Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Авдеев, Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 6, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:51:04

УДК 512.745+512.816.4

Р. С. Авдеев

Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп

Расширенная полугруппа старших весов однородного пространства G/H связной полупростой алгебраической группы G характеризует спектры представлений группы G в пространствах регулярных сечений однородных линейных расслоений над G/H , в частности в пространстве регулярных функций на G/H . Вычисляются расширенные полугруппы старших весов для всех строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств G/H , где G – односвязная непростая полупростая комплексная алгебраическая группа, H – ее связная замкнутая подгруппа. Также в каждом случае находятся старшие весовые функции, отвечающие неразложимым элементам этой полугруппы. Результаты работы, в частности, завершают вычисление полугрупп старших весов для всех строго неприводимых односвязных аффинных сферических однородных пространств полупростых комплексных алгебраических групп.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: алгебраическая группа, линейное представление, однородное пространство, алгебра инвариантов, полугруппа.

§ 1. Введение

1.1. Пусть G – связная редуктивная комплексная алгебраическая группа, H – ее замкнутая подгруппа. Рассмотрим однородное пространство G/H и алгебру $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}[G]^H$ регулярных функций на нем. Эта алгебра является рациональным G -модулем относительно действия G слева и разлагается в прямую сумму конечномерных неприводимых G -модулей. Представляет интерес вопрос о том, при каких λ в данное разложение входит неприводимый G -модуль со старшим весом λ , а также нахождение кратности m_λ этого G -модуля. Те доминантные веса λ группы G , для которых $m_\lambda \geq 1$, образуют полугруппу, которая называется *полугруппой старших весов* однородного пространства G/H . Обозначим эту полугруппу через $\Gamma(G/H)$.

Подгруппа H называется *сферической* (однородное пространство G/H – *сферическим*, пара (G, H) – *сферической*), если борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H . Как следует из результатов работы [1], обсуждаемых далее в п. 1.3, для сферических однородных пространств G -модуль

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-1983.2008.1).

$\mathbb{C}[G/H]$ имеет *простой спектр* (причем если многообразие G/H квазиаффинно, то верно и обратное), что по определению означает справедливость неравенства $m_\lambda \leq 1$ при каждом λ . В случае полупростой группы G классификация аффинных сферических однородных пространств (т. е. таких, для которых подгруппа H редуктивна) с точностью до локального изоморфизма получена в работах [2]–[4]. А именно, в работе [2] найдены все с точностью до локального изоморфизма пары (G, H) , где G – простая алгебраическая группа, H – ее редуктивная сферическая подгруппа. Все аффинные сферические однородные пространства непростых полупростых алгебраических групп классифицированы в работах [3], [4] (см. уточнения в работе [5]). Любое такое пространство может быть получено посредством определенной конструкции [5] из строго неприводимых сферических однородных пространств (их определение будет дано в п. 1.4). Последние с точностью до локального изоморфизма исчерпываются следующими тремя типами:

- 1) сферические пространства G/H , где G проста, H связна (классифицированы в [2]);
- 2) пространства G/H , где $G = H \times H$, подгруппа H вложена в G диагонально, группа H проста;
- 3) пространства G/H , отвечающие парам (G, H) из табл. 1 (классифицированы в [3], [4]).

Полугруппы старших весов для пространств типа 1) вычислены в работе [2]. Для пространств типа 2) полугруппы $\Gamma(G/H)$ хорошо известны (см. п. 1.4). Полугруппы старших весов для пространств типа 3) вычисляются в настоящей работе.

Точнее, в настоящей работе для каждого сферического однородного пространства из табл. 1 вычисляется расширенная полугруппа старших весов (ее определение будет дано в п. 1.2), а также находятся весовые функции, отвечающие неразложимым элементам этой полугруппы. В частности, из полученных результатов легко следует описание полугруппы старших весов для пространств из табл. 1. Как Э. Б. Винбергу сообщил Ю. В. Дзядык, расширенные полугруппы старших весов для всех однородных пространств из табл. 1 были им вычислены в 1985 г. Он использовал другой метод, восходящий к его работам [6], [7] (см. также [8]), где рассматривается случай симметрических пространств. Этот метод не требует явного нахождения весовых функций. К сожалению, результаты Дзядыка до сих пор не опубликованы.

1.2. В данной работе основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, все топологические термины относятся к топологии Зариского, все рассматриваемые группы предполагаются алгебраическими, а их подгруппы – замкнутыми. Для любой группы L через $\mathfrak{X}(L)$ обозначается группа ее характеров, записываемая аддитивно.

Везде далее через G обозначается связная полупростая алгебраическая группа. Предполагается, что в G фиксированы борелевская подгруппа B и содержащийся в ней максимальный тор T . Через U обозначается максимальная унипотентная подгруппа группы G , содержащаяся в B . Группа $\mathfrak{X}(B)$ отождествляется с $\mathfrak{X}(T)$ посредством ограничения характеров с B на T . Множество доминантных весов группы B обозначается через $\mathfrak{X}_+(B)$.

Действия группы G на себе левыми сдвигами $((g, x) \mapsto gx)$ и правыми сдвигами $((g, x) \mapsto xg^{-1})$ индуцируют ее представления в пространстве $\mathbb{C}[G]$ регулярных функций на G по формулам $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ и $(fg)(x) = f(xg)$

соответственно. Для краткости первое из этих действий будем называть *действием слева*, а второе – *действием справа*. Для любой подгруппы $L \subset G$ через ${}^L\mathbb{C}[G]$ (соответственно, $\mathbb{C}[G]^L$) будем обозначать алгебру функций из $\mathbb{C}[G]$, инвариантных относительно действия L слева (соответственно, справа).

Введем понятие расширенной полугруппы старших весов однородного пространства G/H .

Пусть $H \subset G$ – произвольная подгруппа. Для каждого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ обозначим через V_χ подпространство функций в $\mathbb{C}[G]$, весовых с весом χ относительно действия подгруппы H справа, т. е.

$$V_\chi = \{f \in \mathbb{C}[G] : f(gh) = \chi(h)f(g) \quad \forall g \in G, \forall h \in H\}.$$

Определим подгруппу $H_0 \subset G$ как пересечение ядер всех характеров группы H : $H_0 = \bigcap_{\chi \in \mathfrak{X}(H)} \text{Ker } \chi$. Тогда имеем $\bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(H)} V_\chi = \mathbb{C}[G]^{H_0}$. Поскольку действия группы G на $\mathbb{C}[G]$ слева и справа коммутируют, действие G слева сохраняет подпространство V_χ при любом $\chi \in \mathfrak{X}(H)$.

Отметим, что факторгруппа H/H_0 коммутативна (т. е. H/H_0 – квазитор) и естественное вложение $\mathfrak{X}(H/H_0) \hookrightarrow \mathfrak{X}(H)$ является изоморфизмом.

Предположим, что для каждого подпространства V_χ фиксировано его разложение в прямую сумму неприводимых G -модулей. Тогда старшие векторы всех этих G -модулей, взятых для всех χ , образуют базис алгебры (как векторного пространства над $\mathbb{C}$)

$$A = A(G/H) := {}^U(\mathbb{C}[G]^{H_0}) = {}^U\mathbb{C}[G]^{H_0}.$$

Пусть $f \in A \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathfrak{X}_+(T)$ и $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Назовем функцию f *весовой относительно $B \times H$* (или просто *весовой*) *веса* (λ, χ) (при $\mathfrak{X}(H) = 0$ вместо $(\lambda, 0)$ пишем просто λ), если f является старшим вектором некоторого неприводимого G -модуля $N \subset V_\chi$ со старшим весом λ . Подпространство в A , состоящее из нуля и всех весовых функций веса (λ, χ) , обозначим через $A_{\lambda, \chi}$. Если $f_1 \in A_{\lambda_1, \chi_1}$ и $f_2 \in A_{\lambda_2, \chi_2}$, то $f_1 f_2 \in A_{\lambda_1 + \lambda_2, \chi_1 + \chi_2}$. Таким образом, множество пар (λ, χ) , где $\lambda \in \mathfrak{X}_+(B)$, $\chi \in \mathfrak{X}(H)$, для которых $A_{\lambda, \chi} \neq 0$, является полугруппой. Назовем эту полугруппу *расширенной полугруппой старших весов* (термин предложен Э. Б. Винбергом) однородного пространства G/H и обозначим ее через $\widehat{\Gamma}(G/H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеем $\Gamma(G/H) = \{(\lambda, \chi) \in \widehat{\Gamma}(G/H) : \chi = 0\} \subset \widehat{\Gamma}(G/H)$. Очевидно, что если $\mathfrak{X}(H) = 0$, то $\Gamma(G/H) = \widehat{\Gamma}(G/H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображение $\pi : \widehat{\Gamma}(G/H) \rightarrow \Gamma(G/H_0)$, $(\lambda, \chi) \mapsto \lambda$, сюръективно. При этом $\pi^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существует другая интерпретация полугруппы $\widehat{\Gamma}(G/H)$ в случае связной подгруппы H . А именно, рассмотрим группу $\widehat{G} = G \times (H/H_0)$ и ее подгруппу $\widehat{H} \simeq H$, вложенную в $\widehat{G}$ посредством отображения $h \mapsto (h, hH_0)$. Алгебра $\mathbb{C}[G]^{H_0}$ является $\widehat{G}$ -модулем относительно действия G слева и действия H/H_0 справа. Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{H}}$ как $\widehat{G}$ -модуль относительно действия группы $\widehat{G}$ слева. Отображение $\psi : \mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{H}} \rightarrow \mathbb{C}[G]^{H_0}$, $(\psi f)(g) = f(g, eH_0)$, является изоморфизмом $\widehat{G}$ -модулей (обратное отображение $F \mapsto \widehat{F}$ задается формулой $\widehat{F}(g, hH_0) = F(gh^{-1})$). Поэтому имеется изоморфизм полугрупп $\widehat{\Gamma}(G/H) \simeq \Gamma(\widehat{G}/\widehat{H})$.

1.3. Пусть $H \subset G$ – сферическая подгруппа. Согласно [1, теорема 1] для каждого характера $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ представление группы G в пространстве V_χ имеет простой спектр. Отсюда следует, что по любой паре $(\lambda, \chi) \in \widehat{\Gamma}(G/H)$ соответствующая весовая функция $f \in A_{\lambda, \chi}$ определяется однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу, т. е. $\dim A_{\lambda, \chi} = 1$.

Докажем следующий факт (ср. [9, предложение 2]).

ТЕОРЕМА 1. *Если группа G односвязна, а подгруппа $H \subset G$ связна и сферична, то алгебра A факториальна и полугруппа $\widehat{\Gamma}(G/H)$ свободна.*

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая

ТЕОРЕМА 2 [10, теорема 3.17]. *Пусть задано регулярное действие алгебраической группы L на аффинном алгебраическом многообразии X . Если алгебра $\mathbb{C}[X]$ факториальна, а группа L связна и не имеет нетривиальных характеров, то и алгебра $\mathbb{C}[X]^L$ факториальна. При этом $\mathbb{C}[X]^L$ вместе со всяким ненулевым элементом содержит все его делители в $\mathbb{C}[X]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из односвязности группы G следует, что алгебра $\mathbb{C}[G]$ факториальна (см. [11, следствие из предложения 1]). Пусть $H = H_u \rtimes R$ – разложение Леви подгруппы H , где H_u и R – соответственно унипотентный радикал и максимальная редуктивная подгруппа в H . Тогда имеем $H_0 = H_u \rtimes [R, R]$, где $[R, R]$ – коммутант группы R . Поскольку группа H связна, то и R связна, поэтому группа $[R, R]$ либо связна и полупроста, либо состоит из одного элемента. Следовательно, группа H_0 связна и не имеет нетривиальных характеров, а значит, это же верно и для группы $U \times H_0$. Поэтому можно применить теорему 2 к действию группы $U \times H_0$ на G (где U действует слева, а H_0 – справа). Получаем, что алгебра A факториальна. Пусть $\{\mu_i\}$ – все неразложимые элементы полугруппы $\widehat{\Gamma}(G/H)$. Как уже отмечалось выше, из сферичности подгруппы H следует, что каждому элементу μ_i соответствует весовая функция $f_i \in A$ веса μ_i , определенная однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу. При этом f_i – неприводимый элемент алгебры A . Предположим, что имеется нетривиальное соотношение $\sum_i k_i \mu_i = \sum_j l_j \mu_j$, $k_i, l_j \in \mathbb{N}$. Тогда при некотором $c \in \mathbb{C}^\times$ выполнено равенство $c \prod_i f_i^{k_i} = \prod_j f_j^{l_j}$, противоречащее факториальности алгебры A .

