Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Максимальные пересечения трех вещественных квадратик, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 3, 127–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:39:09

УДК 512.7

В. А. Краснов

Максимальные пересечения трех вещественных квадрик

Рассмотрены вещественные алгебраические многообразия, которые являются пересечениями трех вещественных квадрик; они для краткости называются вещественными триквадриками. Построены триквадрики, которые являются M -многообразиями. Для вещественной части таких триквадрик вычисляются группы когомологий с коэффициентами в поле из двух элементов. Использованы связи триквадрик с плоскими кривыми.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: триквадрики, максимальные многообразия, спектральная кривая, тэта-характеристики.

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть $V \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{N+1})$ – комплексное проективное алгебраическое многообразие, заданное системой уравнений

$$q_0(X_0, \dots, X_N) = 0, \quad q_1(X_0, \dots, X_N) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_N) = 0, \quad (0.1)$$

где $q_0(X_0, \dots, X_N) = q_0(X)$, $q_1(X_0, \dots, X_N) = q_1(X)$, $q_2(X_0, \dots, X_N) = q_2(X)$ – линейно независимые квадратичные формы с комплексными коэффициентами, $X_0, \dots, X_N$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^N$. Такое многообразие будем называть *триквадрикой*. Триквадрике V однозначно соответствует связка квадрик в $\mathbb{P}^N$

$$\lambda_0 q_0(X) + \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) = 0, \quad (0.2)$$

которая определяет плоскость $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_V^2$ в пространстве квадрик $\mathbb{P}(S^2 \mathbb{C}^{N+1})$. Переменные $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ являются однородными координатами плоскости $\mathbb{P}_V^2$.

Рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = 0, \quad (0.3)$$

где M_0, M_1, M_2 – матрицы коэффициентов квадратичных форм $q_0(X), q_1(X), q_2(X)$. Уравнение (0.3) определяет кривую $C = C_V$ степени $d = N + 1$ в плоскости $\mathbb{P}_V^2$. Эта кривая называется *спектральной* кривой триквадрики V (см. [1]). Будем предполагать, что кривая C_V неособая. Тогда триквадрика V неособая и для каждой точки $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in C_V$ квадрика $Q_\lambda \subset \mathbb{P}^N$, заданная уравнением

$$\lambda_0 q_0(X) + \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) = 0,$$

имеет единственную особую точку (см. [1]).

Если комплексная триквадрика $V \subset \mathbb{P}^N$ задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами, то на комплексной трикватрике V определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: V \rightarrow V$. Пара (V, τ) называется *вещественной трикватрикой*, мы будем ее также обозначать через V , так как инволюция $\tau: V \rightarrow V$ однозначно восстанавливается из инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$ и вложения $V \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Множество вещественных точек трикватрики V обозначается через $\mathbb{R}V$ и называется *вещественной частью трикватрики V* . Заметим, что $\mathbb{R}V$ равно множеству неподвижных точек V^τ инволюции $\tau: V \rightarrow V$. Спектральная кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ также имеет вещественную структуру $\tau: C \rightarrow C$. Аналогично, пара (C, τ) называется *вещественной спектральной кривой*, а ее множество вещественных точек $\mathbb{R}C$ – *вещественной частью спектральной кривой*.

Рассмотрим двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$. На этой сфере определена целочисленная функция $I(\lambda)$, равная отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_0 q_0(X) + \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X). \quad (0.4)$$

Функция $I(\lambda)$ имеет точки разрыва на кривой Γ , равной прообразу кривой $\mathbb{R}C$ при проекции $S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, и удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) функция $I(\lambda)$ полунепрерывна снизу;
- 2) множество точек разрыва функции $I(\lambda)$ совпадает с кривой Γ ;
- 3) при переходе через компоненты связности кривой Γ значения функции $I(\lambda)$ изменяются на ± 1 ;
- 4) в точках непрерывности выполняется равенство

$$I(-\lambda) = N + 1 - I(\lambda);$$

- 5) в точках разрыва выполняется равенство

$$I(-\lambda) = N - I(\lambda);$$

- 6) если $I_{\min}$, $I_{\max}$ – наименьшее и наибольшее значения функции $I(\lambda)$, то выполняется равенство

$$I_{\max} = N + 1 - I_{\min}.$$

Заметим, что свойство 6) функции $I(\lambda)$ вытекает из предыдущих свойств.

Напомним, что вещественное алгебраическое многообразие V называется *M -многообразием*, если неравенство Гарнака–Смита–Тома

$$\sum_{i \geq 0} \dim H^i(\mathbb{R}V) \leq \sum_{i \geq 0} \dim H^i(V)$$

становится равенством, где когомологии имеют коэффициенты в поле из двух элементов $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Заметим, что далее рассматриваются только пространства когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, причем размерность пространства $H^i(\cdot)$ обозначается через $h^i(\cdot)$. Отметим, что M -многообразия играют важную роль в вещественной алгебраической геометрии.

В настоящей работе будет доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Пусть вещественная триквадрика V четной размерности $2m = N - 3$ является M -многообразием. Тогда вещественная спектральная кривая C триквадрики V также будет M -многообразием, причем выполняются неравенства

$$m + 1 \leq I(\lambda) \leq m + 3, \quad (0.5)$$

а также выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p, \quad (0.6)$$

где p, n – количества четных и нечетных овалов кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}P^2$.

2) Пусть вещественная спектральная кривая C вещественной триквадрики V четной размерности $2m > 0$ является M -кривой, причем выполняются неравенства (0.5). Тогда триквадрика V является M -многообразием или $(M - 2)$ -многообразием, причем в случае $(M - 2)$ -многообразия выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p - 2. \quad (0.7)$$

Напомним, что вещественное алгебраическое многообразие V называется $(M - k)$ -многообразием, если выполняется равенство

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) = \sum_{i \geq 0} h^i(V) - 2k,$$

а также напомним, что овал кривой $\mathbb{R}C$ называется *четным*, если он содержится внутри четного числа овалов этой кривой, в противном случае овал называется *нечетным*.

Рассмотрим в качестве примера двумерные вещественные триквадрики. Они являются КЗ-поверхностями степени 8. Среди таких КЗ-поверхностей вещественные части M -поверхностей могут иметь следующие три топологических типа (см. [2]): $S_{10} \sqcup S$, $S_2 \sqcup 9S$, $S_6 \sqcup 5S$, где S_g – компактная ориентируемая топологическая поверхность рода g , S – двумерная сфера. Соответствующие спектральные M -кривые имеют следующие вещественные схемы: $\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \sqcup \langle 9 \rangle$, $\langle 1\langle 9 \rangle \rangle \sqcup \langle 1 \rangle$, $\langle 1\langle 5 \rangle \rangle \sqcup \langle 5 \rangle$ (это кривые Гарнака, Гильберта и Гудкова соответственно).

Заметим, что в утверждении 2) теоремы 0.1 не говорится о том, в каком случае триквадрика V будет M -многообразием, а в каком $(M - 2)$ -многообразием. Далее мы сформулируем теорему, которая дает ответ на этот вопрос в частном случае, но сначала приведем еще одно определение.

