quad (22)$$

с не зависящей от ε постоянной $N > 0$.

Обращаем внимание на то, что, как следует из приводимого ниже доказательства теоремы, ее утверждение, касающееся существования квазипериодических решений (20) со свойствами (21), (22), сохраняется и при более слабых ограничениях. Достаточно вместо условия (19) потребовать отличие от нуля всех чисел

$$R_{k_0, s} = \eta_{k_0} - (3/4)\eta_s, \quad s = 1, \dots, m. \quad (23)$$

Однако в этом случае рассматриваемые решения будут, вообще говоря, дихотомичными (с размерностью неустойчивых многообразий s_0 , где s_0 – количество отрицательных среди чисел, описанных соотношением (23)). Отметим еще, что неравенство (19) заведомо выполняется, если номер k_0 удовлетворяет условию $\eta_{k_0} = \max_{1 \leq s \leq m} \eta_s$. Иными словами, пара одномодовых квазипериодических решений (20) с максимальной амплитудой ρ_{k_0} всегда устойчива.

2. Доказательство теоремы. Линеаризуем краевую задачу (1) на построенном выше приближенном квазипериодическом решении (18). В результате получим линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} h_{tt} + \varepsilon h_t + [1 + \varepsilon f(\varphi)]h &= a^2 h_{xx} - \varepsilon a_1(\varphi, x, \varepsilon)h - \varepsilon a_2(\varphi, x, \varepsilon)h_t, \\ h|_{x=0} &= h|_{x=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

с квазипериодическими коэффициентами, в которой

$$a_1(\varphi, x, 0) = 2u_0(\varphi, x)L_0(u_0(\varphi, x)), \quad a_2(\varphi, x, 0) = u_0^2(\varphi, x). \quad (25)$$

Как известно (см., например, [6]), основной этап доказательства существования у краевой задачи (1) точного квазипериодического решения с асимптотикой (18) состоит в исследовании свойств устойчивости решений линейной краевой задачи (24) и в обратимости соответствующего ей дифференциального оператора (в подходящем пространстве 2π -периодических по φ функций). Обе эти проблемы решаются с помощью алгоритма исследования устойчивости из [7], адаптированного в [8] для телеграфных уравнений. Описание указанного алгоритма приводится ниже.

Начнем с расчета характеристических показателей задачи (24), отвечающих модам $\sin n_k x$, $k = 1, \dots, m$. В соответствии с развитой в [8] методикой подставим в (24)

$$\begin{aligned} h &= [V_{0,k}(\varphi, x) + \varepsilon V_{1,k}(\varphi, x)] \exp(\varepsilon D_k t), \\ V_{j,k} &= [w_{j,k}, \bar{w}_{j,k}], \quad j = 0, 1, \quad w_{0,k} = \exp(i\varphi_k) \sin n_k x, \end{aligned} \quad (26)$$

где функция $w_{1,k}$, являющаяся тригонометрическим полиномом переменной φ , и элементы постоянной матрицы

$$D_k = \begin{pmatrix} d_{1,k} & d_{2,k} \\ \bar{d}_{2,k} & \bar{d}_{1,k} \end{pmatrix} \quad (27)$$

подлежат определению. Приравнявая коэффициенты при ε , для нахождения $w_{1,k}$ получим аналогичную (11) краевую задачу, в которой неоднородность g следует заменить на

$$\begin{aligned} g_k &= -a_1(\varphi, x, 0)w_{0,k} - a_2(\varphi, x, 0)L_0(w_{0,k}) - L_0(w_{0,k}) - f(\varphi)w_{0,k} \\ &\quad + 2\delta_k \omega_{n_k}^2 w_{0,k} - 2i\omega_{n_k}(w_{0,k}d_{1,k} - \bar{w}_{0,k}\bar{d}_{2,k}). \end{aligned} \quad (28)$$

Дальнейший анализ стандартен: сначала, приравнявая в (28) к нулю коэффициенты при гармониках $\exp(\pm i\varphi_k) \sin n_k x$, находим неизвестные постоянные $d_{1,k}$, $d_{2,k}$, для которых с учетом формул (25) выводим равенства

$$2d_{1,k} = -1 - \eta_{k_0} - 2i\delta_k \omega_{n_k}, \quad 2d_{2,k} = i\alpha_k/(2\omega_{n_k}), \quad k \neq k_0, \quad (29)$$

$$2d_{1,k_0} = -1 - (3/2)\eta_{k_0} - 2i\delta_{k_0} \omega_{n_{k_0}}, \quad 2d_{2,k_0} = i\alpha_{k_0}/(2\omega_{n_{k_0}}) - (3/4)\eta_{k_0}, \quad (30)$$