1.4. Прямое произведение сферических однородных пространств

$$(G_1/H_1) \times (G_2/H_2) = (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$$

также является сферическим однородным пространством. Пространства такого вида и локально изоморфные им называются *приводимыми*, а все остальные – *неприводимыми*. Сферическое пространство G/H называется *строго неприводимым*, если сферическое пространство $G/N(H)^0$ неприводимо (см. [12, п. 1.3.6]) ($N(H)^0$ – связная компонента единицы нормализатора группы H в G).

Теперь сформулируем основные результаты настоящей работы. Во-первых, в ней вычисляются полугруппы $\widehat{\Gamma}(G/H)$ для всех строго неприводимых сферических пар (G, H) , где G – односвязная непростая полупростая алгебраическая группа, H – ее связная редуктивная подгруппа. Все такие пары приведены в табл. 1, за исключением симметрических пар, о которых будет сказано ниже. Неразложимые элементы соответствующих расширенных полугрупп старших весов указаны в табл. 1 в столбце « $\widehat{\Gamma}(G/H)$ ». Во-вторых, в настоящей работе для каждого пространства G/H из табл. 1 находятся весовые функции из

Таблица 1

№	$G \supset H$	Схема вложения	$\text{rk } \widehat{\Gamma}(G/H)$	$\widehat{\Gamma}(G/H)$	Примечание
1	$\text{SL}_n \times \text{SL}_{n+1} \supset \text{SL}_n \times \mathbb{C}^\times$		$2n$	$(\varphi_1, n\chi_0),$ $(\pi_{n-1}+\varphi_2, (n-1)\chi_0),$ $\dots, (\pi_1+\varphi_n, \chi_0),$ $(\pi_{n-1}+\varphi_1, -\chi_0), \dots,$ $(\pi_1+\varphi_{n-1}, -(n-1)\chi_0),$ $(\varphi_n, -n\chi_0)$	$n \geq 2$
2	$\text{Spin}_n \times \text{Spin}_{n+1} \supset \text{Spin}_n$		n	$\varphi_1+\varphi_2, \pi_1+\varphi_1, \pi_1+\varphi_2$ при $n = 3$ $\varphi_1, \pi_1+\varphi_1, \pi_1+\varphi_2,$ $\pi_2+\varphi_2, \dots, \pi_{k-2}+\varphi_{k-1},$ $\pi_{k-1}+\pi_k+\varphi_{k-1},$ $\pi_{k-1}+\varphi_k, \pi_k+\varphi_k$ при $n = 2k$ $\varphi_1, \pi_1+\varphi_1, \pi_1+\varphi_2,$ $\pi_2+\varphi_2, \dots, \pi_{k-1}+\varphi_{k-1},$ $\pi_{k-1}+\varphi_k+\varphi_{k+1},$ $\pi_k+\varphi_k, \pi_k+\varphi_{k+1}$ при $n = 2k+1 \geq 5$	$n \geq 3$
3	$\text{SL}_n \times \text{Sp}_{2m} \supset \mathbb{C}^\times \cdot \text{SL}_{n-2} \times \text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2m-2}$		6^*	$(\pi_{n-2}, 2\chi_0),$ $(\varphi_2, 0) (m \geq 2),$ $(\pi_{n-1}+\varphi_1, \chi_0),$ $(\pi_1+\pi_{n-1}, 0) (n \geq 4),$ $(\pi_1+\varphi_1, -\chi_0),$ $(\pi_2, -2\chi_0)$	$n \geq 3$ $m \geq 1$
4	$\text{SL}_n \times \text{Sp}_{2m} \supset \text{SL}_{n-2} \times \text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2m-2}$		6^*	$\pi_{n-2}, \varphi_2 (m \geq 2),$ $\pi_{n-1}+\varphi_1, \pi_1+\pi_{n-1},$ $\pi_1+\varphi_1, \pi_2$	$n \geq 5$ $m \geq 1$
5	$\text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_{2m} \supset \text{Sp}_{2n-2} \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_{2m-2}$		3^*	$\pi_2 (n \geq 2), \varphi_2 (m \geq 2),$ $\pi_1+\varphi_1$	$n \geq 1$ $m \geq 1$
6	$\text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_4 \supset \text{Sp}_{2n-4} \times \text{Sp}_4$		6^*	$\pi_1+\varphi_1, \pi_2+\varphi_2,$ $\pi_3+\varphi_1, \pi_4 (n \geq 4),$ $\pi_2, \pi_1+\pi_3+\varphi_2$	$n \geq 3$
7	$\text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_{2m} \times \text{Sp}_{2l} \supset \text{Sp}_{2n-2} \times \text{Sp}_{2m-2} \times \text{Sp}_{2l-2} \times \text{Sp}_2$		6^*	$\pi_2 (n \geq 2), \varphi_2 (m \geq 2),$ $\psi_2 (l \geq 2), \pi_1+\varphi_1,$ $\varphi_1+\psi_1, \pi_1+\psi_1$	$n \geq 1$ $m \geq 1$ $l \geq 1$
8	$\text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_4 \times \text{Sp}_{2m} \supset \text{Sp}_{2n-2} \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_{2m-2}$		6^*	$\varphi_2, \pi_1+\varphi_1, \varphi_1+\psi_1,$ $\pi_2 (n \geq 2), \psi_2 (m \geq 2),$ $\pi_1+\varphi_2+\psi_1$	$n \geq 1$ $m \geq 1$

алгебры A , соответствующие неразложимым элементам полу группы $\widehat{\Gamma}(G/H)$. Эти функции свободно порождают алгебру A .

Зная полу группы $\widehat{\Gamma}(G/H)$ для пространств из табл. 1, с учетом замечания 1 мы получаем описание полу группы $\Gamma(G/H)$ для этих пространств. В частности, $\widehat{\Gamma}(G/H) = \Gamma(G/H)$ для пространств с номерами 2, 4–8 в табл. 1.

Всякое односвязное строго неприводимое сферическое однородное пространство непростой полупростой алгебраической группы, являющееся симметрическим, изоморфно одному из пространств вида $X(H) = (H \times H)/H$ (под группа H вложена диагонально), где группа H проста и односвязна. Для таких сферических однородных пространств строение полу группы $\widehat{\Gamma}(X(H)) = \Gamma(X(H))$ хорошо известно (и следует из приводимой в п. 2.1 теоремы 5 при

$L = K = H$). А именно, эта полугруппа свободно порождается элементами $\pi_i + \varphi_i^*$, $i = 1, \dots, \text{rk } H$, где π_i и φ_i – фундаментальные веса первого и второго множителей группы $H \times H$, а звездочкой обозначен старший вес сопряженного представления.

Для вычисления расширенных полугрупп старших весов в настоящей работе используются два различных метода. Первый из них применяется для пространств из строк 1 и 2 табл. 1, а второй – для остальных пространств этой таблицы.

Структура работы такова. В § 2 формулируются и доказываются все утверждения, необходимые для обоснования используемых методов вычисления расширенных полугрупп старших весов. Затем в § 3 производится непосредственное вычисление полугрупп $\hat{\Gamma}(G/H)$ для каждого из однородных пространств табл. 1. Попутно находятся весовые функции из алгебры A , отвечающие неразложимым элементам соответствующих полугрупп $\hat{\Gamma}(G/H)$.

Поясним обозначения в табл. 1. Первые два столбца этой таблицы взяты из [12, табл. 2], но представлены в форме, более подходящей для наших целей. Точка между первым и вторым множителями группы H в строке 3 означает их почти прямое произведение, т. е. эти два множителя имеют нетривиальное (но конечное) пересечение.

Схемы вложения группы H в группу G расшифровываются следующим образом. Белые вершины схемы отвечают множителям группы G , черные – множителям группы H . Порядок вершин такой же, как и порядок соответствующих им множителей, за исключением строки 7, где верхняя черная вершина отвечает последнему множителю группы H . Множитель группы H , соответствующий черной вершине v , вкладывается диагональным образом в произведение тех множителей группы G , которые соответствуют белым вершинам, соединенным с v .

В столбце « $\text{rk } \hat{\Gamma}(G/H)$ » приведен ранг полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$, он равен количеству неразложимых элементов в $\hat{\Gamma}(G/H)$. Звездочка в этом столбце означает, что ранг расширенной полугруппы старших весов однородного пространства из соответствующей строки при нескольких малых значениях параметров n , m , l меньше приведенного в таблице значения. Точное значение ранга при заданном наборе значений параметров можно узнать, используя данные столбца « $\hat{\Gamma}(G/H)$ ».

В столбце « $\hat{\Gamma}(G/H)$ » перечислены неразложимые элементы (λ, χ) полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$ (если $\mathfrak{X}(H) = 0$, то вместо $(\lambda, 0)$ пишем просто λ), эти элементы свободно ее порождают. Если (G, H) – пара из табл. 1, такая что $\mathfrak{X}(H) \neq 0$, то факторгруппа H/H_0 является одномерным тором. Каждый характер $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ отождествляется с некоторым характером этого тора, поэтому характеры группы H в столбце « $\hat{\Gamma}(G/H)$ » обозначены кратными характера χ_0 , где χ_0 – фиксированный базисный характер тора H/H_0 . В явном виде характер χ_0 для каждого случая указан в § 3. Если после элемента (λ, χ) в скобках указано неравенство на один из параметров n , m , l , то вес (λ, χ) присутствует в системе неразложимых элементов полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$ тогда и только тогда, когда соответствующий параметр удовлетворяет этому неравенству.

Далее приводится список основных обозначений и соглашений, используемых в настоящей работе.

Если группа G (соответственно, H_0) является произведением нескольких множителей, то i -й множитель обозначается через G_i (соответственно, H_i).

Кроме того, через B_i , U_i и T_i обозначены соответственно борелевская, максимальная унитарная подгруппы и максимальный тор в G_i , так что $B = \prod B_i$, $U = \prod U_i$ и $T = \prod T_i$. Через π_i , φ_i и ψ_i обозначены i -й фундаментальный вес соответственно первого, второго и третьего множителя группы G .

Нумерация фундаментальных весов односвязных простых алгебраических групп такая же, как и в книге [13].

Для любой полупростой группы L через $V_\lambda(L)$ обозначен неприводимый L -модуль со старшим весом λ . Через λ^* обозначен вес, сопряженный весу λ .

В любой группе единица обозначается буквой e .

Через $\mathbb{C}^\times$ обозначена мультипликативная группа поля $\mathbb{C}$.

Если P – матрица, то запись $P = (p_{ij})$ означает, что в i -й строке и j -м столбце этой матрицы находится элемент p_{ij} .