На спектральной кривой C триквадрики V определено линейное комплексное расслоение L следующим образом: если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы q_λ в пространстве $\mathbb{C}^{N+1}$. Это расслоение называется в [1] *спектральным расслоением*. Если комплексная триквадрика $V \subset \mathbb{P}^N$ задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами, то спектральное расслоение L является вещественным линейным расслоением на вещественной спектральной кривой C . (Определение вещественного линейного расслоения приведено в приложении.) В настоящей статье будет доказана

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть вещественная спектральная кривая C вещественной триквадрики V четной размерности $2t > 0$ является M -кривой с вещественной схемой

$$\langle 1\langle \alpha_1 \rangle \rangle \sqcup \cdots \sqcup \langle 1\langle \alpha_r \rangle \rangle \sqcup \langle \beta \rangle, \quad (0.8)$$

причем выполняются неравенства (0.5). Тогда триквадрика V будет M -многообразием, если и только если на нечетных овалах кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}P^2$ вещественная часть $\mathbb{R}L$ спектрального расслоения L тривиальна.

Если $L \rightarrow C$ – спектральное расслоение, то расслоение $\mathcal{L} = L(N-1)$ является четной тэта-характеристикой кривой C , причем $H^0(C, M) = 0$ (см. [1], [3]; основные понятия, связанные с тэта-характеристиками, изложены в приложении). Расслоение $\mathcal{L}$ называется спектральной тэта-характеристикой кривой C . Если комплексная триквадрика $V \subset \mathbb{P}^n$ задана системой уравнений (0.1) с вещественными коэффициентами, то спектральная тэта-характеристика $\mathcal{L}$ является вещественным линейным расслоением на вещественной спектральной кривой C . Заметим, что если N нечетное, то вещественные расслоения $\mathbb{R}L \rightarrow \mathbb{R}C$, $\mathbb{R}\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}C$ изоморфны. Отметим также, что индекс-функция $I(\lambda)$ восстанавливается по тэта-характеристике с точностью до замены $I(\lambda)$ на функцию $I(-\lambda)$ (см. [1]).

Справедлива следующая (см. [1])

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть C – неособая плоская вещественная кривая степени $N+1 \geq 4$ с непустой вещественной частью, а $\mathcal{L}$ – вещественная тэта-характеристика на кривой C , удовлетворяющая условию $H^0(C, \mathcal{L}) = 0$. Тогда существует связка квадрик (0.2) (единственная с точностью до вещественного проективного преобразования проективного пространства $\mathbb{P}^N$) такая, что ее вещественная спектральная кривая совпадает с кривой C , а вещественная спектральная тэта-характеристика равна $\mathcal{L}$.

Заметим, что теорема 0.3 доказана в [1] с помощью конструкции Диксона из [4]. Из теорем 0.2, 0.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 0.4. Пусть C – неособая плоская вещественная M -кривая четной степени $N+1 \geq 6$ с вещественной схемой вида (0.8), а $\mathcal{L}$ – вещественная тэта-характеристика на кривой C , удовлетворяющая следующим условиям: $H^0(C, \mathcal{L}) = 0$, расслоение $\mathbb{R}\mathcal{L}$ тривиально на нечетных овалах вещественной кривой $\mathbb{R}C$ и соответствующая индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам (0.5). Тогда соответствующая связка квадрик определяет вещественную M -триквадрику $V \subset \mathbb{P}^N$.

Возникает вопрос о реализуемости условий следствия 0.4. В связи с этим вопросом заметим, что если $\mathcal{L}$ – четная тэта-характеристика и $H^0(C, \mathcal{L}) \neq 0$, то после малого возмущения кривой C будет выполняться условие $H^0(C, \mathcal{L}) = 0$ (см. [1]). Следовательно, необходимо доказать существование вещественной четной тэта-характеристики $\mathcal{L}$, удовлетворяющей следующему условию: расслоение $\mathbb{R}\mathcal{L}$ тривиально на нечетных овалах кривой $\mathbb{R}C$. Мы докажем существование такой тэта-характеристики в приложении. Точнее, будет доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.5. Пусть X – неособая вещественная проективная алгебраическая M -кривая рода $g > 0$, $X_1, \dots, X_{g+1}$ – связные компоненты вещественной части $\mathbb{R}X$. Тогда для каждого набора из g компонент $X_{i_1}, \dots, X_{i_g}$ существует четная вещественная тэта-характеристика $\mathcal{L}$ такая, что расслоение $\mathbb{R}\mathcal{L}$ тривиально на компонентах $X_{i_1}, \dots, X_{i_g}$.

Заметим, что из предложения 0.5 еще не вытекает реализуемость условий следствия 0.4.

Наконец отметим, что на M -кривой все тэта-характеристики вещественные. Перейдем к формулировке результатов о нечетномерных триквадриках. Итак, предполагаем, что триквадрика V имеет размерность $2m - 1 = N - 3$. Прежде всего мы покажем, что для такой M -триквадрики выполняются неравенства $m \leq I(\lambda) \leq m + 3$. Из этих неравенств следует, что функция $I(\lambda)$ в случае M -триквадрики может принимать либо два значения $m + 1, m + 2$, либо четыре значения $m, m + 1, m + 2, m + 3$.

Далее $C \subset \mathbb{P}^2$ – неособая вещественная кривая степени $d = N + 1 = 2m + 3$. Обозначим через Γ прообраз $\mathbb{R}C$ при проекции $S^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Через $\mathcal{J}(\lambda)$ обозначим произвольную целочисленную функцию на сфере S^2 , удовлетворяющую неравенствам $m \leq \mathcal{J}(\lambda) \leq m + 3$ и следующим свойствам:

- 1) функция $\mathcal{J}(\lambda)$ полунепрерывна снизу;
- 2) множество точек разрыва функции $\mathcal{J}(\lambda)$ совпадает с кривой Γ ;
- 3) при переходе через компоненты связности кривой Γ значения функции $\mathcal{J}(\lambda)$ изменяются на ± 1 ;
- 4) в точках непрерывности выполняется равенство $\mathcal{J}(-\lambda) = 2m + 3 - I(\lambda)$;
- 5) в точках разрыва выполняется равенство $\mathcal{J}(-\lambda) = 2m + 2 - \mathcal{J}(\lambda)$.

В работе [1] доказана следующая

ТЕОРЕМА 0.6. Если исключить случай, когда $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$ и функция $\mathcal{J}(\lambda)$ принимает два значения $m + 1, m + 2$, то можно произвести малое возмущение кривой C и соответственно изменить функцию $\mathcal{J}(\lambda)$, чтобы новая кривая C стала спектральной кривой вещественной связки квадрик, а функция $\mathcal{J}(\lambda)$ стала функцией отрицательного индекса инерции $I(\lambda)$ этой связки.