после этого решение $w_{1,k}$ получившейся краевой задачи однозначно определяем в виде тригонометрического многочлена аналогичной u_1 структуры при $k = k_0$ или линейной комбинации гармоник

$$\begin{aligned} \exp[i(\varphi_k \pm 2\varphi_{k_0})] \sin n_k x, & \quad \exp[i(\varphi_k \pm 2\varphi_{k_0})] \sin(n_k + 2n_{k_0})x, \\ \exp[i(\varphi_k \pm 2\varphi_{k_0})] \sin(n_k - 2n_{k_0})x, & \quad \exp(i\varphi_k) \sin(n_k \pm 2n_{k_0})x, \\ \exp[i(\varphi_k \pm 2\varphi_r)] \sin n_k x, & \quad r = 1, \dots, m, \quad r \neq k, k_0, \end{aligned}$$

при $k \neq k_0$. Подчеркнем, что в последнем случае возможность нахождения $w_{1,k}$ в требуемом виде обеспечивают условия нерезонансности

$$\begin{aligned} \omega_p^2 - \omega_{p \pm 2n}^2 &\neq 0, & (\omega_p + 2\omega_n)^2 - \omega_{p \pm 2n}^2 &\neq 0, \\ (\omega_p - 2\omega_n)^2 - \omega_{p \pm 2n}^2 &\neq 0, & (\omega_p \pm 2\omega_n)^2 - \omega_p^2 &\neq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

справедливые при всех натуральных $n, p, n \neq p$ (их обоснование содержится, например, в [9]).

При $p = 1, 2, \dots, p \neq n_k, k = 1, \dots, m$, подставим в краевую задачу (24) представление

$$h = \exp[(\varepsilon\mu_p + i\omega_p)t] (\sin px + \varepsilon h_p(\varphi, x)), \quad (32)$$

где h_p – тригонометрический многочлен переменной φ , а μ_p – подлежащая определению комплексная постоянная. В результате, приравнявая коэффициенты при ε , для h_p получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \left(L_0^2 + 2i\omega_p L_0 - \omega_p^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h_p + h_p &= G_p(\varphi, x), \\ h_p|_{x=0} = h_p|_{x=\pi} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

с правой частью

$$G_p(\varphi, x) = -[a_1(\varphi, x, 0) + i\omega_p a_2(\varphi, x, 0) + i\omega_p + f(\varphi) + 2i\omega_p \mu_p] \sin px. \quad (34)$$

Далее, имеющуюся в запасе постоянную μ_p выберем из условия равенства нулю коэффициента при $\sin px$ в неоднородности (34), что приводит к формуле

$$2\mu_p = -1 - \eta_{k_0}. \quad (35)$$

После определения μ_p функция (34) приобретает вид

$$\begin{aligned} G_p &= \exp(2i\varphi_{k_0}) [v_{1,p}^+ \sin px + v_{2,p}^+ \sin(p + 2n_{k_0})x + v_{3,p}^+ \sin(p - 2n_{k_0})x] \\ &\quad + \exp(-2i\varphi_{k_0}) [v_{1,p}^- \sin px + v_{2,p}^- \sin(p + 2n_{k_0})x + v_{3,p}^- \sin(p - 2n_{k_0})x] \\ &\quad + v_{4,p}^+ \sin(p + 2n_{k_0})x + v_{4,p}^- \sin(p - 2n_{k_0})x \\ &\quad + \sum_{s=1}^m [v_{4+s,p}^+ \exp(2i\varphi_s) + v_{4+s,p}^- \exp(-2i\varphi_s)] \sin px. \end{aligned}$$

