Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Резвякова, О нулях линейных комбинаций L -функций Гекке на критической прямой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 6, 183–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:42:33

УДК 511

И. С. Резвякова

О нулях линейных комбинаций L -функций Гекке на критической прямой

Получена новая нижняя оценка числа нулей на интервалах критической прямой для линейных комбинаций L -функций Гекке.

Библиография: 37 наименований.

Ключевые слова: L -функции Гекке, нули на критической прямой, автоморфные формы, аналог кругового метода М. Ютилы.

§ 1. Введение. Формулировка основного результата

Работа посвящается моему учителю А. А. Карацубе.

Одним из основных направлений исследований в теории дзета-функции Римана является изучение распределения нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$, а также других рядов Дирихле. А. Сельберг в 1989 г. в своем докладе на конференции в Амальфи [1] определил класс S рядов Дирихле $L(s)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) ряд $L(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ сходится абсолютно при $\sigma > 1$, где $s = \sigma + it$;
- 2) $(s-1)^m L(s)$ является целой функцией конечного порядка при некотором $m \geq 0$;
- 3) коэффициенты $a(n)$ удовлетворяют соотношениям $a(1) = 1$, $a(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ для любого положительного ε и всех $n \geq 1$;
- 4) ряд $L(s)$ имеет эйлерово произведение:

$$\ln L(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n^s},$$

где $b_n = 0$, если n не равно положительной степени простого числа; также при некотором $\theta < \frac{1}{2}$ и всех $n \geq 1$ выполняется оценка $b(n) \ll n^\theta$;

- 5) $L(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\Lambda(s) = \overline{\Lambda(1 - \bar{s})},$$

где

$$\Lambda(s) = \eta A^s \prod_{j=1}^k \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) L(s), \quad (1)$$

при этом $|\eta| = 1$, $A > 0$, $\lambda_j > 0$, $\operatorname{Re} \mu_j \geq 0$.

Из условия 5) следует, что функция $\Lambda(s)$ является вещественной на прямой $s = \frac{1}{2} + it$ и что $(s-1)^m L(s)$ является целой функцией первого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ (грант МК-3370.2007.1) и РФФИ (грант № 06-01-00518а).

Нули функции $L(s)$ можно разбить на два класса: *тривиальные нули*, которые являются полюсами гамма-множителей $\Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $j = 1, \dots, k$, и остальные нули, которые называются *нетривиальными*. Все нетривиальные нули расположены в некоторой полосе $1 - A \leq \operatorname{Re} s \leq A$ комплексной плоскости.

При $s = \frac{1}{2} + it$ запишем равенство (1) в виде

$$\Lambda\left(\frac{1}{2} + it\right) = \kappa(t)e^{i\vartheta(t)}L\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $\kappa(t)$ и $\vartheta(t)$ – вещественные функции и $\kappa(t) > 0$. Обозначим через d_L степень L -функции из класса S , т. е.

$$d_L = 2 \sum_{j=1}^k \lambda_j. \quad (2)$$

Пусть $N(T)$ – количество нетривиальных нулей функции $L(s)$ при $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Тогда

$$N(T) = \frac{\vartheta(T)}{\pi} + O(\ln T) = \frac{d_L}{2\pi} T(\ln T + c_1) + O(\ln T),$$

где c_1 – некоторая постоянная.

А. Сельберг предположил справедливость аналога гипотезы Римана для функций L из класса S , т. е. что все нетривиальные нули $L(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ (см. [1, с. 50]). К классу S принадлежат, например, дзета-функция Римана, L -функции, отвечающие характерам Дирихле, а также характерам Гекке на классах идеалов мнимого квадратичного расширения поля $\mathbb{Q}$.

В 1942 г. Сельберг [2] доказал, что положительная доля нулей дзета-функции Римана лежит на критической прямой (о количественных оценках см. работы [3]–[8]). Аналогичный результат справедлив и для L -функций Дирихле [9]. Ранее, в 1921 г., Г. Харди и Д. Литтлвуд [10] доказали теорему о том, что для дзета-функции Римана справедлива оценка

$$N_0(T) \gg T,$$

где $N_0(T)$ – количество нулей функции на интервале критической прямой $\{s = \frac{1}{2} + it, 0 < t \leq T\}$. До сих пор гипотеза Римана не доказана и не опровергнута.

Возник вопрос: не будет ли наличие только функционального уравнения риманова типа 5) для ряда Дирихле, удовлетворяющего условиям 1)–3), влечь за собой справедливость гипотезы Римана? Оказывается, это не так. Простейшей функцией, которая дает отрицательный ответ на поставленный вопрос, является функция Давенпорта–Хейльбронна $g(s)$, представляемая в виде линейной комбинации двух L -рядов Дирихле. А именно, $g(s)$ определяется равенством

$$g(s) = \frac{1 - i\chi}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1 + i\chi}{2} L(s, \bar{\chi}_1),$$

где χ_1 – характер по mod 5 такой, что $\chi_1(2) = i$,

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

$$\chi = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}.$$

При этом $g(s)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Lambda(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) g(s) = \Lambda(1-s).$$

Г. Давенпорт и Г. Хейльбронн в 1936 г. доказали, что для $g(s)$ справедлива оценка

$$N(1, T) \gg T,$$

где через $N(\sigma, T)$ обозначено число нулей функции в области $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. С.М. Воронин в 1976 г. с помощью теорем об универсальности L -функций значительно дополнил этот результат, доказав, что для функции Давенпорта–Хейльбронна выполнена оценка

$$N(\sigma_1, T) - N(\sigma_2, T) \geq cT,$$

где σ_1, σ_2 – произвольные числа, удовлетворяющие условию $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, а $c = c(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ – постоянная. Аналогичные результаты справедливы и для других рядов Дирихле, имеющих функциональное уравнение, но не имеющих эйлерова произведения, например для дзета-функций Гурвица и дзета-функций Эшштейна, соответствующих неодноклассным бинарным квадратичным формам (см. [11]–[13] и [14, гл. VI, § 5]). Как мы видим, отсутствие у L -функции эйлерова произведения не позволяет аналогу гипотезы Римана быть справедливым. Тем не менее, существуют следующие гипотезы.

ГИПОТЕЗА А. А. КАРАЦУБЫ. Почти все нетривиальные нули функции Давенпорта–Хейльбронна лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

ГИПОТЕЗА Х. МОНТГОМЕРИ. Почти все нетривиальные нули дзета-функции Эшштейна лежат на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Э. Бомбьер и Д. Хейчал, пользуясь расширенной гипотезой Римана и еще одной гипотезой о распределении мнимых частей нетривиальных нулей L -функций, в 1987 г. доказали справедливость гипотезы Монтгомери (см. [15]).

С.М. Воронин [16] в 1980 г. показал, что прямая $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ является “особой” для функции Давенпорта–Хейльбронна. А именно, он доказал, что для $g(s)$ справедлива оценка

$$N_0(T) \gg T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\ln \ln \ln T}\right).$$

Это неравенство принципиально более точное по сравнению с оценкой

$$N_0(T) \gg T,$$

которую может дать применение метода Харди–Литтлвуда из работы [10]. А.А. Карацуба с помощью нового подхода, основанного на методе Сельберга, в 1989 г. получил [17] следующее усиление результата С.М. Воронина для функции $g(s)$:

$$N_0(T) \gg T(\ln T)^{1/2-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое положительное число, а в 1992 г. он уточнил [18] свой предыдущий результат, получив оценку

$$N_0(T) \gg T \sqrt{\ln T} \exp(-c \sqrt{\ln \ln T}),$$

где c – абсолютная постоянная.

Методы Воронина и Карацубы позволяют получать аналогичные результаты и для других линейных комбинаций L -функций Дирихле. В этом случае применение метода Карацубы дает оценку вида

$$N_0(T) \gg T(\ln T)^\beta \exp(-c\sqrt{\ln \ln T}),$$

где $0 < \beta < 1$ и число β зависит от модулей характеров, соответствующих L -функциям, входящим в рассматриваемую линейную комбинацию.

Дзета-функция Римана и L -функции, соответствующие характерам Дирихле, являются функциями степени один (см. обозначение (2)). Аналог теоремы Сельберга [2] для функции степени два был доказан Д. Л. Хафнером в 1983 г. В работах [19], [20] содержится результат о том, что положительная доля нетривиальных нулей лежит на критической прямой для L -функций, коэффициенты которых соответствуют коэффициентам голоморфных параболических форм (модулярных форм) или не голоморфных параболических форм (форм Маассы) для полной модулярной группы с тривиальным характером (необходимые определения см. далее, а также в [21]).

Определим характеры Гекке на группе классов идеалов. Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $D > 0$ – натуральное число, $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, $-D$ – фундаментальный дискриминант. Пусть $\mathbb{I} = Z_{\mathbb{Q}(\sqrt{-D})}$ – кольцо целых алгебраических чисел поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $\mathbb{O}$ – кольцо главных идеалов поля K . Рассмотрим факторгруппу $\mathbb{I}^*/\mathbb{O}^*$. Это абелева группа конечного порядка $h = [\mathbb{I}^* : \mathbb{O}^*]$, элементами которой являются классы смежности ненулевых идеалов кольца $\mathbb{I}$ относительно следующего отношения эквивалентности:

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{I}^*,$$

если найдется ненулевой главный идеал (ω) такой, что $\mathfrak{a} = (\omega)\mathfrak{b}$.

Число $h = h(-D)$ называется *числом классов поля K* . Определим гомоморфизм $\psi: \mathbb{I}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ на классах смежности I_k , $k = 1, 2, \dots, h$, и при $\mathfrak{a} \in I_k$ положим

$$\psi(\mathfrak{a}) = \psi(I_k).$$

Функция $\psi(\mathfrak{a})$, определенная таким образом на ненулевых идеалах $\mathfrak{a}$ кольца $\mathbb{I}$, называется *характером Гекке* на группе классов идеалов. Заметим, что все ненулевые главные идеалы эквивалентны друг другу и образуют класс, который является единичным элементом в группе классов идеалов, т.е. $\psi(\mathfrak{a}) = 1$, если $\mathfrak{a}$ – главный идеал в $\mathbb{I}^*$. Для произвольного ненулевого идеала $\mathfrak{a}$ имеем

$$(\psi(\mathfrak{a}))^h = 1.$$

Характер Гекке $\psi = \psi_0$ называется *главным*, если $\psi(\mathfrak{a}) = 1$ для любого идеала $\mathfrak{a}$. Характер Гекке называется *комплексным*, если он принимает хотя бы одно комплексное (не вещественное) значение, т.е. если $\psi^2 \neq \psi_0$.

Идеал $\mathfrak{p}$ называется *простым*, если он не делится на другой идеал, отличный от $\mathfrak{p}$ и (1) . Любой идеал в $\mathbb{I}^*$ единственным образом разлагается в произведение простых идеалов. Норма идеала $\mathfrak{a}$ есть количество классов вычетов чисел из кольца $\mathbb{I}$ по $\text{mod } \mathfrak{a}$. Норма идеала $N\mathfrak{a}$ – вполне мультипликативная функция (см. [22]). При $\text{Re } s > 1$ рассмотрим L -функцию Гекке

$$L(s, \psi) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} \right)^{-1},$$

где произведение берется по всем простым идеалам в $\mathbb{I}$. Тогда

$$L(s, \psi) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathbb{I}^*} \frac{\psi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_\psi(n)}{n^s},$$

где

$$r_\psi(n) = \sum_{N\mathfrak{a}=n} \psi(\mathfrak{a}).$$

Эта функция имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, при этом если $\psi = \psi_0$ — главный характер, то $L(s, \psi)$ имеет единственный полюс первого порядка в точке $s = 1$, а если $\psi \neq \psi_0$, то функция $L(s, \psi)$ имеет аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$ без особенностей. Э. Гекке доказал следующее утверждение (см. [23], [24]).

ЛЕММА 1 (функциональное уравнение). Пусть

$$\Lambda(s, \psi) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \right)^{-s} \Gamma(s) L(s, \psi).$$

Тогда

$$\Lambda(s, \psi) = \Lambda(1-s, \psi).$$

Э. Гекке доказал еще одно фундаментальное свойство. При $z \in \mathbb{H} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ положим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_\psi(n) e^{2\pi i n z}.$$

Если $r_\psi(n)$ являются коэффициентами ряда Дирихле для L -функции Гекке с комплексным характером ψ , то функция $f(z)$ является голоморфной параболической формой веса 1 относительно $\Gamma_0(D)$ с характером $\chi_D(\cdot) = \left(\frac{-D}{\cdot} \right)$, т. е. для любой матрицы $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из группы $\Gamma_0(D)$ (которая является подгруппой $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ и состоит из всех матриц γ , удовлетворяющих условию $c \equiv 0 \pmod{D}$) выполняется соотношение

$$f(\gamma z) = \chi_D(\gamma)(cz + d)f(z), \quad (3)$$

где $\chi_D(\gamma) = \chi_D(d)$, и $f(z)$ обращается в нуль во всех параболических точках (см. [21], [24]).

Отметим, что соотношение (3) и функциональное уравнение следуют из свойств автоморфности для тета-рядов, соответствующих бинарным положительно определенным квадратичным формам, поскольку имеет место равенство

$$L(s, \psi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^h \psi(I_k) \zeta(s, Q_k),$$

где $Q_k = aX^2 + bXY + cY^2$ — положительно определенная квадратичная форма с дискриминантом $-D$ ($D \geq 5$), соответствующая классу I_k , который содержит идеал $(a, b - i\frac{\sqrt{D}}{2})$, а

$$\zeta(s, Q_k) = \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(an^2 + bnm + cm^2)^s}$$

(см. [22, § 53]).

