Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, Функциональные модели несамосопряженных операторов, сильно непрерывные полугруппы и матричные веса Макенхаупта, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 69–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:39:52

УДК 517.98+517.518

Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин

Функциональные модели несамосопряженных операторов, сильно непрерывные полугруппы и матричные веса Макенхаупта

Рассмотрены неограниченные непрерывно обратимые операторы A, A_0 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ такие, что оператор $A^{-1} - A_0^{-1}$ конечномерен. При условии, что $\sigma(A_0) = \emptyset$ и полугруппа $V_+(t) := \exp\{iA_0 t\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 , формулируются критерии того, что полугруппы $U_{\pm}(t) := \exp\{\pm iAt\}$, $t \geq 0$, также принадлежат классу C_0 . Указаны приложения к теории периодических в среднем функций. Исследования опираются на функциональные модели несамосопряженных операторов и на технику матричных весов Макенхаупта.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: C_0 -полугруппы, функциональные модели несамосопряженных операторов, матричные веса Макенхаупта, гильбертовы пространства целых функций.

Введение

Настоящая статья посвящена решению следующей задачи теории возмущений однопараметрических полугрупп операторов в гильбертовых пространствах. Пусть A, A_0 – линейные неограниченные плотно заданные и непрерывно обратимые операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, которые связаны равенством

$$A^{-1}h = A_0^{-1}h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)g_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (0.1)$$

где $f_k, g_k \in \mathfrak{H}$, $1 \leq k \leq n$, и скобки обозначают скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Далее предполагается, что системы векторов $\{f_k\}_{k=1}^n, \{g_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы и оператор A_0 удовлетворяет следующим условиям:

- 1) он не имеет спектра и генерирует C_0 -полугруппу $V_+(t) := \exp\{iA_0 t\}$, $t \geq 0$;
- 2) целая оператор-функция $(A_0 - zI)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип роста.

Класс операторов A_0 , которые удовлетворяют указанным условиям 1), 2), будем обозначать через $\Sigma^{(\exp)}$.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке в рамках Госбюджетной темы Украины (грант № 0107U000937). Работа второго автора выполнена при поддержке Национального научного фонда США (гранты DMS-0405526, DMS-0338743, DMS-0354339, DMS-0754705). Оба автора получали поддержку CRDF (грант UP1-2567-0D-03).

Конечномерные возмущения (0.1), вообще говоря, существенно изменяют свойства оператора $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$. В частности, к операторам A неприменимы общие теоремы теории возмущений однопараметрических полугрупп [1]–[7]. Поэтому значительный интерес представляет задача об описании таких n -мерных возмущений, что оператор A , связанный с A_0 равенством (0.1), генерирует C_0 -полугруппу $U_+(t) := \exp\{iAt\}$ или C_0 -полугруппу $U_-(t) := \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$.

В настоящей статье мы выделяем класс конечномерных возмущений вида (0.1) и развиваем технику, основанную на использовании функциональных моделей несамосопряженных операторов и матричных весов Макенхаупта, которая позволит решить сформулированные задачи о полугруппах $U_{\pm}(t)$. Упомянутый класс конечномерных возмущений оператора $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$ определяется следующим образом. По оператору A_0 и векторам $\{g_k\}_{k=1}^n$ построим n -мерную строку

$$\mathcal{A}_0(z, h) := \text{row}\{(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (0.2)$$

и примем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть операторы A , A_0 связаны равенством (0.1). Будем говорить, что A – w -возмущение ранга n оператора $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$, если существует $(n \times n)$ -матричный (A_2) -вес w^2 (см. § 1) такой, что выполняются условия:

- 1) для каждого $h \in \mathfrak{H}$ функция $\|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$;
- 2) существует константа $m > 0$ такая, что

$$m\|h\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|^2 dx$$

для всех $h \in \mathfrak{H}$.

Основную задачу о полугруппах $U_{\pm}(t)$ мы будем решать в классе w -возмущений операторов A_0 . Изложим причины, по которым рассмотрение w -возмущений представляется естественным.

Во-первых, в случае $n = 1$ условие того, что оператор есть w -возмущение, фактически является необходимым для принадлежности полугруппы $U_-(t)$ классу C_0 . В самом деле, пусть оператор A , обратный к которому задается формулой

$$A^{-1}h = A_0^{-1}h + (h, f)g, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad A_0 \in \Sigma^{(\exp)},$$

генерирует C_0 -полугруппу $U_-(t)$, и пусть $\varphi(z) := 1 - z(A_0(A_0 - zI)^{-1}g, f)$ – целая функция, удовлетворяющая условиям

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\varphi(iy)| = a, \quad \limsup_{y \rightarrow -\infty} |y^{-1}| \log |\varphi(iy)| = 0,$$

где через a обозначен экспоненциальный тип резольвенты $(A_0 - zI)^{-1}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) вес $w^2(x) := \|A_0(A_0 - xI)^{-1}g\|^2$ удовлетворяет скалярному (A_2) -условию Макенхаупта [8];

б) существуют положительные константы m , M такие, что

$$m\|h\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)|^2 dx \leq M\|h\|_{\mathfrak{H}}^2,$$

где в полном соответствии с (0.2) имеем

$$A_0(z, h) = (A_0(A_0 - zI)^{-1}g, h), \quad w^2(x) = \|A_0(A_0 - xI)^{-1}g\|^2.$$

Оба эти результата доказаны в работе [9, теорема 2.1, предложение 4.2, теорема 4.4]). Таким образом, в случае одномерного возмущения указан скалярный (A_2) -вес w^2 , относительно которого A есть w -возмущение ранга 1.

Во-вторых, в настоящей работе приведены случаи, когда условие того, что оператор есть w -возмущение ранга n , является необходимым для принадлежности полугруппы $\exp\{-iAt\}$ классу C_0 . Речь идет о плотно заданных операторах $\tilde{A}$ вида

$$(\tilde{A})^{-1}h = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)g_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (0.3)$$

где B – такой диссипативный оператор с n -мерной мнимой частью $\text{Im } B$, что $\sigma(B) = \{0\}$, $\text{Ker } B = \{0\}$. Обозначим через $\Theta(z)$ характеристическую матрицу-функцию оператора B (см. § 1). В статье доказано следующее утверждение (теорема 3.4). Пусть в формуле (0.3) векторы $\{f_k\}_{k=1}^n$ образуют базис пространства несамосопряженности $(\text{Im } B)\mathfrak{H}$, и пусть также полугруппа $\exp\{-i\tilde{A}t\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 . Тогда если при некотором $\delta > 0$ матрица-функция $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в верхней полуплоскости, то оператор $\tilde{A}$ является w -возмущением ранга n оператора $A_0 := (B^*)^{-1}$ класса $\Sigma^{(\exp)}$.

Таким образом, из сформулированных утверждений следует, что при изучении полугруппы $U_-(t)$ условие того, что оператор A вида (0.1) является w -возмущением оператора A_0 , существенно и от него, вообще говоря, отказаться нельзя.

Формально основными результатами статьи являются теоремы 2.3, 3.2, дающие описание в классе w -возмущений генераторов полугрупп $U_{\pm}(t)$ со свойством C_0 . Вместе с тем в статье доказан ряд вспомогательных результатов, представляющих самостоятельный интерес. В частности, подход к описанию генераторов с помощью интегральных оценок норм резольвент (теорема 2.1) может быть использован для решения и других задач теории возмущения полугрупп, например задачи об описании C_0 -полугрупп $\exp\{\pm iAt\}$, если в формуле (0.1) считать A_0^{-1} произвольным антидиссипативным оператором с конечномерной мнимой частью и дискретным спектром.

Статья состоит из введения и четырех параграфов. В § 1 доказан ряд вспомогательных результатов, которые используются на протяжении всей статьи. Здесь доказывается, что каждое w -возмущение A , кроме матричного (A_2) -веса w^2 , который фигурирует в определении 0.1, порождает также внутреннюю в области $\text{Im } z > 0$ целую матрицу-функцию $\Theta(z)$. Доказывается также (теорема 1.5), что w -возмущение A подобно оператору $\tilde{A}$ вида (0.3), в котором оператор B^* в модельном пространстве $\mathcal{K}_{\Theta} := H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus \Theta H_+^2(\mathbb{C}^n)$ действует по формуле

$$(B^*h)(z) = z^{-1}(h(z) - \Theta(z)h(0)), \quad h \in \mathcal{K}_{\Theta},$$

векторы g_k , $1 \leq k \leq n$, каноническим образом определяются по весу w^2 . Следовательно, этот результат позволяет свести общую задачу о полугруппах к рассмотрению специальных возмущений модельных операторов.

В § 2, 3 доказаны основные теоремы 2.3, 3.2, которые дают описание генераторов C_0 -полугрупп $U_{\pm}(t)$. Обе теоремы формулируются в терминах внутренней матрицы-функции Θ и веса w^2 , которые отвечают w -возмущению A ,

а также в терминах целой матрицы-функции $\Phi(z)$ с элементами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_j, f_k), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

В теоремах 2.3, 3.2 необходимые условия совпадают с достаточными, если дополнительно предположить, что при некотором $\delta > 0$ матрица-функция $e^{-iz\delta}\Theta(z)$ ограничена в верхней полуплоскости. Мы предполагаем, что это условие в классе всех w -возмущений существенно и от него, вообще говоря, отказаться нельзя.

Несмотря на схожесть формулировок теорем 2.3, 3.2, они решают принципиально разные задачи. В теореме 3.2 речь идет о полугруппе $U_+(t)$ при наличии полугруппы $V_+(t)$, $t \geq 0$, а в теореме 2.3 дается критерий существования $U_-(t)$, в то время как полугруппы $V_-(t) := \exp\{-iA_0t\}$ не существует. Этим обстоятельством объясняется также существенные различия в доказательствах обеих теорем.

В §4 рассматриваются примеры применений основных теорем работы. В частности, если в качестве A взять оператор дифференцирования в L_2 -пространстве вектор-функции, заданной на отрезке, область определения которого задается некоторой системой функционалов, то приходим к полугруппам сдвигов вдоль специальных продолжений вектор-функций за пределы отрезка. На этом факте основано применение теорем о полугруппах к решению специальных систем интегро-дифференциальных уравнений со сдвигом аргумента.

Ограниченные рамки статьи не позволили рассмотреть задачи спектрального анализа w -возмущений, перечень которых приведен, например, в обзоре [10]. Мы ограничились лишь формулировкой следствий из теорем 2.3, 3.2 о подобии диссипативному (антидиссипативному) модельному оператору. Дальнейшее исследование модельных операторов дает возможность получить ответы на ряд естественных вопросов спектральной теории (условия полноты и базисности семейств корневых векторов, методы суммирования спектральных разложений, формулы для экспоненциальных типов полугрупп $U_{\pm}(t)$ и др. [10]).

Настоящая статья, как и ее краткое изложение [11], посвящается столетию М. Г. Крейна; воспоминания о годах, проведенных рядом с ним, навсегда останутся в нашей памяти.

На протяжении всей работы мы используем следующие обозначения: $\mathbb{C}_{\pm}$ – верхняя, нижняя полуплоскости; $H_{\pm}^2(\mathbb{C}^n)$ – класс Харди $\mathbb{C}^n$ -значных вектор-функций (столбцов) в областях $\mathbb{C}_{\pm}$; $*H_{\pm}^2(\mathbb{C}^n)$ – классы Харди $\mathbb{C}^n$ -значных вектор-функций (строк).

Для неотрицательного почти всюду $(n \times n)$ -матричного веса w^2 через $L_2^n(w^2)$ обозначается лебегово пространство $\mathbb{C}^n$ -значных функций (столбцов) $f(x)$ с нормой

$$\int_{\mathbb{R}} (w^2(x)f(x), f(x))_{\mathbb{C}^n} dx < \infty.$$

Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ считается евклидовым. В случае $w^2(x) \equiv E_n$ (единичная матрица) используются обозначения $L_2^n(\mathbb{R})$ и $L_2^n(0, a)$, если вектор-функции рассматриваются на $[0, a]$. Аналогичные пространства $\mathbb{C}^n$ -значных вектор-функций (строк) обозначаются через $*L_2^n(w^2)$, $*L_2^n(\mathbb{R})$, $*L_2^n(0, a)$.

Для ограниченного оператора B обозначим $\text{Im } B = (B - B^*)/(2i)$. Оператор B называется *диссипативным* (*антидиссипативным*), если $\text{Im } B \geq 0$ ($\text{Im } B \leq 0$).

Через tA обозначается транспонированная матрица A .

§ 1. Вспомогательные результаты и редукция основной задачи

1.1. В этом пункте мы изложим ряд фактов о матричных (A_2) -весах Макенхаупта, которые будут использоваться на протяжении всей статьи.

В дальнейшем произвольный $(n \times n)$ -матричный вес на вещественной оси удобно обозначать через w^2 .

Матричное условие (A_2) состоит в том, что [12]

$$\sup_{\Delta} \{ \| (Mw^2)^{1/2} (Mw^{-2})^{1/2} \| \} < \infty,$$

где

$$Mw^{\pm 2} := \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} w^{\pm 2}(x) dx,$$

Δ – произвольный интервал вещественной оси, $|\Delta|$ – его длина.

Из условия (A_2) легко выводится, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(\det w^2(x))^{\pm 1/n}}{1+x^2} dx < \infty.$$

Этот факт лежит в основе следующей теоремы о факторизации (A_2) -весов Макенхаупта.

ТЕОРЕМА А [12], [13]. Пусть w^2 – произвольный матричный (A_2) -вес на $\mathbb{R}$. Тогда существует аналитическая в области $\mathbb{C}_+$ (соответственно, $\mathbb{C}_-$) матрица-функция w_+ (соответственно, w_-), имеющая почти всюду на $\mathbb{R}$ некасательные граничные значения $w_+(x-i0)$ (соответственно, $w_-(x-i0)$) такие, что выполняются следующие условия:

1) имеют место факторизации

$$w^2(x) \stackrel{n.в.}{=} w_+^*(x+i0)w_+(x+i0) \stackrel{n.в.}{=} w_-^*(x-i0)w_-(x-i0), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (1.1)$$

2) функция $\det w_+(z)$ ($\det w_-(z)$) является внешней [8] в $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$);

3) элементы матриц-функций $w_+(z)(z+i)^{-1}$ и $w_-(z)(z-i)^{-1}$ принадлежат классам Харди H_+^2 и H_-^2 соответственно;

4) обе факторизации из (1.1) единственны с точностью до постоянных левых унитарных множителей.

Заметим, что вес Макенхаупта $w^2(x)$ допускает также факторизацию вида

$$w^2(x) \stackrel{n.в.}{=} \dot{w}_+(x+i0)\dot{w}_+^*(x+i0) \stackrel{n.в.}{=} \dot{w}_-(x-i0)\dot{w}_-^*(x-i0), \quad (1.2)$$

где матрицы-функции $\dot{w}_+$, $\dot{w}_-$ обладают аналогичными свойствами. В частности, матрицы-функции $\dot{w}_+$, $\dot{w}_-$ определяются с точностью до правых постоянных унитарных множителей.

Как и в скалярном случае, матричные веса Макенхаупта связаны со свойствами преобразования Гильберта в весовых пространствах. Напомним, что в пространствах вектор-функций преобразование Гильберта действует покординатно.

ТЕОРЕМА В [12]. Преобразование Гильберта

$$(\mathcal{H}f)(x) := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad f(t) = \text{col}(f_k(t))_{k=1}^n,$$

ограничено в пространстве $L_2^n(w^2)$ тогда и только тогда, когда матричный вес w^2 удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$.