Для произвольного набора элементов $a_1, \dots, a_n$ любой группы через $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ и $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ обозначены соответственно подполугруппа с единицей и подгруппа в этой группе, порожденные элементами $a_1, \dots, a_n$.

Через E_n обозначена единичная матрица порядка n , через F_n – матрица порядка n с единицами на побочной диагонали и нулями на остальных местах.

Базис $e_1, \dots, e_{2m}$ в пространстве тавтологического линейного представления группы Sp_{2m} считается выбранным таким образом, что матрица невырожденной кососимметрической билинейной формы ω_{2m} , сохраняемой элементами этой группы, имеет вид

$$\Omega_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & F_m \\ -F_m & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе базиса борелевская и максимальная унитарная подгруппы в Sp_{2m} записываются верхнетреугольными матрицами.

Автор выражает глубокую благодарность Э. Б. Винбергу за постановку задачи и многочисленные плодотворные беседы, а также Д. А. Тимашёву за ценные замечания.

§ 2. Используемые утверждения

2.1. При вычислении расширенных полугрупп старших весов для пространств из строк 1 и 2 табл. 1 мы будем пользоваться теоремами 3–5. Теоремы 3, 4 описывают известные правила ветвления для групп SL_{n+1} , Spin_{n+1} соответственно (см. оригинальные работы [14], [15] или современное изложение в [16]), записанные в удобной для наших целей форме.

ТЕОРЕМА 3 (правило ветвления для группы SL_{n+1}). Пусть $\lambda = c_1\pi_1 + \dots + c_n\pi_n$, где $c_i \geq 0$, – доминантный вес группы SL_{n+1} . Тогда ограничение неприводимого представления группы SL_{n+1} со старшим весом λ на подгруппу $\mathrm{SL}_n \subset \mathrm{SL}_{n+1}$ имеет вид $\bigoplus_{\mu \in M(\lambda)} V_\mu(\mathrm{SL}_n)$, где множество $M(\lambda)$ состоит из таких доминантных весов μ группы SL_n (возможно, с кратностями), которые получаются из λ одновременной заменой каждого слагаемого вида $c_i\pi_i$ на $a_i\pi_{i-1} + b_i\pi_i$, где $a_i, b_i \geq 0$ и $a_i + b_i = c_i$. При этом полагаем $\pi_0 = 0$ и $\pi_n|_{\mathrm{SL}_n} = 0$.

Перед тем как сформулировать следующую теорему, отметим, что любой доминантный вес λ группы Spin_{2k+2} однозначно представим в виде $\lambda = c_1\pi_1 + \dots + c_{k+1}\pi_{k+1} + d(\pi_k + \pi_{k+1})$, где $c_i, d \geq 0$ и хотя бы одно из чисел c_k, c_{k+1} равно нулю.

ТЕОРЕМА 4 (правила ветвления для группы Spin_{n+1}). а) Пусть $\lambda = c_1\pi_1 + \dots + c_k\pi_k$, где $c_i \geq 0$, – доминантный вес группы Spin_{2k+1} , $k \geq 2$. Тогда ограничение неприводимого представления группы Spin_{2k+1} со старшим весом λ на подгруппу Spin_{2k} имеет вид $\bigoplus_{\mu \in M(\lambda)} V_\mu(\text{Spin}_{2k})$, где множество $M(\lambda)$ состоит из таких доминантных весов μ группы Spin_{2k} , которые получаются из λ одновременной заменой каждого слагаемого вида $c_i\pi_i$ при $i \neq k-1$ на $a_i\pi_{i-1} + b_i\pi_i$ и слагаемого $c_{k-1}\pi_{k-1}$ на $a_{k-1}\pi_{k-2} + b_{k-1}(\pi_{k-1} + \pi_k)$, где $a_i, b_i \geq 0$ и $a_i + b_i = c_i$. При этом полагаем $\pi_0 = 0$.

б) Пусть $\lambda = c_1\pi_1 + \dots + c_{k+1}\pi_{k+1} + d(\pi_k + \pi_{k+1})$, где $c_i, d \geq 0$, – доминантный вес группы Spin_{2k+2} , $k \geq 1$, причем хотя бы одно из чисел c_k, c_{k+1} равно нулю. Тогда ограничение неприводимого представления группы Spin_{2k+2} со старшим весом λ на подгруппу Spin_{2k+1} имеет вид $\bigoplus_{\mu \in M(\lambda)} V_\mu(\text{Spin}_{2k+1})$, где множество $M(\lambda)$ состоит из таких доминантных весов μ группы Spin_{2k+1} , которые получаются из λ одновременной заменой каждого слагаемого вида $c_i\pi_i$ при $i < k$ на $a_i\pi_{i-1} + b_i\pi_i$, где $a_i, b_i \geq 0$ и $a_i + b_i = c_i$, каждого слагаемого вида $c_i\pi_i$ при $i = k, k+1$ на $c_i\pi_k$ и слагаемого $d(\pi_k + \pi_{k+1})$ на $a\pi_{k-1} + 2b\pi_k$, где $a, b \geq 0$ и $a + b = d$. При этом полагаем $\pi_0 = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть L, K – связные полупростые алгебраические группы и $L \subset K$. Пусть $t_{\lambda, \mu}$ – кратность вхождения неприводимого представления группы L со старшим весом μ в неприводимое представление группы K со старшим весом λ . Рассмотрим группу $G = L \times K$ и ее подгруппу $H \simeq L$, вложенную в G диагонально. Тогда имеется изоморфизм G -модулей $\mathbb{C}[G]^H \simeq \bigoplus_{\lambda, \mu} t_{\lambda, \mu} V_{\mu+\lambda^*}(G)$ (G действует на $\mathbb{C}[G]^H$ слева), где λ, μ пробегает все доминантные веса групп K, L соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}[K]$ как G -модуль, на котором группы L и K действуют умножениями справа и слева соответственно. Имеется изоморфизм алгебр и G -модулей $\varphi: \mathbb{C}[G]^H \rightarrow \mathbb{C}[K]$, заданный формулой $(\varphi f)(x) = f(e, x)$. Далее, хорошо известно, что пространство $\mathbb{C}[K]$ как $(K \times K)$ -модуль относительно действия K слева и справа изоморфно прямой сумме $\bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}(K)^* \otimes V_{\lambda}(K)$, где λ пробегает все доминантные веса группы K . Ограничивая действие группы K справа на подгруппу L и учитывая, что $V_{\lambda}(K)^* \simeq V_{\lambda^*}(K)$ и $V_{\lambda^*}(K) \otimes V_{\mu}(L) \simeq V_{\lambda^*+\mu}(K \times L) \simeq V_{\mu+\lambda^*}(G)$, получаем требуемое.

2.2. Утверждения, доказываемые в этом пункте, будут использоваться при вычислении расширенных полугрупп старших весов для пространств с номерами 3–8 в табл. 1.

ЛЕММА 1. Пусть группа L действует на неприводимом алгебраическом многообразии X . Пусть существуют замкнутое подмножество $Y \subset X$ (называемое сечением) и открытое подмножество $M \subset X$, такие что орбита любой точки из M пересекает Y . Тогда гомоморфизм ограничения $\rho: \mathbb{C}[X]^L \rightarrow \mathbb{C}[Y]$ инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для функции $f \in \mathbb{C}[X]^L$ выполнено равенство $\rho(f) = 0$. Тогда имеем $f|_M = 0$, поскольку инвариантные функции постоянны на орбитах. Отсюда следует, что $f \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть группа Sp_{2m-2k} , $k \geq 1$, вложенная в группу Sp_{2m} в виде центрального блока размером $(2m-2k) \times (2m-2k)$, действует на Sp_{2m}

справа. Тогда алгебра инвариантов этого действия совпадает с подалгеброй алгебры $\mathbb{C}[\mathrm{Sp}_{2m}]$, порожденной матричными элементами k первых и k последних столбцов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – пространство тавтологического представления группы Sp_{2m} . Рассмотрим естественное действие группы Sp_{2m} в пространстве

$$W = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_k \oplus \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_k.$$

Указанная в условии подгруппа Sp_{2m-2k} является стабилизатором вектора $w = (e_1, e_2, \dots, e_k, e_{2m-k+1}, e_{2m-k+2}, \dots, e_{2m})$ при этом действии. Орбита вектора w в пространстве W изоморфна факторпространству $\mathrm{Sp}_{2m} / \mathrm{Sp}_{2m-2k}$, а регулярные функции на ней соответствуют при изоморфизме искомым нами инвариантам. Эта орбита замкнута, поскольку она состоит из наборов векторов $(v_1, v_2, \dots, v_{2k})$ с матрицей Грама Ω_{2k} относительно формы ω_{2m} . Значит, алгебра регулярных функций на орбите порождается ограничениями координат объемлющего пространства W , которые как раз и соответствуют матричным элементам k первых и k последних столбцов матрицы из Sp_{2m} .

Следующие три леммы являются техническими. Доказательство первых двух из них получается непосредственной проверкой.

ЛЕММА 2. Для всякой невырожденной матрицы P порядка t матрица

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & (P^{-1})^\# \end{pmatrix} \quad (1)$$

порядка $2t$ является симплектической (здесь символом $\#$ обозначено транспонирование относительно побочной диагонали).

ЛЕММА 3. Матрица

$$\begin{pmatrix} E_m & C \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

порядка $2t$ является симплектической тогда и только тогда, когда матрица C порядка t симметрична относительно побочной диагонали.

ЛЕММА 4. Пусть $P = (p_{ij})$ – матрица размером $2t \times 2$, $t \geq 2$, и пусть P_1 и P_2 – соответственно ее первый и второй столбцы. Предположим, что $p_{2m,1} \neq 0$, $\Delta = p_{2m-1,1}p_{2m,2} - p_{2m-1,2}p_{2m,1} \neq 0$ и $P_1^\top \Omega_{2m} P_2 = 1$ (через $\top$ обозначено транспонирование). Тогда существуют верхние унитреугольные матрицы $u_1, u_2 \in \mathrm{Sp}_{2m}$, такие что

$$u_1 P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{p_{2m,1}} \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & -\frac{\Delta}{p_{2m,1}} \\ p_{2m,1} & p_{2m,2} \end{pmatrix}, \quad u_2 P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{p_{2m,1}}{\Delta} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & -\frac{\Delta}{p_{2m,1}} \\ p_{2m,1} & p_{2m,2} \end{pmatrix}$$

(на месте многоточий находятся элементы, равные нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножив матрицу P слева на подходящую верхнюю унитарную матрицу типа (1), мы можем добиться того, чтобы в нижней половине полученной матрицы P' были только три ненулевых элемента $p_{2m,1}$, $p_{2m,2}$ и $-\Delta/p_{2m,1}$ (как в матрицах u_1P и u_2P из условия леммы). Умножая затем матрицу P' слева на подходящую матрицу типа (2), мы получим одну из требуемых матриц.