Поэтому для решения h_p задачи (33) получается аналогичная формула, в которой коэффициенты $v_{j,p}^\pm$, $j = 1, \dots, m+4$, следует заменить на $\tilde{v}_{j,p}^\pm$, где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1,p}^\pm &= v_{1,p}^\pm / [\omega_p^2 - (\omega_p \pm 2\omega_{n_{k_0}})^2], & \tilde{v}_{2,p}^\pm &= v_{2,p}^\pm / [\omega_{p+2n_{k_0}}^2 - (\omega_p \pm 2\omega_{n_{k_0}})^2], \\ \tilde{v}_{3,p}^\pm &= v_{3,p}^\pm / [\omega_{p-2n_{k_0}}^2 - (\omega_p \pm 2\omega_{n_{k_0}})^2], & \tilde{v}_{4,p}^\pm &= v_{4,p}^\pm / [\omega_{p\pm 2n_{k_0}}^2 - \omega_p^2], \\ \tilde{v}_{4+s,p}^\pm &= v_{4+s,p}^\pm / [\omega_p^2 - (\omega_p \pm 2\omega_{n_s})^2], & s &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, отличие от нуля соответствующих знаменателей обеспечивают неравенства (31). Более того, поскольку после деления на ω_p левые части этих неравенств стремятся при $p \rightarrow \infty$ к ненулевым конечным пределам, то справедливы оценки

$$|\tilde{v}_{j,p}^\pm| \leq N, \quad j = 1, \dots, m+4; \quad (36)$$

здесь и ниже через N , N_1 и т.д. обозначаем различные универсальные (не зависящие от p, ε) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

На следующем этапе доказательства обоснуем описанный выше алгоритм асимптотического вычисления характеристических показателей краевой задачи (24). Введем новые переменные $h_1 = h_t$, $h_2 = Bh$, где B – арифметический квадратный корень из оператора $-a^2 d^2/dx^2 + I$ с граничными условиями Дирихле, и перейдем обычным образом от уравнения (24) к системе первого порядка в $\overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1$. Выполним затем в получившейся системе замену, исходя из формулы

$$h = \sum_{k=1}^m (V_{0,k} + \varepsilon V_{1,k}) z_k + \sum_{\substack{p \geq 1 \\ p \neq n_k, k=1, \dots, m}} \omega_p^{-2} \{ [\sin px + \varepsilon h_p] y_p + [\sin px + \varepsilon \bar{h}_p] \bar{y}_p \}, \quad (37)$$

где

$$z_k = \text{colon}(z_k^0, \bar{z}_k^0), \quad y = \text{colon}(z_1^0, \bar{z}_1^0, \dots, z_m^0, \bar{z}_m^0, y_1, \bar{y}_1, \dots, y_p, \bar{y}_p, \dots) \in l_2.$$

Последнее означает, что при дифференцировании переменных $z_k = z_k(t)$, $y_p = y_p(t)$ по t следует считать

$$\dot{z}_k = \varepsilon D_k z_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad \dot{y}_p = (i\omega_p + \varepsilon \mu_p) y_p,$$

где D_k – матрицы (27), а μ_p – числа (35). Заметим, далее, что из способа построения и свойств входящих в (37) функций (см. равенства (26), (32) и оценки (36)) вытекают следующие факты. Во-первых, формула (37) индуцирует ограниченный равномерно по φ, ε (вместе со своим обратным) оператор, действующий из l_2 в $\overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1$. Во-вторых, результатом проведения указанной замены в (24) служит система в l_2 :

$$\dot{y} = \Lambda_0(\varepsilon) y + \varepsilon^2 \Lambda_1(\varphi, \varepsilon) y. \quad (38)$$

Здесь

$$\Lambda_0 = \text{diag}\{\varepsilon D_1, \dots, \varepsilon D_m, \dots, i\omega_p + \varepsilon\mu_p, -i\omega_p + \varepsilon\mu_p, \dots\}, \quad (39)$$

а линейный 2π -периодический по φ оператор Λ_1 ограничен равномерно по φ, ε .

Из структуры системы (38) следует, что свойства ее устойчивости определяются по расположению спектра оператора (39), а значит, в конечном итоге – по расположению собственных значений матриц (27). Из (29), (30) следует, что матрица D_{k_0} является гурвицевой, а матрицы D_k при $k \neq k_0$ будут таковыми при

$$\eta_{k_0} > (3/4)\eta_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad k \neq k_0. \quad (40)$$

Остается добавить, что справедливость всех неравенств (40) обеспечивает предполагаемое выше условие (19).