Пусть $\chi_D(n)$ – характер поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$,

$$\chi_D(n) = \left(\frac{-D}{n} \right).$$

Все простые числа разобьем на три множества P_0, P_1, P_{-1} в следующем соответствии:

$$p \in P_e, \text{ если } \chi_D(p) = e, \quad e = 0, \pm 1. \quad (4)$$

Теория идеалов мнимых квадратичных полей дает следующую теорему: *все простые идеалы кольца $\mathbb{I}$ содержатся как множители главных идеалов (p) , где p – простое число, и, кроме того,*

$$(p) = \begin{cases} \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, & \text{если } \chi_D(p) = 1, \text{ при этом } N\mathfrak{p}_1 = N\mathfrak{p}_2 = p, \\ \mathfrak{p}, & \text{если } \chi_D(p) = -1, \text{ при этом } N\mathfrak{p} = p^2, \\ \mathfrak{p}^2, & \text{если } \chi_D(p) = 0, \text{ при этом } N\mathfrak{p} = p, \end{cases}$$

$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ – простые идеалы. Следовательно, имеем равенство

$$L(s, \psi) = \prod_{p \in P_0} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p})}{p^s} \right)^{-1} \prod_{p \in P_{-1}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1} \prod_{p \in P_1} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p}_1)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p}_2)}{p^s} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Видно, что если $p \in P_0$, то

$$(p) = \mathfrak{p}^2, \quad \psi(\mathfrak{p}) = \pm 1,$$

если $p \in P_1$, то

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \quad \psi(\mathfrak{p}_1) = \overline{\psi(\mathfrak{p}_2)},$$

т. е. коэффициенты ряда $L(s, \psi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_\psi(n)}{n^s}$ являются вещественными и удовлетворяют соотношениям

$$r_\psi(1) = 1, \quad |r_\psi(n)| \leq \tau(n),$$

где $\tau(n)$ – число делителей n . Следовательно, функция $L(s, \psi)$ принадлежит классу Сельберга S , и для нее существует аналог гипотезы Римана. Теорема Кронекера утверждает, что для вещественного характера ψ соответствующая L -функция разлагается в произведение двух L -функций Дирихле. Поэтому для таких функций справедлив аналог теоремы Сельберга о том, что положительная доля нетривиальных нулей лежит на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Если ψ – комплексный характер, то функция $L(s, \psi)$ уже не представляется в виде произведения двух L -рядов Дирихле, но является функцией степени 2. Однако утверждения из работ [19], [20] не позволяют сказать, что положительная доля нетривиальных нулей L -функции с комплексным характером Гекке лежит на критической прямой, поскольку в этом случае коэффициенты соответствующего L -ряда (как было отмечено выше) являются коэффициентами Фурье автоморфной параболической формы веса 1 для группы $\Gamma_0(D)$ с нетривиальным характером χ_D .

Функция $L(s)$ из класса Сельберга S называется *примитивной функцией*, если она не представима в виде произведения: $L(s) = L_1(s)L_2(s)$, где $L_1(s), L_2(s)$ также принадлежат классу S . Сельберг предположил справедливость следующих гипотез для примитивных функций из класса S .

ГИПОТЕЗА 1. Для примитивной функции $L(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \leq x} \frac{|a(p)|^2}{p} = \ln \ln x + O(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

ГИПОТЕЗА 2. Для двух различных примитивных функций $L_1(s)$ и $L_2(s)$ имеет место оценка

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_1(p) \overline{a_2(p)}}{p} = O(1).$$

С. А. Гриценко рассмотрел [25], [26] задачу о нулях на критической прямой линейных комбинаций рядов Дирихле из класса S степени 2. Он доказал, что если коэффициенты рядов удовлетворяют гипотезам 1, 2, а также еще некоторым похожим условиям, то для линейной комбинации таких функций справедлива оценка снизу

$$N_0(T) \geq T \exp(\sqrt{\ln \ln \ln T})$$

(более точную формулировку см. в [25]). Позже, в 1997 г., он улучшил [27] свой предыдущий результат, доказав, что

$$N_0(T) \geq T(\ln \ln T)^\beta,$$

где постоянная $\beta > 0$ зависит от функций, входящих в линейную комбинацию. Этот результат гораздо точнее, чем оценка, которая может быть получена применением метода Харди–Литтлвуда. С. А. Гриценко показал [28], что необходимые условия, налагаемые на коэффициенты, выполняются для L -функций с комплексными характерами Гекке на группе классов идеалов одного и того же поля (мнимого квадратичного расширения поля $\mathbb{Q}$), тем самым, процитированные выше оценки числа нулей являются безусловными для линейных комбинаций L -функций Гекке.

В настоящей работе для линейных комбинаций L -функций Гекке мы получаем результат, аналогичный результату А. А. Карацубы о количестве нулей на критической прямой для линейных комбинаций L -функций Дирихле.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть ψ_j – комплексные характеры Гекке на группе классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, a_j – вещественные числа. Тогда для функции

$$f(s) = \sum_j a_j L(s, \psi_j)$$

имеет место следующая оценка числа нулей нечетного порядка на промежутке $\{s = \frac{1}{2} + it, 0 < t \leq T\}$ критической прямой при любом достаточно большом значении T :

$$N_0(T) \gg T(\ln T)^{2/h} e^{-c\sqrt{\ln \ln T}},$$

где $h = h(-D)$ – число классов, c – абсолютная постоянная.

В доказательстве основной теоремы используется метод А. Сельберга [2] и подход А. А. Карацубы [17], при этом мы следуем работам [18], [19]. Опишем основную идею доказательства.

Определим множество $P_{1,1}$, содержащее те простые числа p из P_1 , для которых главный идеал (p) в поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ разлагается в произведение двух простых главных идеалов $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$, т. е. $\psi_j(\mathfrak{p}_1) = \psi_j(\mathfrak{p}_2) = 1$ для любого характера Гекке ψ_j . Зададим числа $\alpha(\nu)$ равенством

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha(\nu) \nu^{-s} = \prod_{p \in P_{1,1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \quad (6)$$

Пусть $X \geq 3$. Положим

$$\beta(\nu) = \alpha(\nu) \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln X}\right)^+, \quad \text{где } x^+ = \max(0, x), \quad (7)$$

и определим аналитическую функцию $\varphi(s)$ формулой

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \beta(\nu) \nu^{-s}.$$

Пусть $\delta > 0$,

$$\mathfrak{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j a_j \Lambda\left(\frac{1}{2} + it, \psi_j\right) \left| \varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)t\right).$$

Из функционального уравнения для $\Lambda(s, \psi)$ следует, что функция $\mathfrak{F}(t)$ вещественная при вещественных t , к тому же нули нечетного порядка функции $\mathfrak{F}(t)$ являются нулями функции $f(s)$ на критической прямой.

Пусть $0 < h_1 < 1$. Положим

$$I_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} |\mathfrak{F}(t+u)| du, \quad I_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} \mathfrak{F}(t+u) du \right|.$$

Пусть $T > 1$ — достаточно большое число. Определим множество E_1 как множество точек $t \in (1, T)$ таких, что при $t \in E_1$ выполняется неравенство

$$I_1(t) > I_2(t).$$

Через E_2 обозначим дополнение к множеству E_1 , т. е. множество точек $t \in (1, T)$, в которых

$$I_1(t) = I_2(t).$$

Покажем, что если $\mu(E_1)$ — мера множества E_1 , то количество нулей нечетного порядка функции $\mathfrak{F}(t)$ на интервале $(1, T)$ не меньше, чем $\frac{\mu(E_1)}{2h_1} - 1$. Если при некотором t справедливо неравенство $I_1(t) > I_2(t)$, то в h_1 -окрестности этой точки функция $\mathfrak{F}(\cdot)$ меняет знак (т. е. имеет нуль нечетного порядка). Покроем h_1 -окрестностями все точки перемены знака функции $\mathfrak{F}(t)$ на интервале $(1, T)$. Видим, что количество нулей нечетного порядка функции $\mathfrak{F}(t)$ на промежутке $(1, T)$ будет не меньше, чем

$$\frac{\mu(E_1) - 2h_1}{2h_1} = \frac{\mu(E_1)}{2h_1} - 1.$$

Здесь мы вычли $2h_1$ из меры E_1 , поскольку возможные нули в интервалах $(1 - h_1, 1]$, $[T, T + h_1)$ могли дать вклад в $\mu(E_1)$ не более чем $2h_1$.

Теперь основной результат вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \delta < \delta_0$, где $\delta_0 < \frac{1}{10}$ – некоторое достаточно малое положительное число, $0 < h_1 < 1$, $\delta \leq \alpha \leq 1$ и $\delta X^{86} e^{1/h_1} \leq 1$. Тогда справедливы оценки:

- a) $\int_1^{\delta^{-1}} I_1^\alpha(t) dt \gg \delta^{-1} h_1^\alpha$,
- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} I_1^2(t) dt \ll \delta^{-1} \frac{h_1^2 \ln \delta^{-1}}{(\ln X)^{2/h}}$,
- c) $\int_{-\infty}^{+\infty} I_2^2(t) dt \ll \delta^{-1} \frac{h_1}{(\ln X)^{2/h}}$,

причем постоянные в знаках Виноградова $\ll, \gg$ абсолютные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Положим $\delta = T^{-1}$ в теореме 1 и при $\alpha > 0$ запишем следующую цепочку соотношений:

$$I_3 = \int_1^T I_1^\alpha(t) dt = \int_{E_1} I_1^\alpha(t) dt + \int_{E_2} I_1^\alpha(t) dt = \int_{E_1} I_1^\alpha(t) dt + \int_{E_2} I_2^\alpha(t) dt \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{E_1} I_1^\alpha(t) dt \leq (\mu(E_1))^{1-\alpha/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_1^2(t) dt \right)^{\alpha/2},$$

$$I_2 = \int_1^T I_2^\alpha(t) dt \leq T^{1-\alpha/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_2^2(t) dt \right)^{\alpha/2}.$$

Результат c) теоремы 1 влечет, что

$$I_2 \ll T \left(\frac{h_1}{(\ln X)^{2/h}} \right)^{\alpha/2}.$$

Взяв $X = T^{1/100}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\ln \ln T}}$, $h_1 = (\ln X)^{-2/h} e^{C\sqrt{\ln \ln T}}$, где C – достаточно большая положительная постоянная, получим, что условия теоремы 1 выполнены и $I_3 \geq 2I_2$. Следовательно, $I_1 \geq \frac{I_3}{2}$, и соотношения a) и b) теоремы 1 дают оценки

$$Th_1^\alpha \ll I_3 \leq 2I_1 \ll (\mu(E_1))^{1-\alpha/2} \left(T \frac{h_1^2 \ln T}{(\ln X)^{2/h}} \right)^{\alpha/2},$$

$$\mu(E_1) \gg T \left(\frac{\ln T}{(\ln X)^{2/h}} \right)^{-\alpha/(2-\alpha)}.$$

Поэтому количество нулей нечетного порядка функции $\mathfrak{F}(t)$ (и, следовательно, функции $f(\frac{1}{2} + it)$) на отрезке $1 \leq t \leq T$ оценивается снизу величиной порядка

$$\mu(E_1) h_1^{-1} \gg T (\ln X)^{2/h} \left(\frac{\ln T}{(\ln X)^{2/h}} \right)^{-\alpha/(2-\alpha)} e^{-C\sqrt{\ln \ln T}} \gg T (\ln T)^{2/h} e^{-c\sqrt{\ln \ln T}}.$$

Теорема доказана.

Теперь остается доказать теорему 1. Основная трудность заключается в получении утверждения леммы 5. В свою очередь, доказательство этой леммы опирается на лемму 6 об оценке сумм Сельберга $S(\theta)$ и лемму 7 (и следствие 1 из нее) об оценке “недиагонального” слагаемого, или об аналоге проблемы делителей для коэффициентов Фурье автоморфных форм. Эти вопросы возникают

в различных задачах теории дзета-функции, они исследовались многими авторами (см., например, [19], [20], [29]–[32]). При доказательстве утверждения леммы 7 мы использовали вариант кругового метода М. Ютилы (лемма 9) и рассуждения Г. Харкоша из работы [31].

В заключение отметим, что из результатов настоящей работы нетрудно получить (заменяя лемму 6 на соответствующую лемму об оценке полных сумм Сельберга), что для функции $L(s, \psi)$ с комплексным характером Гекке на классах идеалов положительная доля нетривиальных нулей лежит на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ (см. [33]).

Автор благодарна А. А. Карацубе за бесценное внимание и полезные обсуждения, М. Ютиле за ценные советы по доказательству леммы 7, Г. Иванцу за поддержку при решении данной задачи, а также сотрудникам лаборатории UMPA ENS-Lyon (особенно А. Глущоку, Ф. Брюно, Л. Берже и Д. Габорию), в которой была завершена основная часть работы.

Выпишем используемые в дальнейшем обозначения. Характер Гекке ψ – это комплексный характер на группе классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$; ψ_0 – тривиальный характер Гекке; $s = \sigma + it$ – комплексное число, причем $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$. При $\operatorname{Re} s > 1$ положим

$$L(s, \psi) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathbb{I}^*} \frac{\psi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n)}{n^s},$$

где

$$r(n) = \sum_{N\mathfrak{a}=n} \psi(\mathfrak{a})$$

и значения функции $r(\cdot)$ в точках, отличных от положительных целых чисел, полагаем равными нулю.

При $z \in \mathbb{H} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ положим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} r(n) e^{2\pi i n z}.$$

Далее, $h = h(-D)$ – число классов; $\chi_D(n) = \left(\frac{-D}{n}\right)$ – символ Кронекера; p – простое число; $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ – простые идеалы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$; множества P_{-1}, P_0, P_1 определены условием (4), а $P_{1,1}$ – подмножество P_1 , содержащее такие простые числа p , что $(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$, где $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ – главные идеалы.

Коэффициенты $\alpha(\nu), \beta(\nu)$ задаются формулами (6), (7); функция $G(y)$ определена формулой (12); $\tau(n)$ – количество делителей натурального числа n ; (a, b) – наибольший общий делитель двух целых чисел a и b .

Через $M_1(m)$ обозначим множество натуральных чисел, состоящее из 1 и всех чисел, простые делители которых содержатся среди простых делителей числа m .

Запись $p^\alpha \| n$ обозначает, что n делится на p^α , но не делится на $p^{\alpha+1}$; $\operatorname{supp} g$ – носитель функции g . Если g – кусочно непрерывная функция с компактным носителем, то $\int g(t) dt$ – определенный интеграл, где интегрирование проводится по промежутку, содержащему носитель функции g ; C_n^k – биномиальный коэффициент; $\chi_{\{q \in \mathcal{A}\}}$ – характеристическая функция множества $\mathcal{A}$; через c, c_1, c', C обозначены абсолютные постоянные, принимающие в различных формулах

разные значения; ε – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число, принимающее, вообще говоря, в различных соотношениях разные значения.

§ 2. Доказательство утверждения а) теоремы 1

Введенная А. А. Карацубой идея сравнения малых степеней интегралов $I_1(t)$, $I_2(t)$ повлекла за собой трудность в оценке снизу интеграла I_3 . Эта задача стала разрешимой с помощью применения теоремы Габриэла (см. работы [17], [18]).