Сформулированные результаты позволяют ввести весовые классы Харди в областях $\mathbb{C}_\pm$. Пусть w^2 – произвольный матричный (A_2) -вес Макенхаупта на $\mathbb{R}$, $H_\pm^2(\mathbb{C}^n)$ – векторные классы Харди. Класс Харди $H_+^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ состоит из вектор-функций F (столбцов) таких, что $w_+(z)F(z) \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$, причем норма определяется формулой

$$^w\|F\|_+^2 := \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} \|w_+(x+iy)F(x+iy)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx.$$

Аналогично, весовой класс Харди $H_-^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ состоит из вектор-функций F таких, что $w_-(z)F(z) \in H_-^2(\mathbb{C}^n)$, с нормой

$$^w\|F\|_-^2 := \sup_{y<0} \int_{\mathbb{R}} \|w_-(x+iy)F(x+iy)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx.$$

Отметим, что в последних формулах $w_\pm$ – матрицы-функции, входящие в факторизации (1.1) веса w^2 .

Факторизации (1.2) также порождают весовые классы Харди вектор-функций (строк). Вектор-функция $F = \text{row}(F_k)_{k=1}^n$ принадлежит классу Харди ${}^*H_\pm^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ тогда и только тогда, когда

$$F(z)\mathring{w}_\pm(z) \in {}^*H_\pm^2(\mathbb{C}^n).$$

Кроме того, нормы в этих классах также вводятся формулами

$$^w\|F\|_\pm^2 := \|F(z)\mathring{w}_\pm(z)\|_\pm^2,$$

где $\|\cdot\|_\pm^2$ – стандартная норма в классах Харди ${}^*H_\pm^2(\mathbb{C}^n)$.

В следующей теореме мы сформулируем свойства весовых классов Харди. Все перечисленные в этом пункте результаты либо содержатся в [12], либо несложно выводятся из теоремы В.

ТЕОРЕМА С. Пусть w^2 – произвольный матричный (A_2) -вес на $\mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) каждая вектор-функция $F \in H_+^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$, имеет почти всюду некасательные предельные значения $F(x+i0)$, принадлежащие пространству $L_2^n(w^2)$;

2) для каждой функции $f \in L_2^n(w^2)$ интеграл Коши

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-z} dx, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

принадлежит $H^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ и справедлива оценка

$$^w\|F\|_+^2 \leq C \int_{\mathbb{R}} (w^2(x)f(x), f(x))_{\mathbb{C}^n} dx$$

с некоторой константой C ;

3) каждая функция $F \in H_+^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ связана со своими граничными значениями $F(x+i0)$ формулой

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+i0)}{x-z} dx, \quad z \in \mathbb{C}_+;$$

4) пространства $H_{\pm}^2(\mathbb{C}^n, w^2)$ отождествляются с подпространствами в $L_2^n(w^2)$, причем существуют ограниченные проекторы

$$\mathcal{P}_{\pm} f := \frac{1}{2}(f \pm \mathcal{H}f)$$

и в соответствии с этим имеет место прямое разложение

$$L_2^n(w^2) = H_+^2(\mathbb{C}^n, w^2) \dot{+} H_-^2(\mathbb{C}^n, w^2).$$

Ясно, что справедливы аналоги теорем А–С для пространств вектор-функций (строк) $*L_2^n(w^2)$, $*H_{\pm}^2(\mathbb{C}^n, w^2)$.

1.2. Напомним, что целая $(n \times n)$ -матрица-функция Θ называется *внутренней* в $\mathbb{C}_+$, если выполняются условия

$$\Theta(z)\Theta^*(z) - E_n \leq 0, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad \Theta(x)\Theta^*(x) - E_n = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где E_n – единичная матрица. Далее рассматриваются *чистые* внутренние матрицы Θ , т.е. такие, что $\|\Theta(ic)\| < \|c\|$ для всех $c \in \mathbb{C}^n$. Кроме того, будем считать, что выполняется условие нормировки $\Theta(0) = E_n$. Рассмотрим в модельном пространстве целых вектор-функций (столбцов)

$$\mathcal{K}_{\Theta} := H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus \Theta H_+^2(\mathbb{C}^n)$$

ограниченный оператор

$$(Bh)(z) = z^{-1}(h(z) - h(0)), \quad h \in \mathcal{K}_{\Theta}. \quad (1.3)$$

Нетрудно проверить, что

$$(B^*h)(z) = z^{-1}(h(z) - \Theta(z)h(0)), \quad h \in \mathcal{K}_{\Theta}. \quad (1.4)$$

Оператор B обладает следующими свойствами:

- 1) $\sigma(B) = \{0\}$, $\text{Ker } B = \{0\}$;
- 2) $\dim(\text{Im } B)\mathcal{K}_{\Theta} = n$;
- 3) $\text{Im } B \geq 0$ (диссипативность).

Сформулируем теперь основной результат о функциональной модели несамосопряженного оператора, который обладает свойствами 1)–3). Пусть оператор $\mathring{B}$, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, диссипативен и имеет n -мерную мнимую часть:

$$\frac{1}{i}(\mathring{B} - \mathring{B}^*)h = \sum_{k=1}^n (h, \varphi_k) \varphi_k, \quad h \in \mathfrak{H}. \quad (1.5)$$

Матрица-функция Θ , элементы которой определяются формулой

$$\Theta_{jk}(z) = \delta_{kj} + iz((I - z\mathring{B})^{-1}\varphi_k, \varphi_j), \quad 1 \leq k, j \leq n, \quad (1.5')$$

называется *характеристической матрицей-функцией* оператора $\mathring{B}$. Если спектр $\mathring{B}$ сосредоточен только в нуле, то $\Theta(z)$ является целой, внутренней и чистой.

ТЕОРЕМА D. Пусть $\mathring{B}$ – произвольный диссипативный оператор со спектром в нуле, тривиальным ядром и n -мерной мнимой частью, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathring{B}$ унитарно эквивалентен модельному оператору B вида (1.3) в пространстве $\mathcal{K}_{\Theta}$, где Θ – характеристическая матрица-функция оператора $\mathring{B}$.

Все перечисленные в этом пункте факты можно найти в [12]–[15] (в [14] излагается аналог теории для сжатий).

1.3. Через $\mathcal{M}_n^2$ в дальнейшем обозначается множество $(n \times n)$ -матричных (A_2) -весов Макенхаупта на $\mathbb{R}$. Далее, множество всех целых внутренних в $\mathbb{C}_+$ чистых матриц-функций Θ , удовлетворяющих условию $\Theta(0) = E_n$, обозначим через J_n . Условимся также, что $\mathbb{P}_\Theta$ – ортопроектор из $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ на модельное подпространство $\mathcal{K}_\Theta$.

Пусть $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. В пространстве $\mathcal{K}_\Theta$ введем векторы g_k^Θ , $1 \leq k \leq n$, с помощью формул

$$(I + iB^*)^{-1}g_k^\Theta = \mathbb{P}_\Theta \frac{w_+^k(x + i0)}{x + i}, \quad (1.6)$$

где B^* определяется формулой (1.4), w_+ – матрица-функция из факторизации (1.1), $w_+^k(z)$ – k -й столбец матрицы $w_+(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$. Определение векторов g_k^Θ корректно, поскольку $w_+^k(z)(z + i)^{-1} \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$ (теорема А).

ЛЕММА 1.1. *Для всех $z \in \mathbb{C}_+$ имеют место формулы*

$$(I + zB^*)^{-1}g_k^\Theta = \mathbb{P}_\Theta \frac{w_+^k(x + i0)}{x + z}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (1.4) легко выводится формула для резольвенты:

$$(I + zB^*)^{-1}g_k^\Theta = \frac{\lambda g^\Theta(\lambda) + z\Theta(\lambda)\Theta^{-1}(-z)g^\Theta(-z)}{z + \lambda}, \quad g^\Theta \in \mathcal{K}_\Theta. \quad (1.7)$$

Поскольку

$$(I + zB^*)^{-1}(I + iB^*)h = z^{-1}((z - i)(I + zB^*)^{-1}h + ih),$$

с учетом (1.7) получим

$$(I + zB^*)^{-1}(I + iB^*)h = \frac{\lambda + i}{\lambda + z}h(\lambda) + \frac{z - i}{\lambda + z}\Theta(\lambda)\Theta^{-1}(-z)h(-z).$$

Полагая здесь $h = \mathbb{P}_\Theta u_k$, где $u_k(\lambda) = w_+^k(\lambda)(\lambda + i)^{-1}$, и учитывая (1.6), найдем

$$(I + zB^*)^{-1}g_k^\Theta = \frac{\lambda + i}{\lambda + z}\mathbb{P}_\Theta u_k + \frac{z - i}{\lambda + z}\Theta(\lambda)\Theta^{-1}(-z)(\mathbb{P}_\Theta u_k)(-z), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Заметим, что имеют место представления $\mathbb{P}_\Theta u_k - u_k = \Theta(\lambda)h_k(\lambda)$, где $h_k \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Поэтому приходим к равенствам

$$(I + zB^*)^{-1}g_k^\Theta = \frac{\lambda + i}{\lambda + z}u_k(\lambda) + \Theta(\lambda)\left(\frac{\lambda + i}{\lambda + z}h_k(\lambda) + \frac{z - i}{\lambda + z}\Theta^{-1}(-z)(\mathbb{P}_\Theta u_k)(-z)\right),$$

из которых вытекает утверждение леммы:

$$(I + zB^*)^{-1}g_k^\Theta = \mathbb{P}_\Theta \frac{x + i}{x + z}u_k(x + i0) = \mathbb{P}_\Theta \frac{w_+^k(x + i0)}{x + z}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

По матрице-функции $\Theta \in J_n$ и весу $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ в модельном пространстве $\mathcal{K}_\Theta$ построим отображение

$$\mathcal{B}(z, h) := -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{row}((I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, h)_{k=1}^n, \quad (1.8)$$

где оператор B^* и векторы g_k^Θ , $1 \leq k \leq n$, имеют прежний смысл. Заметим, что это отображение каждой целой вектор-функции $h \in \mathcal{K}_\Theta$ ставит в соответствие целую вектор-функцию $\mathcal{B}(z, h)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\mathcal{B}(z, h)$ – преобразование вида (1.8), порожденное парой $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n$. Тогда существует такая константа M , что для всех вектор-функций $h \in \mathcal{K}_\Theta$ выполнено

$$\|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{B}(x, h)w^{-2}(x), \mathcal{B}(x, h))_{\mathbb{C}^n} dx \leq M\|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного вектора $h(\lambda) = \text{col}(h_k(\lambda))_{k=1}^n \in \mathcal{K}_\Theta$ из леммы 1.1 следует, что для любого $z \in \mathbb{C}_-$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} ((I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, h) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\mathbb{P}_\Theta \frac{w_+^k(x+i0)}{x-z}, h \right)_{\mathcal{K}_\Theta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sum_{j=1}^n w_+^{jk}(x+i0)\overline{h_j(x)}}{x-z} dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{B}(z, h) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h^*(x)w_+(x+i0)}{x-z} dx, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (1.9)$$

где введено обозначение $h^*(z) = \text{row}(\overline{h_k(\bar{z})})_{k=1}^n$. Заметим, что если $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, то $w^{-2} \in \mathcal{M}_n^2$. Кроме того, функция $h^*(x)w_+(x+i0)$ принадлежит пространству строк ${}^*L_2^n(w^{-2})$. В силу аналога теоремы C для строк проектор $\mathcal{P}_-$ из ${}^*L_2(w^{-2})$ на ${}^*H_+^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$ записываются в виде $\mathcal{P}_- = \frac{1}{2}(I - \mathcal{H})$. Поэтому, устремляя z к $u \in \mathbb{R}$ некасательно в (1.9), получим

$$\mathcal{B}(u, h) = \frac{1}{2}h^*(u)w_+(u+i0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h^*(x)w_+(x+i0)}{x-u} dx$$

для каждого $h \in \mathcal{K}_\Theta$. Следовательно,

$$\mathcal{B}(z, h)w_+^{-1}(u+i0) = \frac{1}{2}h^*(u) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h^*(x)w_+(x+i0)}{x-u} dx w_+^{-1}(u+i0). \quad (1.10)$$

Поскольку $w^2(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} w_+^*(x+i0)w_+(x+i0)$, из теоремы B легко вытекает ограниченность взвешенного преобразования Гильберта:

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{H}(h^*(x)w_+(x+i0))w_+^{-1}(u+i0)\|_{\mathbb{C}^n}^2 du \leq M_1 \int_{\mathbb{R}} \|h^*(u)\|_{\mathbb{C}^n}^2 du.$$

Поэтому из равенства (1.10) следует оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}(u, h)w_+^{-1}(u+i0)\|_{\mathbb{C}^n}^2 du &\leq M \int_{\mathbb{R}} \|h^*(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx = M \int_{\mathbb{R}} \|h(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \\ &= M\|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2. \end{aligned}$$

Перепишем теперь (1.10) с учетом равенства $\frac{1}{2}\mathcal{H} = \mathcal{P}_+ - \frac{1}{2}I$, где $\mathcal{P}_+$ – проектор из ${}^*L_2^n(w^{-2})$ на ${}^*H_+^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$. Мы получим равенство

$$\mathcal{B}(u, h)w_+^{-1}(u+i0) = h^*(u) - (\mathcal{P}_+h^*(x)w_+(x+i0))w_+^{-1}(u+i0), \quad (1.11)$$

слагаемые правой части которого ортогональны. Действительно, поскольку $h \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$, то $h^* \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n)$. Кроме того, из аналога теоремы C для строк следует, что

$$(\mathcal{P}_+h^*w_+(x+i0))w_+^{-1}(u+i0) \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n).$$

Таким образом, справедлива следующая оценка снизу:

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}(u, h)w_+^{-1}(u+i0)\|_{\mathbb{C}^n}^2 du \geq \int_{\mathbb{R}} \|h^*(u)\|_{\mathbb{C}^n}^2 du = \|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2,$$

тем самым теорема доказана.

В простейшем случае

$$\Theta(z) = e^{iaz} E_n, \quad a > 0, \quad w^2(x) \equiv E_n, \quad x \in \mathbb{R},$$

модельное пространство $\mathcal{K}_\Theta = H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus e^{iaz} H_+^2(\mathbb{C}^n)$ в силу теоремы Винера–Пэли [8] совпадает с множеством функций вида

$$h(z) = \int_0^a e^{izt} f(t) dt, \quad f = \text{col}(f_k)_{k=1}^n, \quad f \in L_2^n(0, a).$$

Поскольку $w_+(x + i0) \equiv E_n$, $x \in \mathbb{R}$, из формулы (1.9) следует, что

$$\mathcal{B}(z, h) = \int_0^a e^{-izt} f^*(t) dt = h^*(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, в этом простейшем случае отображение $\mathcal{B}(x, h)$ является изометрией.

Следующая теорема описывает образ преобразования (1.8).

ТЕОРЕМА 1.2. *Целая вектор-функция $\mathcal{F}(z) := \text{row}(f_k(z))_{k=1}^n$ тогда и только тогда представима в виде¹*

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{B}(z, h) \quad (1.12)$$

с некоторой функцией $h \in \mathcal{K}_\Theta$, когда $\mathcal{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\mathcal{F}(x)w_+^{-1}(x + i0)\Theta(x) \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$;
- 2) $\mathcal{F}(x)w_-^{-1}(x + i0) \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ допускает представление (1.12). Тогда из формулы (1.9) следует, что

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{P}_-(h^*(x)w_+(x + i0)),$$

т. е. $\mathcal{F} \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n, w_-^{-2})$. Если учесть, что равенство

$$w_-^{-2}(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} w_-^{-1}(x - i0)(w_-^{-1}(x - i0))^*$$

является факторизацией вида (1.2), то из определения весовых классов Харди (см. п. 1.1) следует условие 2). Далее, поскольку $h \in \mathcal{K}_\Theta$, для любой функции $g \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$ имеем

$$0 = (h, \Theta g) = (\Theta^* h, g),$$

т. е. $\Theta^*(\bar{z})h(z) \in H_-^2(\mathbb{C}^n)$, и поэтому $h^*(z)\Theta(z) \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Умножая теперь равенство (1.11) на $\Theta(u)$ справа, заключаем, что выполняется условие 1) доказываемой теоремы.