На завершающем этапе рассмотрения каждого из случаев мы будем пользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – односвязная группа и $H \subset G$ – ее связная сферическая подгруппа. Предположим, что ненулевые функции $f_1, \dots, f_n \in A$ удовлетворяют следующим условиям:

- а) $f_i \in A_{\lambda_i, \chi_i}$ при $i = 1, \dots, n$, где $\lambda_i \in \mathfrak{X}_+(B)$, $\chi_i \in \mathfrak{X}(H)$, причем веса $(\lambda_1, \chi_1), \dots, (\lambda_n, \chi_n)$ линейно независимы;
- б) выполнено включение $A \subset \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n, f_1^{-1}, \dots, f_k^{-1}]$ для некоторого $k \leq n$. Положим $Z = \langle (\lambda_1, \chi_1), \dots, (\lambda_k, \chi_k) \rangle + S\langle (\lambda_{k+1}, \chi_{k+1}), \dots, (\lambda_n, \chi_n) \rangle$. Тогда:

1) если для каждого представления

$$(\lambda_i, \chi_i) = (\mu_1, \sigma_1) + (\mu_2, \sigma_2), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{X}_+(B) \setminus \{0\}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{X}(H), \quad (3)$$

хотя бы один из весов (μ_1, σ_1) , (μ_2, σ_2) не лежит в Z , то элемент f_i неприводим в A ;

2) если $(\lambda_i, \chi_i) = (\lambda_j, \chi_j) + (\lambda_i - \lambda_j, \chi_i - \chi_j)$, $i \neq j$, – единственное представление веса (λ_i, χ_i) в форме (3) с условием, чтобы оба слагаемых лежали в Z , и если f_i не делится на f_j в алгебре A , то элемент f_i неприводим в A ;

3) если f_i – неприводимый элемент в A при $i = 1, \dots, n$, то $A = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ и $\widehat{\Gamma}(G/H) = S\langle (\lambda_1, \chi_1), \dots, (\lambda_n, \chi_n) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждения 1), 2). Предположим, что элемент f_i приводим в алгебре A . Тогда $f_i = F_1 F_2$, где при $j = 1, 2$ элемент $F_j \in A$ необратим и $F_j \in A_{\xi_j, \eta_j}$ для некоторых $\xi_j \in \mathfrak{X}_+(B)$ и $\eta_j \in \mathfrak{X}(H)$. Имеем $\xi_j \neq 0$, $j = 1, 2$, так как иначе элемент F_j был бы константой. Из условия б) следует, что каждая из функций F_1, F_2 представима как несократимая дробь вида

$$F_j = \frac{h_j(f_1, \dots, f_n)}{f_1^{\beta_{j1}} \dots f_k^{\beta_{jk}}},$$

где $\beta_{j1}, \dots, \beta_{jk} \geq 0$ и h_j – многочлен от n переменных. Используя условие а), заключаем, что $h_j(f_1, \dots, f_n) = c_j f_1^{\alpha_{j1}} \dots f_n^{\alpha_{jn}}$, где $c_j \neq 0$ и $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn} \geq 0$. Тогда имеем $(\mu_j, \sigma_j) \in Z$ при $j = 1, 2$. В условиях утверждения 1) мы пришли к противоречию. В условиях утверждения 2) мы получаем, что одна из функций F_1, F_2 имеет вес (λ_j, χ_j) и в силу равенства $\dim A_{\lambda_j, \chi_j} = 1$ пропорциональна f_j . Таким образом, f_i делится на f_j . Противоречие.

Теперь докажем утверждение 3). Пусть $f \in A_{\lambda, \chi}$ для некоторых $\lambda \in \mathfrak{X}_+(B)$, $\chi \in \mathfrak{X}(H)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения 1), показываем, что функция f представима в виде несократимой дроби $\frac{f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n}}{f_1^{\beta_1} \dots f_k^{\beta_k}}$, где $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$. Из факториальности алгебры A (теорема 1) и неприводимости всех элементов f_i следует, что числитель этой дроби делится на знаменатель, поэтому $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. Значит, $f = f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n}$, откуда и следует требуемое.

§ 3. Вычисление расширенных полугрупп старших весов

В этом параграфе случаи нумеруются в соответствии с номерами в табл. 1. Везде ниже, кроме случая 2, используется следующее соглашение. Для каждого множителя $G_i \subset G$ (все они имеют тип SL или Sp) подгруппы B_i , U_i и T_i состоят соответственно из верхних треугольных, верхних унитарных и диагональных матриц, содержащихся в G_i .

3.1. Сначала вычислим полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$ для пространств с номерами 1, 2 из табл. 1.

Случай 1. Имеем $G = SL_n \times SL_{n+1}$, $H = SL_n \times \mathbb{C}^\times$, причем вложение H в G устроено так, что образ пары $(P, t) \in H$ в G есть пара (P, P') в G , где $P' = \varphi(P, t) = \begin{pmatrix} Pt & 0 \\ 0 & t^{-n} \end{pmatrix}$. Далее, $H_0 = SL_n \times \{e\} \subset H$. Базисный характер $\chi_0 \in \mathfrak{X}(H)$ сопоставляет элементу $(P, t) \in H$ число t .

Предъявим $2n$ функций из алгебры A , весовых относительно $B \times H$. Пусть $(P, Q) \in G$. Положим $R = Q\tilde{P}^{-1}$, где $\tilde{P} = \varphi(P, e)$. Обозначим через Δ_i , $i = 1, \dots, n$, минор матрицы R , отвечающий i нижним строкам и i левым столбцам, и через δ_i , $i = 1, \dots, n$, минор матрицы R , отвечающий нижним i строкам и столбцам с номерами $n+1, 1, 2, \dots, i-1$. Все $2n$ функций $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n$ лежат в A и являются весовыми относительно $B \times H$. Веса функций $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n$ равны

$$(\pi_1 + \varphi_n, \chi_0), (\pi_2 + \varphi_{n-1}, 2\chi_0), \dots, (\pi_{n-1} + \varphi_2, (n-1)\chi_0), (\varphi_1, n\chi_0)$$

соответственно, веса функций $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ равны

$$(\varphi_n, -n\chi_0), (\pi_1 + \varphi_{n-1}, -(n-1)\chi_0), (\pi_2 + \varphi_{n-2}, -(n-2)\chi_0), \dots, (\pi_{n-1} + \varphi_1, -\chi_0)$$

соответственно. Кроме того, все $2n$ весов функций $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n$ линейно независимы, поэтому $\text{rk } \hat{\Gamma}(G/H) \geq 2n$. Поскольку $\text{rk } G = 2n-1$ и $\text{rk } H/H_0 = 1$, то $\text{rk } \hat{\Gamma}(G/H) \leq 2n$. Значит, $\text{rk } \hat{\Gamma}(G/H) = 2n$.

Применяя теорему 5 для $L = SL_n$, $K = SL_{n+1}$ и используя теорему 3, мы находим спектр представления группы G в пространстве $\mathbb{C}[G]^{H_0}$ (и тем самым полугруппу $\Gamma(G/H_0)$). В частности, мы получаем следующие два факта. Во-первых, в этот спектр входят с кратностью 1 неприводимые G -модули со старшими весами

$$\pi_1 + \varphi_n, \pi_2 + \varphi_{n-1}, \dots, \pi_{n-1} + \varphi_2, \varphi_1, \quad \varphi_n, \pi_1 + \varphi_{n-1}, \pi_2 + \varphi_{n-2}, \dots, \pi_{n-1} + \varphi_1 \quad (4)$$

(всего выписано $2n$ весов). Во-вторых, любой ненулевой вес из полугруппы $\Gamma(G/H_0)$ должен содержать хотя бы одно слагаемое вида φ_i . Отсюда следует, что каждый из весов (4) неразложим в полугруппе $\Gamma(G/H_0)$. Заметим, что набор $2n$ весов (4) является образом при отображении π (см. замечание 2) набора $2n$ весов относительно $B \times H$ функций $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n$. Значит, в силу замечания 2 последние $2n$ весов неразложимы в полугруппе $\hat{\Gamma}(G/H)$. Поскольку $\text{rk } \hat{\Gamma}(G/H) = 2n$, полугруппа $\hat{\Gamma}(G/H)$, будучи свободной, порождается весами относительно $B \times H$ функций $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n$. Поэтому $A = \mathbb{C}[\Delta_1, \dots, \Delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n]$.

Случай 2. Имеем $G = \text{Spin}_n \times \text{Spin}_{n+1}$, $H = H_0 = \text{Spin}_n$. Поскольку $\mathfrak{X}(H) = 0$, то $\hat{\Gamma}(G/H) = \Gamma(G/H)$, а описание полугруппы $\Gamma(G/H)$ следует из теорем 5, 4. А именно, непосредственная проверка показывает, что при каждом $n \geq 3$ веса, представленные в столбце « $\hat{\Gamma}(G/H)$ » из табл. 1 (их ровно n),

лежат в полугруппе $\hat{\Gamma}(G/H)$ и линейно независимы, поэтому $\text{rk } \Gamma(G/H) \geq n$. Поскольку $\text{rk } \Gamma(G/H) \leq \text{rk } G = n$, получаем $\text{rk } \Gamma(G/H) = n$. Далее, как легко видеть, любой ненулевой элемент полугруппы $\Gamma(G/H)$ содержит в качестве слагаемого один из элементов φ_i , откуда следует неразложимость в $\Gamma(G/H)$ всех упомянутых весов, кроме веса $\pi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}$ при $n = 2k + 1$. Последний вес неразложим в $\Gamma(G/H)$, потому что ни один из весов φ_k, φ_{k+1} не содержится в полугруппе $\Gamma(G/H)$. Итак, при каждом $n \geq 3$ мы указали n неразложимых линейно независимых весов полугруппы $\Gamma(G/H)$. Поскольку $\text{rk } \Gamma(G/H) = n$, указанные n весов свободно порождают эту полугруппу.

Приведем весовые функции, порождающие алгебру $A(G'/H')$, где G'/H' – однородное пространство, локально изоморфное пространству G/H . А именно, рассмотрим группу $G' = \text{SO}_n \times \text{SO}_{n+1}$ и ее подгруппу $H' = \text{SO}_n$, вложенную в G' диагонально. Накрывающий гомоморфизм групп $\psi: G \rightarrow G'$ индуцирует морфизм $\psi_H: G/H \rightarrow G'/H'$, являющийся двулистным накрытием. Поэтому имеется вложение алгебр

$$\psi_H^*: \mathbb{C}[G'/H'] \hookrightarrow \mathbb{C}[G/H],$$

при этом $\psi_H^*(A(G'/H')) \subset A(G/H)$.

При каждом m выберем в пространстве V_m тавтологического представления группы SO_m такой базис $\{e_i\}$, чтобы матрица невырожденной симметрической билинейной формы, сохраняемой элементами этой группы, была равна F_m . Тогда все верхнетреугольные и диагональные матрицы в SO_m образуют борелевскую подгруппу $\tilde{B}_m$ и максимальный тор $\tilde{T}_m$ соответственно. Веса неприводимых представлений группы SO_m будем рассматривать относительно $\tilde{B}_m$ и $\tilde{T}_m$. Зафиксируем вложение $\tau_m: \text{SO}_m \hookrightarrow \text{SO}_{m+1}$, так чтобы его образ являлся стабилизатором вектора $e_{\frac{m}{2}+1}$ при четном m и вектора $e_{\frac{m+3}{2}} - e_{\frac{m+1}{2}}$ при нечетном m .

Зафиксируем вложение H' в G' , при котором образ матрицы $P \in H'$ в группе G' равен $(P, \tau_n(P))$. Пусть $(P, Q) \in G'$. Положим $R = Q\tau_n(P)^{-1}$. Теперь предъявим порождающие алгебры $A(G'/H')$ при каждом n .