Имеем равенства

$$I_1(t) = h_1 \int_{-1}^1 |\mathfrak{F}(t + uh_1)| du, \quad I_3 = h_1^\alpha \int_1^{\delta^{-1}} \left(\int_{-1}^1 |\mathfrak{F}(t + uh_1)| du \right)^\alpha dt.$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{-1}^1 |\mathfrak{F}(t + uh_1)|^\alpha du \right)^{1/\alpha} &\leq 2^{1/\alpha-1} \int_{-1}^1 |\mathfrak{F}(t + uh_1)| du, \\ I_3 &\geq \frac{1}{2} h_1^\alpha \int_1^{\delta^{-1}} \int_{-1}^1 |\mathfrak{F}(t + uh_1)|^\alpha du dt \geq h_1^\alpha \int_2^{\delta^{-1}-1} |\mathfrak{F}(t)|^\alpha dt. \end{aligned}$$

Из формулы Стирлинга для $\Gamma(s)$ следует, что

$$I_3 \gg h_1^\alpha \int_2^{\delta^{-1}-1} \left| \mathfrak{f}\left(\frac{1}{2} + it\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^\alpha dt.$$

Для оценки снизу последнего интеграла воспользуемся теоремой Габриэла: пусть $\Phi(s)$ – регулярная функция в полосе $a \leq \operatorname{Re} s \leq b$, $s = \sigma + it$, $\Phi(s) \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow +\infty$ равномерно по $\sigma \in [a, b]$, и пусть для $\nu > 0$

$$J(\sigma; \nu) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\sigma + it)|^{1/\nu} dt \right)^\nu;$$

тогда при произвольных положительных числах ν и μ справедливо неравенство

$$J(\sigma; \nu p + \mu q) \leq J^p(a; \nu) J^q(b; \mu),$$

где $a \leq \sigma \leq b$, $p = \frac{b-\sigma}{b-a}$, $q = \frac{\sigma-a}{b-a}$.

Покажем далее, что при $\ln^3 \delta^{-1} \leq H \leq \delta^{-1}$ имеет место оценка

$$\int_{\delta^{-1}-2H}^{\delta^{-1}+2H} \left| \mathfrak{f}\left(\frac{1}{2} + it\right) \varphi^2\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^\alpha dt \gg H. \quad (8)$$

Возьмем целое нечетное число $A = 2[\ln^2 \delta^{-1}] + 1$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(s) = \mathfrak{f}(s + i\delta^{-1}) \varphi^2(s + i\delta^{-1}) \exp\left(\left(\frac{s}{H}\right)^{2A}\right).$$

Функция $\Phi(s)$ является регулярной в полосе $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$. Покажем, что в этой области равномерно по σ

$$|\Phi(\sigma + it)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |t| \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\left(\frac{s}{H}\right)^{2A}\right) \right| &= \exp\left(\operatorname{Re}\left(\frac{s}{H}\right)^{2A}\right), \\ \operatorname{Re} s^{2A} &= -t^{2A} - \sum_{m=1}^A C_{2A}^{2m} (-1)^m t^{2A-2m} \sigma^{2m}, \\ \operatorname{Re} s^{2A} &= -t^{2A} + O(t^{2A-2}), \quad |t| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Поскольку при $\sigma \geq \frac{1}{2}$ имеет место оценка

$$|\mathfrak{f}(s + i\delta^{-1})\varphi^2(s + i\delta^{-1})| = O((|t| + \delta^{-1})^2),$$

то свойство (9) выполнено. Применим к $\Phi(s)$ теорему Габриэля с параметрами

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad \nu = \frac{1}{\alpha}, \quad \mu = \frac{1}{2-\alpha}, \quad p = \frac{\alpha}{2}, \quad q = \frac{2-\alpha}{2}, \quad \sigma = 2 - \frac{3\alpha}{4}.$$

Получаем

$$J\left(2 - \frac{3\alpha}{4}, 1\right) \leq J^{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right) J^{(2-\alpha)/2}\left(2, \frac{1}{2-\alpha}\right). \quad (10)$$

Оценим снизу интеграл $J(2 - \frac{3\alpha}{4}, 1)$:

$$\begin{aligned} J\left(2 - \frac{3\alpha}{4}, 1\right) &\geq \int_0^{0.5H} \left| \mathfrak{f}\left(2 - \frac{3\alpha}{4} + i(t + \delta^{-1})\right) \varphi^2\left(2 - \frac{3\alpha}{4} + i(t + \delta^{-1})\right) \right| \\ &\quad \times \exp\left(\operatorname{Re}\left(\frac{2 - \frac{3\alpha}{4} + it}{H}\right)^{2A}\right) dt. \end{aligned}$$

При $0 \leq t \leq 0.5H$ имеем

$$\left| \frac{2 - \frac{3\alpha}{4} + it}{H} \right| < 1, \quad \left| \frac{2 - \frac{3\alpha}{4} + it}{H} \right|^{2A} < 1,$$

поэтому

$$\exp\left(\operatorname{Re}\left(\frac{2 - \frac{3\alpha}{4} + it}{H}\right)^{2A}\right) > e^{-1}.$$

Следовательно,

$$J\left(2 - \frac{3\alpha}{4}, 1\right) \geq e^{-1} \int_0^{0.5H} \left| \mathfrak{f}\left(2 - \frac{3\alpha}{4} + i(t + \delta^{-1})\right) \varphi^2\left(2 - \frac{3\alpha}{4} + i(t + \delta^{-1})\right) \right| dt.$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ находим

$$\mathfrak{f}(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} c(n)n^{-s},$$

где

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad c(n) = \sum_{m\nu_1\nu_2=n} \beta(\nu_1)\beta(\nu_2)a(m), \\ \beta(1) &= 1, \quad |\beta(\nu)| \leq 1, \quad |a(m)| \ll \tau(m), \quad c(1) = a(1) = \sum_j a_j, \\ |c(n)| &\leq \sum_{m\nu_1\nu_2=n} |a(m)| \ll \tau(n)\tau_3(n). \end{aligned}$$

Предположим, что $c(1) = a(1) \neq 0$. Тогда

$$J\left(2 - \frac{3\alpha}{4}, 1\right) \geq e^{-1} \left| 0.5Hc(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c(n)}{n^{2-3\alpha/4}} \int_0^{0.5H} n^{-i(t+T)} dt \right| \gg H.$$

Иначе, если функция f не равна тождественно нулю, найдется минимальное число n_0 такое, что $a(n_0) \neq 0$. Для удобства можно было бы определить коэффициенты $\alpha(\nu)$ равенством

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha(\nu)\nu^{-s} = \prod_{\substack{p \in P_{1,1} \\ p \nmid n_0}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Тогда бы мы имели $c(n_0) = a(n_0) \neq 0$, а также

$$\begin{aligned} J\left(2 - \frac{3\alpha}{4}, 1\right) &\geq e^{-1} \int_0^{0.5H} \left| f\left(2 - \frac{3\alpha}{4} + i(t + \delta^{-1})\right) \right. \\ &\quad \times \varphi^2\left(2 - \frac{3\alpha}{4} + i(t + \delta^{-1})\right) n_0^{i(t+\delta^{-1})} \left. \right| dt \\ &\geq e^{-1} \left| 0.5Hc(n_0)n_0^{-2+3\alpha/4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} \frac{c(n)}{n^{2-3\alpha/4}} \int_0^{0.5H} \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-i(t+\delta^{-1})} dt \right| \gg H. \end{aligned}$$

Оценим сверху $J\left(2, \frac{1}{2-\alpha}\right)$. Имеем

$$J\left(2, \frac{1}{2-\alpha}\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(2+it)|^{2-\alpha} dt \right)^{1/(2-\alpha)}.$$

Прежде всего,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(2+it)|^{2-\alpha} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(2+i(t+\delta^{-1}))\varphi^2(2+i(t+\delta^{-1}))|^{2-\alpha} \\ &\quad \times \exp\left((2-\alpha)\operatorname{Re}\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt \ll \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left((2-\alpha)\operatorname{Re}\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt. \end{aligned}$$

При $|t| \leq 0.5H$ верно

$$\left| \operatorname{Re}\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A} \right| < 1, \quad \int_{-0.5H}^{0.5H} \exp\left((2-\alpha)\operatorname{Re}\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt \ll H.$$

При $|t| \geq 0.5H$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(2+it)^{2A} &= -t^{2A} + 4C_{2A}^2 t^{2A-2} \\ &\quad - \sum_{1 \leq m \leq (A-1)/2} \left(C_{2A}^{4m} \sigma^{4m} t^{2A-4m} - C_{2A}^{4m+2} \sigma^{4m+2} t^{2A-4m-2} \right) \\ &\leq -t^{2A} + 4C_{2A}^2 t^{2A-2}, \end{aligned}$$

поскольку $H \geq 10^3 A$ при $\delta \geq \delta_0$, где δ_0 достаточно мало. Таким образом, если $|t| \geq 0.5H$, имеем

$$\begin{aligned} \exp\left((2-\alpha) \operatorname{Re}\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) &\leq \exp\left(-\frac{(2-\alpha)}{2} \left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right), \\ \int_{|t| \geq 0.5H} \exp\left((2-\alpha) \operatorname{Re}\left(\frac{2+it}{H}\right)^{2A}\right) dt &\ll H. \end{aligned}$$

Мы получили

$$J\left(2, \frac{1}{2-\alpha}\right) \ll H^{1/(2-\alpha)}.$$

Подставляя в (10) найденные оценки, будем иметь

$$H \ll J^{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right) H^{1/2}, \quad J^{\alpha}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right) \gg H.$$

Учитывая определение $J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right)$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{\alpha} dt \geq cH, \quad c > 0.$$

Пусть $|t| \geq 2H$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + it\right)^{2A} &\leq -t^{2A} + C_{2A}^2 t^{2A-2} \leq -\frac{1}{2} t^{2A}, \\ \exp\left(\operatorname{Re}\left(\frac{\frac{1}{2} + it}{H}\right)^{2A}\right) &\leq \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right), \\ \int_{|t| \geq 2H} \left| \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{\alpha} dt &\leq c' \int_{2H}^{+\infty} (t + \delta^{-1})^{2\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right) dt \\ &\leq c' \int_{2H}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{4} \left(\frac{t}{H}\right)^{2A}\right) dt \\ &\leq c' H \int_2^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{4} t^{2A}\right) dt = \frac{c'}{2A} \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{1/(2A)} H \int_{\alpha 2^{2A-2}}^{+\infty} e^{-x} x^{-1+1/(2A)} dx \\ &\leq \frac{c'}{2A} \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{1/(2A)} (\alpha 2^{2A-2})^{-1+1/(2A)} e^{-\alpha 2^{2A-2}} H = \frac{c' e^{-\alpha 2^{2A-2}}}{\alpha A 2^{2A-2}} H \leq \frac{1}{2} cH. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-2H}^{2H} \left| \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{\alpha} dt \gg H.$$

Если $|t| \leq 0.5H$, то

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1}{2} + it}{H} \right)^{2A} \right| \leq 1;$$

если же $|t| > 0.5H$, то

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1}{2} + it}{H} \right)^{2A} \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{H} \right)^{2A} < 0.$$

В обоих случаях, учитывая, что $0 < \alpha \leq 1$, найдем

$$\exp \left(\alpha \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1}{2} + it}{H} \right)^{2A} \right) \leq e.$$

Следовательно,

$$\int_{-2H}^{2H} \left| f \left(\frac{1}{2} + i(t + \delta^{-1}) \right) \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + i(t + \delta^{-1}) \right) \right|^\alpha dt \gg H,$$

и оценка (8) доказана. Отсюда, полагая $H_1 = \frac{\delta^{-1}-3}{4}$, $\delta_1^{-1} = \frac{\delta^{-1}+1}{2}$, получим

$$\begin{aligned} & \int_2^{\delta^{-1}-1} \left| f \left(\frac{1}{2} + it \right) \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^\alpha dt \\ &= \int_{-2H_1}^{2H_1} \left| f \left(\frac{1}{2} + i(t + \delta_1^{-1}) \right) \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + i(t + \delta_1^{-1}) \right) \right|^\alpha dt \gg H_1 \gg \delta^{-1}. \end{aligned}$$

Окончательно находим для I_3 нужную оценку снизу: $I_3 \gg \delta^{-1} h_1^\alpha$. Утверждение а) теоремы 1 доказано.