Благодаря этой теореме будут доказаны следующие два предложения, с помощью которых можно строить M -триквадрики нечетной размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.7. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – вещественная неособая M -кривая нечетной степени $d = 2m + 3$, удовлетворяющая условию $d \not\equiv \pm 1 \pmod{8}$, и $\mathcal{J}(\lambda)$ – функция, принимающая два значения $m + 1, m + 2$. Произведем малое возмущение кривой C и соответственно изменим функцию $\mathcal{J}(\lambda)$, чтобы новая кривая C стала спектральной кривой вещественной связки квадрик, а функция $\mathcal{J}(\lambda)$ стала функцией отрицательного индекса инерции $I(\lambda)$ этой связки. Тогда соответствующая вещественная триквадрика V размерности $2m - 1$ будет M -многообразием, при этом будут выполняться равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = g, \quad (0.9)$$

где g – род кривой C .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.8. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – вещественная неособая M -кривая нечетной степени $d = 2t + 3$, овалы вещественной части которой имеют схему (0.8). Тогда существует функция $\mathcal{I}(\lambda)$, принимающая четыре значения $t, t + 1, t + 2, t + 3$, такая, что если произвести малое возмущение кривой C и соответственно изменить функцию $\mathcal{I}(\lambda)$, чтобы новая кривая C стала спектральной кривой вещественной связки квадрики, а функция $\mathcal{I}(\lambda)$ стала функцией отрицательного индекса инерции $I(\lambda)$ этой связки, то соответствующая вещественная триквадрика V размерности $2t - 1$ будет M -многообразием, при этом будут выполняться равенства (0.9).

Структура настоящей работы следующая. Кроме введения, в статье имеются три параграфа. В § 1 доказывается теорема 0.1. При ее доказательстве мы используем спектральную последовательность из работы [5]. Заметим, что с помощью этой спектральной последовательности вычисляются когомологии пространства $\mathbb{R}\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{R}V$. В § 2 доказывается теорема 0.2. При ее доказательстве мы применяем еще одну спектральную последовательность, построенную в работе [6]. Данная спектральная последовательность предназначена для вычисления когомологий пространства $S^N \setminus W$, где W – двулистное накрытие многообразия $\mathbb{R}V$, индуцированное стандартным двулистным накрытием $S^N \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^N$. Преимущество второй спектральной последовательности состоит в том, что для нее в [6] приведены вычисления вторых дифференциалов. В § 2 также доказываются предложения 0.7, 0.8. В § 3 содержится доказательство предложения 0.5, здесь также приведены необходимые определения и утверждения о тэта-характеристиках.

Наконец, отметим, что настоящая работа была мотивирована гипотезой о M -кривых Гарнака (см. конец статьи [1]). Согласно этой гипотезе M -триквадрики необходимо строить с помощью M -кривых Гарнака с дополнительными данными на компонентах вещественной части (подробности см. в [1]).

§ 1. Необходимые условия максимальности для четномерных триквадрик

В этом параграфе мы докажем теорему 0.1, но сначала приведем несколько лемм.

ЛЕММА 1.1. Пусть дана невырожденная квадратичная форма с вещественными коэффициентами:

$$q(X) = \sum_{i,j=0}^N a_{ij} X_i X_j,$$

причем $\mu = \min\{\sigma^+, \sigma^-\} > 0$, где $\sigma^\pm$ – положительный и отрицательный индексы инерции этой квадратичной формы. Тогда гомоморфизм ограничения

$$H^i(\mathbb{R}\mathbb{P}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}Q)$$

не равен нулю при $0 \leq i \leq \mu - 1$ и равен нулю при $i \geq \mu$, где $Q \subset \mathbb{P}^N$ – вещественная квадрика, определенная уравнением $q(X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mu > 1$, так как при $\mu = 1$ многообразие $\mathbb{R}Q$ диффеоморфно сфере S^{N-1} . Также можно полагать, что квадратичная форма $q(X)$ имеет вид

$$q(X) = X_0^2 + \dots + X_{N-\mu}^2 - X_{N-\mu+1}^2 - \dots - X_N^2.$$

Тогда система уравнений

$$q(X) = 0, \quad X_0^2 + \dots + X_N^2 = 1$$

равносильна системе уравнений

$$X_0^2 + \dots + X_{N-\mu}^2 = \frac{1}{2}, \quad X_{N-\mu+1}^2 + \dots + X_N^2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, уравнение $q(X) = 0$ определяет на сфере $X_0^2 + \dots + X_N^2 = 1$ гиперповерхность, равную произведению $S^{N-\mu} \times S^{\mu-1}$ сфер. Заметим, что антиподальная инволюция $x \mapsto -x$ на сфере $X_0^2 + \dots + X_N^2 = 1$ индуцирует инволюцию на произведении $S^{N-\mu} \times S^{\mu-1}$ сфер, которая равна произведению антиподальных инволюций на сферах $S^{N-\mu}$, $S^{\mu-1}$. Рассмотрим проекцию на второй сомножитель

$$S^{N-\mu} \times S^{\mu-1} \rightarrow S^{\mu-1}. \quad (1.1)$$

После отождествления антиподальных точек на произведении сфер получаем многообразие $\mathbb{R}Q$, а после отождествления антиподальных точек на сфере $S^{\mu-1}$ получаем проективное пространство $\mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-1}$. Тогда из проекции (1.1) получаем локально тривиальное расслоение со слоем, являющимся сферой $S^{N-\mu}$, т.е.

$$\pi: \mathbb{R}Q \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-1}. \quad (1.2)$$

Поскольку $\mu - 1 \leq N - \mu$, из спектральной последовательности Лере для расслоения (1.2) получаем, что гомоморфизм

$$\pi^*: H^i(\mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-1}) \rightarrow H^i(\mathbb{R}Q)$$

не равен нулю при $0 \leq i \leq \mu - 1$. Если $\mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-2}$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-1}$, то ее прообраз $\pi^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-2})$ будет гиперплоским сечением многообразия $\mathbb{R}Q \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^N$. Поэтому если H – вещественное гиперплоское сечение квадраки $Q \subset \mathbb{P}^N$, а t – базисный элемент $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{\mu-1})$, то выполняется равенство $\pi^*(t) = [\mathbb{R}H]^*$, причем класс когомологий $\pi^*(t^i) = ([\mathbb{R}H]^*)^i$ не равен нулю при $0 \leq i \leq \mu - 1$ и равен нулю при $i \geq \mu$. Лемма доказана.

Далее предполагаем, что число N нечетное и $V \subset \mathbb{P}^N$ – неособая вещественная триквадрика, причем ее размерность больше нуля.

ЛЕММА 1.2. Пусть $\dim V = 2m > 0$ и $Z = V \cap \mathbb{P}^{m+3}$ – вещественное неособое пересечение триквадрики V с подпространством в $\mathbb{P}^N$. Тогда если триквадрика V является M -многообразием, то класс когомологий $[\mathbb{R}Z]^* \in H^m(\mathbb{R}V)$ не равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать от противного, т.е. предположим, что класс когомологий $[\mathbb{R}Z]^*$ равен нулю. Тогда класс когомологий $[Z]^* \in H^{2m}(V)$ также равен нулю, так как триквадрика V является полным пересечением и M -многообразием (см., например, [7, теорема 4.2.3]). Получили противоречие, так как класс когомологий $[Z]^*$ не равен нулю. Лемма доказана.