Завершающий этап обоснования теоремы состоит в доказательстве существования у краевой задачи (7) 2π -периодического по φ решения с построенной выше асимптотикой и проводится по стандартной схеме. Положим в (7)

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(\varphi, x) + \varepsilon^{3/2} h, \quad (41)$$

где функции u_0, u_1 взяты из (18). В результате приходим к уравнению

$$\Pi(\varepsilon)h = \varepsilon F(\varphi, x, \varepsilon, h, L(\varepsilon)h), \quad (42)$$

где

$$\Pi(\varepsilon)h = L^2(\varepsilon)h + \varepsilon L(\varepsilon)h + [1 + \varepsilon f(\varphi)]h - a^2 h_{xx} + \varepsilon a_1(\varphi, x, \varepsilon)h + \varepsilon a_2(\varphi, x, \varepsilon)L(\varepsilon)h, \quad (43)$$

а гладкая по совокупности переменных 2π -периодическая по φ функция $F(\varphi, x, \varepsilon, u, v)$ такова, что

$$\max_{\varphi} \|F(\varphi, x, \varepsilon, 0, 0)\|_{\dot{W}_2^1} \leq N_1, \quad (44)$$

$$\max_{\varphi} \|F(\varphi, x, \varepsilon, u_1, v_1) - F(\varphi, x, \varepsilon, u_2, v_2)\|_{\dot{W}_2^1} \leq N_2 \varepsilon (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|), \quad (45)$$

где $N_2 = N_2(R)$, $R = \max\{|u_j|, |v_j|, j = 1, 2\}$.

Введем в рассмотрение банаховы пространства E_j , $j = 1, 2$, состоящие из 2π -периодических и непрерывных по φ в метрике $\dot{W}_2^j(0, \pi)$, $j = 1, 2$, функций $u(\varphi, x)$. Нормы в этих пространствах определим формулами

$$\|u\|_{E_j} = \max_{\varphi} \|u(\varphi, x)\|_{\dot{W}_2^j}, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим, далее, уравнение

$$\Pi(\varepsilon)h = g(\varphi, x) \quad (46)$$

с произвольной неоднородностью $g \in E_1$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА. Уравнение (46) имеет при любой правой части $g \in E_1$ единственное решение $u = u_g(\varphi, x, \varepsilon) \in E_2$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u_g\|_{E_2} + \|L(\varepsilon)u_g\|_{E_1} \leq \frac{N_3}{\varepsilon} \|g\|_{E_1}. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при обосновании алгоритма исследования устойчивости, введем новые переменные $h_1 = L(\varepsilon)h$, $h_2 = Bh$ и перейдем от уравнения (46) к системе в $E_1 \times E_1$. Выполним, далее, в этой системе замену, исходя из формулы (37) и равенств

$$L(\varepsilon)z_k = \varepsilon D_k z_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad L(\varepsilon)y_p = (i\omega_p + \varepsilon\mu_p)y_p.$$

В итоге приходим к уравнению для $y \in l_2$, имеющему вид

$$L(\varepsilon)y = \Lambda_0(\varepsilon)y + \varepsilon^2 \Lambda_1(\varphi, \varepsilon)y + \tilde{g}(\varphi, \varepsilon). \quad (48)$$

Здесь, как и раньше, $L(\varepsilon)y = \sum_{k=1}^m (1 + \varepsilon\delta_k)\omega_{n_k} \frac{\partial y}{\partial \varphi_k}$, Λ_0, Λ_1 – операторы из (38), $\tilde{g}(\varphi, \varepsilon)$ – неоднородность из класса $C(l_2)$, где $C(l_2)$ – банахово пространство непрерывных в метрике l_2 и 2π -периодических по φ функций $y(\varphi)$ с нормой

$$\|y\|_{C(l_2)} = \max_{\varphi} \|y(\varphi)\|_{l_2}.$$

Итак, проблема обоснования леммы свелась к нахождению решения $y(\varphi, \varepsilon)$ уравнения (48), принадлежащего классу $C(l_2)$. Анализ этого уравнения разбивается, в свою очередь, на два этапа.