§ 3. Вспомогательные леммы

Для доказательства утверждений б), с) теоремы 1 нам понадобится несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 2. Пусть ψ – комплексный характер Гекке,

$$\begin{aligned} L(s, \psi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n)}{n^s}, \\ F(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Lambda \left(\frac{1}{2} + iy, \psi \right) \left| \varphi \left(\frac{1}{2} + iy \right) \right|^2 \exp \left(\left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) y \right), \\ g(y) &= \exp \left(\frac{1}{2} \left(y + i \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right) \right) \\ &\quad \times \sum_{n, \nu_1, \nu_2} \frac{r(n) \beta(\nu_1) \beta(\nu_2)}{\nu_2} \exp \left(-\frac{2\pi n \nu_1}{\sqrt{D} \nu_2} e^y (\sin \delta + i \cos \delta) \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Через $\hat{F}(y)$ обозначим преобразование Фурье для функции $F(y)$:

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-ity} dt.$$

Тогда $\hat{F}(y) = g(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = \exp(-y - i(\frac{\pi}{2} - \delta))$. При $c > 1$ рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda(s, \psi) \varphi(s) \varphi(1-s) z^{s-1/2} ds.$$

Поскольку $c > 1$, из формулы преобразования Меллина $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds = e^{-x}$ получим

$$I(z) = z^{-1/2} \sum_{n, \nu_1, \nu_2} \frac{r(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \left(\frac{2\pi n \nu_1}{\sqrt{D} \nu_2 z} \right)^{-s} ds = g(y).$$

С другой стороны, из теоремы Коши следует, что в интеграле $I(z)$ можно перенести прямую интегрирования на $s = \frac{1}{2} + it$, т. е. $I(z) = \widehat{F}(y)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть функция $F(y)$ определена формулой (11),

$$G(y) = \left| \sum_{n, \nu_1, \nu_2} \frac{r(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2} \exp\left(-\frac{2\pi n \nu_1}{\sqrt{D} \nu_2} y(\sin \delta + i \cos \delta)\right) \right|^2. \quad (12)$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-h_1}^{h_1} |F(t+u)| du \right)^2 dt \leq 8h_1^2 \int_1^{+\infty} G(y) dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью равенства

$$\int_{-h_1}^{h_1} |F(t+u)| du = h_1 \int_{-1}^1 |F(t+uh_1)| du$$

и теоремы Планшереля для функции $\mathcal{F}(t) \in L^2[-\infty, +\infty]$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}(t)|^2 dt,$$

находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-h_1}^{h_1} |F(t+u)| du \right)^2 dt &\leq 2h_1^2 \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t+uh_1)|^2 dt du \\ &= 4h_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2 dt = 8h_1^2 \int_0^{+\infty} |g(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где мы воспользовались леммой 2 и свойством четности функции $|\widehat{F}(t)|$ (которое следует из вещественнозначности функции $F(t)$). Сделав в последнем интеграле замену переменных $y = e^t$, получим равенство

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_1^{+\infty} G(y) dy.$$

Теперь лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть ψ – комплексный характер Гекке, $F(y)$ и $G(y)$ задаются формулами (11) и (12). Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-h_1}^{h_1} F(t+u) du \right|^2 dt \leq 8h_1^2 \int_1^H G(y) dy + 8 \int_H^{+\infty} \frac{G(y)}{\ln^2 y} dy,$$

где $H = e^{1/h_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $\mathcal{F}(t) = \int_{-h_1}^{h_1} F(t+u) du$, то

$$\widehat{\mathcal{F}}(t) = \widehat{F}(t) \int_{-h_1}^{h_1} e^{iut} du.$$

Справедлива следующая оценка:

$$\int_{-h_1}^{h_1} e^{iut} du \leq \min\left(2h_1, \frac{2}{|t|}\right).$$

Используя это неравенство, теорему Планшереля и свойство четности функции $|g(t)|$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-h_1}^{h_1} F(t+u) du \right|^2 dt \leq 8h_1^2 \int_0^{1/h_1} |g(t)|^2 dt + 8 \int_{1/h_1}^{+\infty} \frac{|g(t)|^2}{t^2} dt.$$

Сделав замену переменных $y = e^t$ в двух последних интегралах, приходим к утверждению леммы.

§ 4. Основные леммы

В этом параграфе сформулируем основные леммы.

ЛЕММА 5. Пусть ψ – комплексный характер Гекке, функция $G(y)$ определена формулой (12). В условиях теоремы 1 для $1 \leq x \leq e^{1/h_1}$ справедлива оценка

$$J(x, \theta) = \int_x^{+\infty} G(u) u^{-\theta} du \ll \frac{\delta^{-1}}{\theta x^\theta (\ln X)^{2/h}},$$

равномерная при $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 5 будет приведено в § 7, основную часть которого составляют следующие две леммы. Лемма 6 относится к оценке так называемого “диагонального” слагаемого, а лемма 7 – к оценке “недиагонального” слагаемого.

ЛЕММА 6. Пусть $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}$. Определим сумму $S(\theta)$ равенством

$$S(\theta) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} \left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1\nu_4}{q}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2\nu_3}{q}, 1-\theta\right),$$

где $q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$ и

$$K(m, s) = \prod_{p|m} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)^{-1} \\ \times \prod_{p^\alpha || m} \left(r(p^\alpha) + \frac{r(p^{\alpha+1})r(p)}{p^s} + \frac{r(p^{\alpha+2})r(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Тогда имеет место оценка

$$S(\theta) \ll \frac{X^{2\theta}}{(\ln X)^{2/h}},$$

равномерная по θ .

ЛЕММА 7. Пусть $N \gg 1$, $(m_1, m_2) = 1$, $m_1^8 m_2^9 \leq N$, $l \leq N^{10/11}$, и пусть

$$S = \sum_{n \leq N-1} r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива следующая оценка:

$$S \ll_{\varepsilon} N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11}.$$

Из леммы 7 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция

$$D_{m_1, m_2}(s, l) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right)}{\left(m_1 n + \frac{l}{2}\right)^s}$$

имеет аналитическое продолжение в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{10}{11}$, при этом если $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{1}{11}$, то в области $\operatorname{Re} s \geq \frac{10}{11} + \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$D_{m_1, m_2}(s, l) \ll_{\varepsilon_0} \frac{|s|}{m_1^{10/11+\varepsilon_0} m_2} ((m_1^8 m_2^9)^{1/11-\varepsilon_0/2} + l^{1/10-11\varepsilon_0/20}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $N = \max(m_1^8 m_2^9, l^{11/10})$. Используя неравенство $\tau(n) \ll_{\varepsilon_0} n^{\varepsilon_0/8}$, при $\sigma \geq \frac{10}{11} + \varepsilon_0$ получим оценку

$$\begin{aligned} S_1(s) &:= \sum_{n \leq N} \frac{r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right)}{\left(m_1 n + \frac{l}{2}\right)^s} \ll \sum_{\substack{n \leq N \\ m_1 n \equiv -l \pmod{m_2}}} \frac{\tau(n) \tau\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right)}{\left(m_1 n + \frac{l}{2}\right)^{\sigma}} \\ &\ll_{\varepsilon_0} N^{3\varepsilon_0/8} \sum_{\substack{n \leq N \\ m_1 n \equiv -l \pmod{m_2}}} \frac{1}{(m_1 n)^{10/11+\varepsilon_0}} \ll_{\varepsilon_0} \frac{N^{1/11-\varepsilon_0/2}}{m_1^{10/11+\varepsilon_0} m_2}. \end{aligned}$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ и произвольном $M > N$ из формулы суммирования Абеля следует равенство

$$\sum_{N < n \leq M} \frac{r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right)}{\left(m_1 n + \frac{l}{2}\right)^s} = s \int_N^M \frac{\mathbb{C}(u) m_1}{\left(m_1 u + \frac{l}{2}\right)^{s+1}} du + \frac{\mathbb{C}(M)}{\left(m_1 M + \frac{l}{2}\right)^s},$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{N < n \leq u} r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right).$$

Переходя к пределу при $M \rightarrow +\infty$, получим соотношение

$$S_2(s) := \sum_{n>N} \frac{r(n)r\left(\frac{m_1n+l}{m_2}\right)}{\left(m_1n + \frac{l}{2}\right)^s} = s \int_N^{+\infty} \frac{\mathbb{C}(u)m_1}{(m_1u + \frac{l}{2})^{s+1}} du. \quad (13)$$

Поскольку при $u \geq N$ из леммы 7 следует, что $\mathbb{C}(u) \ll_{\varepsilon} u^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11}$, правая часть равенства (13) определяет голоморфную функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{10}{11}$, при этом в области $\operatorname{Re} s \geq \frac{10}{11} + \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} S_2(s) &\ll_{\varepsilon_0} |s| \int_N^{+\infty} \frac{m_1^{8/11} m_2^{-2/11} u^{10/11+\varepsilon_0/2} m_1}{(m_1u)^{10/11+\varepsilon_0+1}} du \\ &\ll_{\varepsilon_0} |s| (m_1 m_2)^{-2/11} m_1^{-\varepsilon_0} N^{-\varepsilon_0/2} \ll_{\varepsilon_0} \frac{|s| N^{1/11-\varepsilon_0/2}}{m_1^{10/11+\varepsilon_0} m_2}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

При доказательстве леммы 5 нам понадобится еще одно утверждение.

ЛЕММА 8. *Функция $D(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^2(n)}{n^s}$ мероморфно продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, где имеет лишь полюс первого порядка в точке $s = 1$. Кроме того,*

$$|D(s)| = O(|t|) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{100}, \quad |s - 1| \geq \frac{1}{100}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения леммы можно установить из (5) и следующего равенства, доказанного в [28, леммы 12, 13] и в [26, леммы 23, 24]:

$$D(s) = \zeta(s) L(s, \chi_D) L(s, \psi^2) H_1(s) H_2(s),$$

где $L(s, \psi^2)$ – L -функция Гекке, отвечающая характеру Гекке ψ^2 ,

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{r^2(p)}, \\ H_2(s) &= \prod_{p \in P_1} \left(1 - \frac{\psi^2(\mathfrak{p}_1)}{p^s} \right) \left(1 - \frac{\psi^2(\mathfrak{p}_2)}{p^s} \right) \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-r_{\psi^2}(p)} \\ &\quad \times \prod_{p \in P_0} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \prod_{p \in P_{-1}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^2, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ – простые идеалы такие, что $(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$, а $r_{\psi^2}(p) = \sum_{\mathfrak{a}: N_{\mathfrak{a}=p}} \psi^2(\mathfrak{a})$.

Функции $H_1(s)$ и $H_2(s)$ являются аналитическими функциями в области $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ и при $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{100}$

$$H_1(s) = O(1), \quad H_2(s) = O(1).$$

Используя эти соотношения и известные оценки

$$|\zeta(s)| = O(|t|^{1/4}), \quad |L(s, \chi_D)| = O(|t|^{1/4}), \quad |L(s, \psi^2)| = O(|t|^{1/2})$$

при $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{100}$, $|s-1| \geq \frac{1}{100}$, получим (14). Наличие полюса первого порядка в точке $s = 1$ (т. е. справедливость соотношения $H_1(1)H_2(1) \neq 0$) следует из асимптотической формулы

$$\sum_{n \leq N} r^2(n) = cN + O(N^{3/5}), \quad c > 0$$

(см. [34]). Отметим, что в упомянутой работе [34] доказано утверждение о том, что функция $D(s)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с полюсом первого порядка в точке $s = 1$.

§ 5. Доказательство утверждения с) теоремы 1

Пусть ψ – комплексный характер Гекке, $H = e^{1/h_1}$. Воспользуемся леммой 5 и получим оценку

$$\begin{aligned} \int_1^H G(x) dx &= - \int_1^H x^\theta \frac{d}{dx} J(x, \theta) dx = -x^\theta J(x, \theta) \Big|_{x=1}^H + \theta \int_1^H x^{\theta-1} J(x, \theta) dx \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta(\ln X)^{2/h}} + \frac{\delta^{-1} \ln H}{(\ln X)^{2/h}} \ll \frac{\delta^{-1}}{h_1(\ln X)^{2/h}}, \end{aligned}$$

полагая $\theta = \frac{1}{4}$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_H^{+\infty} \frac{G(x)}{\ln^2 x} dx &= - \int_H^{+\infty} \frac{x^\theta}{\ln^2 x} \frac{d}{dx} J(x, \theta) dx \\ &= - \frac{x^\theta}{\ln^2 x} J(x, \theta) \Big|_{x=H}^{+\infty} + \int_H^{+\infty} J(x, \theta) x^\theta \left(\frac{\theta}{x \ln^2 x} - \frac{2}{x \ln^3 x} \right) dx \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta(\ln X)^{2/h} \ln^2 H} + \frac{\delta^{-1}}{(\ln X)^{2/h} \ln H} + \frac{\delta^{-1}}{\theta(\ln X)^{2/h} \ln^2 H} \\ &\ll \frac{\delta^{-1} h_1}{(\ln X)^{2/h}}, \end{aligned}$$

если взять $\theta = \frac{1}{4}$. Теперь утверждение с) теоремы 1 следует из леммы 4 и неравенства Коши–Буняковского.

§ 6. Доказательство утверждения b) теоремы 1

Для произвольного комплексного характера Гекке применим лемму 5, положив в ней $x = 1$, $\theta = \frac{1}{\ln \delta^{-1}}$. Получим

$$\int_1^{\delta^{-2}} G(u) du \ll \int_1^{+\infty} G(u) u^{-1/\ln \delta^{-1}} du \ll \frac{\delta^{-1} \ln \delta^{-1}}{(\ln X)^{2/h}}.$$

Используя определение (12) для $G(y)$, интеграл на промежутке $(\delta^{-2}, +\infty)$ оценим следующим выражением:

$$\begin{aligned} \int_{\delta^{-2}}^{+\infty} G(u) du &\ll \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}} \frac{|r(n_1)r(n_2)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)|}{\nu_2\nu_4} \\ &\quad \times \int_{\delta^{-2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\delta x\right) dx. \end{aligned}$$

Обозначим $A = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4} \right) \delta$. Поскольку

$$\int_{\delta^{-2}}^{+\infty} \exp(-Ax) dx = \frac{e^{-A\delta^{-2}}}{A},$$

получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_{\delta^{-2}}^{+\infty} G(u) du &\ll \delta^{-1} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}} \frac{|r(n_1)r(n_2)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)|}{(n_1\nu_1\nu_4 + n_2\nu_2\nu_3)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}}\delta^{-1}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\right) \\ &\ll \delta^{-1} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}} \frac{|r(n_1)r(n_2)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)|}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}}\delta^{-1}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\right) \\ &\leq \delta^{-1} \left(\sum_{\nu_1, \nu_2 \leq X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \sum_n \frac{|r(n)|}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{n\nu_1}{\nu_2} \delta^{-1}\right) \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $|r(n)| \leq \tau(n)$, а $\nu_2 \leq X \leq \delta^{-1/3}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|r(n)|}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{n\nu_1}{\nu_2} \delta^{-1}\right) \ll \exp(-\sqrt{\delta^{-1}}).$$

Следовательно,

$$\int_{\delta^{-2}}^{+\infty} G(u) du \ll \delta^{-1} X \exp(-\sqrt{\delta^{-1}}) \ll 1.$$

Теперь утверждение б) теоремы 1 следует из леммы 3 и неравенства Коши–Буняковского.

§ 7. Доказательство леммы 5

Для доказательства оценки леммы 5 введем неотрицательный сглаживающий множитель $\phi(u) \in C^2(0, +\infty)$, обладающий свойством

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } u \geq 1. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что

$$J(x, \theta) \leq \int_0^{+\infty} \phi\left(\frac{u}{x}\right) G(u) u^{-\theta} du = x^{1-\theta} \int_0^{+\infty} \phi(u) G(xu) u^{-\theta} du. \quad (15)$$

Поэтому будем оценивать последний интеграл. Нам понадобится несколько вспомогательных соотношений. При $\operatorname{Re} s > 1$ определим

$$\Phi(s, y) = \int_0^{+\infty} \phi(u) u^{-s} \exp(-2\pi i y u) du.$$

Тогда справедливо равенство

$$\Phi^*(s) = \int_0^{+\infty} \phi'(u) u^{-s+1} du = (s-1)\Phi(s, 0).$$

Поскольку ϕ' является функцией с компактным носителем, то $\Phi^*(s)$ – целая функция. Таким образом, $\Phi^*(s)$ аналитически продолжает функцию $(s-1)\Phi(s, 0)$ на всю комплексную плоскость. Также, если $\operatorname{Re} s$ принадлежит некоторому ограниченному интервалу, при s из данной полосы имеем оценку

$$\Phi^*(s) = O(1),$$

где постоянная в знаке O абсолютная. При $y > 0$, проинтегрировав два раза по частям, найдем $\Phi(s, y) = O(|s|^2 y^{-2})$, если $|s| \gg 1$.