Покажем теперь, что из лемм 1.1, 1.2 вытекает следующая

ЛЕММА 1.3. *Пусть вещественная неособая триквадрика V размерности $2m > 0$ является M -многообразием. Тогда справедливы утверждения:*

- 1) *выполняется равенство $I_{\min} = m + 1$;*
- 2) *гомоморфизм ограничения*

$$H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V) \quad (1.3)$$

не равен нулю при $0 \leq i \leq m$ и равен нулю при $i \geq m + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что из лемм 1.1, 1.2 следует неравенство

$$I_{\min} \geq m + 1 \quad (1.4)$$

и равенство нулю гомоморфизма (1.3) при $i \geq I_{\min}$. Пусть $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \in S^2$ – точка такая, что функция $I(\lambda)$ непрерывна в точке $\hat{\lambda}$ и $I(\hat{\lambda}) = I_{\min}$. Рассмотрим неособую вещественную квадрику $\hat{Q} \subset \mathbb{P}^N$, заданную уравнением

$$\hat{\lambda}_0 q_0(X) + \hat{\lambda}_1 q_1(X) + \hat{\lambda}_2 q_2(X) = 0.$$

Применим лемму 1.1; тогда получим, что гомоморфизм ограничения

$$H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}\hat{Q})$$

равен нулю при $i \geq I(\hat{\lambda})$. Следовательно, гомоморфизм ограничения

$$H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V)$$

также равен нулю при $i \geq I_{\min}$. Применим лемму 1.2; тогда получим неравенство (1.4).

Следовательно, число $I_{\min}$ может принимать значения $m + 1$ или $m + 2$. Покажем, что случай $I_{\min} = m + 2$ не реализуется. Заметим, что в этом случае функция $I(\lambda)$ принимает постоянное значение $m + 2$ и множество $\mathbb{R}C$ пустое.

Пусть $\Omega_j \subset S^2$ – замкнутое множество, определенное неравенством $I(\lambda) \leq j$, где $j = -1, 0, 1, \dots, N + 1$. Тогда существует спектральная последовательность (см. [1], [5])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j}) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V). \quad (1.5)$$

Поскольку $\Omega_j = \emptyset$ при $j \leq m + 1$ и $\Omega_j = S^2$ при $j \geq m + 2$, из спектральной последовательности (1.5) вытекают равенства

$$h^{m+4}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) = \dots = h^{2m}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) = 0, \quad h^{m+3}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) = 1$$

и неравенство

$$h^{m+2}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) \leq 1.$$

Применим двойственность Пуанкаре–Лefшеца; тогда получим равенства

$$h^0(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = \dots = h^{m-1}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = 0, \quad h^m(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = 1$$

и неравенство

$$h^{m+1}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) \leq 1.$$

Рассмотрим теперь длинную точную последовательность когомологий пары топологических пространств $(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V)$

$$\cdots \rightarrow H^i(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) \rightarrow H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V) \rightarrow H^{i+1}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) \rightarrow \cdots. \quad (1.6)$$

Из нее вытекает неравенство

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) \leq N + 1.$$

С другой стороны, если $N + 1 = 2k$, то (см., например, [1])

$$\sum_{i \geq 0} h^i(V) = 4(k^2 - k).$$

(Заметим, что последнее равенство можно получить из формулы Хирцебруха, которая приведена, например, в [8, приложение 1].) Получаем противоречие с равенством

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) = \sum_{i \geq 0} h^i(V).$$

Итак, равенство $I_{\min} = m + 1$ доказано, т. е. доказано утверждение 1) леммы. Осталось заметить, что из равенства нулю гомоморфизма ограничения (1.3) при $i \geq I_{\min}$ и леммы 1.2 вытекает утверждение 2). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Из леммы 1.3 следуют неравенства (0.5). Также из леммы 1.3 получаем, что $\Omega_j = \emptyset$ при $j \leq m$ и $\Omega_j \neq S^2$ при $j = m + 1$. Поэтому из спектральной последовательности (1.5) вытекают равенства

$$h^{m+4}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) = \cdots = h^{2m}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{R}V) = 0.$$

Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца; тогда получим следующие равенства:

$$h^0(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = \cdots = h^{m-1}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = 0.$$

Следовательно, из точной последовательности (1.6) вытекают равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \cdots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1. \quad (1.7)$$

Поэтому, чтобы полностью доказать равенства (0.6), остается проверить, что

$$h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p. \quad (1.8)$$

Для этого покажем сначала, что выполняются равенства

$$h^0(\Omega_m) = h^2(\Omega_{m+2}) = 0, \quad h^1(\Omega_{m+1}) = n. \quad (1.9)$$

Первые два равенства следуют из соотношений $\Omega_m = \emptyset$, $\Omega_{m+2} \neq S^2$. Чтобы доказать третье равенство, рассмотрим образ множества Ω_{m+1} при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Отображение

$$\pi: \Omega_{m+1} \rightarrow \pi(\Omega_{m+1})$$

является гомеоморфизмом. Каждая связная компонента множества $\pi(\Omega_{m+1}) \subset \mathbb{RP}^2$ снаружи ограничена одним четным овалом, а внутри – несколькими нечетными. Верно также обратное утверждение, т. е. связная компонента множества $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RC}$, ограниченная снаружи четным овалом, содержится во множестве $\pi(\Omega_{m+1})$. Поэтому выполняются равенства $h^1(\Omega_{m+1}) = h^1(\pi(\Omega_{m+1})) = n$. Итак, равенства (1.9) доказаны. Докажем теперь равенства (1.8).

Из спектральной последовательности (1.5), равенств (1.9) и двойственности Пуанкаре–Лефшеца получаем равенство

$$h^m(\mathbb{RP}^N, \mathbb{RV}) = n.$$

Применим точную последовательность (1.6), равенство $h^{m-1}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{RV}) = 0$ и утверждение 2) леммы 1.3. Тогда получим равенство

$$h^{m-1}(\mathbb{RV}) = n + 1.$$

Итак, первое из равенств (1.8) доказано, переходим к доказательству второго равенства.

Поскольку выполняются равенства

$$\begin{aligned} h^0(\Omega_{m+1}) &= h^0(\pi(\Omega_{m+1})) = p, \\ h^1(\Omega_{m+2}) &= h^0(S^2 \setminus \Omega_{m+2}) - 1 = h^0(\Omega_{m+1}) - 1 = p - 1, \\ h^2(\Omega_{m+3}) &= h^2(S^2) = 1, \end{aligned}$$

из спектральной последовательности (1.5) следует, что если дифференциал

$$d_2^{0,m+1} : E_2^{0,m+1} = H^0(\Omega_{m+2}) \rightarrow E_2^{2,m} = H^2(\Omega_{m+3}) \quad (1.10)$$

равен нулю, то выполняется равенство

$$h^{m+2}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{RV}) = 2p,$$

в противном случае

$$h^{m+2}(\mathbb{RP}^N \setminus \mathbb{RV}) = 2p - 1.$$

Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца, точную последовательность (1.6) и утверждение 2) леммы 1.3. Тогда получим, что если дифференциал (1.10) равен нулю, то выполняется равенство $h^m(\mathbb{RV}) = 2p$, в противном случае $h^m(\mathbb{RV}) = 2p - 1$.