Если $n = 2k$, то рассмотрим следующие функции от элементов матрицы R : Δ_i , $i = 1, \dots, k$, – минор, отвечающий i нижним строкам и i левым столбцам; δ_i , $i = 1, \dots, k$, – минор, отвечающий i нижним строкам и столбцам с номерами $k+1, 1, \dots, i-1$; Φ – минор, отвечающий k нижним строкам и столбцам с номерами $k+2, 1, \dots, k-1$. Имеем $\delta_k^2 = -2\Delta_k\Phi$. Все введенные функции являются весовыми относительно $(\tilde{B}_n \times \tilde{B}_{n+1}) \times H'$ и порождают алгебру $A(G'/H')$. Вес функции Δ_i равен $\pi_i + \varphi_i$ при $i \leq k-2$, $\pi_{k-1} + \pi_k + \varphi_{k-1}$ при $i = k-1$ и $2(\pi_k + \varphi_k)$ при $i = k$. Вес функции δ_i равен $\pi_{i-1} + \varphi_i$ при $i \leq k-1$ (полагаем $\pi_0 = 0$) и $\pi_{k-1} + \pi_k + 2\varphi_k$ при $i = k$. Вес функции Φ равен $2(\pi_{k-1} + \varphi_k)$. Кроме того, в алгебре $A(G/H)$ присутствуют функции Δ и D , такие что $\Delta^2 = \psi_H^*(\Delta_k)$, $D^2 = \psi_H^*(\Phi)$ и $\sqrt{-2}\Delta D = \psi_H^*(\delta_k)$. Их веса равны $\pi_k + \varphi_k$ и $\pi_{k-1} + \varphi_k$ соответственно. Функции $\psi_H^*(\Delta_i)$ и $\psi_H^*(\delta_j)$, $i, j \leq k-1$, а также функции Δ и D отвечают неразложимым элементам полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$ и порождают алгебру $A(G/H)$.

Если $n = 2k + 1$, то рассмотрим следующие функции от элементов матрицы R : Δ_i , $i = 1, \dots, k$, – минор, отвечающий i нижним строкам и i левым столбцам; δ_i , $i = 1, \dots, k+1$, – разность двух миноров, первый из которых отвечает i нижним строкам и столбцам с номерами $k+1, 1, \dots, i-1$, а второй отвечает i нижним строкам и столбцам с номерами $k+2, 1, \dots, i-1$; Φ – минор, отвечающий строкам с номерами $1, \dots, k, k+2$ (считая снизу) и столбцам

с номерами $1, \dots, k, 2\left[\frac{k}{2}\right] + 2$. Имеем $\Delta_k^2 = (-1)^{k+1}\delta_{k+1}\Phi$. Все введенные функции являются весовыми относительно $(\tilde{B}_n \times \tilde{B}_{n+1}) \times H'$ и порождают алгебру $A(G'/H')$. Вес функции Δ_i равен $\pi_i + \varphi_i$ при $i \leq k-1$ и $2\pi_k + \varphi_k + \varphi_{k+1}$ при $i = k$. Вес функции δ_i равен $\pi_{i-1} + \varphi_i$ при $i \leq k-1$, $\pi_{k-1} + \varphi_k + \varphi_{k+1}$ при $i = k$ и $2(\pi_k + \varphi_{k+1})$ при $i = k+1$ (полагаем $\pi_0 = 0$). Вес функции Φ равен $2(\pi_k + \varphi_k)$. Кроме того, в алгебре $A(G/H)$ присутствуют функции δ и D , такие что $\delta^2 = \psi_H^*(\delta_{k+1})$, $D^2 = \psi_H^*(\Phi)$ и $\sqrt{(-1)^{k+1}}\delta D = \Delta_k$. Их веса равны $\pi_k + \varphi_{k+1}$ и $\pi_k + \varphi_k$ соответственно. Функции $\psi_H^*(\Delta_i)$, $i \leq k-1$, $\psi_H^*(\delta_j)$, $j \leq k$, δ и D отвечают неразложимым элементам полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$ и порождают алгебру $A(G/H)$.

3.2. Теперь вычислим расширенные полугруппы старших весов для пространств с номерами 3–8 из табл. 1. Вначале опишем общий метод.

В каждом из рассматриваемых ниже случаев мы ищем алгебру A . Все функции из этой алгебры удовлетворяют равенству $f(g) = f(u^{-1}gh)$ для любых элементов $g \in G$, $u \in U$, $h \in H_0$. Для поиска таких функций мы домножаем произвольный элемент g из некоторого плотного открытого подмножества $M \subset G$ на подходящие элементы из U и H_0 , с тем чтобы получить элемент «канонического» вида. Канонический вид элементов из M задается равенством нулю некоторых матричных элементов, равенством единице некоторых других матричных элементов и равенством минус единице некоторых из оставшихся матричных элементов. Множество Y элементов *всей* группы G (не только из M), удовлетворяющих этим же ограничениям, налагаемым на матричные элементы, замкнуто в G и является сечением в смысле леммы 1. По этой лемме алгебра A вкладывается в алгебру $\mathbb{C}[Y]$.

Во всех случаях мы сразу предъявляем набор функций $f_1, \dots, f_p \in A$, весовых относительно $B \times H$, а уже потом с помощью канонического вида доказываем, что эти функции порождают алгебру A (почти во всех случаях функции $f_1, \dots, f_p$ естественно возникают в процессе приведения к каноническому виду). Множество M определяется необращением в нуль некоторых из функций $f_1, \dots, f_p$.

Если один из множителей группы G равен Sp_{2m} , а один из множителей группы H_0 равен Sp_{2m-2k} и вкладывается только в Sp_{2m} (как центральный блок размером $(2m-2k) \times (2m-2k)$), то по теореме 6 всякая функция из A не зависит от матричных элементов множителя Sp_{2m} , стоящих в столбцах с номерами

$$k+1, k+2, \dots, 2m-k-1, 2m-k.$$

Поэтому в процессе приведения к каноническому виду нам неважно, как преобразуются эти матричные элементы при действии групп U и H_0 . В связи с этим, во-первых, мы не рассматриваем далее действие множителя $\mathrm{Sp}_{2m-2k} \subset H_0$, так как он нетривиально преобразует только упомянутые выше столбцы в Sp_{2m} ; во-вторых, для наших целей нам достаточно приводить к каноническому виду не всю матрицу из Sp_{2m} , а только ее первые и последние k столбцов. Иначе говоря, ограничения типа $g_\alpha = c$, где $c \in \{0, 1, -1\}$, задающие канонический вид матрицы из Sp_{2m} , достаточно налагать только на те матричные элементы g_α множителя Sp_{2m} , которые находятся в указанных $2k$ столбцах. Поэтому далее, формально рассматривая матрицы $Q \in \mathrm{Sp}_{2m}$, мы фактически имеем дело только с их подматрицами $\bar{Q}$, состоящими из k первых и k последних столбцов матрицы Q , и приводим к каноническому виду именно $\bar{Q}$. Это можно интерпретировать так: множитель Sp_{2m} группы G заменяется факторпространством

$\mathrm{Sp}_{2m}/\mathrm{Sp}_{2m-2k}$, на котором сохраняется действие группы U и остальных множителей группы H_0 . Как видно из доказательства теоремы 6, это факторпространство можно понимать как множество матриц размером $2m \times 2k$, столбцы которых удовлетворяют тем же соотношениям, что первые и последние k столбцов матрицы из Sp_{2m} .

Во всех рассматриваемых ниже случаях оказывается, что матричные элементы канонического вида элемента $g \in M$, от которых могут зависеть функции из A , являются рациональными функциями (точнее, многочленами Лорана) от значений функций $f_1, \dots, f_p$ в точке g . Обозначим эти рациональные функции (которые, очевидно, инвариантны относительно U и H_0) через $r_1(f_1, \dots, f_p), \dots, r_q(f_1, \dots, f_p)$. Поскольку регулярные функции на сечении порождаются ограничениями координатных функций на группе G , всякая функция $f \in A$ является многочленом от функций $r_1, \dots, r_q$, т. е.

$$f(g) = F(r_1(f_1(g), \dots, f_p(g)), \dots, r_q(f_1(g), \dots, f_p(g)))$$

при любом $g \in M$, где $F(x_1, \dots, x_q)$ – многочлен. Таким образом, имеется включение $A \subset \tilde{A} = \mathbb{C}[r_1(f_1, \dots, f_p), \dots, r_q(f_1, \dots, f_p)]$.

Поскольку алгебра $\tilde{A}$ состоит из инвариантных относительно U и H_0 рациональных функций, имеем $A = \tilde{A} \cap \mathbb{C}[G]$. Поэтому дальнейшие действия направлены на извлечение из алгебры $\tilde{A}$ регулярных функций. Это осуществляется при помощи теоремы 7. А именно, из утверждений 1) и 2) (последнее используется только в случае 3 при $n = 3$ и случае 8) теоремы 7 следует неприводимость в A каждой из функций $f_1, \dots, f_p$. Затем из утверждения 3) вытекает, что $A = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_p]$. Описание полугруппы $\hat{\Gamma}(G/H)$ также следует из утверждения 3) теоремы 7.

Во всех случаях справедливость условий а) и б) теоремы 7 устанавливается непосредственно, и, кроме случаев 3, 4, мы об этом даже не упоминаем. Проверку условия утверждения 1) этой теоремы мы проведем только в случаях 3, 4, в остальных случаях она проводится аналогично.

Теперь мы переходим непосредственно к рассмотрению всех случаев. Рассмотрение осуществляется в соответствии с приведенным выше планом, поэтому все сказанное выше используется без лишних пояснений.

Случаи 3, 4. Сферические пары из строк 3, 4 табл. 1 удобно рассматривать вместе. В обоих случаях $G = \mathrm{SL}_n \times \mathrm{Sp}_{2m}$, в случае 3 имеем $H = \mathbb{C}^\times \cdot \mathrm{SL}_{n-2} \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$, в случае 4 имеем $H = \mathrm{SL}_{n-2} \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$. Случай 4 рассматривается только при $n \geq 5$, иначе пространство G/H не является сферическим. Вложение группы H в G устроено следующим образом. Множитель SL_{n-2} вложен как левый верхний блок $(n-2) \times (n-2)$ во множитель SL_n группы G ; множитель SL_2 вложен диагонально в G : как правый нижний блок 2×2 в SL_n и как блок 2×2 в первых и последних строках и столбцах множителя Sp_{2m} ; множитель Sp_{2m-2} вложен в Sp_{2m} как центральный блок $(2m-2) \times (2m-2)$. Наконец, в случае 3 тор $\mathbb{C}^\times \subset H$ вложен в SL_n как $E_{n-2}t^{-2} \oplus E_2t^{n-2}$ при нечетном n и как $E_{n-2}t^{-1} \oplus E_2t^{\frac{n-2}{2}}$ при четном n . В обоих случаях группа H_0 одна и та же и равна $\mathrm{SL}_{n-2} \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$. В случае 3 базисный характер $\chi_0 \in \mathfrak{X}(H)$ действует на торе $\mathbb{C}^\times \subset H$ как $t \mapsto t^{n-2}$ при нечетном n и как $t \mapsto t^{\frac{n-2}{2}}$ при четном n .

Мы ищем функции $f \in \mathbb{C}[G]$, для которых

$$f(P, Q) = f(u_1^{-1}Ph_1h_2, u_2^{-1}Qh_2h_3)$$

при любых матрицах $P \in G_1$, $Q \in G_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $h_i \in H_i$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $P = (p_{ij})$ и $Q = (q_{ij})$. Обозначим через P_{ij} алгебраическое дополнение к элементу p_{ij} в матрице P , так что $P^{-1} = (P_{ji})$.

Теорема 6 позволяет нам исключить из рассмотрения действие группы H_3 и в матрице Q приводить к каноническому виду только ее первый и последний столбцы.