Преобразуем выражение для $G(x)$. Если обозначить

$$A(\lambda) = \sum_{n\nu_1/\nu_2=\lambda} \frac{r(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2},$$

то

$$\begin{aligned} G(x) &= \left| \sum_{\lambda} A(\lambda) \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \lambda x (\sin \delta + i \cos \delta)\right) \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda} |A(\lambda)|^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \lambda x \sin \delta\right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{\lambda_2 > \lambda_1} A(\lambda_1) A(\lambda_2) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}} (\lambda_1 + \lambda_2) x \sin \delta\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{D}} (\lambda_2 - \lambda_1) x \cos \delta\right). \end{aligned}$$

Положим $\lambda_1 = \frac{n_1 \nu_1}{\nu_2}$, $\lambda_2 = \frac{n_2 \nu_3}{\nu_4}$ и обозначим через q наибольший делитель чисел $\nu_1 \nu_4$ и $\nu_2 \nu_3$, т. е. $q = (\nu_1 \nu_4, \nu_2 \nu_3)$. Тогда пусть $\nu_1 \nu_4 = q m_1$, $\nu_2 \nu_3 = q m_2$, $(m_1, m_2) = 1$, $Q = \frac{\nu_2 \nu_4}{q}$. Условие $\lambda_2 > \lambda_1$ можно записать в виде $n_2 m_2 > n_1 m_1$, т. е. $l = n_2 m_2 - n_1 m_1 \geq 1$. Используя эти обозначения и полагая значения функции $r(\cdot)$ в нецелых точках равными нулю, запишем

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) r\left(\frac{nm_1}{m_2}\right) \exp\left(-\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \frac{nm_1}{Q} x \sin \delta\right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{l \geq 1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{D}} \frac{l}{Q} x \cos \delta\right) \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=1}^{+\infty} r(n) r\left(\frac{nm_1 + l}{m_2}\right) \exp\left(-\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \frac{(nm_1 + \frac{l}{2})}{Q} x \sin \delta\right) \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} E_{m_1, m_2}(y, l) &= \sum_{n=1}^{+\infty} r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right) \exp\left(-y \left(m_1 n + \frac{l}{2}\right)\right), \\ E_{m_1, m_2}(y) &= E_{m_1, m_2}(y, 0), \\ B &= \frac{4\pi x \sin \delta}{\sqrt{D} Q}, \quad B_1 = \frac{x \cos \delta}{\sqrt{D} Q}. \end{aligned}$$

Тогда неравенство (15) примет вид

$$J(x, \theta) \leq x^{1-\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} \left(\int_0^{+\infty} \phi(u) E_{m_1, m_2}(Bu) u^{-\theta} du \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{l \geq 1} \int_0^{+\infty} \phi(u) \exp(-2\pi i l B_1 u) E_{m_1, m_2}(Bu, l) u^{-\theta} du \right).$$

Из формулы преобразования Меллина следует

$$E_{m_1, m_2}(y, l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_{m_1, m_2}(s, l) \Gamma(s) y^{-s} ds,$$

где $c > 1$ и

$$D_{m_1, m_2}(s, l) = \sum_n \frac{r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right)}{(m_1 n + \frac{l}{2})^s}.$$

Окончательно находим

$$J(x, \theta) \leq x^{1-\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} \\ \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_{m_1, m_2}(s, 0) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, 0) ds \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_{m_1, m_2}(s, l) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, B_1 l) ds \right) \\ = J_1(x, \theta) + J_2(x, \theta).$$

Оценим $J_1(x, \theta)$ (“диагональное” слагаемое). Для функции $D_{m_1, m_2}(s, 0)$ получим мероморфное продолжение левее полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Поскольку $(m_1, m_2) = 1$, то

$$D_{m_1, m_2}(s) = D_{m_1, m_2}(s, 0) = \frac{1}{(m_1 m_2)^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n m_2) r(n m_1)}{n^s}.$$

Обозначив через $M_1(m)$ множество натуральных чисел, состоящее из 1 и всех чисел, простые делители которых содержатся среди простых делителей числа m , будем иметь

$$D_{m_1, m_2}(s) = \frac{1}{(m_1 m_2)^s} \sum_{k \in M_1(m_1 m_2)} \frac{r(m_1 k) r(m_2 k)}{k^s} \sum_{(n, m_1 m_2)=1} \frac{r^2(n)}{n^s} \\ = \frac{1}{(m_1 m_2)^s} \sum_{k_1 \in M_1(m_1)} \frac{r(m_1 k_1) r(k_1)}{k_1^s} \sum_{k_2 \in M_1(m_2)} \frac{r(m_2 k_2) r(k_2)}{k_2^s} \\ \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^2(n)}{n^s} \prod_{p \in M_1(m_1 m_2)} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \\ = \frac{1}{(m_1 m_2)^s} K(m_1, s) K(m_2, s) D(s),$$

где

$$\begin{aligned}
 D(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^2(n)}{n^s}, \\
 K(m, s) &= \prod_{p|m} \left(1 + \frac{\tau^2(p)}{p^s} + \frac{\tau^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \\
 &\quad \times \prod_{p^\alpha || m} \left(\tau(p^\alpha) + \frac{\tau(p^{\alpha+1})\tau(p)}{p^s} + \frac{\tau(p^{\alpha+2})\tau(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \\
 &= \sum_{k \in M_1(m)} \frac{\tau(mk)\tau(k)}{k^s} \left(\sum_{k \in M_1(m)} \frac{\tau^2(k)}{k^s} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}$, имеем

$$\left(\sum_{k \in M_1(m)} \frac{\tau^2(k)}{k^s} \right)^{-1} = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^4 \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

Следовательно, при фиксированном m функция $K(m, s)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} s > 0$. При этом в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 |K(m, s)| &\leq \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \tau(m) \\
 &\quad \times \prod_{p^\alpha || m} \left(1 + \frac{\frac{\alpha+2}{\alpha+1} \cdot 2}{2^{1/2}} + \frac{\frac{\alpha+3}{\alpha+1} \cdot 3}{2} + \frac{\frac{\alpha+4}{\alpha+1} \cdot 4}{2^{3/2}} + \dots \right) \\
 &\leq \tau(m) \prod_{p|m} \left(1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot 2}{2^{1/2}} + \frac{\frac{4}{2} \cdot 3}{2} + \frac{\frac{5}{2} \cdot 4}{2^{3/2}} + \dots \right) 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
 &= \tau(m) \prod_{p|m} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{2^{n/2}} \right) 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
 &\leq \tau(m) \prod_{p|m} 1000 \leq \tau(m) \tau_{1000}(m) \leq \tau_{2000}(m). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Теперь мероморфная продолжимость функции $D_{m_1, m_2}(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ следует из леммы 8.

Перенесем контур интегрирования в интеграле

$$\begin{aligned}
 &\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_{m_1, m_2}(s) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, 0) ds \\
 &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{K(m_1, s) K(m_2, s) D(s) \Gamma(s) \Phi^*(s + \theta) (B m_1 m_2)^{-s}}{s + \theta - 1} ds
 \end{aligned}$$

на прямую $\operatorname{Re} s = \frac{2}{3}$. При этом мы пройдем полюсы первого порядка в точках $s = 1$, $s = 1 - \theta$. Обозначив через $\mathfrak{D}$ вычет функции $D(s)$ при $s = 1$, из леммы 8,

формулы Стирлинга для $\Gamma(s)$ и оценки (16) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_{m_1, m_2}(s) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, 0) ds &= \frac{\mathfrak{D}K(m_1, 1)K(m_2, 1)\Phi^*(1 + \theta)}{Bm_1 m_2 \theta} \\ &+ \frac{K(m_1, 1 - \theta)K(m_2, 1 - \theta)D(1 - \theta)\Gamma(1 - \theta)\Phi^*(1)}{(Bm_1 m_2)^{1-\theta}} + O\left(\frac{(m_1 m_2)^{1/3}}{(Bm_1 m_2)^{2/3}}\right) \\ &= \frac{c(\theta)K(m_1, 1)K(m_2, 1)}{\theta x \sin \delta} \frac{q}{\nu_1 \nu_3} \\ &+ \frac{c'(\theta)K(m_1, 1 - \theta)K(m_2, 1 - \theta)D(1 - \theta)}{(x \sin \delta)^{1-\theta}} \left(\frac{q}{\nu_1 \nu_3}\right)^{1-\theta} + O\left(\frac{1}{(x\delta)^{2/3}} \frac{(\nu_2 \nu_4)^{1/3}}{(\nu_1 \nu_3)^{1/3}}\right), \end{aligned}$$

где $c(\theta), c'(\theta)$ – постоянные, зависящие от θ и ограниченные при $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$. Используя оценку $D(1 - \theta) \ll \theta^{-1}$ и лемму 6, получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} J_1(x, \theta) &\ll \frac{|S(0)|}{\theta x^\theta \delta} + \frac{|S(\theta)|}{\theta \delta^{1-\theta}} + \frac{x^{1/3}}{x^\theta \delta^{2/3}} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{1}{(\nu_1 \nu_3)^{1/3} (\nu_2 \nu_4)^{2/3}} \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta x^\theta (\ln X)^{2/h}} (1 + (X^2 e^{1/h_1} \delta)^\theta + X^2 (\ln X)^{2/h} e^{1/(3h_1)} \delta^{1/3}) \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta x^\theta (\ln X)^{2/h}}, \end{aligned}$$

поскольку $X^3 e^{1/(3h_1)} \delta^{1/3} \ll 1$.

Оценим теперь “недиагональное” слагаемое $J_2(x, \theta)$. Из следствия 1 вытекает, что в интеграле $J_2(x, \theta)$ можно перенести прямую интегрирования на $\operatorname{Re} s = \frac{11}{12}$. Получим оценку

$$\begin{aligned} J_2(x, \theta) &\ll x^{1-\theta} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{1}{\nu_2 \nu_4} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{B^{11/12} B_1^2 l^2} ((m_1 m_2)^{-2/11} + l^{1/10} m_1^{-10/11} m_2^{-1}) \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{Q^{2+11/12}}{\nu_2 \nu_4} (m_1 m_2)^{-2/11} \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{Q^{1+11/12}}{q(m_1 m_2)^{2/11}} \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{Q^{1+11/12}}{(\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4)^{2/11}} \ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} (X^2)^{1+11/12} (X^{9/11})^4 \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} X^{469/66} \ll \frac{\delta^{-1}}{x^\theta (\ln X)^{2/h}}, \end{aligned}$$

поскольку $X \leq \delta^{-1/86}$. Лемма 5 доказана.

§ 8. Доказательство леммы 6

Воспользуемся формулой обращения Мёбиуса для мультипликативной функции

$$f(q) = \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) f\left(\frac{d}{m}\right).$$

Получим равенство

$$q^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4}{q}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2 \nu_3}{q}, 1-\theta\right) = \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} \times \\ \times K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2 \nu_3 m}{d}, 1-\theta\right).$$

Подставим это соотношение в выражение для $S(\theta)$; найдем

$$S(\theta) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{\beta(\nu_1) \beta(\nu_2) \beta(\nu_3) \beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4 (\nu_1 \nu_3)^{1-\theta}} \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} \\ \times K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2 \nu_3 m}{d}, 1-\theta\right) = \sum_{d \leq X^2} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} g^2(d, m),$$

где

$$g(d, m) = \sum_{\substack{\nu_1 \nu_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \nu_j \leq X}} \frac{\beta(\nu_1) \beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right).$$

Далее, представим числа ν_j в виде $\nu_j = \delta_j \nu'_j$, где $(\nu'_j, d) = 1$, а все простые делители δ_j совпадают с простыми делителями числа d , т. е. $\delta_j \in M_1(d)$. Тогда

$$g(d, m) = \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{1}{(\delta_1^{1-\theta} \delta_4)} \sum_{\substack{\delta_j \nu_j \leq X \\ (\nu_j, d)=1}} \frac{\beta(\delta_1 \nu_1) \beta(\delta_4 \nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d} \nu_1 \nu_4, 1-\theta\right).$$

Из определения чисел $\beta(\nu)$ следует, что

$$g(d, m) = \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{\alpha(\delta_1) \alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta} \delta_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1-\theta\right) \\ \times \sum_{\substack{\nu_j \leq X/\delta_j \\ (\nu_j, d)=1}} \frac{\alpha(\nu_1) \alpha(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K(\nu_1 \nu_4, 1-\theta) \ln \frac{X}{\delta_1 \nu_1} \ln \frac{X}{\delta_4 \nu_4}.$$

Применим следующее равенство, которое справедливо для мультипликативных функций f_1 и f_2 , принимающих ненулевые значения лишь на бесквадратных числах:

$$\sum_{\substack{l_j \leq y_j \\ (l_j, a)=1 \\ (l_1, l_2)=1}} f_1(l_1) f_2(l_2) f(l_1, l_2) \\ = \sum_{(r, a)=1} \mu(r) f_1(r) f_2(r) \sum_{\substack{\lambda_1 r \leq y_1 \\ (\lambda_1, ra)=1}} \sum_{\substack{\lambda_2 r \leq y_2 \\ (\lambda_2, ra)=1}} f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) f(r \lambda_1, r \lambda_2).$$

Получим

$$g(d, m) = \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{\alpha(\delta_1) \alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta} \delta_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1-\theta\right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{(n,d)=1} \frac{\alpha^2(n)}{n^{2-\theta}} K(n^2, 1-\theta) \sum_{(r,dn)=1} \frac{\mu(r)\alpha^2(r)K^2(r, 1-\theta)}{r^{2-\theta}} \\
& \times \left(\sum_{\substack{\lambda_1 \delta_1 nr \leq X \\ (\lambda_1, dnr)=1}} \frac{\alpha(\lambda_1)K(\lambda_1, 1-\theta)}{\lambda_1^{1-\theta}} \ln \frac{X}{\delta_1 nr \lambda_1} \right) \\
& \times \left(\sum_{\substack{\lambda_4 \delta_4 nr \leq X \\ (\lambda_4, dnr)=1}} \frac{\alpha(\lambda_4)K(\lambda_4, 1-\theta)}{\lambda_4} \ln \frac{X}{\delta_4 nr \lambda_4} \right).
\end{aligned}$$