Применим равенства (1.7). Тогда получим, что если дифференциал (1.10) равен нулю, то выполняется равенство

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{RV}) = 2p + 2n + 2m, \quad (1.11)$$

в противном случае

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{RV}) = 2p + 2n + 2m - 1.$$

Поскольку триквадрика V является M -многообразием, выполняется равенство

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) = 4(k^2 - k).$$

Однако последнее равенство будет иметь место только тогда, когда выполняется равенство (1.11) и спектральная кривая C является M -кривой. Таким образом, утверждение 1) теоремы 0.1 полностью доказано, переходим к доказательству утверждения 2).

Прежде всего заметим, что из неравенств (0.5) вытекает равенство $I_{\min} = m + 1$, так как вещественная часть M -кривой C непустая. Из предыдущих вычислений с помощью спектральной последовательности (1.5), двойственности Пуанкаре–Лефшеца и точной последовательности (1.6) получаем, что выполняются равенства (1.7), а гомоморфизм ограничения (1.3) не равен нулю при $0 \leq i \leq m - 1$ и равен нулю при $i \geq m + 1$ в силу леммы 1.1. Предыдущие вычисления показывают, что для чисел $h^{m-1}(\mathbb{R}V)$, $h^m(\mathbb{R}V)$, гомоморфизма ограничения

$$H^m(\mathbb{R}\mathbb{P}^N) \rightarrow H^m(\mathbb{R}V) \quad (1.12)$$

и дифференциала (1.10) формально могут реализоваться следующие случаи.

(i) Гомоморфизм (1.12) не равен нулю, а дифференциал (1.10) равен нулю. Тогда выполняются равенства

$$h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p.$$

(ii) Гомоморфизм (1.12) не равен нулю и дифференциал (1.10) не равен нулю. Тогда выполняются равенства

$$h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p - 1.$$

(iii) Гомоморфизм (1.12) равен нулю и дифференциал (1.10) равен нулю. Тогда выполняются равенства

$$h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p - 1.$$

(iv) Гомоморфизм (1.12) равен нулю, а дифференциал (1.10) не равен нулю. Тогда выполняются равенства

$$h^{m-1}(\mathbb{R}V) = n, \quad h^m(\mathbb{R}V) = 2p - 2.$$

Поскольку справедливо сравнение

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) \equiv 4(k^2 - k) \pmod{2},$$

то случаи (ii) и (iii) не реализуются. Осталось заметить, что в случае (i) триквадрика V будет M -многообразием, а в случае (iv) триквадрика V будет $(M - 2)$ -многообразием.

Утверждение 2) теоремы доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Из доказательства утверждения 2) теоремы 0.1 следует, что при выполнении условий этого утверждения триквадрика V будет $(M-2)$ -многообразием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих дополнительных условий:

- 1) гомоморфизм (1.12) нулевой;
- 2) дифференциал (1.10) не равен нулю;
- 3) выполняется равенство $h^m(\mathbb{R}V) = 2p - 2$.

§ 2. Достаточные условия максимальности триквадрики

В этом параграфе мы докажем теорему 0.3 в случае, когда в вещественной схеме (0.8) число r равно 1. Доказательство в общем случае требует более громоздких обозначений, но не отличается от доказательства в частном случае. Рассмотрим стандартное двулистное накрытие $\pi: S^N \rightarrow \mathbb{R}P^N$. Прообраз многообразия $\mathbb{R}V$ при этом накрытии обозначим через W . Тогда существует спектральная последовательность (см. [6]), в которой при $j > 1$

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j}, \Omega_{N-j-1}) \Rightarrow H^{i+j}(S^N \setminus W). \quad (2.1)$$

В работе [6] дано описание дифференциала

$$d_2^{i,j}: E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j}, \Omega_{N-j-1}) \rightarrow E_2^{i+2,j-1} = H^{i+2}(\Omega_{N-j+1}, \Omega_{N-j}), \quad (2.2)$$

которое мы сейчас приведем. Обозначим через

$$\delta^{i,j}: H^i(\Omega_{N-j}, \Omega_{N-j-1}) \rightarrow H^{i+1}(\Omega_{N-j+1}, \Omega_{N-j})$$

кограничный гомоморфизм в длинной точной последовательности когомологий тройки пространств $(\Omega_{N-j+1}, \Omega_{N-j}, \Omega_{N-j-1})$. На множестве $\Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$ рассмотрим векторное расслоение F_j , слой которого $(F_j)_\lambda$, где $\lambda \in \Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$, равен подпространству пространства $\mathbb{R}^{N+1}$, натянутому на собственные векторы матрицы квадратичной формы $q_\lambda(X)$, отвечающие отрицательным собственным значениям этой матрицы. Первый класс Штифеля–Уитни расслоения F_j обозначим через ω_j . Тогда выполняется равенство (см. [6])

$$d_2^{i,j}(\xi) = \omega_{N-j+1} \cup \delta^{i,j}(\xi) + \delta^{i+1,j}(\omega_{N-j} \cup \xi), \quad (2.3)$$

где $\xi \in E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{N-j}, \Omega_{N-j-1})$.

Покажем теперь, что справедлива

ЛЕММА 2.1. Пусть вещественная спектральная кривая C вещественной триквадрики V четной размерности $2t > 0$ имеет вещественную схему $\langle 1\langle\alpha\rangle \rangle \sqcup \langle \beta \rangle$, причем выполняются неравенства (0.5). Тогда вещественная часть $\mathbb{R}L$ спектрального расслоения L тривиальна на нечетных овалах кривой $\mathbb{R}C$, если и только если выполняется одно из следующих условий:

- 1) дифференциал $d^{0,m+1}$ в спектральной последовательности (2.1) равен нулю;
- 2) дифференциал $d^{0,m+2}$ в спектральной последовательности (2.1) равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что число четных овалов p равно $\beta + 1$, а число нечетных овалов n равно α . Кривая $\Gamma = \pi^{-1}(\mathbb{R}C) \subset S^2$ разбивает сферу на открытые области, которые мы обозначили так, как указано на левой части рис. 1. (Заметим, что на рис. 1 изображена только полусфера.) В силу неравенств (0.5) можно считать, что функция $I(\lambda)$ принимает значения так, как указано на правой части рис. 1, с точностью до замены значения $m + 1$ на $m + 3$ и наоборот, в этом случае нужно заменить обозначение соответствующей компоненты B_j на Y_j и наоборот, причем если B_1 заменяется на Y_1 , то нужно заменить все A_j на X_j и наоборот. (Заметим, что функция $I(\lambda)$ на компонентах кривой Γ однозначно определяются в силу ее полунепрерывности снизу.)