На первом этапе рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L(\varepsilon)y = \Lambda_0(\varepsilon)y + \tilde{g}(\varphi, \varepsilon)$$

и заметим, что, как следует из явного вида оператора $\Lambda_0(\varepsilon)$, оно имеет единственное решение $y = y(\varphi, \varepsilon) \in C(l_2)$, задающееся равенством

$$y(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^0 \exp[-\Lambda_0(\varepsilon)s] \tilde{g}(\sigma(\varepsilon)s + \varphi, \varepsilon) ds. \quad (49)$$

Более того, из формулы (49) очевидным образом вытекает оценка

$$\|y\|_{C(l_2)} \leq \frac{N_4}{\varepsilon} \|\tilde{g}\|_{C(l_2)}. \quad (50)$$

На втором этапе, рассматривая второе и третье слагаемые правой части уравнения (48) как неоднородность и применяя формулу (49), приходим к линейному неоднородному интегральному уравнению в $C(l_2)$. Обозначим, далее, через $\tilde{\Pi}: C(l_2) \rightarrow C(l_2)$ оператор, порожденный правой частью получившегося уравнения. Из оценки (50) и свойств $\Lambda_1(\varphi, \varepsilon)$ следует, что оператор $\tilde{\Pi}$ является сжимающим (с константой сжатия порядка ε). Тем самым, уравнение (48) имеет единственное решение $y(\varphi, \varepsilon) \in C(l_2)$, для которого сохраняется аналогичная (50) оценка.

И наконец, возвращаясь к исходному уравнению (46), т.е. обращая сделанную ранее замену, убеждаемся в существовании и единственности его решения $u_g \in E_2$ с требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы перейдем от (42) к интегральному уравнению в E_2 , обращая оператор (43). Неравенства (44), (45), (47) позволяют применить к нему принцип сжимающих отображений и определить функцию $h(\varphi, x, \varepsilon) \in E_2$, удовлетворяющую оценке

$$\|h\|_{E_2} + \|L(\varepsilon)h\|_{E_1} \leq N_5.$$

Подставляя, далее, эту функцию в (41), получаем решение (21) краевой задачи (7) со свойствами (22). Остается добавить, что поскольку исходная краевая задача (1) инвариантна относительно замены $u \rightarrow -u$, то одному и тому же решению (21) соответствует пара квазипериодических решений (20). Устойчивость же этих решений вытекает из установленных выше свойств системы (38). Теорема доказана.

3. Об устойчивости многомодовых решений. Для получения более полного представления о динамике краевой задачи (1) воспользуемся методом квазинормальных форм [10]. С этой целью положим в ней

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \varphi, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(t, \varphi, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t,$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{0,0}(\tau, \varphi, x) + u_{0,1}(t, \tau, x), \\ u_{0,0}(\tau, \varphi, x) &= \sum_{k=1}^m [\xi_{n_k}(\tau) \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_{n_k}(\tau) \exp(-i\varphi_k)] \sin n_k x, \\ u_{0,1}(t, \tau, x) &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n_k, k=1, \dots, m}}^{\infty} [\xi_p(\tau) \exp(i\omega_p t) + \bar{\xi}_p(\tau) \exp(-i\omega_p t)] \sin px, \end{aligned}$$

а комплексные амплитуды ξ_s , $s \geq 1$, таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_s^4 |\xi_s|^2$ (в этом случае $u_1 \in \dot{W}_2^2$ по переменной x). Приравнявая затем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для определения u_2 получаем краевую задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_0 \right)^2 u_2 + u_2 - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = G, \quad u_2|_{x=0} = u_2|_{x=\pi} = 0, \quad (51)$$

в которой

$$\begin{aligned} G &= 2 \sum_{k=1}^m \delta_k \omega_{n_k}^2 [\xi_{n_k}(\tau) \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_{n_k}(\tau) \exp(-i\varphi_k)] \sin n_k x \\ &\quad - f(\varphi) u_0 - \left(\frac{\partial}{\partial t} + L_0 \right) \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + u_0 + \frac{u_0^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Обратим внимание на то, что необходимым условием разрешимости краевой задачи (51) в классе формальных тригонометрических рядов переменных t, φ является отсутствие в ее правой части (52) слагаемых, пропорциональных