Ниже мы докажем, что при $0 \leq \theta, \gamma \leq \frac{1}{4}$, $N \geq 1$, $X_1 \geq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
S_\theta(X_1, \gamma, N) &= \sum_{\substack{\lambda \leq X_1 \\ (\lambda, N)=1}} \frac{\alpha(\lambda)K(\lambda, 1-\theta)}{\lambda^{1-\gamma}} \ln \frac{X_1}{\lambda} \\
&\ll X_1^\gamma (\ln(X_1 + 2))^{1-1/h(D)} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2. \quad (17)
\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством $K(n, 1-\theta) \leq \tau_{2000}(n)$ (см. (16)) и заметим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|}{\delta_1 \delta_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1-\theta\right) &\leq \frac{\tau(d)}{d} \sum_{n \in M_1(d)} \frac{\mu^2(n)\tau(n)}{n} K(nm, 1-\theta) \\
&\leq \tau_{2000}(m) \frac{\tau(d)}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\tau_{4000}(p)}{p}\right).
\end{aligned}$$

Тогда найдем

$$\begin{aligned}
S(\theta) &\ll X^{2\theta} (\ln X)^{-4/h} \sum'_{d \leq X^2} \frac{\tau^2(d)}{d^{1+\theta}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_{4000}(p)}{p}\right)^2 \sum_{m|d} \frac{\mu^2(m)\tau_{2000}^2(m)}{m^{1-\theta}} \\
&\leq X^{2\theta} (\ln X)^{-4/h} \sum'_{d \leq X^2} \frac{\tau^2(d)}{d^{1+\theta}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_{4000}(p)}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau_{2000}^2(p)}{p^{1-\theta}}\right),
\end{aligned}$$

где штрих у знака суммы означает, что мы суммируем по натуральным числам d , простые делители которых из множества $P_{1,1}$. Далее, при $p \gg 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}$ находим

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_{4000}(p)}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau_{2000}^2(p)}{p^{1-\theta}}\right) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{p}}, \\
&\prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_{4000}(p)}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau_{2000}^2(p)}{p^{1-\theta}}\right) \ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \leq \sum_{m|d} \frac{1}{\sqrt{m}}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся последним неравенством и получим

$$S(\theta) \ll X^{2\theta} (\ln X)^{-4/h} \sum'_{d \leq X^2} \frac{\tau^2(d)}{d^{1+\theta}} \sum_{m|d} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq X^{2\theta}(\ln X)^{-4/h} \sum'_{m \leq X^2} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum'_{\substack{d \leq X^2 \\ d \equiv 0 \pmod{m}}} \frac{\tau^2(d)}{d^{1+\theta}} \\
&\leq X^{2\theta}(\ln X)^{-4/h} \sum'_{m \leq X^2} \frac{\tau^2(m)}{m^{3/2+\theta}} \sum'_{d \leq X^2} \frac{\tau^2(d)}{d^{1+\theta}} \\
&\ll X^{2\theta}(\ln X)^{-4/h} \sum'_{d \leq X^2} \frac{\tau^2(d)}{d} \ll X^{2\theta}(\ln X)^{-2/h}.
\end{aligned}$$

Итоговое соотношение следует из формулы суммирования Перрона и равенства

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\tau^2(d)}{d} = \prod_{p \in P_{1,1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-4} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \zeta^{2/h}(s) R(s),$$

где $R(s)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ функция. Подробное применение формулы суммирования Перрона для оценки аналогичной суммы приведено далее.

Осталось показать справедливость оценки (17) для суммы $S_\theta(X_1, \gamma, N)$. Без ограничения общности будем полагать, что $X_1 \geq 10$ и для любого $p|N$ справедливо $p \in P_{1,1}$. При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотрим производящую функцию

$$\begin{aligned}
h_{\theta,N}(s) &= \sum_{(n,N)=1} \frac{\alpha(n)K(n, 1-\theta)}{n^s} \\
&= \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{\alpha(p)K(p, 1-\theta)}{p^s}\right) = \prod_{\substack{p \in P_{1,1} \\ (p,N)=1}} \left(1 - \frac{K(p, 1-\theta)}{p^s}\right) \\
&= \prod_{p \in P_{1,1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2 \prod_{\substack{p \in P_{1,1} \\ (p,N)=1}} \left(1 - \frac{K(p, 1-\theta)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2}.
\end{aligned}$$

При $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}$ произведение

$$\begin{aligned}
N_1(s, \theta) &= \prod_{\substack{p \in P_{1,1} \\ (p,N)=1}} \left(1 - \frac{K(p, 1-\theta)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} \\
&= \prod_{\substack{p \in P_{1,1} \\ (p,N)=1}} \left(1 - \frac{2}{p^s} + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1-\theta}}\right)\right) \left(1 + \frac{2}{p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right) \\
&= \prod_{\substack{p \in P_{1,1} \\ (p,N)=1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1-\theta}}\right)\right)
\end{aligned}$$

является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Имеет место равенство

$$\prod_{p \in P_{1,1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2h} = \prod_{\psi} L(s, \psi) \times \prod_{\psi} \prod_{p \in P_0} \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right) \times \prod_{\psi} \prod_{p \in P_{-1}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) \\ \times \prod_{\substack{p \in P_1 \\ p \notin P_{1,1}}} \prod_{\psi} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p}_1)}{p^s}\right) \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p}_2)}{p^s}\right).$$

Поскольку для простого числа $p \in P_1$, $p \notin P_{1,1}$, справедливо $(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$,

$$\sum_{\psi} \psi(\mathfrak{p}_1) = 0, \quad \sum_{\psi} \psi(\mathfrak{p}_2) = 0,$$

то последнее двойное произведение определяет аналитическую функцию в области $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, которая не обращается в этой области в нуль. Учитывая также, что простых чисел $p \in P_0$ конечное число, получим

$$\prod_{p \in P_{1,1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^2 = \left(\prod_{\psi} L(s, \psi)\right)^{-1/h} N_2(s),$$

где $N_2(s)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ функция,

$$N_2(s) = \prod_{\psi} \prod_{p \in P_0} \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)^{-1/h} \times \prod_{p \in P_{-1}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \\ \times \prod_{\substack{p \in P_1 \\ p \notin P_{1,1}}} \prod_{\psi} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p}_1)}{p^s}\right)^{-1/h} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p}_2)}{p^s}\right)^{-1/h}.$$

Используя формулу $L(s, \psi_0) = L(s, \chi_D) \zeta(s)$, где ψ_0 – тривиальный характер Гекке, получим для производящей функции равенство

$$h_{\theta, N}(s) = (\zeta(s))^{-1/h} N(s, \theta),$$

где

$$N(s, \theta) = \left(L(s, \chi_D) \prod_{\psi \neq \psi_0} L(s, \psi)\right)^{-1/h} N_1(s, \theta) N_2(s) G_{\theta, N}(s), \\ G_{\theta, N}(s) = \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2}.$$

С помощью формулы суммирования Перрона найдем

$$S_{\theta}(X_1, \gamma, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} h_{\theta, N}(s+1-\gamma) \frac{X_1^s}{s^2} ds \\ = \frac{X_1^{\gamma}}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{X_1^s}{(s+\gamma)^2} \frac{N(s+1, \theta)}{(\zeta(s+1))^{1/h}} ds.$$

При $\operatorname{Re} s \geq 1$ справедливы следующие оценки:

$$N_2(s) \ll 1, \quad N_1(s, \theta) \ll 1, \\ G_{\theta, N}(s) \ll \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2, \quad L^{-1}(s, \chi_D), L^{-1}(s, \psi) \ll (\ln(|t| + 3))^c.$$

Таким образом, если $\operatorname{Re} s \geq 1$, то

$$N(s, \theta) \ll G_N \ln^{c_1}(|t| + 3),$$

где

$$G_N = \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2.$$

Перенесем прямую интегрирования $\operatorname{Re} s = 1$ на контур, состоящий из полуокружности $\{|s| = 2(\ln X_1)^{-1}, \operatorname{Re} s \geq 0\}$ и двух лучей $\{s = it, |t| \geq 2(\ln X_1)^{-1}\}$. Для $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geq 1$ воспользуемся оценкой $|\zeta(s)|^{-1} \ll |s - 1|$. Интеграл на полуокружности (обозначим его через K_1) оценим следующим образом:

$$K_1 \ll X_1^\gamma G_N \frac{X_1^{2(\ln X_1)^{-1}} (\ln^{-1} X_1)^{1+1/h}}{(\ln^{-1} X_1)^2} \ll X_1^\gamma (\ln X_1)^{1-1/h} G_N.$$

Для интеграла по лучам (обозначим его через K_2) справедливо неравенство

$$K_2 \ll X_1^\gamma G_N \int_{2(\ln X_1)^{-1}}^{+\infty} \frac{t^{1/h} (\ln(t + 3))^{c_1}}{t^2} dt \ll X_1^\gamma (\ln X_1)^{1-1/h} G_N.$$

Оценка (17) получена, и лемма 6 доказана.

§ 9. Доказательство леммы 7

Для доказательства леммы 7 нам понадобятся следующие два утверждения.

ЛЕММА 9 (круговой метод М. Ютилы). Пусть $Q \gg 1$, $Q^{-2} \leq \Delta \leq (2Q)^{-1}$, $\chi_{a/q}(\cdot)$ – характеристическая функция интервала $[\frac{a}{q} - \Delta, \frac{a}{q} + \Delta]$, функция $\omega(q)$ принимает значения на отрезке $[0, 1]$ при $Q \leq q \leq 2Q$,

$$L = \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \varphi(q),$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера. Определим $\tilde{\chi}(\alpha)$ равенством

$$\tilde{\chi}(\alpha) = \frac{1}{2\Delta L} \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \sum_{a=1}^q \chi_{a/q}(\alpha),$$

где $\sum^*$ обозначает суммирование с условием $(a, q) = 1$. Тогда, если $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, будем иметь

$$\int (\chi(\alpha) - \tilde{\chi}(\alpha))^2 d\alpha \ll \frac{Q^2 \ln^3 Q}{\Delta L^2}.$$

Здесь интегрирование ведется по конечному отрезку, являющемуся носителем подынтегральной функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [35], [36].

ЛЕММА 10 (формула суммирования Вороного). Пусть $q \equiv 0 \pmod{D}$, $(a, q) = 1$, $aa^* \equiv 1 \pmod{q}$, $k(t)$ – гладкая функция (например, дважды непрерывно дифференцируемая) с компактным носителем на $(0, +\infty)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r(n)k(n)e^{2\pi i \frac{a}{q}n} = \overline{\chi_D(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)e^{-2\pi i \frac{a^*}{q}n} \tilde{k}(n),$$

где $\tilde{k}(n) = \frac{2\pi i}{q} \int_0^{+\infty} k(t)J_0\left(\frac{4\pi\sqrt{nt}}{q}\right) dt$, а $J_0(t)$ – функция Бесселя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma = \begin{pmatrix} a^* & \frac{1-aa^*}{a} \\ -q & a \end{pmatrix}$. Если $w = y - ix$, где $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$, то из соотношения (3) для функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)e^{2\pi inz}$$

получим следующее равенство:

$$f\left(\frac{a}{q} + iw\right) = -\frac{\overline{\chi_D(a)}}{iqw} f\left(-\frac{a^*}{q} - \frac{1}{iq^2w}\right). \quad (18)$$

Пусть $B(w) = \int k(t)e^{2\pi tw} dt$. Из свойств преобразования Фурье следует, что

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{i} \int_{\operatorname{Re} w=y} f\left(\frac{a}{q} + iw\right) B(w) dw \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)e^{2\pi i \frac{a}{q}n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi n(y-ix)} \int_0^{+\infty} k(t)e^{2\pi t(y-ix)} dt dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)k(n)e^{2\pi i \frac{a}{q}n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Справедливость первого равенства в (19) объясняется следующим образом. При $x \neq 0$, интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned} B(w) &= B(y - ix) = -\frac{k(t)e^{2\pi yt}}{2\pi ix} e^{-2\pi ixt} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2\pi ix} \int (k(t)e^{2\pi yt})' e^{-2\pi ixt} dt = \dots \\ &\dots = \frac{1}{(2\pi ix)^\nu} \int (k(t)e^{2\pi yt})^{(\nu)} e^{-2\pi ixt} dt. \end{aligned}$$

Применив это соотношение при $|x| \geq 1$, $\nu = 2$, получим равномерную по n сходимость интеграла $\int_{\operatorname{Re} w=y} |e^{-2\pi wn} B(w) dw|$. Теперь из теоремы Лебега следует справедливость первого равенства в (19).