Рис. 1

Расслоение $\pi^*(\mathbb{R}L)$ на кривой Γ будем обозначать просто через $\mathbb{R}L$. Расслоение $F_{m+2}|_{A_j}$, $j = 1, \dots, n$, продолжается непрерывно на границу ∂A_j , если полагать, что при $\lambda \in \partial A_j$ слой $(F_{m+2})_\lambda$ равен подпространству пространства $\mathbb{R}^{N+1}$, натянутому на собственные векторы матрицы квадратичной формы q_λ , отвечающие неположительным собственным значениям. Тогда выполняется равенство

$$F_{m+2}|_{\partial A_j} = F_{m+1}|_{\partial A_j} \oplus \mathbb{R}L|_{\partial A_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Аналогично, расслоение $F_{m+3}|_{Y_1}$ продолжается непрерывно на границу ∂Y_1 , причем выполняется равенство

$$F_{m+3}|_{\partial X_j} = F_{m+2}|_{\partial X_j} \oplus \mathbb{R}L|_{\partial X_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Обозначим через w первый класс Штифеля–Уитни линейного расслоения $\mathbb{R}L$. Тогда из равенств (2.4), (2.5) получаем следующие равенства:

$$\omega_{m+2}|_{\partial A_j} = \omega_{m+1}|_{\partial A_j} + w|_{\partial A_j}, \quad \omega_{m+3}|_{\partial X_j} = \omega_{m+2}|_{\partial X_j} + w|_{\partial X_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку расслоения $F_{m+2}|_{A_j}$, $F_{m+2}|_{X_j}$ тривиальны, из последних равенств получаем следующие равенства:

$$\omega_{m+1}|_{\partial A_j} = w|_{\partial A_j}, \quad \omega_{m+3}|_{\partial X_j} = w|_{\partial X_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Имеют место следующие разложения пространств когомологий:

$$H^0(\Omega_{m+1}, \Omega_m) = H^0(\bar{B}_1) \oplus \cdots \oplus H^0(\bar{B}_p), \quad (2.7)$$

$$H^0(\Omega_{m+2}, \Omega_{m+1}) = H^0(\bar{X}_1) \oplus \cdots \oplus H^0(\bar{X}_n), \quad (2.8)$$

$$H^2(\Omega_{m+2}, \Omega_{m+1}) = H^2(\bar{A}_1, \partial A_1) \oplus \cdots \oplus H^2(\bar{A}_n, \partial A_n), \quad (2.9)$$

$$H^2(\Omega_{m+3}, \Omega_{m+2}) = H^2(\bar{Y}_1, \partial Y_1) \oplus \cdots \oplus H^2(\bar{Y}_p, \partial Y_p). \quad (2.10)$$

Заметим, что каждое слагаемое в правых частях равенств (2.7)–(2.10) является одномерным $\mathbb{F}_2$ -пространством. Базисные элементы одномерных пространств $H^0(\bar{B}_i)$, $H^0(\bar{X}_j)$ будем обозначать через b_i^0 , x_j^0 соответственно, где $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$. Аналогично, базисные элементы одномерных пространств $H^2(\bar{Y}_i, \partial Y_i)$, $H^2(\bar{A}_j, \partial A_j)$ обозначаем через y_i^2 , a_j^2 соответственно. Покажем теперь, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} d_2^{0,m+2}(b_1^0) &= w([\partial A_1])a_1^2 + \cdots + w([\partial A_n])a_n^2, \\ d_2^{0,m+2}(b_2^0) &= \cdots = d_2^{0,m+2}(b_p^0) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$d_2^{0,m+1}(x_1^0) = w([\partial X_1])y_1^2, \quad \dots, \quad d_2^{0,m+1}(x_n^0) = w([\partial X_n])y_1^2. \quad (2.12)$$

Классы когомологий $d_2^{0,m+2}(b_2^0), \dots, d_2^{0,m+2}(b_p^0)$ принадлежат пространству $H^2(\bar{Z}, \partial B_1 \cup \cdots \cup \partial B_p)$, которое равно нулю. Следовательно, классы когомологий $d_2^{0,m+2}(b_2^0), \dots, d_2^{0,m+2}(b_p^0)$ равны нулю.

Обозначим через a_i^1 , $i = 1, \dots, n$, класс когомологий из пространства $H^1(\bar{B}_1)$, удовлетворяющий условиям $a_i^1([\partial A_j]) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, n$, где $[\partial A_j]$ – класс гомологий из пространства $H_1(\bar{B}_1)$. Через x_j^1 обозначим класс когомологий из пространства $H^1(\bar{Y}_1, \partial Y_1)$, двойственный классу гомологий $[\partial X_j] \in H_1(\bar{Y}_1)$, $j = 1, \dots, n$.

Класс когомологий $d_2^{0,m+2}(b_1^0)$ принадлежит пространству

$$H^2(\bar{A}_1, \partial A_1) \oplus \cdots \oplus H^2(\bar{A}_n, \partial A_n)$$

и по формуле (2.3) равен сумме

$$\delta^{1,m+2}(\omega_{m+1}([\partial A_1])a_1^1) + \cdots + \delta^{1,m+2}(\omega_{m+1}([\partial A_n])a_n^1).$$

Поскольку $\delta^{1,m+2}(a_j^1) = a_j^2$, после применения равенств (2.6) получаем первую формулу в равенствах (2.11). Таким образом, все равенства (2.11) доказаны, переходим к доказательству равенств (2.12).

Класс когомологий $d_2^{0,m+1}(x_j^0)$ принадлежит пространству $H^2(\bar{Y}_1, \partial Y_1)$ и по формуле (2.3) равен $\omega_{m+3} \cup \delta^{1,m+1}(x_j^0)$. Поскольку $\delta^{1,m+1}(x_j^0) = x_j^1$, после применения равенств (2.6) получаем равенства (2.12). Остается заметить, что лемма вытекает из равенств (2.11), (2.12). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Сначала докажем, что если спектральная кривая C триквдрики V является M -кривой, имеет вещественную схему $\langle 1\langle \alpha \rangle \rangle \sqcup \langle \beta \rangle$, а вещественная часть $\mathbb{R}L$ спектрального расслоения L тривиальна на нечетных овалах, то триквдрика V является M -многообразием.

Прежде всего заметим, что из леммы 2.1 следует равенство нулю дифференциалов $d^{0,m+1}$, $d^{0,m+2}$ в спектральной последовательности (2.1). Поэтому выполняются равенства

$$h^{m+2}(S^N \setminus W) = h^0(\Omega_{m+1}, \Omega_m) + h^1(\Omega_{m+2}, \Omega_{m+1}) + h^2(\Omega_{m+3}, \Omega_{m+2}) = 4p - 2.$$

Применим двойственность Александра–Понтрягина; тогда получим равенство

$$h^m(W) = 4p - 2. \quad (2.13)$$

Рассмотрим длинную точную последовательность двулистного накрытия $\pi: W \rightarrow \mathbb{R}V$

$$\dots \rightarrow H^m(\mathbb{R}V) \rightarrow H^m(W) \rightarrow H^m(\mathbb{R}V) \rightarrow \dots$$

Из этой точной последовательности и равенства (2.13) вытекает неравенство

$$h^m(\mathbb{R}V) \geq 2p - 1.$$

Следовательно, триквадрика V не может быть $(M - 2)$ -многообразием (см. замечание 1.4). Поэтому в силу теоремы 0.1 триквадрика V является M -многообразием.

Теперь покажем, что если триквадрика V является M -многообразием, а ее спектральная кривая C имеет вещественную схему $\langle 1\langle \alpha \rangle \rangle \sqcup \langle \beta \rangle$, то вещественная часть $\mathbb{R}L$ спектрального расслоения L тривиальна на нечетных овалах кривой $\mathbb{R}C$.