$$\exp(\pm i\varphi_k) \sin n_k x, \quad k = 1, \dots, m, \quad \exp(\pm i\omega_p t) \sin px, \\ p \geq 1, \quad p \neq n_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Приравнивая упомянутые слагаемые к нулю, для нахождения неизвестных амплитуд ξ_s , $s \geq 1$, приходим к системе обыкновенных уравнений (дифференцирование проводим по τ)

$$2\dot{\xi}_{n_k} = -(2\delta_k i\omega_{n_k} + 1)\xi_{n_k} + \frac{i\alpha_k}{2\omega_{n_k}} \bar{\xi}_{n_k} - \frac{3}{4} |\xi_{n_k}|^2 \xi_{n_k} - \xi_{n_k} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n_k}}^{\infty} |\xi_s|^2, \quad k = 1, \dots, m, \quad (53)$$

$$2\dot{\xi}_p = -\xi_p - \frac{3}{4} |\xi_p|^2 \xi_p - \xi_p \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^{\infty} |\xi_s|^2, \quad p \geq 1, \quad p \neq n_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (54)$$

которая и является искомой квазинормальной формой задачи (1).

Из структуры уравнений (54) следует, что все амплитуды ξ_p , $p \neq n_k$, $k = 1, \dots, m$, стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому уместно перейти от полной системы (53), (54) к системе на устойчивом инвариантном многообразии $\{\xi_p = 0, p \neq n_k, k = 1, \dots, m\}$, которая имеет вид

$$2\dot{\xi}_{n_k} = -(2\delta_k i\omega_{n_k} + 1)\xi_{n_k} + \frac{i\alpha_k}{2\omega_{n_k}} \bar{\xi}_{n_k} - \frac{3}{4} |\xi_{n_k}|^2 \xi_{n_k} - \xi_{n_k} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^m |\xi_{n_s}|^2, \quad (55) \\ k = 1, \dots, m.$$

Фиксируем произвольно набор натуральных чисел

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq m \quad (56)$$

и предположим, что система (55) имеет состояние равновесия с компонентами

$$\xi_{n_{k_j}} \neq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad \xi_{n_k} = 0, \quad n_k \neq n_{k_j}, \quad (57)$$

экспоненциально устойчивое или дихотомичное. Тогда, используя развитую в п. 2 технику, можно показать, что при выполнении определенных условий нерезонансности между собственными частотами ω_n , $n \geq 1$ (см. [8]), исходная краевая задача (1) имеет квазипериодическое решение (6) с теми же свойствами устойчивости.

Асимптотика этого решения задается равенством (8), в котором в качестве $u_0(\varphi, x)$ следует взять функцию

$$u_0(\varphi, x) = \sum_{j=1}^r [\xi_{n_{k_j}} \exp(i\varphi_{k_j}) + \bar{\xi}_{n_{k_j}} \exp(-i\varphi_{k_j})] \sin n_{k_j} x.$$

Такое решение естественно назвать *r-модовым*.

Поскольку вопрос о существовании и устойчивости одномодовых квазипериодических решений (6) уже рассмотрен, то будем считать, что в (56) $r \geq 2$. Далее, для нахождения интересующих нас состояний равновесия (57) системы (55) положим в ней $\xi_{n_k} = 0$ при $n_k \neq n_{k_j}$, $\xi_{n_{k_j}} = \rho_{k_j} \exp(i\psi_{k_j})$, $j = 1, \dots, r$. В результате для переменных $\eta_j = \rho_{k_j}^2$, $\theta_j = 2\psi_{k_j}$ получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \frac{\alpha_{k_j}}{2\omega_{n_{k_j}}} \eta_j \sin \theta_j - \eta_j \left[1 + \frac{3}{4} \eta_j + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^r \eta_s \right], \\ \dot{\theta}_j &= -2\delta_{k_j} \omega_{n_{k_j}} + \frac{\alpha_{k_j}}{2\omega_{n_{k_j}}} \cos \theta_j, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (58)$$

Анализ системы (58) проведем при дополнительных условиях

$$\frac{4}{4m-1} \sum_{s=1}^m \varkappa_s - \varkappa_j > 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (59)$$