Подставим (18) в формулу (19). Получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)k(n)e^{2\pi i \frac{a}{q}n} &= -\frac{\overline{\chi_D(a)}}{q} \int_{\operatorname{Re} w=y} \frac{1}{w} f\left(-\frac{a^*}{q} - \frac{1}{iq^2w}\right) B(w) dw \\ &= -\frac{\overline{\chi_D(a)}}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)e^{-2\pi i \frac{a^*}{q}n} \int_0^{+\infty} k(t) \left(\int_{\operatorname{Re} w=y} \frac{1}{w} e^{-2\pi \frac{n}{q^2w}} e^{2\pi tw} dw \right) dt. \end{aligned}$$

Интеграл, взятый в скобки, равен $-2\pi i J_0\left(\frac{4\pi\sqrt{nt}}{q}\right)$, поскольку при $y > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} \frac{e^{as-bs^{-1}}}{s} ds = J_0(2\sqrt{ab}).$$

Этим доказательство леммы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Определим бесконечно гладкую функцию $g(x)$ с носителем на отрезке $[0, 1]$ (“ступеньку”), обладающую свойствами:

- 1) $g(x) = 1$ при $\frac{2}{11} \leq x \leq \frac{7}{11}$;
- 2) $0 \leq g(x) \leq 1$ при $0 \leq x \leq \frac{2}{11}$ и $\frac{7}{11} \leq x \leq 1$, кроме того, выполняется следующее свойство симметрии:

$$\begin{aligned} g(x) + g\left(\frac{2}{11} - x\right) &= 1, & 0 \leq x \leq \frac{2}{11}, \\ g(x) + g\left(\frac{7}{11} - x + 1\right) &= 1, & \frac{7}{11} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Введем следующие бесконечно гладкие функции G_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, с носителем на интервале $(0, N)$:

$$G_k(t) = \begin{cases} g\left(\frac{2^{k+4}t}{11N} - \frac{7}{11}\right) & \text{при } k \geq 1, \\ G_{-k}(N-t) & \text{при } k \leq -1. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left(\frac{N}{4} + \Delta_1, \frac{N}{2} - \Delta_0\right), \\ 0, & \text{если } t \leq \frac{N}{4} - \Delta_1 \text{ или } t \geq \frac{N}{2} + \Delta_0, \end{cases} \\ \Delta_0 &= \frac{N}{16}, \quad \Delta_1 = \frac{\Delta_0}{2}, \\ G_2(t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left(\frac{N}{8} + \Delta_2, \frac{N}{4} - \Delta_1\right), \\ 0, & \text{если } t \leq \frac{N}{8} - \Delta_2 \text{ или } t \geq \frac{N}{4} + \Delta_1, \end{cases} \\ \Delta_2 &= \frac{\Delta_1}{2}, \\ G_1(t) + G_2(t) &= 1 \quad \text{при } t \in \left(\frac{N}{8} + \Delta_2, \frac{N}{2} - \Delta_0\right), \end{aligned}$$

что следует из свойства симметрии функции g . В общем случае при $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} G_k(t) &= \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left(\frac{N}{2^{k+1}} + \Delta_k, \frac{N}{2^k} - \Delta_{k-1}\right), \\ 0, & \text{если } t \leq \frac{N}{2^{k+1}} - \Delta_k \text{ или } t \geq \frac{N}{2^k} + \Delta_{k-1}, \end{cases} \\ \Delta_k &= \frac{\Delta_{k-1}}{2}, \end{aligned}$$

$$G_1(t) + G_2(t) + \cdots + G_k(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in \left(\frac{N}{2^{k+1}} + \Delta_k, \frac{N}{2} - \Delta_0 \right).$$

Функции $G_k(t)$ при отрицательных значениях k симметричны соответствующим функциям $G_{-k}(t)$ относительно прямой $t = \frac{N}{2}$. Заметим, что для всех k и при любом $j \geq 0$ справедлива оценка

$$G_k^{(j)} \ll_j \left(\frac{2^k}{N} \right)^j,$$

при этом постоянная в знаке Виноградова $\ll$ зависит лишь от j (и не зависит от k). Пусть $K = [\log_2 N] + 2$, т. е. $\frac{N}{2^{K+1}} \leq \frac{1}{4}$. Тогда

$$\sum_{k=-K}^K G_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{если } n \geq N \text{ или } n \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{n_1 \leq N-1 \\ m_2 n_2 - m_1 n_1 = l}} r(n_1) r(n_2) \\ &= \sum_{k_1, k_2 = -K}^K \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{N} \\ m_2 n_2 - m_1 n_1 = l}} r(n_1) r(n_2) G_{k_1}(n_1) G_{k_2} \left(\frac{m_2 n_2 - l}{m_1} \right). \end{aligned}$$

Поскольку при фиксированных k_1, k_2 внутренняя сумма по n_1, n_2 в S не равна нулю лишь в случае $|k_1 - k_2| \leq 1$, имеем

$$S \ll |S'| \ln N,$$

где S' — одна из внутренних сумм, участвующих в S при фиксированных k_1, k_2 с условием $|k_1 - k_2| \leq 1$, принимающая максимальное по абсолютной величине значение.

Рассмотрим и оценим суммы более общего, чем S' , вида. Пусть

$$N^{10/11} m_1^{8/11} m_2^{9/11} \leq M \leq \frac{7N}{24}, \quad M_1 = M,$$

функция g_1 гладкая, $\text{supp } g_1 \subseteq (M_1, 3M_1)$, $g_1^{(j)}(t) \ll_j M_1^{-j}$, где постоянная в знаке Виноградова $\ll$ зависит лишь от j и не зависит от g_1 . Пусть g_2 — гладкая функция, $\text{supp } g_2 \subseteq (M_2, 3M_2)$, $g_2^{(j)}(t) \ll_j M_2^{-j}$, где

$$M_2 \asymp M_1 \frac{m_1}{m_2}.$$

Заметим, что из условий, налагаемых на производные, следует ограниченность функций g_1, g_2 . Если мы получим оценку, заявленную в лемме, для сумм

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{N} \\ m_2 n_2 - m_1 n_1 = l}} r(n_1) r(n_2) g_1(n_1) g_2(n_2), \\ \acute{\mathfrak{S}} &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{N} \\ m_2 n_2 - m_1 n_1 = l}} r(n_1) r(n_2) \acute{g}_1(n_1) \acute{g}_2(n_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \acute{g}_1(n_1) &= g_1(N_1 - n_1), & \acute{g}_2(n_2) &= g_2(N_2 - n_2), \\ N_1 &= N, & N_2 &\asymp \frac{m_1}{m_2} N_1, \end{aligned}$$

то аналогичная оценка будет справедлива для суммы S . Действительно, если оказалось, что в сумме S' участвуют функции G_k с размером носителя порядка M , где $M < N^{10/11} m_1^{8/11} m_2^{9/11}$, то тривиальная оценка для таких сумм будет

$$\sum_{\substack{n \in \text{supp} G_k \\ m_1 n \equiv -l \pmod{m_2}}} N^\varepsilon \ll N^\varepsilon M m_2^{-1} \ll N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11},$$

и необходимый результат имеет место. Получим такую же оценку для сумм $\mathfrak{S}$, $\acute{\mathfrak{S}}$.

Для $j = 1, 2$ положим

$$\begin{aligned} S_j(\alpha) &= \sum_{n_j} r(n_j) g_j(n_j) \exp(2\pi i n_j m_j \alpha), \\ \acute{S}_j(\alpha) &= \sum_{n_j} r(n_j) \acute{g}_j(n_j) \exp(2\pi i n_j m_j \alpha). \end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \int_0^1 \overline{S_1(\alpha)} S_2(\alpha) e^{-2\pi i l \alpha} d\alpha = \int_0^1 \overline{S_1(\alpha + \mu)} S_2(\alpha + \mu) e^{-2\pi i l(\alpha + \mu)} d\alpha, \\ \acute{\mathfrak{S}} &= \int_0^1 \overline{\acute{S}_1(\alpha)} \acute{S}_2(\alpha) e^{-2\pi i l \alpha} d\alpha = \int_0^1 \overline{\acute{S}_1(\alpha + \mu)} \acute{S}_2(\alpha + \mu) e^{-2\pi i l(\alpha + \mu)} d\alpha, \end{aligned}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$ – произвольное число (выберем значение μ позднее). Далее воспользуемся леммой 9. Положим в этой лемме

$$Q = M^{3/5} m_1^{6/5} m_2^{3/5}, \quad \Delta = \frac{1}{M m_1}, \quad \omega(q) = \chi_{\{q \in \mathcal{A}\}},$$

где

$$\mathcal{A} = \left\{ q \mid q \equiv 0 \pmod{D m_1 m_2}, \frac{q}{D m_1 m_2} - \text{простое число, не делящее } l D m_1 m_2 \right\}.$$

Тогда, поскольку $D m_1 m_2 l \leq \left(\frac{Q}{D m_1 m_2}\right)^3$ (т.е. число $D m_1 m_2 l$ содержит не более трех простых делителей, бóльших $\frac{Q}{D m_1 m_2}$), имеем

$$\begin{aligned} L &= \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \varphi(q) = \varphi(D m_1 m_2) \sum_{\substack{\frac{Q}{D m_1 m_2} \leq p \leq \frac{2Q}{D m_1 m_2} \\ (p, D m_1 m_2 l) = 1}} \varphi(p) \\ &\gg \frac{\varphi(m_1 m_2)}{\ln Q} \left(\frac{Q}{m_1 m_2} \right)^2 \gg \frac{Q^2}{m_1 m_2 (\ln Q) \ln \ln(m_1 m_2 + 10)}. \end{aligned}$$

Применяя утверждение леммы 9, получим

$$\begin{aligned} \int (\chi(\alpha) - \tilde{\chi}(\alpha))^2 d\alpha &\ll \frac{Q^\varepsilon (m_1 m_2)^2}{\Delta Q^2}, \\ \mathfrak{S} &= \int \tilde{\chi}(\alpha) \overline{S_1(\alpha + \mu)} S_2(\alpha + \mu) e^{-2\pi i l(\alpha + \mu)} d\alpha + R = \Sigma + R, \\ \dot{\mathfrak{S}} &= \int \tilde{\chi}(\alpha) \overline{\dot{S}_1(\alpha + \mu)} \dot{S}_2(\alpha + \mu) e^{-2\pi i l(\alpha + \mu)} d\alpha + \dot{R} = \dot{\Sigma} + \dot{R}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \int (\chi(\alpha) - \tilde{\chi}(\alpha)) \overline{S_1(\alpha + \mu)} S_2(\alpha + \mu) e^{-2\pi i l(\alpha + \mu)} d\alpha, \\ \dot{R} &= \int (\chi(\alpha) - \tilde{\chi}(\alpha)) \overline{\dot{S}_1(\alpha + \mu)} \dot{S}_2(\alpha + \mu) e^{-2\pi i l(\alpha + \mu)} d\alpha. \end{aligned}$$

Поскольку при $x \gg 1$ справедлива оценка

$$\sum_{n \leq x} r(n) e^{2\pi i n \alpha} \ll x^{1/2} \ln x,$$

равномерная по α (см. [21, с. 71], а также [37]), то из формулы суммирования Абеля следуют равномерные по α оценки

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) &\ll M_1^{1/2} \ln M_1, & S_2(\alpha) &\ll M_2^{1/2} \ln M_2, \\ \dot{S}_1(\alpha) &\ll N_1^{1/2} \ln N_1, & \dot{S}_2(\alpha) &\ll N_2^{1/2} \ln N_2. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и неравенство (20), получим

$$\begin{aligned} R &\ll \frac{Q^\varepsilon m_1 m_2}{\Delta^{1/2} Q} (M_1 M_2)^{1/2+\varepsilon} \ll Q^{-1} \Delta^{-1/2} N^\varepsilon M m_1^{3/2} m_2^{1/2} \\ &\ll N^\varepsilon M^{9/10} m_1^{4/5} m_2^{-1/10}, \\ \dot{R} &\ll \frac{Q^\varepsilon m_1 m_2}{\Delta^{1/2} Q} (N_1 N_2)^{1/2+\varepsilon} \ll Q^{-1} \Delta^{-1/2} N^{1+\varepsilon} m_1^{3/2} m_2^{1/2} \\ &\ll N^{1+\varepsilon} M^{-1/10} m_1^{4/5} m_2^{-1/10} \ll N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11}. \end{aligned}$$

Осталось оценить вклад в $\mathfrak{S}$, $\dot{\mathfrak{S}}$ от слагаемых Σ , $\dot{\Sigma}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2\Delta L} \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \sum_{a=1}^q \int_{\mu-\Delta}^{\mu+\Delta} \overline{S_1\left(\frac{a}{q} + \eta\right)} S_2\left(\frac{a}{q} + \eta\right) e^{-2\pi i l(a/q + \eta)} d\eta, \\ \Sigma &\leq \frac{1}{L} \max_{|\eta - \mu| \leq \Delta} |\sigma(\eta)|, \end{aligned}$$

где

$$\sigma(\eta) = \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \sum_{a=1}^q \overline{S_1\left(\frac{a}{q} + \eta\right)} S_2\left(\frac{a}{q} + \eta\right) e^{-2\pi i l a/q}.$$

Аналогично получим

$$\dot{\Sigma} \leq \frac{1}{L} \max_{|\eta - \mu| \leq \Delta} |\dot{\sigma}(\eta)|,$$

где

$$\acute{\sigma}(\eta) = \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \sum_{a=1}^q \overline{\acute{S}_1\left(\frac{a}{q} + \eta\right)} \acute{S}_2\left(\frac{a}{q} + \eta\right) e^{-2\pi i l a / q}.$$

Положим $\mu = 2\Delta$; тогда будем иметь $\eta \asymp \Delta$. Применение леммы 10 к суммам $S_j, \acute{S}_j, j = 1, 2$, дает следующие выражения для $\sigma(\eta), \acute{\sigma}(\eta)$:

$$\sigma(\eta) = \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \sum_{n_1, n_2} r(n_1) r(n_2) \overline{\acute{k}_1(n_1)} \acute{k}_2(n_2) S(m_1 n_1 - m_2 n_2, -l, q),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_j(n) &= \frac{2\pi i m_j}{q} \int_0^{+\infty} k_j(t) J_0\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right) dt, \\ k_j(t) &= g_j(t) e^{2\pi i m_j \eta t}, \end{aligned}$$

а $S(l, m, q)$ – сумма Клоостермана:

$$S(l, m, q) = \sum_{a=1}^q \overline{e^{2\pi i (la^* + ma)/q}},$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} \acute{\sigma}(\eta) &= \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \sum_{n_1, n_2} r(n_1) r(n_2) \overline{\acute{k}_1(n_1)} \acute{k}_2(n_2) S(m_1 n_1 - m_2 n_2, -l, q), \\ \acute{k}_j(t) &= \acute{g}_j(t) e^{2\pi i m_j \eta t}. \end{aligned}$$

Покажем далее, что если либо n_1 , либо n_2 достаточно велики, то вклад от таких слагаемых в $\sigma(\eta), \acute{\sigma}(\eta)$ мал. Воспользуемся следующим равенством для функций Бесселя:

$$\frac{d}{dy} (y^k J_k(y)) = -y^k J_{k-1}(y), \quad k \geq 1,$$

или, положив $y = \frac{4\pi m \sqrt{nt}}{q}$, равенством

$$\frac{d}{dt} (y^k(t) J_k(y(t))) = \frac{d}{dy} (y^k J_k(y)) \cdot \frac{dy}{dt} = -y^k J_{k-1}(y) \frac{2\pi m \sqrt{n}}{q \sqrt{t}}.$$