Заметим, что из определения спектральных последовательностей (1.5), (2.1) в работах [1], [5], [6] вытекает, что существует канонический гомоморфизм этих спектральных последовательностей

$$(E_r^{i,j}(S^N \setminus W), d_r^{i,j}) \rightarrow (E_r^{i,j}(\mathbb{R}\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{R}V), d_r^{i,j})$$

такой, что предельный гомоморфизм $E_\infty^{i,j}(S^N \setminus W) \rightarrow E_\infty^{i,j}(\mathbb{R}\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{R}V)$ присоединен к гомоморфизму

$$H^{i+j}(S^N \setminus W) \rightarrow H^{i+j}(\mathbb{R}\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{R}V),$$

называемому *трансфером*, а гомоморфизм вторых членов

$$E_2^{i,j}(S^N \setminus W) \rightarrow E_2^{i,j}(\mathbb{R}\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{R}V)$$

совпадает с гомоморфизмом $H^i(\Omega_{N-j}, \Omega_{N-j-1}) \rightarrow H^i(\Omega_{N-j})$. Поэтому диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Omega_{m+2}, \Omega_{m+1}) & \longrightarrow & H^0(\Omega_{m+2}) \\ \downarrow d_2^{0,m+1} & & \downarrow d_2^{0,m+1} \\ H^2(\Omega_{m+3}, \Omega_{m+2}) & \longrightarrow & H^2(\Omega_{m+3}) \end{array} \quad (2.14)$$

коммутативна. Из формул (2.12) следует, что пространства $d_2^{0,m+1}(H^0(\overline{X}_j))$, $j = 1, \dots, n$, содержатся в одномерном подпространстве

$$H^2(\overline{Y}_1, \partial Y_1) \subset H^2(\Omega_{m+3}, \Omega_{m+2}).$$

Поскольку нижний гомоморфизм в диаграмме (2.14) отображает изоморфно одномерное пространство $H^2(\bar{Y}_1, \partial Y_1)$ на одномерное пространство $H^2(\Omega_{m+3})$, из равенства нулю правого дифференциала в диаграмме (2.14) следует равенство нулю левого дифференциала. Осталось применить лемму 2.1. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь вещественные триквадрики размерности $2m - 1$. Сначала покажем, что для индекс-функции $I(\lambda)$ M -триквадрики выполняются неравенства $m \leq I(\lambda) \leq m + 3$. Достаточно проверить неравенство $I(\lambda) \geq m$. Каждое M -многообразие является GM -многообразием. С другой стороны, вещественное неособое полное пересечение $V \subset \mathbb{P}^N$ размерности $2m - 1$ будет GM -многообразием тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения

$$H^{m-1}(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^{m-1}(\mathbb{R}V)$$

не равен нулю (см., например, [9]). Осталось применить лемму 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.7. Можно считать, что первоначальная кривая C является спектральной кривой связки квадрики, а функция $I(\lambda)$ поочередно принимает два значения $m + 1$, $m + 2$. На левой части рис. 2 показано распределение значений функции $I(\lambda)$.

Рис. 2

Тогда из спектральной последовательности (1.5) и двойственности Пуанкаре–Лефшеца получаем равенства

$$h^0(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = \dots = h^{m-1}(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) = 0$$

и неравенства

$$p + n \leq h^m(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) \leq p + n + 1,$$

где p , n – число четных и нечетных овалов в $\mathbb{R}C$. Поскольку кривая C является M -кривой, последнее двойное неравенство можно записать следующим образом:

$$g \leq h^m(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V) \leq g + 1.$$

Рассмотрим длинную точную последовательность когомологий (1.6) пары топологических пространств $(\mathbb{RP}^N, \mathbb{R}V)$. Из предыдущих равенств и неравенств получаем равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1$$

и неравенства

$$g \leq h^{m-1}(\mathbb{R}V) \leq g + 2.$$

Если $N = 2k$, то $m = k - 1$, $g = 2k^2 - k$. Следовательно, выполняются неравенства

$$4(k^2 - 1) \leq \sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) \leq 4(k^2 - 1) + 4,$$

причем если левое неравенство становится равенством, то $h^{m-1}(\mathbb{R}V) = g$. С другой стороны, имеет место равенство (см., например, [1])

$$\sum_{i \geq 0} h^i(V) = 4(k^2 - 1).$$

(Заметим, что это равенство можно получить из формулы Хирцебруха, которая приведена, например, в [8, приложение 1].) Осталось применить неравенство Гарнака–Смита–Тома. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.8. Из леммы 1.1 следует, что гомоморфизм

$$H^m(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^m(\mathbb{R}V)$$

равен нулю. Мы можем считать, что первоначальная кривая C является спектральной кривой связки квадраки, а функция $I(\lambda)$ принимает значения m , $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$ так, как указано на правой части рис. 2 (где взято значение $r = 1$).

Применим спектральную последовательность (1.5), двойственность Пуанкаре–Лефшеца и точную последовательность (1.6). Тогда получим равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-2}(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^{m-1}(\mathbb{R}V) = g.$$

Предложение доказано.

§ 3. Приложение: тэта-характеристики M -кривой

Здесь мы докажем предложение 0.5, но сначала приведем общие факты о тэта-характеристиках комплексной кривой (см. подробности, например, в [10]).

Пусть $\text{Pic } X$ – группа Пикара, т. е. группа классов изоморфизма комплексных линейных расслоений на кривой X рода $g > 0$. Тогда определен гомоморфизм

$$\deg: \text{Pic } X \rightarrow \mathbb{Z}$$

с помощью равенства

$$c_1(L) = \deg(L)[X]^*.$$

Положим

$$\mathrm{Pic}^{(n)} X = \deg^{-1}(n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда $\mathrm{Pic}^{(n)} X$ является комплексным многообразием, биголоморфным многообразию Якоби кривой X . Если K – каноническое расслоение на кривой X , то K принадлежит многообразию $\mathrm{Pic}^{(2g-2)} X$. Элемент $L \in \mathrm{Pic}^{(g-1)} X$ называется *тэта-характеристикой* кривой X , если выполняется равенство $L^{\otimes 2} = K$. Через Σ обозначается множество тэта-характеристик, которое разбивается на четную и нечетную части: $\Sigma = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$, в зависимости от четности числа $\dim H^0(X, L)$.

На множестве Σ канонически определена структура аффинного пространства с подлежащим линейным пространством $H^1(X, \mathbb{F}_2)$. Действительно, группа элементов второго порядка ${}_2\mathrm{Pic} X$ группы Пикара равна $\mathbb{F}_2$ -пространству

$$H^1(X, \mu_2) = H^1(X, \mathbb{F}_2),$$

поэтому для двух точек $L_1, L_2 \in \Sigma$ определен вектор

$$\overline{L_1 L_2} \in H^1(X, \mathbb{F}_2),$$

если положить $\overline{L_1 L_2} = L_2 \otimes L_1^{-1} \in {}_2\mathrm{Pic} X$.