где $\varkappa_j = \sqrt{\alpha_{k_j}/(4\omega_{n_{k_j}}^2) - 4\delta_{k_j}^2 \omega_{n_{k_j}}^2} - 1$, $j = 1, \dots, r$. Неравенства (59), как нетрудно увидеть, обеспечивают существование у системы состояния равновесия $\eta_j = \eta_j^0$, $\theta_j = \theta_j^0$, $j = 1, \dots, r$, где

$$\eta_j^0 = 4 \left(\frac{4}{4m-1} \sum_{s=1}^m \varkappa_s - \varkappa_j \right) > 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (60)$$

а θ_j^0 , $j = 1, \dots, r$, – корни уравнений

$$\frac{\alpha_{k_j}}{2\omega_{n_{k_j}}} \cos \theta_j = 2\delta_{k_j} \omega_{n_{k_j}}, \quad j = 1, \dots, r,$$

для которых выполняются условия

$$\alpha_{k_j} \sin \theta_j^0 > 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (61)$$

Обозначим, далее, через C матрицу линеаризации системы (58) на указанном состоянии равновесия. Из структуры уравнений для θ_j вытекает, что r ее собственных значений совпадают с числами

$$-\frac{\alpha_{k_j}}{2\omega_{n_{k_j}}} \sin \theta_j^0, \quad j = 1, \dots, r,$$

а значит, являются отрицательными (см. (61)). Остальные же r собственных значений матрицы C определяются из уравнения

$$\det(\lambda C_1 + C_2) = 0, \quad (62)$$

где

$$C_1 = \text{diag}\{1/\eta_1^0, 1/\eta_2^0, \dots, 1/\eta_r^0\}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что уравнение (62) имеет хотя бы один положительный корень. Предположим сначала, что найдутся такие индексы $j_1 \neq j_2$, для которых $\eta_{j_1}^0 = \eta_{j_2}^0$. Тогда это уравнение имеет корень $\lambda = \eta_{j_1}^0/4$, поскольку одинаковыми становятся строки матрицы $(\eta_{j_1}^0/4)C_1 + C_2$ с номерами j_1 и j_2 . Поэтому предположим, что все числа (60) различны, а точнее говоря, без ограничения общности будем считать, что

$$\eta_1^0 < \eta_2^0 < \dots < \eta_r^0. \quad (63)$$

Обратимся к фигурирующей в уравнении (62) матрице $\lambda C_1 + C_2$ и вычтем первую ее строку из всех остальных строк. После этого к первому столбцу полученной матрицы прибавим все остальные столбцы, умноженные соответственно на $(\frac{\lambda}{\eta_1^0} - \frac{1}{4})/(\frac{\lambda}{\eta_j^0} - \frac{1}{4})$, $j = 2, \dots, r$. В итоге уравнение (62) преобразуется к виду

$$P(\lambda) \equiv \left[1 + \sum_{s=1}^r \frac{1}{\lambda/\eta_s^0 - 1/4} \right] \prod_{s=1}^r \left(\frac{\lambda}{\eta_s^0} - \frac{1}{4} \right) = 0. \quad (64)$$

Заметим, далее, что из условий (63) вытекают равенства

$$\text{sign } P(\eta_s/4) = (-1)^{r-s}, \quad s = 1, \dots, r.$$

Это означает, что количество положительных корней уравнения (64) равно $r - 1$.

Итак, установлено, что любое r -модовое квазипериодическое решение (6) краевой задачи (1) при $r \geq 2$ если и существует, то заведомо неустойчиво. Тем самым, ее аттракторы исчерпываются построенными в п. 2 одномодовыми квазипериодическими решениями.

4. Заключение. Интересно отметить, что все полученные для краевой задачи (1) факты сохраняются и в случае краевой задачи

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + [1 + \varepsilon f(\varphi)] \sin u = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \quad (65)$$

с “маятниковой” нелинейностью при выполнении прежних ограничений (4), (5).