Будем иметь цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_j(n) &= \frac{2\pi i m_j}{q} \int_0^{+\infty} k_j(t) J_0\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right) dt \\ &= \frac{4\pi i m_j}{q} \int_0^{+\infty} \left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q} J_1\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right)\right) \frac{d}{dt} k_j(t) \left(\frac{4\pi m_j \sqrt{n}}{q}\right)^{-2} dt \\ &= \frac{8\pi i m_j}{q} \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right)^2 J_2\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right)\right) \frac{d^2}{dt^2} k_j(t) \left(\frac{4\pi m_j \sqrt{n}}{q}\right)^{-4} dt = \dots \\ &\dots = \frac{2^{\nu+1} \pi i m_j}{(4\pi)^\nu q} \left(\frac{q}{m_j \sqrt{n}}\right)^\nu \int_0^{+\infty} (\sqrt{t})^\nu J_\nu\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right) \frac{d^\nu}{dt^\nu} k_j(t) dt \\ &= i \left(\frac{q}{2\pi m_j}\right)^{\nu-1} n^{-\nu/2} \int_0^{+\infty} (\sqrt{t})^\nu J_\nu\left(\frac{4\pi m_j \sqrt{nt}}{q}\right) \frac{d^\nu}{dt^\nu} k_j(t) dt, \quad \nu \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} k_j(t) \ll_\nu \max_{0 \leq l \leq \nu} M_j^{-l} (m_j \eta)^{\nu-l},$$

ввиду справедливости соотношения $M_j m_j \Delta \ll 1$ (которое эквивалентно оценке $M m_1 \Delta \ll 1$) получим

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} k_j(t) \ll_\nu M_j^{-\nu}, \quad \frac{d^\nu}{dt^\nu} \dot{k}_j(t) \ll_\nu M_j^{-\nu}.$$

Используя эти неравенства, а также свойство функций Бесселя

$$J_\nu(t) \ll_\nu t^{-1/2} \quad \text{при } t > 0,$$

найдем

$$\begin{aligned} \tilde{k}_j(n) &\ll_\nu \frac{m_j}{Q} \left(\frac{Q}{m_j \sqrt{n}} \right)^{\nu+1/2} M_j^{\nu/2-1/4} M_j^{1-\nu} = \frac{M_j m_j}{Q} \left(\frac{Q}{m_j \sqrt{n M_j}} \right)^{\nu+1/2}, \\ \tilde{\dot{k}}_j(n) &\ll_\nu \frac{m_j}{Q} \left(\frac{Q}{m_j \sqrt{n}} \right)^{\nu+1/2} N_j^{\nu/2-1/4} M_j^{1-\nu} = \frac{M_j^{3/2} m_j}{Q \sqrt{N_j}} \left(\frac{Q \sqrt{N_j}}{\sqrt{n} M_j m_j} \right)^{\nu+1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если при оценке $\sigma(\eta)$ рассмотреть вклад от слагаемых с n_1 , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{Q}{m_1 \sqrt{n_1 M_1}} \leq N^{-\varepsilon/2}$$

с произвольным $\varepsilon > 0$, а также вклад от слагаемых с n_2 , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{Q}{m_2 \sqrt{n_2 M_2}} \leq N^{-\varepsilon/2},$$

то, применяя полученные соотношения (21) для $\tilde{k}_j(t)$ при достаточно больших значениях $\nu = \nu(\varepsilon)$, увидим, что вклад этих слагаемых в $\sigma(\eta)$ сколь угодно мал. Остается рассмотреть вклад в $\sigma(\eta)$ от слагаемых с n_1, n_2 , удовлетворяющих условию

$$n_j \leq N^\varepsilon \frac{Q^2}{m_j^2 M_j}. \quad (22)$$

Аналогично, в оценку $\sigma(\eta)$ основной вклад дают слагаемые с n_1, n_2 , одновременно удовлетворяющие условию

$$n_j \leq N^\varepsilon \frac{Q^2 N_j}{m_j^2 M_j^2}. \quad (23)$$

В этих случаях для $\tilde{k}_j(t), \tilde{\dot{k}}_j(t)$ будем использовать неравенства (21) с $\nu = 0$; именно

$$\tilde{k}_j(t) \ll Q^{-1/2} m_j^{1/2} M_j^{3/4} n_j^{-1/4}, \quad \tilde{\dot{k}}_j(t) \ll Q^{-1/2} m_j^{1/2} M_j N_j^{-1/4} n_j^{-1/4}.$$

Учитывая, что $(m_1, m_2) = 1$, для значений $q \asymp Q$ при условии $\omega(q) \neq 0$ находим следующую оценку наибольшего общего делителя трех чисел:

$$\begin{aligned} (n_1 m_1 - n_2 m_2, l, q) &= (n_1 m_1 - n_2 m_2, l, D m_1 m_2) \ll (n_1 m_1 - n_2 m_2, l, m_1 m_2) \\ &= (l, m_1, n_2)(l, m_2, n_1) \leq (l, n_2)(l, n_1). \end{aligned}$$

Таким образом, оценка А. Вейля для сумм Клоостермана влечет неравенство

$$\begin{aligned} S(n_1 m_1 - n_2 m_2, -l, q) &\leq \tau(q)(n_1 m_1 - n_2 m_2, l, q)^{1/2} q^{1/2} \\ &\ll \tau(q)(l, n_1)^{1/2} (l, n_2)^{1/2} q^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь слагаемое в $\sigma(\eta)$ с условием (22) оценивается величиной

$$\begin{aligned} &\frac{(m_1 m_2)^{1/2} (M_1 M_2)^{3/4}}{Q} \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \tau(q) q^{1/2} \\ &\times \sum_{n_1 \leq N^\varepsilon Q^2 / (m_1^2 M_1)} \frac{|r(n_1)|(l, n_1)^{1/2}}{n_1^{1/4}} \sum_{n_2 \leq N^\varepsilon Q^2 / (m_2^2 M_2)} \frac{|r(n_2)|(l, n_2)^{1/2}}{n_2^{1/4}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{n \asymp x} r^2(n) \ll x$ и $\sum_{n \asymp x} (n, l) \leq \sum_{d|l} \sum_{n \asymp x/d} d \ll x \tau(l)$, то, используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\sum_{n \asymp x} |r(n)|(n, l)^{1/2} \ll x \tau^{1/2}(l),$$

следовательно,

$$\sum_{n \leq R} \frac{|r(n)|(n, l)^{1/2}}{n^{1/4}} \ll \ln(R+2) \max_{x \leq R} \sum_{n \asymp x} \frac{|r(n)|(n, l)^{1/2}}{n^{1/4}} \ll \tau^{1/2}(l) R^{3/4} \ln(R+2).$$

Собирая полученные оценки вместе, находим

$$\begin{aligned} \sigma(\eta) &\ll N^\varepsilon \frac{Q^{5/2}}{m_1 m_2} \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \ll N^\varepsilon \frac{Q^{7/2}}{(m_1 m_2)^2}, \\ \Sigma &\ll N^\varepsilon \frac{Q^{3/2}}{m_1 m_2} \ll N^\varepsilon M^{9/10} m_1^{4/5} m_2^{-1/10}, \\ \mathfrak{S} &\ll N^\varepsilon M^{9/10} m_1^{4/5} m_2^{-1/10} \ll N^{9/10+\varepsilon} m_1^{4/5} m_2^{-1/10}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что слагаемое в $\acute{\sigma}(\eta)$ с условием (23) оценивается величиной

$$\begin{aligned} &\frac{(m_1 m_2)^{1/2} M_1 M_2}{Q (N_1 N_2)^{1/4}} \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \tau(q) q^{1/2} \\ &\times \sum_{n_1 \leq N^\varepsilon Q^2 N_1 / (m_1^2 M_1^2)} \frac{|r(n_1)|(l, n_1)^{1/2}}{n_1^{1/4}} \sum_{n_2 \leq N^\varepsilon Q^2 N_2 / (m_2^2 M_2^2)} \frac{|r(n_2)|(l, n_2)^{1/2}}{n_2^{1/4}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \acute{\sigma}(\eta) &\ll N^\varepsilon \frac{Q^{5/2}}{m_1 m_2} \frac{(N_1 N_2)^{1/2}}{(M_1 M_2)^{1/2}} \sum_{Q \leq q \leq 2Q} \omega(q) \ll N^\varepsilon \frac{Q^{7/2} N}{(m_1 m_2)^2 M}, \\ \acute{\Sigma} &\ll N^\varepsilon \frac{Q^{3/2} N}{m_1 m_2 M} \ll N^{1+\varepsilon} M^{-1/10} m_1^{4/5} m_2^{-1/10}, \\ \acute{\mathfrak{S}} &\ll N^{1+\varepsilon} M^{-1/10} m_1^{4/5} m_2^{-1/10} \ll N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$S \ll N^{9/10+\varepsilon} m_1^{4/5} m_2^{-1/10} + N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11} \ll N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11},$$

поскольку $m_1^8 m_2^9 \leq N$. Доказательство леммы завершено.

Список литературы

1. A. Selberg, "Old and new conjectures about class of Dirichlet series", *Collected papers*, v. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–63.
2. A. Selberg, "On the zeros of Riemann's zeta-function", *Skr. Norske Vid.-Akad., Oslo*, 1943, № 10, 1–59.
3. N. Levinson, "More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$ ", *Advances in Math.*, **13:4** (1974), 383–436.
4. В. Г. Журавлев, "Вычисление постоянной в теореме Сельберга о нулях ζ -функции Римана на критической прямой", *Сб. иссл. по теор. функций и функц. анализ.*, Владимир, 1974, 39–51.
5. B. Conrey, "Zeros of derivatives of Riemann's ξ -function on the critical line", *J. Number Theory*, **16:1** (1983), 49–74.
6. B. Conrey, "Zeros of derivatives of Riemann's ξ -function of the critical line. II", *J. Number Theory*, **17:1** (1983), 71–75.
7. R. J. Anderson, "Simple zeros of the Riemann zeta-function", *J. Number Theory*, **17:2** (1983), 176–182.
8. J. B. Conrey, "More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta-function are on the critical line", *J. Reine Angew. Math.*, **399** (1989), 1–26.
9. В. Г. Журавлев, "Нули L -функций Дирихле на коротких отрезках критической прямой", *Аналитическая теория чисел и теория функций*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **76**, Наука, Л., 1978, 72–88; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, "Zeros of the Dirichlet L -functions on short segments of the critical line", *J. Soviet Math.*, **18:3** (1982), 339–350.
10. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line", *Math. Z.*, **10:3–4** (1921), 283–317.
11. H. Davenport, H. Heilbronn, "On the zeros of certain Dirichlet series. I, II", *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 181–185; 307–312.
12. С. М. Воронин, "О нулях дзета-функций квадратичных форм", *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 135–147; англ. пер.: S. M. Voronin, "On the zeros of zeta-functions of quadratic forms", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 143–155.
13. С. М. Воронин, *Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МИАН СССР, М., 1977.
14. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, de Gruyter, Berlin, 1992.
15. E. Bombieri, D. A. Hejhal, "Sur les zéros des fonctions zêta d'Epstein", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **304:9** (1987), 213–217.
16. С. М. Воронин, "О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44:1** (1980), 63–91; англ. пер.: S. M. Voronin, "On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line", *Math. USSR-Izv.*, **16:1** (1981), 55–82.
17. А. А. Карацуба, "О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54:2** (1990), 303–315; англ. пер.: A. A. Karatsuba, "On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line", *Math. USSR-Izv.*, **36:2** (1991), 311–324.
18. А. А. Карацуба, "Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле", *Теория чисел и анализ*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 180–196; англ. пер.: A. A. Karatsuba, "A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **207** (1995), 163–177.

19. J. L. Hafner, “Zeros on the critical line for Dirichlet series attached to certain cusp forms”, *Math. Ann.*, **264**:1 (1983), 21–37.
20. J. L. Hafner, “Zeros on the critical line for Maass wave form L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **377** (1987), 127–158.
21. H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Grad. Stud. Math., **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
22. Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел*, ГИТТЛ, М.–Л., 1940; пер. с нем.: E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akademische Verlag, Leipzig, 1923.
23. E. Hecke, “Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper”, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen. Mat.-Phys. Kl.*, **1917** (1917), 77–89.
24. E. Hecke, “Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen”, *Math. Ann.*, **97**:1 (1926), 210–242.
25. С. А. Гриценко, “О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:4 (1996), 3–42; англ. пер.: S. A. Gritsenko, “Zeros of linear combinations of functions of a special type that are connected with Selberg Dirichlet series”, *Izv. Math.*, **60**:4 (1996), 655–694.
26. С. А. Гриценко, *Нули арифметических рядов Дирихле*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МИАН, М., 1997.
27. С. А. Гриценко, “О нулях линейных комбинаций аналогов функции Римана”, *Аналитическая теория чисел и приложения*, Тр. МИАН, **218**, Наука, М., 1997, 134–150; англ. пер.: S. A. Gritsenko, “On the zeros of linear combinations of the analogs of Riemann’s function”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **218** (1997), 129–145.
28. С. А. Гриценко, “О нулях специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:1 (1997), 45–68; англ. пер.: S. A. Gritsenko, “Zeros of a special type of function associated with Hecke L -functions of imaginary quadratic fields”, *Izv. Math.*, **61**:1 (1997), 45–68.
29. M. Jutila, “Convolutions of Fourier coefficients of cusp forms”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **65** (1999), 31–51.
30. W. Duke, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, “The subconvexity problem for Artin L -functions”, *Invent. Math.*, **149**:3 (2002), 489–577.
31. G. Harcos, “An additive problem in the Fourier coefficients of cusp forms”, *Math. Ann.*, **326**:2 (2003), 347–365.
32. V. Blomer, “Rankin–Selberg L -functions on the critical line”, *Manuscripta Math.*, **117**:2 (2005), 111–133.
33. И. С. Резвякова, “О нулях на критической прямой L -функций, соответствующих автоморфным параболическим формам”, *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 456–475.
34. R. A. Rankin, “Contributions to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **35** (1939), 357–372.
35. M. Jutila, “Distribution of rational numbers in short intervals”, *Ramanujan J.*, **14**:2 (2007), 321–327.
36. M. Jutila, “Transformations of exponential sums”, *Proceedings of the Amalfi conference on analytic number theory* (Maiori, Amalfi, Italy, 1989), Univ. Salerno, Salerno, 1992, 263–270.
37. J. R. Wilton, “A note on Ramanujan’s arithmetical function $\tau(n)$ ”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **25** (1929), 121–129.

И. С. РЕЗВЯКОВА (I. S. REZVYAKOVA)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: rezvyakova@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

24.02.2009

23.05.2009