Пусть $\Delta = p_{n-1,n-1}p_{n,n} - p_{n-1,n}p_{n,n-1}$, $W = q_{2m-1,1}q_{2m,2m} - q_{2m-1,2m}q_{2m,1}$, $D = p_{n,n-1}q_{2m,2m} - p_{n,n}q_{2m,1}$, $\Phi_1 = p_{n,n-1}P_{1,n-1} + p_{n,n}P_{1,n}$, $\Phi_2 = q_{2m,1}P_{1,n-1} + q_{2m,2m}P_{1,n}$, δ – минор матрицы P , соответствующий $n - 2$ нижним строкам и $n - 2$ левым столбцам. Имеем Δ , W , D , Φ_1 , Φ_2 , $\delta \in A$, причем $W \equiv 1$ при $m = 1$ и $\Phi_1 \equiv -\delta\Delta$ при $n = 3$. Все эти функции являются весовыми относительно $B \times H$. Их веса представлены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

№	Δ	W	D	Φ_1	Φ_2	δ
3	$(\pi_{n-2}, 2\chi_0)$	$(\varphi_2, 0) \ (m \geq 2)$	$(\pi_{n-1} + \varphi_1, \chi_0)$	$(\pi_1 + \pi_{n-1}, 0)$	$(\pi_1 + \varphi_1, -\chi_0)$	$(\pi_2, -2\chi_0)$
4	π_{n-2}	$\varphi_2 \ (m \geq 2)$	$\pi_{n-1} + \varphi_1$	$\pi_1 + \pi_{n-1}$	$\pi_1 + \varphi_1$	π_2

Ниже мы будем применять теорему 7 к функциям Δ , W (последняя присутствует при $m \geq 2$), D , Φ_1 , Φ_2 , δ при $n \geq 4$ (в случаях 3, 4) и функциям Δ , W (последняя присутствует при $m \geq 2$), D , Φ_2 , δ при $n = 3$ (в случае 3). Поэтому отметим, что в каждом случае веса относительно $B \times H$ указанного набора функций линейно независимы.

Пусть M – открытое подмножество в G , задаваемое условиями $\Delta \neq 0$, $D \neq 0$, $\Phi_1 \neq 0$, $\delta \neq 0$, и $(P, Q) \in M$. Действием группы H_2 переведем пару (P, Q) в пару (P', Q') , такую что правый нижний (2×2) -блок матрицы P' и нижний (2×2) -блок матрицы $\overline{Q}'$ имеют вид соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \frac{W\Delta}{D} \\ -\frac{D}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее действием группы U_2 (лемма 4) переведем матрицу Q' в матрицу Q'' , где

$$\overline{Q}'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{D} \\ \cdots & \vdots \\ 0 & \frac{W\Delta}{D} \\ -\frac{D}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad m \geq 2, \quad \overline{Q}'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{D} \\ -\frac{D}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1$$

(на месте многоточий стоят нули). Теперь будем преобразовывать матрицу P' . Сначала действием группы U_1 обнулим все элементы двух ее последних столбцов, кроме двух, стоящих на диагонали нижнего (2×2) -блока (это элементы 1 и Δ). Далее действием группы H_1 приведем блок, соответствующий $n - 2$ нижним строкам и $n - 2$ левым столбцам полученной матрицы, к виду $\text{diag}(1, \dots, 1, \delta)$. После этого снова действием группы U_1 приведем новую

матрицу при $n \geq 5$, $n = 4$ и $n = 3$ соответственно к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \pm \frac{\delta}{\Phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \pm \frac{\Phi_1}{\Delta\delta} & \pm \frac{\Phi_2}{D} & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta}{\Phi_1} & 0 & 0 \\ \frac{\Phi_1}{\Delta\delta} & \frac{\Phi_2}{D} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{\Phi_2}{D} & 1 & 0 \\ \delta & 0 & \Delta \end{pmatrix} \quad (5)$$

(в матрице слева левый нижний $((2n-2) \times (2n-2))$ -блок имеет вид $\text{diag}(1, \dots, 1, \delta)$, на остальных местах, обозначенных многоточиями, стоят нули). В каждом из случаев $n \geq 5$, $n = 4$, $n = 3$ обозначим соответствующую матрицу (5) через P'' .

Пара (P'', Q'') является каноническим видом пары (P, Q) . Тем самым получено сечение. Значит, искомая алгебра A содержится в алгебре

$$\tilde{A} = \mathbb{C} \left[\frac{\Delta}{D}, \frac{D}{\Delta}, \frac{W\Delta}{D}, \Delta, \delta, \frac{\Phi_1}{\Delta\delta}, \frac{\Phi_2}{D}, \frac{\delta}{\Phi_1} \right] \subset \mathbb{C} \left[\Delta, W, D, \Phi_1, \Phi_2, \delta, \frac{1}{\Delta}, \frac{1}{D}, \frac{1}{\Phi_1}, \frac{1}{\delta} \right] \quad (6)$$

при $n \geq 4$ и в алгебре

$$\tilde{A} = \mathbb{C} \left[\frac{\Delta}{D}, \frac{D}{\Delta}, \frac{W\Delta}{D}, \Delta, \delta, \frac{\Phi_2}{D}, \frac{1}{\Delta} \right] \subset \mathbb{C} \left[\Delta, W, D, \Phi_2, \delta, \frac{1}{\Delta}, \frac{1}{D} \right] \quad (7)$$

при $n = 3$.

Теперь применим теорему 7 к набору функций $\Delta, D, \Phi_1, \delta, \Phi_2, W$ (последняя присутствует при $m \geq 2$) при $n \geq 4$ и $\Delta, D, \delta, \Phi_2, W$ (последняя присутствует при $m \geq 2$) при $n = 3$. Справедливость условия а) была установлена выше, условие б) следует из включений (6) и (7).

Далее воспользуемся утверждением 1) теоремы 7. Во-первых, заметим, что веса функций Δ, W (при $m \geq 2$), δ не допускают представлений в форме (3). Поэтому указанные три функции неприводимы в A . Всякое представление веса функции D в форме (3) имеет вид $(\pi_{n-1}, a\chi_0) + (\varphi_1, b\chi_0)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a + b = 1$; всякое представление веса функции Φ_1 в форме (3) имеет вид $(\pi_1, a\chi_0) + (\pi_{n-1}, b\chi_0)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a + b = 0$; всякое представление веса функции Φ_2 в форме (3) имеет вид $(\pi_1, a\chi_0) + (\varphi_1, b\chi_0)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a + b = -1$. Далее рассмотрим две возможности: $n \geq 4$ и $n = 3$.

Пусть сначала $n \geq 4$. Тогда легко видеть, что никакой из весов вида $(\pi_1, p\chi_0), (\pi_{n-1}, q\chi_0), (\varphi_1, r\chi_0)$, где $p, q, r \in \mathbb{Z}$, не лежит во множестве

$$Z = \langle (\pi_{n-2}, 2\chi_0), (\pi_{n-1} + \varphi_1, \chi_0), (\pi_1 + \pi_{n-1}, 0), (\pi_2, -2\chi_0) \rangle + S \langle (\pi_1 + \varphi_1, -\chi_0), (\varphi_2, 0) \rangle.$$

Значит, функции D, Φ_1, Φ_2 также неприводимы в A . Итак, выполнено условие утверждения 3) теоремы 7, поэтому функции $\Delta, D, \Phi_1, \delta, \Phi_2, W$ ($m \geq 2$) порождают алгебру A , а их веса относительно $B \times H$ порождают полугруппу $\hat{\Gamma}(G/H)$.

Теперь пусть $n = 3$. Докажем, используя утверждение 1) теоремы 7, что функция D неприводима. Предположим, что существуют такие целые числа a, b , что $a + b = 1$ и оба веса $(\pi_2, a\chi_0), (\varphi_1, b\chi_0)$ лежат во множестве

$$Z = \langle (\pi_1, 2\chi_0), (\pi_2 + \varphi_1, \chi_0) \rangle + S \langle (\pi_2, -2\chi_0), (\pi_1 + \varphi_1, -\chi_0), (\varphi_2, 0) \rangle.$$

Тогда несложно показать, что

$$\begin{aligned} (\pi_2, a\chi_0) &= p(\pi_1, 2\chi_0) + p(\pi_2 + \varphi_1, \chi_0) + (1-p)(\pi_2, -2\chi_0) - p(\pi_1 + \varphi_1, -\chi_0), \\ (\varphi_1, b\chi_0) &= -q(\pi_1, 2\chi_0) + (1-q)(\pi_2 + \varphi_1, \chi_0) + (q-1)(\pi_2, -2\chi_0) \\ &\quad + q(\pi_1 + \varphi_1, -\chi_0) \end{aligned}$$

для некоторых целых чисел p, q . При этом $1-p \geq 0$, $-p \geq 0$, $q-1 \geq 0$, $q \geq 0$, откуда $p \leq 0$ и $q \geq 1$. Далее, имеем $a = 6p - 2$ и $b = -6q + 3$. Из условия $a + b = 1$ следует, что $p = q$. Мы получили противоречие с неравенствами $p \leq 0$ и $q \geq 1$, поэтому функция D неприводима в A . Теперь покажем, что для функции Φ_2 выполнены условия утверждения 2) теоремы 7. Во-первых, рассуждая так же, как и для веса функции D , мы получаем, что $(\pi_1 + \varphi_1, -\chi_0) = (\pi_1, 2\chi_0) + (\varphi_1, -3\chi_0)$ – единственное представление веса функции Φ_2 в форме (3), так чтобы оба слагаемых лежали в Z . При этом $(\pi_1, 2\chi_0)$ – вес функции Δ . Во-вторых, рассмотрим матрицы $P = -F_3 \in \text{SL}_3$ и $Q = E_{2m} \in \text{Sp}_{2m}$. Имеем $\Delta(P, Q) = 0$, $\Phi_2(P, Q) = -1 \neq 0$, поэтому Φ_2 не делится на Δ . Значит, функция Φ_2 неприводима, и тогда согласно утверждению 3) теоремы 7 функции $\Delta, D, \delta, \Phi_2, W$ ($m \geq 2$) порождают алгебру A , а их веса относительно $B \times H$ порождают полугруппу $\hat{\Gamma}(G/H)$.

Случай 5. Имеем

$$G = \text{Sp}_{2n} \times \text{Sp}_{2m}, \quad H = H_0 = \text{Sp}_{2n-2} \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_{2m-2}, \quad \mathfrak{X}(H) = 0.$$

Множитель Sp_{2n-2} группы H вложен в множитель Sp_{2n} группы G как центральный $((2n-2) \times (2n-2))$ -блок, аналогично множитель Sp_{2m-2} вложен в Sp_{2m} как центральный $((2m-2) \times (2m-2))$ -блок; множитель Sp_2 группы H вложен в G диагонально: в оба множителя группы G как (2×2) -блоки в первых и последних строках и столбцах.

Нас интересуют функции $f(P, Q) \in \mathbb{C}[G]$, такие что

$$f(P, Q) = f(u_1^{-1} P h_1 h_2, u_2^{-1} Q h_2 h_3)$$

для любых матриц $P \in G_1$, $Q \in G_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $h_i \in H_i$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$.

Теорема 6 позволяет нам не рассматривать действия групп H_1 и H_3 и приводить к каноническому виду только первый и последний столбцы матриц P и Q .

Введем функции $\Delta = p_{2n-1,1}p_{2n,2n} - p_{2n-1,2n}p_{2n,1}$, $\delta = q_{2m-1,1}q_{2m,2m} - q_{2m-1,2m}q_{2m,1}$, $D = p_{2n,1}q_{2m,2m} - p_{2n,2m}q_{2m,1}$. Имеем $\Delta \equiv 1$ при $n = 1$ и $\delta \equiv 1$ при $m = 1$. Ясно, что функции Δ, δ, D лежат в A и являются весовыми относительно $B \times H$ с весами π_2 ($n \geq 2$), φ_2 ($m \geq 2$), $\pi_1 + \varphi_1$ соответственно. К этим функциям мы будем ниже применять теорему 7.