Действительно, динамику краевой задачи (65) описывает аналогичная (55) система

$$2\dot{\xi}_s = -(1 + 2\delta_s i\omega_{n_s})\xi_s + \frac{i\alpha_s}{2\omega_{n_s}}\bar{\xi}_s - \frac{i}{\omega_{n_s}} \left[\frac{3}{8}|\xi_s|^2\xi_s + \frac{1}{2}\xi_s \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^m |\xi_k|^2 \right], \quad (66)$$

$$s = 1, \dots, m.$$

Фиксируем, далее, произвольное натуральное k_0 , $k_0 \leq m$, и заметим, что эта система имеет состояние равновесия

$$\xi_{k_0} = \sqrt{\eta_{k_0}} \exp(i\psi_{k_0}), \quad \xi_k = 0, \quad k \neq k_0, \quad (67)$$

где $\eta_{k_0} = \frac{8}{3} \left(\sqrt{\alpha_{k_0}^2/4 - \omega_{n_{k_0}}^2} - 2\delta_{k_0}\omega_{n_{k_0}}^2 \right) > 0$ (см. неравенство (5) при $k = k_0$), а ψ_{k_0} – корень уравнения

$$\frac{\alpha_{k_0}}{2} \cos 2\psi_{k_0} = 2\delta_{k_0}\omega_{n_{k_0}}^2 + \frac{3}{8}\eta_{k_0},$$

удовлетворяющий условию $\alpha_{k_0} \sin 2\psi_{k_0} > 0$. Нетрудно также заметить, что условие устойчивости состояния равновесия (67) задается прежним неравенством (19). Добавим еще, что при некоторых дополнительных ограничениях система (66) может иметь и состояния равновесия с количеством ненулевых координат $r \geq 2$. Все они, однако, неустойчивы.

В заключение сопоставим полученные выше результаты с автоколебательным случаем. А именно, рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} - u^2 u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (68)$$

получающуюся из (1) при $f(\varphi) = 0$ и замене слагаемого εu_t на $-\varepsilon u_t$. Как показано, например, в [9], в рамках задачи (68) реализуется так называемое *явление буферности*, состоящее в том, что при уменьшении ε можно гарантировать существование для этой задачи любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов (периодических по t решений). Точнее говоря, для каждого натурального N найдется такое $\varepsilon_N > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$ краевая задача (68) имеет экспоненциально орбитально устойчивые циклы

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_n(\tau, x, \varepsilon), \quad d\tau/dt = \omega_n(1 + \varepsilon\delta_n(\varepsilon)), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь достаточно гладкие по своим переменным функции $\delta_n(\varepsilon)$, $u_n(\tau, x, \varepsilon)$, $u_n(\tau + 2\pi, x, \varepsilon) \equiv u_n(\tau, x, \varepsilon)$ таковы, что

$$\delta_n(0) = 0, \quad u_n(\tau, x, 0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \tau \sin nx.$$

Недостатком краевой задачи (68) является то, что буферность в ней носит “дикий” характер: возбуждены все моды и бифурцирующих из нуля циклов излишне

много (как установлено в [9], при $\varepsilon \rightarrow 0$ их количество имеет порядок ε^{-1}). С другой стороны, как показывает проделанный нами анализ, явлением буферности можно управлять. Рассмотрим вместо (68) недовозбужденную систему, т.е. краевую задачу

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} - u^2 u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Если начать действовать на нее параметрической внешней силой (2), то можно добиться возбуждения только конечного числа мод с наперед заданными номерами $n_1 < n_2 < \dots < n_m$. Более того, если положить, например, в (2), (4) $\alpha_k = \alpha \omega_{n_k}$, $\delta_k = \delta / \omega_{n_k}$, $k = 1, \dots, m$, где постоянные α, δ связаны неравенством

$$\alpha^2 / 4 - 4\delta^2 - 1 > 0,$$

то условия устойчивости (19) одномодовых квазипериодических решений (20) будут выполняться одновременно при всех $k_0 = 1, \dots, m$. Иными словами, в рамках краевой задачи (1) наблюдается так называемое явление *управляемой буферности*, т.е. за счет выбора параметров внешнего воздействия можно управлять в ней как количеством и номерами возбуждаемых мод, так и количеством возникающих при этом устойчивых квазипериодических режимов.

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
3. Митропольский Ю. А., Мосеев Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища шк., 1976.
4. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
5. Кубышкин Е. П. Параметрический резонанс в системах с последствием при почти периодическом возмущении // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯГУ, 1978. С. 100–109.
6. Васильева А. Б., Каценко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Матем. сб. 1986. Т. 130. № 4. С. 488–499.
7. Колесов Ю. С., Майоров В. В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравн. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
8. Колесов А. Ю. Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 59–65.
9. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИРАН. 1998. Т. 222. С. 3–191.
10. Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.

Поступило в редакцию
11.I.2002