Обратно, пусть выполнены условия 1), 2) теоремы. Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(x)w_+^{-1}(x + i0)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx < \infty,$$

имеет место ортогональное разложение

$$\mathcal{F}(x)w_+^{-1}(x + i0) = f_-(x) + f_+(x), \quad f_{\pm} \in {}^*H_{\pm}^2(\mathbb{C}^n). \quad (1.13)$$

¹Из теоремы 1.1 следует, что такое представление единственно.

Вместе с условием 1) это означает, что $f_- \Theta \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$ и, следовательно, $\Theta^*(\bar{z})f_-^*(z) \in H_-^2(\mathbb{C}^n)$, где $f_-^*(z) := \text{col}(\overline{f_-^k(\bar{z})})_{k=1}^n$, если $f_-(z) = \text{row}(f_-^k(z))_{k=1}^n$. Поэтому $h := f_-^* \in \mathcal{K}_\Theta$, и можем рассмотреть разность

$$G(z) := \mathcal{F}(z) - \mathcal{B}(z, h), \quad h = f_-^*.$$

Далее, во-первых, из (1.13) следует, что

$$\mathcal{F}(x)w_+^{-1}(x + i0) = h^*(x) + f_+(x),$$

во-вторых, из (1.11) выводим равенство

$$\mathcal{B}(x, h)w_+^{-1}(x + i0) = h^*(x) + \tilde{f}_+(x),$$

где $\tilde{f}_+$ – некоторая функция из ${}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Из двух последних равенств вытекает, что $G(x)w_+^{-1}(x + i0) \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$, т. е. $G \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$. С другой стороны, из условия 2), формулы (1.9) и равенства

$$G(x)w_-^{-1}(x - i0) = \mathcal{F}(x)w_-^{-1}(x - i0) - \mathcal{B}(x, h)w_-^{-1}(x - i0)$$

следует, что $G(x)w_-^{-1}(x - i0) \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n)$, т. е. $G \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$. Таким образом, $G = 0$, что и доказывает теорему.

Далее модельное пространство в случае $\Theta(z) = e^{iaz}E_n$, $a > 0$, будем обозначать через $\mathcal{K}_a$, т. е.

$$\mathcal{K}_a = H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus e^{iaz}H_+^2(\mathbb{C}^n).$$

Если $\Theta \in J_n$, то целая матрица-функция Θ имеет экспоненциальный тип роста. Этот факт легко вытекает, например, из теоремы Потапова [16], в силу которой Θ допускает представление в виде мультипликативного интеграла.

Для функции $\Theta \in J_n$ обозначим через $a > 0$ ее экспоненциальный тип. Тогда имеет место включение

$$\mathcal{K}_\Theta \subseteq \mathcal{K}_a, \quad (1.14)$$

из которого вытекает, что элементы произвольного пространства $\mathcal{K}_\Theta$ суть целые вектор-функции экспоненциального типа. Более того, из теоремы Винера–Пэли следует, что каждая функция $h \in \mathcal{K}_\Theta$ изображается интегралом Фурье–Лапласа:

$$h(z) = \int_0^a e^{izt} f(t) dt, \quad f = \text{col}(f_k)_{k=1}^n, \quad f_k \in L_2(0, a).$$

Заметим, что включение (1.14) есть простое следствие утверждения [17]: если a – экспоненциальный тип матрицы-функции $\Theta \in J_n$, то существует $\tilde{\Theta} \in J_n$ такая, что

$$\Theta(z)\tilde{\Theta}(z) = e^{iaz}E_n. \quad (1.15)$$

Теперь мы можем уточнить теорему 1.2 в случае $\Theta(z) = e^{iaz}E_n$, $a > 0$. Условимся обозначать оператор B^* в $\mathcal{K}_a$ через B_a^* (см. (1.4)). Векторы g_k^Θ , определенные равенствами (1.6) в пространстве $\mathcal{K}_a$, обозначим через g_k^a , $1 \leq k \leq n$. Итак, мы приведем другое описание образа преобразования

$$B_a(z, h) := -\frac{1}{2\pi i} \text{row}((I - zB_a^*)^{-1}g_k^a, h), \quad h \in \mathcal{K}_a.$$

Напомним, что индикатор роста целой функции f экспоненциального типа определяется формулой

$$h(\alpha; f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |f(re^{i\alpha})|, \quad -\pi < \alpha \leq \pi.$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Целая вектор-функция $\mathcal{F} = \text{row}(f_k(z))_{k=1}^n$ экспоненциально-го типа тогда и только тогда допускает представление*

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{B}_a(z, h)$$

с некоторой функцией $h \in \mathcal{K}_a$, когда выполняются следующие условия:

- 1) $\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}(x)w^{-2}(x), \mathcal{F}(x))_{\mathbb{C}^n} dx < \infty$;
- 2) $h(\frac{\pi}{2}, f_k) \leq a$, $h(-\frac{\pi}{2}, f_k) \leq 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}(z) = \mathcal{B}_a(z, h)$. Тогда из факторизации (1.1) и условия 2) теоремы 1.2 выводим, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(x)w_{-}^{-1}(x - i0)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}(x)w^{-2}(x), \mathcal{F}(x))_{\mathbb{C}^n} dx < \infty.$$

Далее, рассмотрим в $L_2(0, a)$ оператор интегрирования $(Jh)(t) = i \int_0^t h(s) ds$ и введем обозначение

$$\hat{h}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{izt} h(t) dt, \quad h \in L_2(0, a).$$

Простое преобразование показывает, что

$$\widehat{Jh}(z) = -(\hat{h}(z) - e^{izt}\hat{h}(0))z^{-1}.$$

Поэтому в силу (1.4) оператор B_a^* унитарно эквивалентен оператору

$$(-Jh)(t) = \text{col}(-Jh_k)_{k=1}^n, \quad h = \text{col}(h_k)_{k=1}^n,$$

в пространстве вектор-функций $L_2^n(0, a)$. Отсюда уже легко выводится условие 2) для индикаторов координат f_k вектор-функции $\mathcal{F}_k$.

Обратно, пусть выполняются условия 1), 2) теоремы. Из теоремы 1.2 следует, что достаточно установить включения

$$\mathcal{F}(x)w_{+}^{-1}(x + i0)e^{iax} \in {}^*H_{+}^2(\mathbb{C}^n), \quad \mathcal{F}(x)w_{-}^{-1}(x - i0) \in {}^*H_{-}^2(\mathbb{C}^n). \quad (1.16)$$

При каждом $\lambda \in \mathbb{C}_{-}$ оценим l_1 -норму вектора $\mathcal{F}(x)(x - \lambda)^{-1}$:

$$\left\| \frac{\mathcal{F}(x)}{x - \lambda} \right\|_1 = \left\| \frac{\mathcal{F}(x)w^{-1}(x)w(x)}{x - \lambda} \right\|_1 = |x - \lambda|^{-1} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^n g_j(x)w_{jk}(x) \right|,$$

где $g_j(x)$ – координата строки $\mathcal{F}(x)w^{-1}(x)$. Поэтому

$$\|\mathcal{F}(x)(x - \lambda)^{-1}\|_1 \leq \sqrt{n}|x - \lambda|^{-1} \left(\sum_{j=1}^n |g_j(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k,j=1}^n |w_{jk}(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку w^2 удовлетворяет матричному условию (A_2) , вес $v^2(x) := \text{Sp } w^2(x)$ является скалярным (A_2) -весом Макенхаупта [18]. Поэтому из условия 1) и теоремы A для веса v^2 следует, что [8]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(x)(x - \lambda)^{-1}\|_1 dx \\ & \leq \sqrt{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n |g_j(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} v^2(x)|x - \lambda|^{-2} dx \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

В силу условия 2) и элементарных свойств индикатора [19] вытекает, что

$$\int_0^\infty \|\mathcal{F}(iy)(iy - \lambda)^{-1} e^{i(a+\varepsilon)y}\|_1 dy < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-,$$

при каждом $\varepsilon > 0$. Таким образом, аналитическая в замыкании $\mathbb{C}_+$ вектор-функция $G_\varepsilon(z) := e^{i(a+\varepsilon)z} \mathcal{F}(z)(z - \lambda)^{-1}$ суммируема на сторонах двух углов, образованных вещественной осью и мнимой положительной полуосью. Поскольку она имеет первый порядок роста, то [20] при любом $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq \pi} \int_0^\infty \|G_\varepsilon(re^{i\alpha})\|_1 dr < \infty.$$

По теореме Седлецкого [21] координаты вектор-функции $G_\varepsilon(z)$ принадлежат классу Харди H_+^1 и поэтому [8]

$$\int_{\mathbb{R}} G_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(a+\varepsilon)x} \mathcal{F}(x)}{x - \lambda} dx = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad \varepsilon > 0.$$

Это означает, что вектор-функция $e^{i(a+\varepsilon)x} \mathcal{F}(x)$, которая в силу условия 1) принадлежит $*L_2(w^{-2})$, на самом деле (теорема C) принадлежит $*H_+^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$, т. е.

$$e^{i(a+\varepsilon)x} \mathcal{F}(x) w_+^{-1}(x + i0) \in *H_+^2(\mathbb{C}^n)$$

при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает первое включение (1.16). Применяя аналогичные рассуждения к аналитической в $\mathbb{C}_-$ вектор-функции $e^{-i\varepsilon z} \mathcal{F}(z)(z - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, мы докажем второе включение (1.16). Теорема доказана.

Для произвольного веса $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ через $\mathcal{B}_a(w^2)$ обозначим линейное множество целых вектор-функций $\mathcal{F}(z)$ экспоненциального типа, удовлетворяющих условиям 1), 2) теоремы 1.3. Из теоремы 1.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Линейное пространство $\mathcal{B}_a(w^2)$ относительно скалярного произведения*

$$(\mathcal{F}, G) := \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}(x) w^{-2}(x), G(x))_{\mathbb{C}^n} dx, \quad \mathcal{F}, G \in \mathcal{B}_a(w^2),$$

является гильбертовым пространством целых вектор-функций.

Следующее простое утверждение будет неоднократно использовано далее. Напомним, что B_a^* – оператор вида (1.4) в пространстве $\mathcal{K}_a$, g_k^a – векторы, определяемые равенствами (1.6) в случае $\Theta = e^{iaz} E_n$.

ЛЕММА 1.2. *Пусть $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, a – экспоненциальный тип матрицы-функции Θ . Тогда имеют место равенства*

$$\mathbb{P}_\Theta(I + zB_a^*)^{-1} g_k^a = (I + zB^*)^{-1} g_k^\Theta, \quad 1 \leq k \leq n, \quad z \in \mathbb{C},$$

где оператор B^ задается формулой (1.4), g_k^Θ определяются равенствами (1.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.1 в случае $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ имеем

$$(I + zB_a^*)^{-1} g_k^a = \mathbb{P}_a \frac{w_+^k(x + i0)}{x + z}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\mathbb{P}_a$ – ортопроектор из $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ на $\mathcal{K}_a$. Учитывая (1.14), применим к обеим частям последнего равенства ортопроектор $\mathbb{P}_\Theta$. Мы получим равенства

$$\mathbb{P}_\Theta(I + zB_a^*)^{-1} g_k^a = \mathbb{P}_\Theta \frac{w_+^k(x + i0)}{x + z} = (I + zB^*)^{-1} g_k^\Theta, \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые и требовалось доказать.

1.4. Для формулировки следующего результата введем обозначение

$$\tilde{w}(z) := \begin{cases} w_+(z), & z \in \mathbb{C}_+, \\ w_+(x + i0), & x \in \mathbb{R}, \\ w_-(z), & z \in \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Кроме того, положим $\mathbb{R} + i\varepsilon := \{x + i\varepsilon : x \in \mathbb{R}\}$ для любого вещественного ε .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, оператор B^* действует по формуле (1.4), векторы g_k^Θ определяются равенствами (1.6). Тогда:

1) каждой вектор-функции l на прямой $\mathbb{R} + i\varepsilon$ такой, что

$$\int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|\tilde{w}(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz < \infty, \quad l = \text{col}(l_k(z))_{k=1}^n, \quad (1.17)$$

интегральное преобразование

$$\varphi := \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \sum_{k=1}^n (I - zB^*)^{-1} g_k^\Theta l_k(z) dz \quad (1.18)$$

ставит в соответствие элемент $\varphi \in \mathcal{K}_\Theta$, причем справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2 \leq M \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|\tilde{w}(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz;$$

2) существует подпространство L функций l такое, что сужение отображения (1.18) на L биективно отображает L на $\mathcal{K}_\Theta$ и справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|\tilde{w}(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M_1 \|\varphi\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2, \quad l \in L. \quad (1.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon \geq 0$. Интегральное преобразование (1.18) первоначально определяется для финитных непрерывных вектор-функций l . Поскольку интеграл понимается как предел римановых сумм, то $\varphi \in \mathcal{K}_\Theta$. С учетом (1.18) для любого $h \in \mathcal{K}_\Theta$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |(\varphi, h)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \sum_{k=1}^n ((I - zB^*)^{-1} g_k^\Theta, h) l_k(z) dz \right|^2 \\ &= 4\pi^2 \left| \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \sum_{k=1}^n \{\mathcal{B}(z, h) w_+^{-1}(z)\}_k \{w_+(z) l_k(z)\}_k dz \right|^2, \end{aligned}$$

где $\{\cdot\}_k$ обозначает k -ю координату столбца (строки), заключенного в фигурные скобки. Поэтому

$$\begin{aligned} |(\varphi, h)|^2 &\leq 4\pi^2 \left(\int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|\mathcal{B}(z, h) w_+^{-1}(z)\|_{\mathbb{C}^n} \|w_+^{-1}(z) l(z)\|_{\mathbb{C}^n} dz \right)^2 \\ &\leq 4\pi^2 \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|\mathcal{B}(z, h) w_+^{-1}(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|w_+^{-1}(z) l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz. \end{aligned}$$

Из (1.11) и теоремы C вытекает неравенство

$$\int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|\mathcal{B}(z, h) w_+^{-1}(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq \int_{\mathbb{R} + i\varepsilon} \|h^*(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz + M \int_{\mathbb{R}} \|h^*(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx.$$

Как уже отмечалось, в силу (1.14) каждый элемент h изображается интегралом Фурье–Лапласа. Из равенства Парсеваля для преобразования Фурье следует оценка

$$\int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|h^*(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M_1(\varepsilon) \|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2,$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|\mathcal{B}(z, h)w_+^{-1}(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M_2 \|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2,$$

и мы можем вернуться к оценке скалярного произведения:

$$|(\varphi, h)|^2 \leq M_3 \|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2 \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+^{-1}(z)l(z)\|^2 dz.$$

Тем самым утверждение 1) теоремы доказано.

Шаг 2. Обозначим через L множество вектор-функций вида

$$l_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} w_+^{-1}(z) \varphi_0(z - 2i\varepsilon),$$

где φ_0 – произвольная функция из модельного пространства $\mathcal{K}_\Theta$. Нетрудно видеть, что l_0 удовлетворяет условию (1.17):

$$\int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)l_0(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \|\varphi_0(x - i\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx < \infty. \quad (1.20)$$

Вычислим теперь значение φ интегрального преобразования (1.18) для указанной функции l_0 . Для каждого $h \in \mathcal{K}_\Theta$ имеем

$$\begin{aligned} (\varphi, h)_{\mathcal{K}_\Theta} &= \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \sum_{k=1}^n ((I - zB^*)^{-1} g_k^\Theta, h) l_k^0(z) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \sum_{k=1}^n ((I - zB^*)^{-1} g_k^\Theta, h) \sum_{j=1}^n {}^{kj} w_+^{-1}(z) \varphi_0^j(z - 2i\varepsilon) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \sum_{j=1}^n \{\mathcal{B}(z, h)w_+^{-1}(z)\}_j \varphi_0^j(z - 2i\varepsilon) dz, \end{aligned}$$

где $l_0 = \text{col}(l_k^0)_{k=1}^n$, $\varphi_0 = \text{col}(\varphi_0^k)_{k=1}^n$, ${}^{kj} w_+^{-1}(z)$ – элемент матрицы $w_+^{-1}(z)$. С учетом (1.11) полученную формулу можно переписать в виде

$$(\varphi, h)_{\mathcal{K}_\Theta} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n (h_j^*(x + i\varepsilon) + \psi_j(x + i\varepsilon)) \varphi_0^j(x - i\varepsilon) dx,$$

где $h = \text{col}(h_j)_{j=1}^n$, а функции ψ_j принадлежат H_+^2 . Поэтому

$$\begin{aligned} (\varphi, h)_{\mathcal{K}_\Theta} &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n h_j^*(x + i\varepsilon) \varphi_0^j(x - i\varepsilon) dx = \int_{\mathbb{R}} (\varphi_0(x - i\varepsilon), h(x + i\varepsilon))_{\mathbb{C}^n} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi_0(x), h(x))_{\mathbb{C}^n} dx = (\varphi_0, h)_{\mathcal{K}_\Theta}. \end{aligned}$$

Заметим, что предпоследнее равенство в этой выкладке снова вытекает из представления φ_0, h в виде интегралов Фурье–Лапласа и унитарности преобразования Фурье. Таким образом, $\varphi = \varphi_0$, и оценка (1.19) легко вытекает из (1.20).