Рассмотрим открытое подмножество $M \subset G$, определяемое условиями $\Delta \neq 0$, $D \neq 0$. Пусть $(P, Q) \in M$.

Действием группы H_2 переведем пару (P, Q) в такую пару (P', Q') , что нижние (2×2) -блоки матриц $\bar{P}'$ и $\bar{Q}'$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \frac{\delta\Delta}{D} \\ -\frac{D}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Затем действиями групп U_1 и U_2 (лемма 4) переведем матрицы P' , Q' соответственно в матрицы P'' , Q'' , где

$$\overline{P''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \overline{Q''} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{D} \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{\delta\Delta}{D} \\ -\frac{D}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}$$

при $n, m \geq 2$. В этих матрицах элементы, скрытые за многоточиями, равны нулю. Если $n = 1$ или $m = 1$, то соответственно имеем

$$P'' = \overline{P''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q'' = \overline{Q''} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta}{D} \\ -\frac{D}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пара (P'', Q'') является каноническим видом для пары (P, Q) . Итак, получено сечение, а значит, искомая алгебра A содержится в алгебре

$$\tilde{A} = \mathbb{C} \left[\Delta, \frac{\Delta}{D}, \frac{D}{\Delta}, \frac{\delta\Delta}{D} \right] \subset \mathbb{C} \left[\Delta, \delta, D, \frac{1}{\Delta}, \frac{1}{D} \right].$$

Согласно утверждениям 1), 3) теоремы 7 функции Δ ($n \geq 2$), δ ($m \geq 2$), D неприводимы, порождают алгебру A , а их веса относительно $B \times H$ порождают полугруппу $\hat{\Gamma}(G/H)$.

Случай 6. В этом случае $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_4$, $H = H_0 = \mathrm{Sp}_{2n-4} \times \mathrm{Sp}_4$, $\mathfrak{X}(H) = 0$. Первый множитель группы H вложен в первый множитель группы G в виде центрального $((2n-4) \times (2n-4))$ -блока; второй множитель группы H вложен диагонально в G (в первый множитель вложен как блок 4×4 в строках и столбцах с номерами 1, 2, $2n-1$, $2n$).

Мы интересуемся функциями $f(P, Q) \in \mathbb{C}[G]$, для которых выполнено равенство

$$f(P, Q) = f(u_1^{-1} P h_1 h_2, u_2^{-1} Q h_2)$$

при любых матрицах $P \in G_1$, $Q \in G_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

Пусть $(P, Q) \in G$ – произвольная пара матриц, множество M будет выбрано позже. Приведем эту пару к каноническому виду. Сначала положим $h_2 = Q^{-1}u_2$ и тем самым переведем матрицу Q в единичную матрицу E_4 . Теперь задача свелась к поиску канонического вида для матрицы $PQ^{-1} \in \mathrm{Sp}_{2n}$ относительно действий группы U_1 слева и групп U_2 , H_1 справа. Будем считать для краткости $PQ^{-1} = R$. Пусть $R = (r_{ij})$. Далее, используя теорему 6, исключим из рассмотрения действие группы H_1 и ограничимся приведением к каноническому виду только двух первых и двух последних столбцов матрицы R .

Обозначим через Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, минор матрицы $\overline{R}$, соответствующий i нижним строкам и i левым столбцам. Пусть Φ – минор порядка 3 матрицы $\overline{R}$, отвечающий трем нижним строкам и столбцам с номерами 1, 2, 4. Далее, положим $D = r_{2n,1}r_{2n-1,2n} - r_{2n-1,1}r_{2n,2n} + r_{2n,2}r_{2n-1,2n-1} - r_{2n-1,2}r_{2n,2n-1}$, $F = \Delta_1\Phi + r_{2n,2}\Delta_3$. Ниже мы выясним, что при $n = 3$ имеется соотношение $\Delta_4 = -D$. Функции Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 , D и F лежат в A и являются весовыми относительно $B \times H$ с весами $\pi_1 + \varphi_1$, $\pi_2 + \varphi_2$, $\pi_3 + \varphi_1$, π_4 ($n \geq 4$), π_2 и $\pi_1 + \pi_3 + \varphi_2$

соответственно. Ниже мы применим теорему 7 к функциям $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, D, F$ при $n \geq 4$ и функциям $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, D, F$ при $n = 3$.

Дальнейшее исследование сначала проведем для случая $n \geq 4$. Будем приводить матрицу R к каноническому виду на открытом подмножестве $M \subset G$, где $\Delta_i \neq 0$ при $i = 1, 2, 3$.

Действием слева матрицами типа (1) из группы U_1 переведем матрицу R в матрицу R' , где в нижней половине матрицы $\bar{R}'$ все ненулевые элементы содержатся в нижнем (4×4) -блоке, который имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta_4}{\Delta_3} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} & r_6 \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} & r_4 & r_5 \\ \Delta_1 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix},$$

где $r_1 = r_{2n,2}$, $r_2 = r_{2n,2n-1}$, $r_3 = r_{2n,2n}$, $r_4 = \frac{r_{2n,1}r_{2n-1,2n-1}-r_{2n-1,1}r_{2n,2n-1}}{\Delta_1}$, $r_5 = \frac{r_{2n,1}r_{2n-1,2n}-r_{2n-1,1}r_{2n,2n}}{\Delta_1}$, $r_6 = \frac{\Phi}{\Delta_2}$.

Домножив матрицу R' справа на подходящую матрицу из U_2 типа (1) и затем на подходящую матрицу из U_2 типа (2), получим последовательно две матрицы R'_1 и R'_2 , такие что нижние (4×4) -блоки матриц $\bar{R}'_1$ и $\bar{R}'_2$ имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta_4}{\Delta_3} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} & r_6 + \frac{r_1\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2} \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} & r_4 & r_5 + \frac{r_1r_4}{\Delta_1} \\ \Delta_1 & 0 & r_2 & r_3 + \frac{r_1r_2}{\Delta_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta_4}{\Delta_3} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} & \frac{F}{\Delta_1\Delta_2} \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 & \frac{D}{\Delta_1} \\ \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальше действием слева матрицами типа (2) из группы U_1 переведем матрицу R'_2 в матрицу R'' , где

$$\bar{R}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_1} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D}{\Delta_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta_4}{\Delta_3} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} & \frac{F}{\Delta_1\Delta_2} \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 & \frac{D}{\Delta_1} \\ \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(на месте многоточий стоят нули). Пара (R'', E_4) является каноническим видом для исходной пары (P, Q) . Тем самым получено сечение. Отсюда следует, что

искомая алгебра A содержится в алгебре

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \mathbb{C} \left[\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \frac{\Delta_4}{\Delta_3}, \frac{D}{\Delta_1}, \frac{F}{\Delta_1 \Delta_2}, \frac{D}{\Delta_3}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_1} \right] \\ &\subset \mathbb{C} \left[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, D, F, \frac{1}{\Delta_1}, \frac{1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_3} \right].\end{aligned}$$

Согласно утверждениям 1), 3) теоремы 7 все функции $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, D, F$ неприводимы и порождают алгебру A , а их веса порождают полугруппу $\widehat{\Gamma}(G/H)$.

При $n = 3$ матрицу R из открытого множества $M = \{\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0\} \subset G$ можно аналогичным способом перевести в новую матрицу R' , где

$$\overline{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_1} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D}{\Delta_3} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} & \frac{F}{\Delta_1 \Delta_2} \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 & \frac{D}{\Delta_1} \\ \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует соотношение $\Delta_4 = -D$. Пара (R', E_4) является каноническим видом для исходной пары (P, Q) . Итак, получено сечение. Значит,

$$\begin{aligned}A \subset \tilde{A} &= \mathbb{C} \left[\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \frac{D}{\Delta_3}, \frac{F}{\Delta_1 \Delta_2}, \frac{D}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_1} \right] \\ &\subset \mathbb{C} \left[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, D, F, \frac{1}{\Delta_1}, \frac{1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_3} \right].\end{aligned}$$

Согласно утверждениям 1), 3) теоремы 7 все функции $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, D, F$ неприводимы и порождают алгебру A , а их веса порождают полугруппу $\widehat{\Gamma}(G/H)$.

Случай 7. Имеем $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m} \times \mathrm{Sp}_{2l}$, $H = H_0 = \mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_{2m-2} \times \mathrm{Sp}_{2l-2} \times \mathrm{Sp}_2$, $\mathfrak{X}(H) = 0$. Первые три множителя группы H вложены в соответствующий множитель группы G в виде центрального блока соответствующего размера; множитель Sp_2 группы H вложен в G диагонально в виде (2×2) -блока в первых и последних строках и столбцах каждого множителя.

Мы ищем функции $f(P, Q, R) \in \mathbb{C}[G]$, такие что справедливо равенство

$$f(P, Q, R) = f(u_1^{-1} P h_1 h_4, u_2^{-1} Q h_2 h_4, u_3^{-1} R h_3 h_4)$$

для любых матриц $P \in G_1$, $Q \in G_2$, $R \in G_3$, $u_i \in U_i$, $i = 1, 2, 3$, $h_j \in H_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Основываясь на теореме 6, мы можем не рассматривать действия первых трех множителей группы H и приводить к каноническому виду только первый и последний столбцы матриц P , Q , R . Пусть $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, $R = (r_{ij})$.

Введем следующие функции: $\Delta_1 = p_{2n-1,1} p_{2n,2n} - p_{2n-1,2n} p_{2n,1}$, $\Delta_2 = q_{2m-1,1} q_{2m,2m} - q_{2m-1,2m} q_{2m,1}$, $\Delta_3 = r_{2l-1,1} r_{2l,2l} - r_{2l-1,2l} r_{2l,1}$, $D_1 = p_{2n,1} q_{2m,2m} - p_{2n,2n} q_{2m,1}$, $D_2 = q_{2m,1} r_{2l,2l} - q_{2m,2m} r_{2l,1}$, $D_3 = p_{2n,1} r_{2l,2l} - p_{2n,2n} r_{2l,1}$. Если $n = 1$ (соответственно, $m = 1$, $l = 1$), то $\Delta_1 \equiv 1$ (соответственно, $\Delta_2 \equiv 1$, $\Delta_3 \equiv 1$).

Все функции $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, D_1, D_2, D_3$ лежат в алгебре A и являются весовыми относительно $B \times H$, их веса равны соответственно π_2 ($n \geq 2$), φ_2 ($m \geq 2$), ψ_2 ($l \geq 2$), $\pi_1 + \varphi_1$, $\varphi_1 + \psi_1$, $\pi_1 + \psi_1$. К этим функциям мы будем ниже применять теорему 7.