Наоборот, если $a \in H^1(X, \mathbb{F}_2)$ и $L_a \in {}_2\mathrm{Pic} X$ – соответствующий элемент, то определен параллельный перенос на вектор a по правилу $L \mapsto L \otimes L_a$.

Напомним теперь, как выбор симплектического базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ группы $H_1(X, \mathbb{Z})$ определяет четную тэта-характеристику $L_{(\alpha, \beta)}$. Возьмем базис голоморфных 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_g$ на X такой, что

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g,$$

и положим

$$\Omega_{ij} = \int_{\beta_i} \omega_j, \quad i, j = 1, \dots, g.$$

Тогда матрица $\Omega = (\Omega_{ij})$ будет симметрической, причем ее мнимая часть положительно определена. Следовательно, можно рассмотреть на $\mathbb{C}^g$ тэта-функцию Римана

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i {}^t n \Omega n + 2\pi i {}^t n z\},$$

где $n \in \mathbb{Z}^g$, $z \in \mathbb{C}^g$ записаны в виде столбцов. Благодаря квазипериодичности функции $\theta(z, \Omega)$ относительно сдвигов на векторы из решетки $\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g \subset \mathbb{C}^g$ уравнение $\theta(z, \Omega) = 0$ определяет гиперповерхность $\Theta_{(\alpha, \beta)}$ на многообразии Якоби

$$\mathrm{Pic}^{(0)} X = \mathrm{Jac} X = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g.$$

С другой стороны, на многообразии $\mathrm{Pic}^{(g-1)} X$ внутренним образом определена гиперповерхность Θ как множество точек $L \in \mathrm{Pic}^{(g-1)} X$ таких, что $\dim H^0(X, L) > 0$. Тэта-дивизоры $\Theta_{(\alpha, \beta)}$, Θ связаны между собой следующим образом. Существует единственная четная тэта-характеристика $L_{(\alpha, \beta)}$ такая, что $\Theta = \Theta_{(\alpha, \beta)} \otimes L_{(\alpha, \beta)}$.

Теперь мы можем написать условие четности тэта-характеристики $L \in \Sigma$. Обозначим тэта-характеристику $L_{(\alpha, \beta)}$ через $\mathcal{L}_0$, и пусть $\alpha_1^*, \dots, \alpha_g^*, \beta_1^*, \dots, \beta_g^*$ – двойственный по Пуанкаре базис $H^1(X, \mathbb{Z})$. Тогда имеем разложение

$$\overline{\mathcal{L}_0 L} = \sum_{i=1}^g \delta_i \alpha_i^* + \sum_{i=1}^g \varepsilon_i \beta_i^*,$$

где $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Тэта-характеристика $L \in \Sigma$ будет четной тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{i=1}^g \delta_i \varepsilon_i \equiv 0 \pmod{2}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 0.5. На рассматриваемой M -кривой X имеется вещественная структура (антиголоморфная инволюция) $\tau: X \rightarrow X$. Вещественная группа Пикара $\text{Pic}(X, \tau)$ равна группе классов изоморфизма вещественных линейных расслоений на (X, τ) . Напомним, что вещественное линейное расслоение на (X, τ) – это комплексное линейное расслоение L на X с вещественной структурой $\varphi: L \rightarrow L$ (антиголоморфной инволюцией) такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\tau} & X \end{array}$$

причем инволюция $\varphi: L \rightarrow L$ действует антилинейно на слоях. Если (L, φ) – вещественное линейное расслоение на (X, τ) , то отображение $L^\varphi \rightarrow X^\tau$ задает $\mathbb{R}$ -линейное расслоение на вещественной части $\mathbb{R}X$ кривой X . Это расслоение мы обозначаем через $\mathbb{R}L$.

Заметим, что группа $\text{Pic}(X, \tau)$ равна подгруппе $(\text{Pic } X)^{\tau^*} \subset \text{Pic } X$. Покажем, что на M -кривой X имеются только вещественные тэта-характеристики, т. е. выполняется равенство $\Sigma \cap (\text{Pic } X)^{\tau^*} = \Sigma$.

Возьмем симплектический базис $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ такой, что

$$\alpha_1 = [X_{i_1}], \dots, \alpha_g = [X_{i_g}], \quad \tau^*(\beta_1) = -\beta_1, \dots, \tau^*(\beta_g) = -\beta_g,$$

где предполагается, что на компонентах $X_{i_1}, \dots, X_{i_g}$ выбрана ориентация. Тогда тэта-характеристика $\mathcal{L}_0 = L_{(\alpha, \beta)}$ вещественная, так как тэта-дивизоры $\Theta_{\alpha, \beta}$, Θ будут вещественными гиперповерхностями. С другой стороны, инволюция

$$\tau^*: H^1(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X, \mathbb{F}_2)$$

тривиальна для M -кривой X . Следовательно, инволюция $\tau^*: \Sigma \rightarrow \Sigma$ тривиальна.

Заметим, что справедливо следующее утверждение. Если $a \in H^1(X, \mathbb{F}_2) \subset \text{Pic}(X, \tau)$ и L_a – соответствующее вещественное линейное расслоение, то выполняется равенство

$$w_1(\mathbb{R}L_a) = a|_{\mathbb{R}X}, \quad (3.2)$$

где $w_1(\mathbb{R}L_a)$ – первый класс Штифеля–Уитни расслоения $\mathbb{R}L_a$.

Пусть $w_1(\mathbb{R}\mathcal{L}_0)|_{X_{i_k}} = \varepsilon_k \cdot [X_{i_k}]^*$, где $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, \dots, g$. Тогда положим

$$a = \sum_{k=1}^g \varepsilon_k \cdot \beta_k^*$$

и рассмотрим тэту-характеристику $\mathcal{L}$, равную $\mathcal{L}_0 \otimes L_a$. Для этой тэта-характеристики выполняется условие (3.1), поэтому $\mathcal{L}$ четная. Из равенства (3.2) следует, что

$$w_1(\mathbb{R}\mathcal{L})|_{X_{i_k}} = 0$$

при $k = 1, \dots, g$. Предложение доказано.

Список литературы

1. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On the number of components of a complete intersection of real quadrics*, arXiv:0806.4077v2.
2. В. В. Никулин, “О компонентах связности модулей вещественных поляризованных КЗ-поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 99–122; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On the connected components of moduli of real polarized K3-surfaces”, *Izv. Math.*, **72**:1 (2008), 91–111.
3. I. V. Dolgachev, *Topics in classical algebraic geometry*. I, www.math.lsa.umich.edu/~idolga/topics.pdf.
4. A. C. Dixon, “Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **5** (1902), 350–351.
5. А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Homology of intersections of real quadrics”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 493–496.
6. А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Topology of quadratic maps and hessians of smooth maps”, *J. Soviet Math.*, **49**:3 (1990), 990–1013.
7. В. А. Краснов, “Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 716–746; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Characteristic classes of vector bundles on a real algebraic variety”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:1 (1992), 703–730.
8. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1966.
9. В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM-многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Real algebraic GM-varieties”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 465–491.
10. Г. Клеменс, *Мозаика теории комплексных кривых*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: С. Н. Clemens, *A scrapbook of complex curve theory*, Plenum, New York–London, 1980.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
10.03.2009