Шаг 3. Рассмотрим теперь случай прямой $\mathbb{R} - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (т.е. $\mathbb{R} + i\varepsilon$ заменяется прямой $\mathbb{R} - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в формулировке теоремы 1.4). Доказательство утверждения 1) теоремы аналогично уже изложенному. Мы снова получаем оценку

$$|(\varphi, h)|^2 \leq \pi^2 \int_{\mathbb{R} - i\varepsilon} \|\mathcal{B}(z, h)w_-^{-1}(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \int_{\mathbb{R} - i\varepsilon} \|w_-^{-1}(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz,$$

и осталось заметить, что из (1.9) и теоремы C выводится неравенство

$$\int_{\mathbb{R} - i\varepsilon} \|\mathcal{B}(z, h)w_-^{-1}(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M \|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2. \quad (1.21)$$

Утверждение 2) теоремы докажем сначала в частном случае $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Из (1.9) следует, что при любом $z \in \mathbb{C}_-$ и любом $h \in \mathcal{K}_a$

$$\mathcal{B}(z, h)w_-^{-1}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h^*(x)w_+(x + i0)}{x - z} dx w_-^{-1}(z). \quad (1.22)$$

Из теоремы Винера–Пэли вытекает представление

$$\mathcal{B}(z, h)w_-^{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-izt} G(h, t) dt, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad h \in \mathcal{K}_a, \quad (1.23)$$

где вектор-функция $G(h, t)$ принадлежит ${}^*L_2^n(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим теперь линейный оператор, который каждому $h \in \mathcal{K}_a$ ставит в соответствие сужение $\overline{G(h, t)}$ на $[0, a]$, т.е.

$$(Th)(t) = \overline{G(h, t)}, \quad 0 \leq t \leq a, \quad h \in \mathcal{K}_a. \quad (1.23')$$

Из (1.21) вытекает ограниченность оператора T из $\mathcal{K}_a$ в пространство ${}^*L_2^n(0, a)$. Докажем теперь, что оператор T ограничен снизу. Запишем равенство правых частей (1.22) и (1.23). После перехода к пределу при $z \rightarrow y$ и умножения на $w_-(y - i0)$ получим

$$\mathcal{P}_-(h^*(x)w_+(x + i0)) = \int_0^\infty e^{-iyt} G(h, t) dt w_-(y - i0).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (h^*(y) - (\mathcal{P}_+ h^*(x)w_+(x + i0))w_+^{-1}(y + i0))w_+(y + i0) \\ & - \int_0^a e^{-iyt} G(h, t) dt w_-(y - i0) = \int_a^\infty e^{-iyt} G(h, t) dt w_-(y - i0). \end{aligned}$$

Умножим обе части этого равенства на $e^{iy a}$, после чего первое слагаемое слева будет принадлежать пространству ${}^*H_+^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$, а выражение справа – пространству ${}^*H_-^2(\mathbb{C}^n, w^{-2})$. Поэтому если предположить, что $Th_n \rightarrow 0$ для некоторой последовательности $h_n \in \mathcal{K}_a$, то

$$\int_0^a e^{-iyt} G(h_n, t) dt w_-(y - i0) e^{ia y} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

в метрике пространства ${}^*L_2^n(w^{-2})$ и, стало быть,

$$e^{iy_a}(h_n^*(y) - (\mathcal{P}_+ h_n^*(x)w_+(x + i0))w_+^{-1}(y + i0)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по норме пространства строк ${}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Теперь из (1.11) следует, что $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, т. е. оператор T ограничен снизу.

Шаг 4. Докажем теперь, что образ оператора T совпадает со всем пространством ${}^*L_2^n(0, a)$. Предположим, что существует функция $f \in {}^*L_2^n(0, a)$ такая, что для всех $h \in \mathcal{K}_a$

$$0 = (G(h, t), f(t)) = \int_0^a \sum_{k=1}^n G_k(h, t) \overline{f_k(t)} dt = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}G_k)(t) \overline{(\mathcal{F}f_k)(t)} dt,$$

$$G(h, t) = \text{row}(G_k(h, t))_{k=1}^n, \quad f = \text{row}(f_k)_{k=1}^n,$$

где через $\mathcal{F}$ обозначено преобразование Фурье с ядром $\exp\{-ixt\}$. Учитывая формулы (1.23) и (1.8), получим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \{\mathcal{B}_a(x, h)w_-^{-1}(x - i0)\}_k \int_0^a e^{ixt} \overline{f_k(t)} dt dx \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n ((I - xB_a^*)^{-1}g_j^a, h)^{jk} w_-^{-1}(x - i0) \int_0^a e^{ixt} \overline{f_k(t)} dt dx \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n (I - xB_a^*)^{-1}g_j^a l_j(x) dx, h \right), \quad h \in \mathcal{K}_a. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Отметим, что в последней формуле мы ввели обозначение

$$l(x) = \text{col}(l_j(x))_{j=1}^n, \quad l_j(x) = \sum_{k=1}^n {}^{jk}w_-^{-1}(x - i0) \int_0^a e^{ixt} \overline{f_k(t)} dt. \quad (1.25)$$

Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} (w^2(x)l(x), l(x))_{\mathbb{C}^n} dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n \left| \int_0^a e^{ixt} \overline{f_k(t)} dt \right|^2 dx = 2\pi \sum_{k=1}^n \int_0^a |f_k(t)|^2 dt < \infty.$$

Поэтому из теоремы C вытекает разложение

$$l = l_+ + l_-, \quad l_{\pm} \in H_{\pm}^2(\mathbb{C}^n, w^2). \quad (1.26)$$

Для любого $h \in \mathcal{K}_a$ имеем

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n (I - xB_a^*)^{-1}g_j^a l_j^-(x) dx, h \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \{\mathcal{B}_a(h, x)w_-^{-1}(x - i0)\}_k \{w_-(x - i0)l_-(x)\}_k dx = 0, \end{aligned}$$

поскольку оба множителя под интегралом принадлежат пространству H_-^2 . Поэтому из последнего равенства, (1.24) и (1.26) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n (I - xB_a^*)^{-1}g_k^a l_k^+(x) dx = 0, \quad l_+ = \text{col}(l_k^+)_{k=1}^n,$$

где $l_+ = \mathcal{P}_+ l$, а l представима в виде (1.25). Подействуем на обе части последнего равенства оператором $B_a^*(I - \mu B_a^*)^{-1}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n B_a^*(I - \mu B_a^*)^{-1} (I - x B_a^*)^{-1} g_k^a l_k^+(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n \frac{(I - \mu B_a^*)^{-1} g_k^a - (I - x B_a^*)^{-1} g_k^a}{-x + \mu} l_k^+(x) dx. \end{aligned}$$

Если предположить, что $\mu \in \mathbb{C}_-$, отсюда выводим равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n \frac{(I - x B_a^*)^{-1} g_k^a}{x - \mu} l_k^+(x) dx = 0.$$

Таким образом, для любого $h \in \mathcal{K}_a$ и любого $\mu \in \mathbb{C}_-$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^{-1} \sum_{k=1}^n ((I - x B_a^*)^{-1} g_k^a, h) l_+^k(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^{-1} \sum_{j=1}^n \{B_a(x, h) w_+^{-1}(x + i0)\}_j \{w_+(x + i0) l_+(x)\}_j dx, \end{aligned}$$

где, как и раньше, $\{\cdot\}_j$ обозначает j -ю координату вектора, заключенного в скобки. Если теперь учесть формулу (1.11), то из последнего равенства получим

$$\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^{-1} \sum_{j=1}^n h_j^*(x) \{w_+(x + i0) l_+(x)\}_j dx = 0$$

для любого $\mu \in \mathbb{C}_-$ и любого $h \in \mathcal{K}_a$. Отсюда вытекает, что скалярное произведение $(w_+(x + i0) l_+(x), h)_{\mathbb{C}^n}$ принадлежит классу Харди H_+^1 и, стало быть,

$$\int_{\mathbb{R}} (w_+(x + i0) l_+(x), h(x))_{\mathbb{C}^n} dx = 0, \quad h \in \mathcal{K}_a.$$

Поэтому из определения модельного пространства $\mathcal{K}_a$ следует справедливость представления

$$w_+(x + i0) l_+(x) = \int_a^\infty e^{ixt} \psi(t) dt, \quad \psi = \text{col}(\psi_k)_{k=1}^n, \quad \psi_k \in L_2(a, \infty).$$

Учитывая (1.25), равенство (1.26) перепишем в виде

$$w_-^{-1}(x + i0) \int_0^a e^{ixt} \overline{f(t)} dt = w_+^{-1}(x + i0) \int_a^\infty e^{ixt} \psi(t) dt + w_-^{-1}(x - i0) F_-(x - i0), \quad (1.27)$$

где $F_- := w_-(x - i0) l_-(x) \in H_-^2(\mathbb{C}^n)$. Умножая обе части равенства (1.27) на e^{-ixa} , приходим к выводу, что

$$w_+^{-1}(x + i0) \int_a^\infty e^{ixt} \psi(t) dt = 0.$$

Теперь из (1.27) следует, что $f = 0$, т. е. оператор T отображает $\mathcal{K}_a$ на $L_2^n(0, a)$ биективно.

Шаг 5. Рассмотрим снова преобразование (1.18) в случае $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$, т. е.

$$\varphi = \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \sum_{k=1}^n (I - zB_a^*)^{-1} g_k^a l_k(z) dz. \quad (1.28)$$

Предположим, что $l(z)$ – произвольная функция вида (1.25). Таким образом, имеем представление

$$l(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w_-^{-1}(z) \int_0^a e^{izt} f(t) dt, \quad f \in L_2^n(0, a).$$

Учитывая (1.23) и определение оператора T , для любого $h \in \mathcal{K}_a$ получим

$$\begin{aligned} (\varphi, h)_{\mathcal{K}_a} &= \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \sum_{j=1}^n \{ \mathcal{B}(z, h) w_-^{-1}(z) \}_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{izt} f_j(t) dt dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n (\mathcal{F} e^{-\varepsilon t} G_j(h, t))(x) \overline{(\mathcal{F} e^{\varepsilon t} f_j(t))(x)} dx \\ &= \int_0^a \sum_{j=1}^n G_j(h, t) f_j(t) dt = (f, Th) = (T^* f, h)_{\mathcal{K}_a}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi = T^* f$, и, стало быть, имеет место оценка (1.19):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{ixt} e^{\varepsilon t} f(t) dt \right\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \\ &\leq C_1 \|f\|^2 \leq C_2 \|T^* f\|_{\mathcal{K}_a}^2 = C_2 \|\varphi\|_{\mathcal{K}_a}^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Итак утверждение 2) теоремы доказано полностью в частном случае $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$.

Пусть теперь $\Theta \in J_n$ и a – экспоненциальный тип Θ . Отображение (1.28) биективно отображает пространство L_a функций l вида (1.25) на $\mathcal{K}_a$. Поскольку $\mathcal{K}_\Theta \subseteq \mathcal{K}_a$ (см. (1.14)), то (1.28) биективно переводит $\mathcal{K}_\Theta$ в некоторое подпространство $L_\Theta \subseteq L_a$ функций l , удовлетворяющих условию (1.17). Другими словами, каждая функция $\varphi \in \mathcal{K}_\Theta$ представима в виде (1.28) с некоторой функцией $l \in L_\Theta$. Подействуем проектором $\mathbb{P}_\Theta$ на обе части (1.28) с такими φ и l . Из леммы 1.2 следует, что

$$\varphi = \mathbb{P}_\Theta \varphi = \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \sum_{k=1}^n (I - zB^*)^{-1} g_k^\Theta l_k(z) dz, \quad l = \text{col}(l_k)_{k=1}^n \in L_\Theta.$$

Заметим, что неравенство (1.19) в этом случае снова следует из (1.29). Теорема доказана.

1.5. В этом пункте мы сведем общую задачу об описании генераторов C_0 -полугрупп в множестве w -возмущений операторов класса $\Sigma^{(\text{exp})}$ к исследованию специальных конечномерных возмущений модельных операторов B^* в пространстве $\mathcal{K}_\Theta$.

Итак, пусть неограниченный плотно заданный оператор A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$ (см. введение) ранга n , т. е.

$$A^{-1}h = A_0^{-1}h + \sum_{k=1}^n (h, f_k) g_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (1.30)$$

и существует вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ такой, что $\|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|_{\mathbb{C}^n}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и справедлива оценка снизу

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx,$$

$$\mathcal{A}_0(x, h) := \text{row}\{(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n$$

с некоторой константой $m > 0$. Обозначим через a экспоненциальный тип целой оператор-функции $(A_0 - zI)^{-1}$. Поскольку A_0 генерирует C_0 -полугруппу $V_+(t) := \exp\{iA_0 t\}$, имеет место представление

$$i(A_0 - zI)^{-1} = \int_0^a e^{-izt} V_+(t) dt.$$

Если обозначить $A_0(z, h) = \text{row}(a_k(z))_{k=1}^n$, то отсюда следует, что $h(a_k, -\frac{\pi}{2}) \leq 0$, $h(a_k, \frac{\pi}{2}) \leq a$, $k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, в силу теоремы 1.3 каждая строка $A_0(z, h)$ находится в образе преобразования $\mathcal{B}_a$, т.е.

$$-\frac{1}{2\pi i} \mathcal{A}_0(z, h) = \mathcal{B}_a(z, Sh), \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (1.31)$$

где S – линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathcal{K}_a$. Из леммы Гельфанда о выпуклых функционалах [22], [23] вытекает существование константы $M > 0$ такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Поэтому из (1.31) и теоремы 1.1 для $\mathcal{B}_a(z, h)$ следует, что для любого вектора $h \in \mathfrak{H}$ имеем

$$\|h\|_{\mathfrak{H}}^2 \asymp \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}_a(z, Sh)w^{-1}(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \asymp \|Sh\|_{\mathcal{K}_a}^2.$$

Эти двусторонние оценки означают, что оператор S есть изоморфизм пространства $\mathfrak{H}$ на свой образ $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_a$. Перепишем теперь (1.31) в виде

$$((I - zA_0^{-1})^{-1}g_k, h)_{\mathfrak{H}} = ((I - zB_a^*)^{-1}g_k^a, Sh)_{\mathcal{K}_a}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.32)$$

Отсюда выводим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} ((I - zA_0^{-1})^{-1}g_k, (A_0^{-1})^*h)_{\mathfrak{H}} &= z^{-1}((I - zA_0^{-1})^{-1}g_k - g_k, h)_{\mathfrak{H}} \\ &= z^{-1}((I - zB_a^*)^{-1}g_k^a - g_k^a, Sh)_{\mathcal{K}_a} = ((I - zB_a^*)^{-1}g_k^a, B_a Sh)_{\mathcal{K}_a}, \end{aligned}$$

где $1 \leq k \leq n$, $z \in \mathbb{C}$. Поэтому образ $\mathcal{L}$ оператора S инвариантен относительно B_a и $S(A_0^{-1})^* = (B_a | \mathcal{L})S$. Известно [17], что существуют матрицы-функции $\Theta, \tilde{\Theta} \in J_n$ такие, что:

- 1) $\Theta(z)\tilde{\Theta}(z) = e^{iaz}E_n$;
- 2) $\mathcal{L} = \mathcal{K}_{\Theta}$;
- 3) $B_a | \mathcal{L}$ задается формулой (1.3).