Рассмотрим открытое подмножество $M \subset G$, определяемое условиями $\Delta_1 \neq 0$, $D_1 \neq 0$, $D_3 \neq 0$. Подействовав на тройку $(P, Q, R) \in M$ подходящей матрицей из H_4 , мы получим новую тройку (P', Q', R') , такую что нижние (2×2) -блоки матриц $\bar{P}', \bar{Q}', \bar{R}'$ имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & \frac{\Delta_2 \Delta_1}{D_1} \\ -\frac{D_1}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{r_{2l-1,1}p_{2n,2n} - r_{2l-1,2l}p_{2n,1}}{\Delta_1} & (r_{2l-1,1}q_{2m,2m} - r_{2l-1,2l}q_{2m,1})\frac{\Delta_1}{D_1} \\ -\frac{D_3}{\Delta_1} & -\frac{D_2 \Delta_1}{D_1} \end{pmatrix}.$$

Теперь при помощи действия группы U (лемма 4) переведем тройку матриц (P', Q', R') в тройку (P'', Q'', R'') , где при $n, m, l \geq 2$ имеем

$$\bar{P}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta_1}{D_1} \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{\Delta_2 \Delta_1}{D_1} \\ -\frac{D_1}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta_1}{D_3} \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \frac{\Delta_1 \Delta_3}{D_3} \\ -\frac{D_3}{\Delta_1} & -\frac{D_2 \Delta_1}{D_1} \end{pmatrix}$$

(на месте многоточий стоят нули). В случаях $n = 1, m = 1, l = 1$ соответственно имеем

$$\bar{P}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta_1}{D_1} \\ -\frac{D_1}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta_1}{D_3} \\ -\frac{D_3}{\Delta_1} & -\frac{D_2 \Delta_1}{D_1} \end{pmatrix}.$$

Тройка (P'', Q'', R'') является каноническим видом для исходной тройки (P, Q, R) . Тем самым получено сечение. Отсюда мы заключаем, что алгебра A содержится в алгебре

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \mathbb{C} \left[\Delta_1, \frac{\Delta_1}{D_1}, \frac{\Delta_2 \Delta_1}{D_1}, \frac{D_1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{D_3}, \frac{\Delta_1 \Delta_3}{D_3}, \frac{D_3}{\Delta_1}, \frac{D_2 \Delta_1}{D_1} \right] \\ &\subset \mathbb{C} \left[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, D_1, D_2, D_3, \frac{1}{\Delta_1}, \frac{1}{D_1}, \frac{1}{D_3} \right]. \end{aligned}$$

Согласно утверждениям 1), 3) теоремы 7 функции Δ_1 ($n \geq 2$), Δ_2 ($m \geq 2$), Δ_3 ($l \geq 2$), D_1, D_2, D_3 неприводимы и порождают алгебру A , а их веса порождают полугруппу $\hat{\Gamma}(G/H)$.

Случай 8. Имеем $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{2m}$, $H = H_0 = \mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$, $\mathfrak{X}(H) = 0$. Вложение H в G устроено следующим образом. Множитель H_1 вложен в G_1 в виде центрального $((2n-2) \times (2n-2))$ -блока, аналогично

вложен множитель H_4 в G_3 . Множитель H_2 вложен диагонально в G_1 и G_2 , в каждый из них как (2×2) -блок в первых и последних строках и столбцах. Множитель H_3 вложен диагонально в G_2 и G_3 : в G_2 в виде центрального (2×2) -блока, а в G_3 в виде (2×2) -блока в первых и последних столбцах.

Мы занимаемся поиском функций $f(P, Q, R) \in \mathbb{C}[G]$, удовлетворяющих равенству $f(P, Q, R) = f(u_1^{-1}Ph_1h_2, u_2^{-1}Qh_2h_3, u_3^{-1}Rh_3h_4)$ для любых матриц $P \in G_1$, $Q \in G_2$, $R \in G_3$, $u_i \in U_i$, $i = 1, 2, 3$, $h_j \in H_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Пусть $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, $R = (r_{ij})$. Используя теорему 6, мы можем исключить из рассмотрения действия групп H_1 и H_4 и в матрицах P , R приводить к каноническому виду только первый и последний столбцы.

Введем следующие функции: $\Delta_1 = q_{31}q_{44} - q_{34}q_{41}$, $\Delta_2 = q_{32}q_{43} - q_{33}q_{42}$, $\delta_1 = p_{2n,1}q_{44} - p_{2n,2n}q_{41}$, $\delta_2 = r_{2m,1}q_{43} - r_{2m,2m}q_{42}$, $D_1 = p_{2n-1,1}p_{2n,2n} - p_{2n-1,2n}p_{2n,1}$, $D_2 = r_{2m-1,1}r_{2m,2m} - r_{2m-1,2m}r_{2m,1}$, $\Delta = \delta_2(p_{2n,1}q_{34} - p_{2n,2n}q_{31}) - \delta_1(r_{2m,1}q_{33} - r_{2m,2m}q_{32})$. Имеем $D_1 \equiv 1$ при $n = 1$, $D_2 \equiv 1$ при $m = 1$. Из косоортогональности последних двух строк матрицы Q следует, что $\Delta_2 = -\Delta_1$. Функции Δ_1 , δ_1 , δ_2 , D_1 , D_2 , Δ лежат в алгебре A и являются весовыми относительно $B \times H$, их веса соответственно равны φ_2 , $\pi_1 + \varphi_1$, $\varphi_1 + \psi_1$, π_2 ($n \geq 2$), ψ_2 ($m \geq 2$), $\pi_1 + \varphi_2 + \psi_1$. К этим функциям мы ниже применим теорему 7.

Пусть $M \subset G$ – открытое подмножество в G , определяемое условиями $\Delta_1 \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$. Пусть $(P, Q, R) \in M$. Подействовав на эту тройку подходящими матрицами из групп H_2 и H_3 , получим тройку матриц (P', Q', R') , где матрица Q' и нижние (2×2) -блоки матриц $\bar{P}'$, $\bar{R}'$ имеют вид соответственно

$$\begin{pmatrix} * & * & & * \\ * & * & & * \\ 1 & 1 & (r_{2m,1}q_{33} - r_{2m,2m}q_{32})\frac{\Delta_2}{\delta_2} & (p_{2n,1}q_{34} - p_{2n,2n}q_{31})\frac{\Delta_1}{\delta_1} \\ 0 & 0 & \Delta_2 & \Delta_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} * & -\frac{D_1\Delta_1}{\delta_1} \\ \frac{\delta_1}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & -\frac{D_2\Delta_2}{\delta_2} \\ \frac{\delta_2}{\Delta_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Дальше действием группы U приведем тройку (P', Q', R') к тройке (P'', Q'', R'') , где при $n \geq 2$ и $m \geq 2$ имеем

$$\bar{P}'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta_1}{\delta_1} \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{D_1\Delta_1}{\delta_1} \\ \frac{\delta_1}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & 0 & \frac{\Delta}{\delta_1\delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{\Delta_1\Delta}{\delta_1\delta_2} \\ 0 & 0 & \Delta_2 & \Delta_1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{R}'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta_2}{\delta_2} \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{D_2\Delta_2}{\delta_2} \\ \frac{\delta_2}{\Delta_2} & 0 \end{pmatrix}$$

(для матриц P' , R' это возможно по лемме 4). В этих матрицах элементы, стоящие на месте многоточий, равны нулю. Если $n = 1$ или $m = 1$, то соответственно имеем

$$\bar{P}'' = P'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta_1}{\delta_1} \\ \frac{\delta_1}{\Delta_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}'' = R'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Delta_2}{\delta_2} \\ \frac{\delta_2}{\Delta_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тройка (P'', Q'', R'') является каноническим видом для тройки (P, Q, R) . Итак, получено сечение. Значит, имеется включение

$$\begin{aligned} A \subset \tilde{A} &= \mathbb{C} \left[\frac{\Delta_1}{\delta_1}, \frac{D_1 \Delta_1}{\delta_1}, \frac{\delta_1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\delta_2}, \frac{D_2 \Delta_1}{\delta_2}, \frac{\delta_2}{\Delta_1}, \frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta}{\delta_1 \delta_2}, \frac{\Delta_1 \Delta}{\delta_1 \delta_2}, \Delta_1 \right] \\ &\subset \mathbb{C} \left[\Delta_1, \delta_1, \delta_2, D_1, D_2, \Delta, \frac{1}{\Delta_1}, \frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2} \right]. \end{aligned}$$

Согласно утверждению 1) теоремы 7 функции Δ_1 , δ_1 , δ_2 , D_1 ($n \geq 2$), D_2 ($m \geq 2$) неприводимы. Докажем неприводимость функции Δ , используя утверждение 2) теоремы 7. Несложно показать, что $\pi_1 + \varphi_2 + \psi_1 = (\pi_1 + \psi_1) + \varphi_2$ – единственное представление веса функции Δ в форме (3), так чтобы оба слагаемых лежали в Z . При этом φ_2 – вес функции Δ_1 . Далее, возьмем матрицы $P = E_{2n}$, $Q = \Omega_4$, $R = E_{2m}$. Имеем $(P, Q, R) \in G$, $\Delta_1(P, Q, R) = 0$, $\Delta(P, Q, R) = -1 \neq 0$, поэтому Δ не делится на Δ_1 . Значит, функция Δ неприводима. Согласно утверждению 3) теоремы 7 все функции Δ_1 , δ_1 , δ_2 , D_1 ($n \geq 2$), D_2 ($m \geq 2$), Δ порождают алгебру A , а их веса порождают полугруппу $\hat{\Gamma}(G/H)$.

Список литературы

1. Э.Б. Винберг, Б.Н. Кимельфельд, “Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **12:3** (1978), 12–19; англ. пер.: È. B. Vinberg, B. N. Kimel’fel’d, “Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups”, *Funct. Anal.*, **12:3** (1978), 168–174.
2. M. Krämer, “Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen”, *Compositio Math.*, **38:2** (1979), 129–153.
3. И.В. Микитюк, “Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами”, *Матем. сб.*, **129(171):4** (1986), 514–534; англ. пер.: I. V. Mikityuk, “On the integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **57:2** (1987), 527–546.
4. M. Brion, “Classification des espaces homogènes sphériques”, *Compositio Math.*, **63:2** (1987), 189–208.
5. О.С. Якимова, “Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **2** (2002), 57–60; англ. пер.: O. S. Yakimova, “Weakly symmetric spaces of semisimple Lie groups”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **57:2** (2002), 37–40.
6. Ю.В. Дзядык, “Об определении спектра индуцированного представления на компактном симметрическом пространстве”, *Докл. АН СССР*, **220:5** (1975), 1019–1022; англ. пер.: Yu. V. Dzyadyk, “On the determination of the spectrum of an induced representation on a compact symmetric space”, *Soviet Math. Dokl.*, **16:1** (1975), 193–197.

7. Ю. В. Дзядык, “Представления, реализуемые в векторных полях на компактных симметрических пространствах”, *Докл. АН СССР*, **220**:6 (1975), 1259–1262; англ. пер.: Yu. V. Dzyadyk, “Representations realizable in vector fields on compact symmetric spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **16**:1 (1975), 229–232.
8. Yu. V. Dzyadyk, “Induced representations on symmetric and spherical spaces”, *Abstracts of conference “Transformation groups”*, Moscow, 2007, 39–44.
9. D. I. Panyushev, “Complexity and rank of homogeneous spaces”, *Geom. Dedicata*, **34**:3 (1990), 249–269.
10. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry. IV: Linear algebraic groups, invariant theory*, *Encycl. Math. Sci.*, **55**, 1994, 123–278.
11. В. Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.
12. Э. Б. Винберг, “Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия”, *УМН*, **56**:1 (2001), 3–62; англ. пер.: E. B. Vinberg, “Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 1–60.
13. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, 2-е изд., УРСС, М., 1995; англ. пер. 1-го изд.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
14. И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, “Конечномерные представления группы унимодулярных матриц”, *Докл. АН СССР*, **71**:5 (1950), 825–828.
15. И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, “Конечномерные представления группы ортогональных матриц”, *Докл. АН СССР*, **71**:6 (1950), 1017–1020.
16. W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.

Р. С. Авдеев (R. S. Avdeev)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: suselr@yandex.ru

Поступило в редакцию
 18.02.2009