Используя лемму 1.2, равенство (1.32) перепишем в виде

$$((I - zA_0^{-1})^{-1}g_k, h)_{\mathfrak{H}} = ((I - zB^*)^{-1}g_k^{\Theta}, Sh)_{\mathcal{K}_{\Theta}}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1.33)$$

где векторы g_k^{Θ} , $1 \leq k \leq n$, определяются равенствами (1.6). Таким образом, оператор $Q := (S^*)^{-1}$ является изоморфизмом пространства $\mathfrak{H}$ на модельное

пространство $\mathcal{K}_\Theta$, причем $B^* = QA_0^{-1}Q^{-1}$, где B^* действует по формуле (1.4) и, кроме того, $Qg_k = g_k^\Theta$, $1 \leq k \leq n$. Поэтому если A – w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$, то

$$QA^{-1}h = QA_0^{-1}h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)Qg_k = KQh, \quad h \in \mathfrak{H},$$

где оператор K определяется равенством

$$Kf = B^*f + \sum_{k=1}^n (f, f_k^\Theta)g_k^\Theta, \quad f \in \mathcal{K}_\Theta, \quad f_k^\Theta := (Q^*)^{-1}f_k.$$

Таким образом, каждое w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$ порождает пару $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, причем вес w^2 входит в определение w -возмущения, а матрица-функция Θ , как это будет доказано далее, однозначно определяется из условий:

- а) Θ – левый делитель матрицы-функции $e^{iaz}E_n$, где a – экспоненциальный тип оператор-функции $(A_0 - zI)^{-1}$;
- б) имеет место включение² $\mathcal{A}_0(x, h)w_+^{-1}(x + i0)\Theta(x) \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$ для любого $h \in \mathfrak{H}$;
- с) если Θ_1 – левый делитель $e^{iaz}E_n$, для которого также выполняется условие б), то $\Theta_1 = \Theta V$, где $V \in J_n$.

Сформулируем теперь основной результат настоящего пункта.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ неограниченный плотно заданный оператор A определяется формулой (1.30), причем A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$. Тогда оператору A отвечают матричный вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ и матрица-функция $\Theta \in J_n$, определяемая условиями а)–с), такие, что:

- 1) существует изоморфизм Q пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathcal{K}_\Theta$ такой, что выполняются равенства

$$B^* = QA_0^{-1}Q^{-1}, \quad Qg_k = g_k^\Theta, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где B^* задается формулой (1.4), g_k^Θ – векторы, определяемые равенствами (1.16) по указанным Θ , w^2 ;

- 2) $QA^{-1}Q^{-1} = K$, где оператор K определяется формулой

$$Kf = B^*f + \sum_{k=1}^n (f, f_k^\Theta)g_k^\Theta, \quad f_k^\Theta := (Q^*)^{-1}f_k, \quad f \in \mathcal{K}_\Theta. \quad (1.34)$$

Обратно, каждая пара $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ по формуле (1.34) задает оператор K , который в случае $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$ порождает w -возмущение $A := K^{-1}$ оператора $A_0 := (B^*)^{-1}$ класса $\Sigma^{(\text{exp})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В процессе доказательства первой части теоремы установлено, что для матрицы-функции Θ выполняются равенства (1.33). Поэтому в силу теоремы 1.2 выполняется условие б), а также

$$\mathcal{A}_0(x, h)w_-^{-1}(x - i0) \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n), \quad h \in \mathfrak{H}.$$

²Матрица-функция $w_+(x + i0)$ входит в факторизацию (1.1) веса w^2 .

Пусть теперь $\mathcal{A}_0(x, h)w_+^{-1}(x + i0)\Theta_1(x) \in {}^*H_+^2(\mathbb{C}^n)$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, где Θ_1 – некоторый левый делитель $e^{iaz}E_n$. Из теоремы 1.2 и леммы 1.2 выводим, что для каждого $h \in \mathfrak{H}$ существует $f_1 \in \mathcal{K}_{\Theta_1}$ такой, что

$$\begin{aligned} ((I - zA_0^{-1})^{-1}g_k, h) &= ((I - zB^*)^{-1}g_k^{\Theta_1}, f_1)_{\mathcal{K}_{\Theta_1}} \\ &= ((I - zB_a^*)^{-1}g_k^a, f_1)_{\mathcal{K}_a}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Сравнивая эти равенства с (1.32) и учитывая, что образ оператора S совпадает с $\mathcal{K}_{\Theta}$, приходим к выводу, что для любого $f \in \mathcal{K}_{\Theta}$ найдется $f_1 \in \mathcal{K}_{\Theta_1}$ такой, что

$$((I - zB_a^*)^{-1}g_k^a, f)_{\mathcal{K}_a} = ((I - zB^*)^{-1}g_k^a, f_1)_{\mathcal{K}_a}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Из теоремы 1.1 следует равенство $f = f_1$ и, стало быть, включение $\mathcal{K}_{\Theta} \subseteq \mathcal{K}_{\Theta_1}$. Отсюда легко вытекает [17], что Θ – левый делитель Θ_1 , т. е. $\Theta_1 = \Theta V$, $V \in J_n$. Таким образом, матрица-функция $\Theta \in J_n$ удовлетворяет условиям а)–с), и ясно, что этими условиями она определяется однозначно.

Вторая часть теоремы вытекает из теоремы 1.1.

§ 2. Описание генераторов

сильно непрерывных полугрупп $U_-(t) := \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$

2.1. Настоящий параграф посвящен описанию генераторов C_0 -полугрупп $U_-(t) := \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$, где A – w -возмущение некоторого оператора A_0 класса $\Sigma^{(\exp)}$. В п. 1.5 было показано, что задача сводится к исследованию операторов вида

$$Kh = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^{\Theta})g_k^{\Theta}, \quad h \in \mathcal{K}_{\Theta}, \quad (2.1)$$

которые строятся по $\Theta \in J_n$ и $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Напомним, что оператор B^* действует в $\mathcal{K}_{\Theta}$ по формуле (1.4), векторы g_k^{Θ} определяются равенствами (1.6), f_k^{Θ} – некоторые векторы из $\mathcal{K}_{\Theta}$, $1 \leq k \leq n$.

В результате простых вычислений, которые мы не приводим, получаем формулу для фредгольмовой резольвенты оператора K :

$$K(I - zK)^{-1}h = B^*(I - zB^*)^{-1}h + \sum_{k=1}^n f_k(h, z)(I - zB^*)^{-1}g_k^{\Theta}, \quad (2.2)$$

где функционалы $f_k(h, z)$ определяются формулами

$$f_k(h, z) = \sum_{j=1}^n \Psi_{kj}(z)((I - zB^*)^{-1}h, f_j^{\Theta}), \quad (2.3)$$

$$\Psi(z) := \Phi^{-1}(z), \quad \Phi_{kj}(z) := \delta_{kj} - z((I - zB^*)^{-1}g_j^{\Theta}, f_k^{\Theta}), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Отсюда вытекает, что фредгольмов спектр вполне непрерывного оператора K совпадает с последовательностью Λ корней целой функции $\Delta(z) := \det \Phi(z)$. Каждому $\lambda_k \in \Lambda$ отвечает собственное подпространство, которое состоит из векторов вида

$$h = \sum_{j=1}^n C_j(I - \lambda_k B^*)^{-1}g_j^{\Theta}, \quad \Phi(\lambda_k)C = 0, \quad C = \text{col}(C_j)_{j=1}^n.$$

Введем обозначение

$$F(h, z) = \text{col}(f_k(h, z))_{k=1}^n \quad (2.4)$$

и напомним, что матрицы w_+ , w_- взяты из факторизации (1.1) веса $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Следующая теорема играет важную роль в наших построениях.

ТЕОРЕМА 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) для всех $h \in \mathcal{K}_\Theta$ имеет место оценка

$$\int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)F(h, z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M\|h\|^2,$$

где $\varepsilon \geq 0$, M – некоторая константа;

2) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x + i\varepsilon)(w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x + i\varepsilon)$ удовлетворяет (A_2) -условию на $\mathbb{R}$.

Сформулируем также аналог этого утверждения для нижней полуплоскости.

ТЕОРЕМА 2.1'. *Следующие условия эквивалентны:*

1) для всех $h \in \mathcal{K}_\Theta$ имеет место оценка

$$\int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)F(h, z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M\|h\|^2,$$

где $\varepsilon > 0$, M – некоторая константа;

2) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x - i\varepsilon)(w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x - i\varepsilon)$ удовлетворяет (A_2) -условию на $\mathbb{R}$.

Доказательства теорем 2.1, 2.1' отличаются лишь незначительными деталями и основаны на теореме 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1'. Вычислим значение столбца $F(h, z)$ в том случае, когда

$$h = \sum_{k=1}^n \alpha_k (I - \lambda B^*)^{-1} g_k^\Theta, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad \alpha = \text{col}(\alpha_k)_{k=1}^n.$$

Поскольку

$$(I - zB^*)^{-1}(I - \lambda B^*)^{-1} = (z - \lambda)^{-1}(z(I - zB^*)^{-1} - \lambda(I - \lambda B^*)^{-1}),$$

учитывая (2.3), приходим к формуле

$$\begin{aligned} f_k(h, z) &= \sum_{j=1}^n \Psi_{kj}(z) \sum_{m=1}^n \alpha_m ((I - zB^*)^{-1}(I - \lambda B^*)^{-1} g_m^\Theta, f_j^\Theta) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \Psi_{kj}(z) (\lambda - z)^{-1} (\Phi_{jm}(z) - \Phi_{jm}(\lambda)) \alpha_m, \end{aligned}$$

которую можно переписать в векторном виде:

$$F(h, z) = (\lambda - z)^{-1} \Phi^{-1}(z) (\Phi(z) - \Phi(\lambda)) \alpha. \quad (2.5)$$

Вычислим теперь значение $F(\varphi, z)$ для вектора φ вида

$$\varphi = \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \sum_{k=1}^n (I - \lambda B^*)^{-1} g_k^\Theta l_k(\lambda) d\lambda, \quad (2.6)$$

где вектор-функция $l(\lambda) := \text{col}(l_k(\lambda))_{k=1}^n$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz < \infty.$$

Заметим, что из теоремы 1.4 следует включение $\varphi \in \mathcal{K}_\Theta$. Учитывая формулу (2.5), получим

$$F(\varphi, z) = \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} F\left(\sum_{k=1}^n (I - \lambda B^*)^{-1} g_k^\Theta l_k(\lambda), z\right) d\lambda = \Phi^{-1}(z) \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \frac{\Phi(z) - \Phi(\lambda)}{\lambda - z} l(\lambda) d\lambda.$$

Напомним также, что из теоремы 1.4 следует оценка

$$\|\varphi\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2 \leq M_1 \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz,$$

поэтому если справедлива оценка из условия 1) теоремы, то, рассматривая ее на векторах вида (2.6), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)F(\varphi, z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz &= \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \left\| w_-(z) \Phi^{-1}(z) \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \frac{\Phi(z) - \Phi(\lambda)}{\lambda - z} l(\lambda) d\lambda \right\|^2 dz \\ &\leq M \|\varphi\|^2 \leq M M_1 \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)l(z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz. \end{aligned}$$

В терминах преобразования Гильберта $\mathcal{H}$ полученное неравенство переписывается в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) \mathcal{H}l(u - i\varepsilon) - w_-(x - i\varepsilon) \Phi^{-1}(x - i\varepsilon) \mathcal{H}\Phi(u - i\varepsilon) l(u - i\varepsilon)\|^2 dx \\ \leq M_2 \int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) l(x - i\varepsilon)\|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Известно [12], что каждый вес $w_\varepsilon^2(x) := w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$, также принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$, коль скоро $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Поэтому из теоремы В следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) \mathcal{H}l(u - i\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \leq M_3 \int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) l(x - i\varepsilon)\|^2 dx,$$

и, стало быть, из (2.7) выводим неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) \Phi^{-1}(x - i\varepsilon) \mathcal{H}\Phi(u - i\varepsilon) l(u - i\varepsilon)\|^2 dx \leq M_4 \int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) l(u - i\varepsilon)\|^2 dx. \quad (2.8)$$

Для вектор-функции $f(u) := \Phi(u - i\varepsilon)l(u - i\varepsilon)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \|w_-(u - i\varepsilon) \Phi^{-1}(u - i\varepsilon) f(u)\|^2 du = \int_{\mathbb{R}} \|w_-(u - i\varepsilon) l(u - i\varepsilon)\|^2 du < \infty.$$

Неравенство (2.8) перепишем в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \|Q(x) \mathcal{H}f(u)\|^2 dx \leq M_4 \int_{\mathbb{R}} \|Q(x) f(x)\|^2 dx,$$

где введено обозначение $Q(x) = w_-(x - i\varepsilon) \Phi^{-1}(x - i\varepsilon)$. Из теоремы В следует, что вес $Q^*(x)Q(x)$, а вместе с ним и вес

$$W_\varepsilon^2(x) = \Phi(x - i\varepsilon) (w_-^*(x - i\varepsilon) w_-(x - i\varepsilon))^{-1} \Phi^*(x - i\varepsilon)$$

принадлежат классу $\mathcal{M}_n^2$.

Обратно, пусть $W_\varepsilon^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Тогда имеет место оценка (2.8), а значит, справедлива оценка (2.7). При доказательстве первой части теоремы было показано, что неравенство (2.7) можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)F(\varphi, z)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dz \leq M \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)l(z)\|^2 dz,$$

где векторы φ и l связаны равенством (2.6). Рассмотрим последнее неравенство на подпространстве L из второй части теоремы 1.4. Тогда φ – произвольный вектор модельного пространства $\mathcal{K}_\Theta$ и имеет место оценка

$$\int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z)l(z)\|^2 dz \leq M_1 \|\varphi\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2.$$

Из двух последних неравенств вытекает утверждение 1). Теорема доказана.

ЛЕММА 2.1. Если вес $W_\varepsilon^2(x) = \Phi(x + i\varepsilon)(w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x + i\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$ и матрица-функция

$$W_+(z) := \Phi(z + i\varepsilon)w_+^{-1}(z + i\varepsilon)\Theta(z + i\varepsilon), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

является внешней³ в $\mathbb{C}_+$, то имеет место оценка снизу

$$\delta \|h\|_{\mathcal{K}_\Theta}^2 \leq \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)F(h, z)\|^2 dz, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta,$$

где δ – некоторая положительная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вернемся к доказательству теоремы 1.4 для случая прямой $\mathbb{R} + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Было доказано, что если в (1.18) положить $l(z) = -\frac{1}{2\pi i}w_+^{-1}(z)\varphi_0(z - 2\varepsilon i)$, то интеграл (1.18) равен φ_0 , $\varphi_0 \in \mathcal{K}_\Theta$. Другими словами, доказано представление

$$\varphi = \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \sum_{k=1}^n (I - zB^*)^{-1} g_k^\Theta l_k(z) dz, \quad l(z) = -\frac{1}{2\pi i}w_+^{-1}(z)\varphi(z - 2\varepsilon i),$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{K}_\Theta$. Поэтому с учетом (2.5) приходим к равенству

$$\begin{aligned} F(\varphi, z) &= \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} F\left(\sum_{k=1}^n (I - \lambda B^*)^{-1} g_k^\Theta l_k(\lambda), z\right) d\lambda \\ &= \frac{\Phi^{-1}(z)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \frac{\Phi(z) - \Phi(\lambda)}{z - \lambda} w_+^{-1}(\lambda) \varphi(\lambda - 2\varepsilon i) d\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{K}_\Theta, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} w_+(x + i\varepsilon)F(\varphi, x + i\varepsilon) &= -\frac{1}{2}w_+(x + i\varepsilon)\mathcal{H}w_+^{-1}(u + i\varepsilon)\varphi(u - i\varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{2}w_+(x + i\varepsilon)\Phi^{-1}(x + i\varepsilon)\mathcal{H}\Phi(u + i\varepsilon)w_+^{-1}(u + i\varepsilon)\varphi(u - i\varepsilon). \end{aligned}$$

Заметим, что функция $f(u) := w_+^{-1}(u + i\varepsilon)\varphi(u - i\varepsilon)$ принадлежит пространству $L_2^n(v^2)$, где вес $v^2(u) := w_+^*(u + i\varepsilon)w_+(u + i\varepsilon)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$. Более того, поскольку функция $w_+(z + i\varepsilon)$ внешняя в $\mathbb{C}_+$ и

$$w_+^*(z + i\varepsilon)f(z) = \varphi(z - \varepsilon i) \in H_+^2(\mathbb{C}^n),$$

³То есть $\det W_+(z)$ – внешняя функция в $\mathbb{C}_+$.

то $f \in H_+^2(\mathbb{C}^n, v^2)$ (см. п. 1.1). Тогда в силу теоремы C справедливо равенство $\mathcal{H} = 2\mathcal{P}_+ - I$ и, следовательно,

$$-\frac{1}{2}w_+(x+i\varepsilon)\mathcal{H}w_+^{-1}(u+i\varepsilon)\varphi(u-i\varepsilon) = -\frac{1}{2}\varphi(x-i\varepsilon).$$

Аналогично, поскольку вес

$$W_\varepsilon^{-2}(x) = (w_+(u+i\varepsilon)\Phi^{-1}(u+i\varepsilon))^* (w_+(u+i\varepsilon)\Phi^{-1}(u+i\varepsilon))$$

принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$, снова можно использовать формулу $\mathcal{H} = 2\mathcal{P}_+ - I$, где $\mathcal{P}_+$ – проектор из $L_2(W_\varepsilon^{-2})$ на $H_+^2(\mathbb{C}^n, W_\varepsilon^{-2})$. Таким образом, учитывая формулу для матрицы-функции W_+ , приходим к равенству

$$w_+(x+i\varepsilon)F(\varphi, x+i\varepsilon) = -\varphi(x-i\varepsilon) + \Theta(x+i\varepsilon)W_+^{-1}(x)\mathcal{P}_+W_+(u)\Theta^{-1}(u+i\varepsilon)\varphi(u-i\varepsilon). \quad (2.9)$$

Из того, что $\Theta \in J_n$, следует формула $\Theta^{-1}(z) = \Theta^*(\bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$, и имеет место оценка $\|\Theta(z)\| \leq \exp\{a|\operatorname{Im} z|\}$, где a – экспоненциальный тип Θ [17]. Поэтому существует константа C такая, что

$$\|\Theta(x+i\varepsilon)\| \leq C, \quad \|\Theta^{-1}(x+i\varepsilon)\| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, поскольку $W_\varepsilon^2 \in \mathcal{M}_n^2$, оператор

$$\begin{aligned} W_+^{-1}(x)\mathcal{P}_+W_+(u)h(u) \\ = \Theta^{-1}(x+i\varepsilon)w_+(x+i\varepsilon)\Phi^{-1}(x+i\varepsilon)\mathcal{P}_+\Phi(u+i\varepsilon)w_+^{-1}(u+i\varepsilon)\Theta(u+i\varepsilon)h(u) \end{aligned}$$

ограничен в пространстве $L_2^n(\mathbb{R})$. Тогда в силу утверждения 2) теоремы C вектор

$$h_+(x) := W_+^{-1}(x)\mathcal{P}_+W(u)\Theta^{-1}(u+i\varepsilon)\varphi(u-i\varepsilon), \quad \varphi \in \mathcal{K}_\Theta,$$

принадлежит пространству $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ для любого $\varphi \in \mathcal{K}_\Theta$.

Докажем теперь, что слагаемые в правой части (2.9) ортогональны, т. е.

$$(\varphi(x-i\varepsilon), \Theta(x+i\varepsilon)h_+(x))_{L_2^2(\mathbb{R})} = 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}_\Theta. \quad (2.10)$$

Заметим, что множество функций $\{f_+(x+i\varepsilon): f_+ \in H_+^2(\mathbb{C}^n)\}$ всюду плотно в классе Харди $H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Поэтому достаточно доказать (2.10) для случая $h_+(x) = f_+(x+i\varepsilon)$, $f_+ \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Поскольку $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, и $\Theta(z)f_+(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, можно представить интегралом Фурье–Лапласа, из унитарности преобразования Фурье следует, что

$$(\varphi(x-i\varepsilon), \Theta(x+i\varepsilon)f_+(x+i\varepsilon)) = (\varphi(x), \Theta(x)f_+(x)) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}_\Theta.$$

Таким образом, из (2.9) вытекает оценка снизу

$$\int_{\mathbb{R}} \|w_+(x+i\varepsilon)F(\varphi, x+i\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(x-i\varepsilon)\|^2 dx \geq m \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(x)\|^2 dx,$$

что и требовалось доказать.

Напомним, что для веса $v^2 \in \mathcal{M}_n^2$ матрицы-функции v_- , v_+ входят в факторизацию (1.1). Матрица $v_-(x-i0)v_+^{-1}(x+i0)$ унитарна почти при всех $x \in \mathbb{R}$ и порождает оператор Теплица

$$Tf := \mathbb{P}_+v_-(x-i0)v_+^{-1}(x+i0)f(x), \quad f \in H_+^2(\mathbb{C}^n),$$

где $\mathbb{P}_+$ – ортопроектор из $L_2^n(\mathbb{R})$ на $H_+^2(\mathbb{C}^n)$.

ЛЕММА 2.2. *Существует константа $\delta > 0$ такая, что $\|Tf\| \geq \delta\|f\|$ для всех $f \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $v^2 \in \mathcal{M}_n^2$, оператор $Lg := v_+ \mathbb{P}_+ v_-^{-1} g$, $g \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$, ограничен в $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ [12]. Поэтому оператор

$$TLg = \mathbb{P}_+ v_- v_+^{-1} v_+ \mathbb{P}_+ v_-^{-1} g = \mathbb{P}_+ v_- \mathbb{P}_+ v_-^{-1} g$$

также ограничен в векторном классе Харди. Для всюду плотного в $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ множества векторов

$$g = c(x - \lambda)^{-1}, \quad c \in \mathbb{C}^n, \quad \operatorname{Im} \lambda < 0,$$

можем вычислить

$$\mathbb{P}_+ v_- \mathbb{P}_+ v_-^{-1} g = \mathbb{P}_+ v_- (v_-^{-1}(\lambda) c(x - \lambda)^{-1}) = v_- (\lambda) v_-^{-1}(\lambda) c(x - \lambda)^{-1} = g,$$

т.е. $\mathbb{P}_+ v_- \mathbb{P}_+ v_-^{-1} g = g$ теперь для всех $g \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Легко видеть также, что $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Поэтому из равенства $Tf = g$ следует, что $f = Lg$ и, стало быть,

$$\|f\| = \|Lg\| \leq \|L\| \|g\| = \|L\| \|Tf\|.$$

Лемма доказана.

2.2. Теперь мы можем сформулировать первый результат о полугруппах в модельном случае. Напомним, что рассматриваются операторы вида

$$Kh = B^* h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^\Theta) g_k^\Theta, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta,$$

которым отвечают пары $\Theta \in J_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Фредгольмов спектр оператора K совпадает с множеством корней целой функции $\Delta(z) = \det \Phi(z)$, где элементы целой матрицы-функции $\Phi(z)$ определяются равенствами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z((I - zB^*)^{-1} g_j^\Theta, f_k^\Theta). \quad (2.11)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются следующие условия:*

- 1) *корни функции Δ лежат под прямой $\mathbb{R} + i\varepsilon$;*
- 2) $\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\det(\Phi(iy)\Theta(iy))| = 0$;
- 3) *вес $W_\varepsilon^2(x) = \Phi(x + i\varepsilon)(w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x + i\varepsilon)$ удовлетворяет матричному условию (A_2) на $\mathbb{R}$.*

Тогда справедливы утверждения:

- a) $\operatorname{Ker} K = \operatorname{Ker} K^* = \{0\}$ и оператор $A := K^{-1}$ есть w -возмущение оператора $A_0 := (B^*)^{-1}$ класса $\Sigma^{(\exp)}$;
- b) *полугруппа $U_-(t) = \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 , причем ее экспоненциальный тип не превосходит ε .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Докажем, что матрица-функция

$$W_+(z) = \Phi(z + i\varepsilon)w_+^{-1}(z + i\varepsilon)\Theta(z + i\varepsilon), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

является внешней в $\mathbb{C}_+$. Из формулы (2.11) следует, что k -я строка матрицы $z^{-1}(E_n - \Phi(z))$ имеет вид $\mathcal{B}(z, f_k^\Theta)$, $1 \leq k \leq n$. В силу теоремы 1.2 элементы

матрицы $z^{-1}(E_n - \Phi(z))w_+^{-1}(z)\Theta(z)$ принадлежат классу H_+^2 . Поэтому элементы матрицы $(z + i)^{-1}W_+(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$ также принадлежат H_+^2 . Это свойство матрицы $W_+(z)$ обеспечивает наличие факторизации

$$W_+(z) = W_e(z)V(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где W_e – внешняя, а V – внутренняя матрицы-функции в $\mathbb{C}_+$ [13]. Переходя к определителям, получим равенство

$$\det(\Phi(z + i\varepsilon)\Theta(z + i\varepsilon)) = Q(z) \det V(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где $Q(z)$ – некоторая внешняя функция. Поскольку функция слева в последнем равенстве аналитична на вещественной оси, то $\det V(z) = e^{i\alpha z}$, $\alpha \geq 0$ [8]. Легко видеть, что из условия 2) теоремы следует, что $\alpha = 0$, т. е. матрица-функция W_+ внешняя в $\mathbb{C}_+$.

Шаг 2. Из теоремы 2.1 и леммы 2.1 вытекает двусторонняя оценка

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)F(h, z)\|^2 dz \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta. \quad (2.12)$$

Поскольку вес $w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon)$ принадлежит $\mathcal{M}_n^2$ [12], то в силу (1.1) имеем

$$w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon) \stackrel{\text{п. б.}}{=} (w_-^\varepsilon(x - i0))^*w_-^\varepsilon(x - i0), \quad x \in \mathbb{R},$$

где w_-^ε – внешняя матрица-функция в $\mathbb{C}_-$. Далее, в процессе доказательства леммы 2.1 установлено, что координаты вектор-функции $w_+(z)F(h, z)$ принадлежат классу Харди H_+^2 в области $\text{Im } z > \varepsilon$. Поэтому из леммы 2.2 выводится оценка

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)F(h, z)\|^2 dz \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{P}_+w_-^\varepsilon(x - i0)w_+^{-1}(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon)F(h, x + i\varepsilon)\|^2 dx \\ & = \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{P}_+w_-^\varepsilon(x - i0)F(h, x + i\varepsilon)\|^2 dx. \end{aligned}$$

Кроме того, из определения $w_-^\varepsilon(x - i0)$ вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{P}_+w_-^\varepsilon(x - i0)F(h, x + i\varepsilon)\|^2 dx \leq \delta \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)F(h, z)\|^2 dz.$$

Таким образом, из (2.12) следует двойное неравенство

$$\delta_1\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{P}_+w_-^\varepsilon(x - i0)F(h, x + i\varepsilon)\|^2 dx \leq \delta_2\|h\|^2. \quad (2.13)$$

Шаг 3. Докажем справедливость формулы

$$\text{col}((I - zK)^{-1}h, f_k^\Theta)_{k=1}^n = F(h, z), \quad h \in \mathcal{K}_\Theta. \quad (2.14)$$

В самом деле, из формулы (2.2) легко следует, что

$$(I - zK)^{-1}h = (I - zB^*)^{-1}h + z \sum_{k=1}^n f_k(h, z)(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta,$$

поэтому с учетом формул (2.3) найдем

$$\begin{aligned} ((I - zK)^{-1}h, f_s^\Theta) &= ((I - zB^*)^{-1}h, f_s^\Theta) + z \sum_{k=1}^n f_k(h, z)((I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, f_s^\Theta) \\ &= ((I - zB^*)^{-1}h, f_s) + \sum_{k=1}^n f_k(h, z)(\delta_{sk} - \Phi_{sk}(z)) = ((I - zB^*)^{-1}h, f_s) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n f_k(h, z)\Phi_{sk}(z) + f_s(h, z) = f_s(h, z), \quad 1 \leq s \leq n, \end{aligned}$$

что и доказывает (2.14).

В силу (2.13) оператор

$$Sh := \mathbb{P}_+ w_-^\varepsilon(x - i0)F(h, x + i\varepsilon), \quad h \in \mathcal{K}_\Theta, \quad (2.15)$$

есть изоморфизм пространства $\mathcal{K}_\Theta$ на некоторое подпространство $\mathcal{L}$ пространства Харди $H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Предполагая, что $\lambda^{-1} \notin \sigma(K)$, вычислим

$$SK(I - \lambda K)^{-1}h = \mathbb{P}_+ w_-^\varepsilon(x - i0)F(K(I - \lambda K)^{-1}h, x + i\varepsilon). \quad (2.16)$$

Из (2.14) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} F(K(I - \lambda K)^{-1}h, x + i\varepsilon) &= \text{col}\{(K(I - \lambda K)^{-1}(I - (x + i\varepsilon)K)^{-1}h, f_k^\Theta)\}_{k=1}^n \\ &= \frac{\text{col}\{((I - (x + i\varepsilon)K)^{-1}h, f_k^\Theta)\}_{k=1}^n - \text{col}\{((I - \lambda K)^{-1}h, f_k^\Theta)\}_{k=1}^n}{x + i\varepsilon - \lambda}, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta, \end{aligned}$$

при выводе которого была использована формула

$$(I - zK)^{-1} - (I - \lambda K)^{-1} = (z - \lambda)(I - \lambda K)^{-1}K(I - zK)^{-1}, \quad z^{-1}, \lambda^{-1} \notin \sigma(K).$$

Возвращаясь к (2.16), с учетом (2.14) получим

$$SK(I - \lambda K)^{-1}h = \mathbb{P}_+ w_-^\varepsilon(x - i0) \frac{F(h, x + i\varepsilon) - F(h, \lambda)}{x - (\lambda - i\varepsilon)}, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta.$$

Предположим, что $\text{Im}(\lambda - i\varepsilon) > 0$. Тогда, учитывая (2.15), можем продолжить вычисления:

$$\begin{aligned} SK(I - \lambda K)^{-1}h &= \mathbb{P}_+ w_-^\varepsilon(x - i0) \frac{F(h, x + i\varepsilon)}{x - (\lambda - i\varepsilon)} \\ &= \mathbb{P}_+ \frac{\mathbb{P}_+ w_-^\varepsilon(x - i0)F(h, x + i\varepsilon)}{x - (\lambda - i\varepsilon)} + \mathbb{P}_+ \frac{\mathbb{P}_- w_-^\varepsilon(x - i0)F(h, x + i\varepsilon)}{x - (\lambda - i\varepsilon)} \\ &= \mathbb{P}_+ \frac{(Sh)(x)}{x - (\lambda - i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\mu = \lambda - i\varepsilon$, найдем

$$SK(I - (\mu + i\varepsilon)K)^{-1}h = \mathbb{P}_+ \frac{(Sh)(x)}{x - \mu} = \frac{(Sh)(x) - (Sh)(\mu)}{x - \mu}, \quad \text{Im } \mu > 0. \quad (2.17)$$

Таким образом, подпространство $\mathcal{L}$ пространства $H_+^2(\mathbb{C}^n)$ инвариантно относительно действия операторов

$$(R_\mu \varphi)(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(\mu)}{x - \mu}, \quad \varphi \in \mathcal{L}, \quad \text{Im } \mu > 0.$$

Отсюда вытекает [13], [24] существование мероморфной в $\mathbb{C}$ и внутренней в $\mathbb{C}_+$ матрицы-функции $\Pi(z)$ такой, что $\mathcal{L} = H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus \Pi(z)H_+^2(\mathbb{C}^n)$. Поскольку $(i\varepsilon)^{-1} \notin \sigma(K)$, из (2.17) вытекает, что каждая вектор-функция $\varphi \in \mathcal{L}$ аналитична в окрестности нуля. Из соотношения (2.17) при $\mu = 0$ вытекает равенство

$$SK(I - i\varepsilon K)^{-1}h = LSh, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta, \quad (2.18)$$

в котором диссипативный оператор L задается формулой

$$(L\varphi)(z) = z^{-1}(\varphi(z) - \varphi(0)), \quad \varphi \in \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus \Pi(z)H_+^2(\mathbb{C}^n). \quad (2.19)$$

Отсюда выводится, что $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$ и, как это следует из теоремы 1.1, оператор $A := K^{-1}$ есть w -возмущение оператора $A_0 := (B^*)^{-1}$. Теперь равенство (2.18) переписывается в виде

$$(A - i\varepsilon I)^{-1} = S^{-1}LS.$$

Таким образом, полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 , и $U_-(t) = e^{\varepsilon t}S^{-1} \times \exp\{-iL^{-1}t\}S$, причем полугруппа $\exp\{-iL^{-1}t\}$ сжимающая. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если выполнены условия 1)–3) теоремы 2.2, то существует мероморфная в $\mathbb{C}$ и внутренняя в $\mathbb{C}_+$ матрица-функция Π такая, что оператор $(A - i\varepsilon I)^{-1}$ подобен модельному оператору L , который задается формулами (2.19).

Заметим, что из общей теории функциональных моделей [10], [14] следует, что матрица $\Pi(z)$ является характеристической матрицей-функцией оператора L . Мы в состоянии получить достаточно полную информацию о $\Pi(z)$, однако это выходит за рамки настоящей статьи.

2.3. В этом пункте мы рассмотрим задачу о необходимости условий теоремы 2.2. Теперь мы предполагаем, что для оператора K вида (2.1) выполняются условия $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$ и, стало быть, существует оператор $A = K^{-1}$. Итак, предположим, что полугруппа $U_-(t) = \exp\{-iAt\}$ принадлежит классу C_0 . Поскольку $\sigma(A)$ совпадает с множеством корней функции $\Delta(z) = \det \Phi(z)$, где Φ определяется формулой (2.11), очевидно, что условие 1) теоремы 2.2 является необходимым для принадлежности $U_-(t)$ классу C_0 . Докажем теперь необходимость условия 2).

ЛЕММА 2.3. Если полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 , то

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\det(\Phi(iy)\Theta(iy))| = 0. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Как и при доказательстве теоремы 2.2 (шаг 1), получаем внешне-внутреннюю факторизацию

$$\Phi(z + i\varepsilon)w_+^{-1}(z + i\varepsilon)\Theta(z + i\varepsilon) = W_e(z)V(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (2.21)$$

где W_e – внешняя, V – внутренняя матрицы-функции в $\mathbb{C}_+$. Отметим, что в этой формуле $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$, где ω – экспоненциальный тип полугруппы $U_-(t)$. Было установлено, что из (2.21) вытекает равенство $\det V(z) = e^{i\alpha z}$, $\alpha \geq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$. Матрица-функция $V(i(1 + \lambda)(1 - \lambda)^{-1})$, $|\lambda| < 1$, является характеристической для некоторого сжатия T в некотором гильбертовом

пространстве $\mathfrak{H}$ [14]. Известно [14], [25] что детерминант характеристической матрицы-функции не может аналитически продолжаться на спектр сжатия. В случае полуплоскости заключаем, что матрица $V(z)$ в (2.21) является целой матрицей экспоненциального типа [17]. Предположим теперь, что (2.20) не имеет места. Тогда в факторизации (2.21) матрица-функция V отлична от унитарной константы.

Шаг 2. Если полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 и имеет тип ω , то в области $\text{Im } z > \omega$ имеет место следующее представление резольвенты:

$$\int_0^\infty U_-(t)e^{izt} dt = -i(A - zI)^{-1}.$$

Отметим, что формулу (2.14) можно переписать в виде

$$\text{col}(A(A - zI)^{-1}h, f_k^\Theta)_{k=1}^n = F(h, z),$$

поэтому координаты вектор-функции $F(h, z + i\varepsilon)(z - z_0)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}_+$, $z_0 \in \mathbb{C}_-$, являются ограниченными в $\mathbb{C}_+$ и, кроме того, в силу теоремы Винера–Пэли они принадлежат H_+^2 . В частном случае $h = \sum_{k=1}^n C_k(I - z_0 B^*)^{-1} g_k^\Theta$ из формулы (2.5) следует равенство

$$\frac{F(h, z + i\varepsilon)}{z_0 - z} = (z_0 - z)^{-2} \Phi^{-1}(z + i\varepsilon)(\Phi(z + i\varepsilon) - \Phi(z_0))C, \quad C = \text{col}(C_k)_{k=1}^n,$$

где C – произвольный вектор из $\mathbb{C}^n$. Отсюда выводится, что все элементы матрицы-функции $(z_0 - z)^{-2} \Phi^{-1}(z + i\varepsilon)$ ограничены в $\mathbb{C}_+$. Из (2.21) следует, что

$$\frac{w_+(z + i\varepsilon)}{z - z_0} \frac{\Phi^{-1}(z + i\varepsilon)}{(z - z_0)^2} \frac{W_e(z)}{z - z_0} = \frac{\Theta(z + i\varepsilon)V^{-1}(z)}{(z - z_0)^4}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Из теоремы A вытекает, что элементы матрицы $w_+(z + i\varepsilon)(z - z_0)^{-1}$ принадлежат пространству H_+^2 . Из теоремы 1.2 и равенства (2.21) следует, что элементы матрицы $W_e(z)(z - z_0)^{-1}$ также принадлежат H_+^2 . Поэтому элементы матрицы $\Theta(z + i\varepsilon)V^{-1}(z)(z - z_0)^{-4}$ принадлежат классу H_+^1 . Таким образом, при каждом $\lambda \in \mathbb{C}_-$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(x + i\varepsilon)V^{-1}(x)}{(x - \lambda)^3(x - z_0)} dx = 0.$$

Поскольку элементы $\Theta(x + i\varepsilon)V^{-1}(x)(x - z_0)^{-1}$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, отсюда заключаем, что они принадлежат классу Харди H_+^2 . Поэтому имеет место факторизация

$$\Theta(x + i\varepsilon)V^{-1}(x) = Q(z)\Pi(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (2.22)$$

где Q – внешняя, Π – внутренняя матрицы-функции. Ограниченная в $\mathbb{C}_+$ матрица-функция $\Theta(x + i\varepsilon)$ также факторизуется:

$$\Theta(z + i\varepsilon) = Q_1(z)\Pi_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где Q_1 – ограниченная внешняя, Π_1 – внутренняя матрицы-функции. Из двух последних равенств следует, что

$$Q(z)\Pi(z)V(z) = Q_1(z)\Pi_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

В силу единственности факторизации можем считать, что $Q = Q_1$, стало быть, из (2.22) вытекает ограниченность матрицы $\Theta(z + i\varepsilon)V^{-1}(z)$ в $\mathbb{C}_+$. Поскольку

матрица $\Theta(z + i\varepsilon)V^{-1}(z)$ ограничена в любой горизонтальной полосе конечной ширины [17], то $\|Q(z)V^{-1}(z - i\varepsilon)\| \leq C$, $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому справедлива факторизация

$$\Theta(z)V^{-1}(z - i\varepsilon) = V_1(z)W_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (2.23)$$

где V_1 – внутренняя, W_1 – внешняя матрицы-функции. Поскольку детерминант целой внутренней функции в $\mathbb{C}_+$ имеет вид $ue^{i\alpha z}$, $\alpha > 0$, где $|u| = 1$, из последнего равенства следует, что $\det W_1(z) = ve^{i\gamma z}$, $|v| = 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Так как W_1 внешняя, то $\gamma = 0$ и, стало быть, $W_1(z) \equiv A$ – постоянная матрица. Далее, из (2.23) вытекает представление

$$\Theta(z) = V_1(z)AV(z - i\varepsilon) = V_1(z)V_2(z)W_2(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где V_1 , V_2 – целые внутренние функции, W_2 – внешняя. Из единственности внешне-внутренней факторизации следует, что $W_2(z)$ – постоянная матрица, и поэтому из предыдущего равенства выводим представление

$$\Theta(z) = V_1(z)U_2(z), \quad V_1, U_2 \in J_n. \quad (2.24)$$

Шаг 3. Из (2.21) и (2.23) (с учетом того, что $W_1(z) \equiv A$) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(z + i\varepsilon)}{z - z_0} w_+^{-1}(z + i\varepsilon) V_1(z + i\varepsilon) &= \frac{W_e(z)}{z - z_0} V(z) \Theta^{-1}(z + i\varepsilon) V_1(z + i\varepsilon) \\ &= \frac{W_e(z)}{z - z_0} A^{-1} V_1^{-1}(z + i\varepsilon) V_1(z + i\varepsilon) = \frac{W_e(z)}{z - z_0} A^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad \text{Im } z_0 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, элементы матрицы

$$F(z) := \frac{E_n - \Phi(z + i\varepsilon)}{z + i\varepsilon} w_+^{-1}(z + i\varepsilon) V_1(z + i\varepsilon), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

принадлежат классу Харди H_+^2 . Из теоремы 1.2 вытекает, что, поскольку матрица-функция $\Theta^{-1}(z)V_1(z)$ ограничена в полосе $0 \leq \text{Im } z \leq \varepsilon$, элементы матрицы

$$z^{-1}(E_n - \Phi(z))w_+^{-1}(z)V_1(z) = z^{-1}(E_n - \Phi(z))w_+^{-1}(z)\Theta(z)\Theta^{-1}(z)V_1(z)$$

принадлежат классу Харди в этой полосе. В итоге приходим к следующему важному выводу: элементы матрицы

$$F_1(z) := z^{-1}(E_n - \Phi(z))w_+^{-1}(z)V_1(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

принадлежат классу Харди H_+^2 .

Шаг 4. Поскольку строки матрицы $z^{-1}(E_n - \Phi(z))$ лежат в образе преобразования $\mathcal{B}(z, h)$, из теоремы 1.2 следует, что

$$z^{-1}(E_n - \Phi(z))w_-^{-1}(z) \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n).$$

Заметим, что из (2.24) вытекает включение $\mathcal{K}_{V_1} \subseteq \mathcal{K}_\Theta$ и $\mathcal{K}_{V_1}$ инвариантно относительно оператора B вида (1.3). Введем оператор $B_1 := B|_{\mathcal{K}_{V_1}}$ и векторы g_k^1 с помощью формул

$$(I + iB_1^*)^{-1}g_k^1 = \mathbb{P}_{V_1} \frac{w_+^k(x + i0)}{x + i}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

и обозначим соответствующее преобразование (1.8) через $\mathcal{B}_1(z, h)$, $h \in \mathcal{K}_{V_1}$. Поскольку элементы матрицы $F_1(z)$ принадлежат классу Харди H_+^2 , строки матрицы $z^{-1}(E_n - \Phi(z))$ принадлежат образу $\mathcal{B}_1(z, h)$, т. е.

$$z^{-1}(\delta_{jk} - \Phi_{jk}(z)) = ((I - zB_1^*)^{-1}g_k^1, f_j^1)_{\mathcal{K}_{V_1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $f_j^1 \in \mathcal{K}_{V_1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Учитывая лемму 1.1, для $z \in \mathbb{C}_-$ получим

$$\begin{aligned} ((I - zB_1^*)^{-1}g_k^1, f_j^1)_{\mathcal{K}_{V_1}} &= \left(\mathbb{P}_{V_1} \frac{w_+^k(x + i0)}{x - z}, f_j^1 \right)_{\mathcal{K}_{V_1}} = \left(\mathbb{P}_\Theta \frac{w_+^k(x + i0)}{x - z}, f_j^1 \right)_{\mathcal{K}_\Theta} \\ &= ((I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, f_j^1)_{\mathcal{K}_\Theta}, \end{aligned}$$

где векторы g_k^Θ определяются равенствами (1.6). Сравнивая полученную формулу с (2.11), приходим к равенствам

$$((I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, f_j^\Theta)_{\mathcal{K}_\Theta} = ((I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, f_j^1)_{\mathcal{K}_\Theta}, \quad 1 \leq k, j \leq n,$$

значит, в силу биективности $\mathcal{B}(z, h)$ имеем $f_j^\Theta = f_j^1$ для всех j . Таким образом, векторы f_j^Θ принадлежат $\mathcal{K}_{V_1}$, и поэтому подпространство $\mathcal{L} := \mathcal{K}_\Theta \ominus \mathcal{K}_{V_1}$ инвариантно относительно оператора K . В самом деле, если $l \in \mathcal{L}$, то

$$Kl = B^*l + \sum_{j=1}^n (l, f_j^\Theta)g_j^\Theta = B^*l \in \mathcal{L},$$

поскольку $\mathcal{K}_{V_1}$ инвариантно относительно B . Итак, $K|_{\mathcal{L}} = B^*|_{\mathcal{L}}$. Поэтому если полугруппа $U_-(t) = \exp\{-iK^{-1}t\}$ принадлежит классу C_0 , то $\exp\{-i(B^*|_{\mathcal{L}})^{-1}t\}$ также принадлежит этому классу. Однако это невозможно, поскольку полугруппа $\exp\{i(B^*)^{-1}t\}$, $t \geq 0$, является сжимающей и нильпотентной. Поэтому имеет место равенство (2.20). Лемма доказана.

Обсудим теперь необходимость условия 3) из формулировки теоремы 2.2. Сначала приведем следующий результат.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\Theta \in J_n$ такова, что при некотором $\delta > 0$ матрица-функция $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$. Тогда на каждой прямой $\text{Im } z = b$, $b \neq 0$, имеет место оценка снизу

$$\left\| \sum_{k=1}^n C_k (I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta \right\|^2 \geq q(b) \|\tilde{w}(z)C\|^2, \quad C = \text{col}(C_k)_{k=1}^n, \quad (2.25)$$

где $\tilde{w}(z) = w_+(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, и $\tilde{w}(z) = w_-(z)$, $z \in \mathbb{C}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности матрицы-функции $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ приходим к выводу, что элементы матрицы

$$x^{-1}(e^{-i\delta x} - 1)E_n w_+^{-1}(x + i0)\Theta(x) = w_+^{-1}(x + i0)x^{-1}(e^{-i\delta x}\Theta(x) - \Theta(x))$$

принадлежат классу Харди H_+^2 . Согласно теореме А элементы матрицы $x^{-1}(e^{-i\delta x} - 1)E_n w_+^{-1}(x + i0)$ принадлежат H_-^2 , а в силу теоремы 1.2 строки матрицы $z^{-1}(e^{-i\delta z} - 1)E_n$ принадлежат образу преобразования $\mathcal{B}(z, h)$, т. е.

$$\text{row}(z^{-1}(e^{-i\delta z} - 1)\delta_{kj})_{j=1}^n = \text{row}((I - zB^*)^{-1}g_j^\Theta, f_k^0)_{j=1}^n, \quad f_k^0 \in \mathcal{K}_\Theta,$$

где $k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, матрица-функция $\Phi^0(z) := e^{-i\delta z} E_n$ представляется в виде

$$\Phi_{kj}^0(z) = \delta_{kj} - z((I - zB^*)^{-1}g_j^\Theta, f_k^0), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{K}_\Theta$ оператор K^0 вида (2.1) с векторами $f_k^\Theta = f_k^0$. Отвечающая ему в силу формулы (2.3) матрица-функция равна $\Phi^0(z)$. Далее, вес

$$W_0^2(x) := \Phi^0(x)(w_+^*(x+i0)w_+(x+i0))^{-1}(\Phi^0(x))^* = w^{-2}(x)$$

принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$. Поэтому в силу теоремы 2.1

$$\int_{\mathbb{R}} \|w_+(x+i0)F^0(h, x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \leq M\|h\|^2 \quad (2.26)$$

для всех $h \in \mathcal{K}_\Theta$. Напомним, что вектор-функция $F^0(h, x)$ определяется формулами (2.3), (2.4). Полагая здесь $h = \sum_{k=1}^n C_k(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta$ и применяя формулу (2.5), найдем

$$\begin{aligned} F^0(h, x) &= (z-x)^{-1}(\Phi^0(x))^{-1}(\Phi^0(x) - \Phi^0(z))C = (z-x)^{-1}(1 - e^{i\delta x}e^{-iz\delta})C, \\ C &= \text{col}(C_k)_{k=1}^n. \end{aligned}$$

Поэтому приходим к оценке снизу

$$M \left\| \sum_{k=1}^n C_k(I - zB^*)^{-1}g_k \right\|^2 \geq \int_{\mathbb{R}} \left\| (1 - e^{ix\delta}e^{-iz\delta})(x-z)^{-1}w_+(x+i0)C \right\|^2 dx.$$

Пусть $z \in \mathbb{C}_+$ и $z = a + bi$. Тогда

$$\begin{aligned} M \left\| \sum_{k=1}^n C_k(I - zB^*)^{-1}g_k \right\|^2 &\geq (1 - e^{b\delta})^2 \int_{\mathbb{R}} \left\| \frac{w_+(x+i0)C}{x-z} \right\|^2 dx \\ &\geq (1 - e^{b\delta})^2 \int_{\mathbb{R}} \left\| \mathbb{P}_- \frac{w_+(x+i0)C}{x-z} \right\|^2 dx = (1 - e^{b\delta})^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\|w_+(z)C\|^2}{|x-z|^2} dx \\ &\geq \frac{(1 - e^{b\delta})^2}{2b} \|w_+(z)C\|^2, \end{aligned}$$

где $\mathbb{P}_-$ – ортпроектор из $L_2^n(\mathbb{R})$ на $H_-^2(\mathbb{C}^n)$.

Если $z \in \mathbb{C}_-$, то в силу (1.1) в неравенстве (2.26) заменим $w_+(x+i0)$ на $w_-(x-i0)$. После этого необходимо повторить изложенные рассуждения с заменой $\mathbb{P}_-$ на $\mathbb{P}_+$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Оценка снизу (2.25), вообще говоря, не имеет места для произвольной матрицы-функции $\Theta \in J_n$. В самом деле, если $w^2(x) \equiv E_n$, то из (1.6) следуют формулы

$$g_k^\Theta = (I + iB^*)\mathbb{P}_\Theta \frac{e_k}{x+i},$$

где e_k – стандартные орты пространства $\mathbb{C}^n$. Учитывая формулу $\mathbb{P}_\Theta = \Theta\mathbb{P}_-\Theta^*$, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\Theta \frac{e_k}{x+i} &= \Theta\mathbb{P}_- \frac{\Theta^*(x)e_k}{x+i} = \Theta(x) \frac{\Theta^*(x) - \Theta^*(i)}{x+i} e_k \\ &= \frac{(E_n - \Theta(x)\Theta^*(i))}{x+i} e_k, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Из (1.4) следует, что

$$(I + iB^*)h = \frac{(z + i)h(z) - i\Theta(z)h(0)}{z}.$$

В результате элементарных вычислений приходим к формулам

$$g_k^\Theta = z^{-1}(E_n - \Theta(z))e_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

С другой стороны, из формул (1.3), (1.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{B - B^*}{i}h &= i \frac{E_n - \Theta(z)}{z}h(0) = i \frac{E_n - \Theta(z)}{z} \sum_{k=1}^n (h(0), e_k)e_k \\ &= \sum_{k=1}^n (h(0), e_k)ig_k^\Theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (h, ig_k^\Theta)ig_k^\Theta = \sum_{k=1}^n (h, \varphi_k)\varphi_k, \end{aligned}$$

где введены обозначения $(\sqrt{2}\pi)^{-1}ig_k^\Theta = \varphi_k$. Элементарные вычисления показывают, что

$$\Theta_{jk}(z) = \delta_{kj} + iz((I - zB)^{-1}\varphi_k, \varphi_j), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Поэтому можем воспользоваться известной формулой [17]

$$-((E_n - \Theta(\bar{z})\Theta^*(\bar{z}))e_k, e_j) = \operatorname{Im} z((I - zB^*)^{-1}\varphi_k, (I - zB^*)^{-1}\varphi_j).$$

Таким образом, если $z \in \mathbb{C}_+$, то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n C_k(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta \right\|^2 &= 2\pi(\operatorname{Im} z)^{-1}((\Theta(\bar{z})\Theta^*(\bar{z}) - E_n)C, C) \\ &= 2\pi(\operatorname{Im} z)^{-1}(\|\Theta^*(\bar{z})C\|^2 - \|C\|^2). \end{aligned}$$

Отметим, что $w_+(z) \equiv E_n$ в рассматриваемом случае и, следовательно, оценка (2.25) имеет вид

$$\left\| \sum_{k=1}^n C_k(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta \right\|^2 \geq q(b)\|C\|^2, \quad \operatorname{Im} z = b > 0.$$

Поскольку Θ — произвольная функция класса J_n , ясно, что такая оценка, вообще говоря, места не имеет.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для любых $\Theta \in J_n$ и $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ на каждой прямой $\operatorname{Im} z = b \neq 0$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n C_k(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta \right\|^2 \leq q_1(b)\|\tilde{w}(z)C\|^2.$$

Мы не приводим доказательство этой оценки, так как в дальнейшем она не используется.

ЛЕММА 2.5. Пусть полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 и имеет экспоненциальный тип ω . Если при некотором $\delta > 0$ матрица-функция $e^{-iz\delta}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то при каждом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняется условие 3) теоремы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 , то в области $\operatorname{Im} z > \omega$ справедливо равенство

$$-i(A - zI)^{-1} = \int_0^\infty e^{izt} U_-(t) dt.$$

Поэтому для каждого $h \in \mathcal{K}_\Theta$ имеем

$$-i(A - (x + i\varepsilon)I)^{-1}h = \int_0^\infty e^{ixt} e^{-\varepsilon t} U_-(t) h dt.$$

Считая, что $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \| (A - (x + i\varepsilon)I)^{-1}h \|^2 dx = 2\pi \int_0^\infty \| e^{-\varepsilon t} U_-(t) h \|^2 dt \leq M \|h\|^2.$$

Из формулы (2.2) следует, что

$$(A - zI)^{-1}h = ((B^*)^{-1} - zI)^{-1}h + \sum_{k=1}^n f_k(h, z)(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta.$$

Неограниченный оператор $(B^*)^{-1}$ является диссипативным, и поэтому полугруппа $\exp\{i(B^*)^{-1}t\}$, $t \geq 0$, является сжимающей и нильпотентной. Таким образом, для любого $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \|B^*(I - (x + i\varepsilon)B^*)^{-1}h\|^2 dx \leq M_1 \|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta.$$

Итак, из трех последних формул вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \left\| \sum_{k=1}^n f_k(z, h)(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta \right\|^2 dz \leq M_2 \|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta.$$

В силу (2.4) вектор $\operatorname{col}(f_k(z, h))_{k=1}^n$ равен $F(z, h)$, и если применить лемму 2.4, то найдем

$$q(\varepsilon) \|w_+(z)F(z, h)\|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k(z, h)(I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta \right\|^2, \quad \operatorname{Im} z = \varepsilon.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|w_+(z)F(z, h)\|^2 dz \leq M_3 \|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta,$$

и остается применить теорему 2.1. Лемма доказана.

2.4. Сформулируем теперь один из основных результатов настоящей статьи. Напомним, что плотно заданный неограниченный оператор A в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *w-возмущением оператора* $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$, если

$$A^{-1}h = A_0^{-1}h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)g_k, \quad h \in \mathfrak{H},$$

и существует вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ такой, что строка

$$\mathcal{A}_0(z, h) = \operatorname{row}\{(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n$$

обладает свойствами:

- 1) $\|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ при каждом $h \in \mathcal{H}$;
- 2) имеет место оценка

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{A}_0(x, h)w^{-1}(x)\|^2 dx, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Далее, оператору A отвечает единственная матрица-функция $\Theta \in J_n$, которая определяется из условий:

- а) Θ – левый делитель $e^{iaz}E_n$, где a – экспоненциальный тип $(A_0 - zI)^{-1}$;
- б) координаты строки $\mathcal{A}_0(x, h)w_+^{-1}(x + i0)\Theta(x)$ принадлежат классу H_+^2 для каждого $h \in \mathfrak{H}$;
- с) если Θ_1 – левый делитель $e^{iaz}E_n$, для которого выполняется условие б), то $\Theta_1 = \Theta V$, где $V \in J_n$.

Напомним, что $\sigma(A)$ совпадает с множеством корней определителя $\Delta(z) := \det \Phi(z)$, где элементы матрицы Φ определяются формулами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z(A_0(A_0 - zI)^{-1}g_j, f_k). \quad (2.27)$$

И наконец, системы векторов $\{f_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ предполагаются линейно независимыми (см. введение).

В формулировке следующей теоремы фигурирует величина $-i \operatorname{Sp} \Theta'(0)$, $\Theta \in J_n$. Поскольку каждая матрица $\Theta \in J_n$ является характеристической матрицей-функцией некоторого диссипативного оператора $\tilde{B}$, то в силу формулы (1.5') получим $-i \operatorname{Sp} \Theta'(0) = \sum_{k=1}^n \|\varphi_k\|^2 > 0$. Далее, существует $\Theta_1 \in J_n$ такая, что $\Theta(z)\Theta_1(z) = e^{iaz}E_n$, где a – экспоненциальный тип $\Theta(z)$. Тогда

$$na = -i \operatorname{Sp}(\Theta(z)\Theta_1(x))'|_{z=0} = -i \operatorname{Sp} \Theta'(0) - i \operatorname{Sp} \Theta_1'(0) \geq -i \operatorname{Sp} \Theta'(0).$$

Таким образом, $0 < -i \operatorname{Sp} \Theta'(0) \leq na$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть A – w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$, которому отвечает пара $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, $\Theta \in J_n$. Пусть при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия:

- 1) $\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \operatorname{Im} \lambda_k < \varepsilon$, где Λ – множество корней $\Delta(z)$;
- 2) $\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\Delta(iy)| = -i \operatorname{Sp} \Theta'(0)$;
- 3) матричный вес

$$W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x + i\varepsilon)(w_+^*(x + i\varepsilon)w_+(x + i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x + i\varepsilon)$$

удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$.

Тогда полугруппа $U_-(t) := \exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 , причем ее экспоненциальный тип не превосходит ε .

Обратно, если $U_-(t) \in C_0$ и ее тип равен ω , то при любом $\varepsilon > \omega$ выполняются условия 1), 2). Кроме того, если при некотором $\delta > 0$ матрица-функция $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то при любом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняется условие 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.5 существует изоморфизм Q пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathcal{K}_\Theta$ такой, что

$$B^* = QA^{-1}Q^{-1}, \quad Qg_k = g_k^\Theta, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где B^* – модельный оператор в $\mathcal{K}_\Theta$, векторы g_k^Θ определяются равенствами вида (1.6). Поэтому $QA^{-1}Q^{-1} = K$, где K – оператор вида (2.1) при

$f_k^\Theta = (Q^*)^{-1}f_k$, $1 \leq k \leq n$. Применим теорему 2.2 к оператору K . Для этого вычислим элементы матрицы-функции Φ вида (2.27):

$$\begin{aligned}\Phi_{kj}(z) &= \delta_{kj} - z((I - zA_0^{-1})^{-1}g_j, f_k) = \delta_{kj} - z(Q^{-1}(I - zB^*)^{-1}Qg_j, f_k) \\ &= \delta_{kj} - z((I - zB^*)^{-1}g_j^\Theta, f_k^\Theta)_{\mathcal{K}_\Theta}.\end{aligned}$$

Таким образом, если доказать эквивалентность условия

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\det(\Phi(iy)\Theta(iy))| = 0 \quad (2.28)$$

условию 2), то первая часть теоремы будет следовать из теоремы 2.2.

Действительно, так как $\det \Theta(z) = e^{ipz}$, $p > 0$, то (2.28) равносильно условию

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\Delta(iy)| = p.$$

Для вычисления p воспользуемся известной формулой [26]:

$$\frac{d}{dz} \log \det \Theta(z) = \text{Sp} \left(\Theta^{-1}(z) \frac{d\Theta(z)}{dz} \right).$$

Отсюда вытекает, что правая часть последнего равенства не зависит от z , и поэтому

$$ip = \text{Sp}(\Theta^{-1}(z)\Theta'(z))|_{z=0} = \text{Sp} \Theta'(0).$$

Доказательство второй части теоремы с помощью теоремы 1.5 снова сводится к рассмотрению случая оператора $A = K^{-1}$, где K задается формулой (2.1). Необходимость условия 1) очевидна. В лемме 2.3 доказана необходимость условия (2.28) и, тем самым, условия 2). И наконец, необходимость условия 3) в случае ограниченности в $\mathbb{C}_+$ матрицы-функции $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ доказана в лемме 2.4. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть A – w -возмущение ранга n оператора A_0 класса $\Sigma^{(\text{exp})}$. Если при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются условия 1)–3) теоремы 2.3, то существует мероморфная в $\mathbb{C}$ и внутренняя в $\mathbb{C}_+$ матрица-функция Π такая, что оператор $(A - i\varepsilon I)^{-1}$ подобен модельному оператору

$$(L\varphi)(z) := z^{-1}(\varphi(z) - \varphi(0))$$

в пространстве $\mathcal{L} = H_+^2(\mathbb{C}^n) \ominus \Pi(z)H_+^2(\mathbb{C}^n)$.

Отметим, что этот результат вытекает из теоремы 1.5 и следствия 2.1.

§ 3. Описание генераторов сильно непрерывных полугрупп $U_+(t) = \exp\{iAt\}$ и некоторые дополнительные сведения

3.1. Как и раньше, теорема 1.5 сводит задачу описания генераторов сильно непрерывных полугрупп $U_+(t) = \exp\{iAt\}$ к описанию генераторов вида $A = K^{-1}$, где K – произвольный оператор вида (2.1) в пространстве $\mathcal{K}_\Theta$. Сначала рассмотрим случай, когда $\Theta(z) = e^{iaz}E_n$, $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Другими словами, рассмотрим оператор

$$K_a h := B_a^* h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^a) g_k^a, \quad h \in \mathcal{K}_a, \quad (3.1)$$

где f_k^a – произвольные векторы из $\mathcal{K}_a$, векторы g_k^a определяются равенствами (1.6) в случае $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$. Фредгольмов спектр оператора K_a совпадает с множеством корней функции $\Delta_a(z) := \det \Phi_a(z)$, где элементы матрицы Φ_a находятся по формуле

$$\Phi_a^{kj}(z) = \delta_{kj} - z((I - zB_a^*)^{-1} g_j^a, f_k^a). \quad (3.2)$$

Докажем, что выбором векторов f_k^a можно добиться того, чтобы $\Phi_a(z) = e^{-iaz} E_n$. В самом деле, в силу теоремы А строки матрицы $z^{-1}(1 - e^{-iaz})E_n$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2 в случае произвольного веса w^2 и $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$. Поэтому они входят в образ соответствующего преобразования $\mathcal{B}_a(z, h)$, т. е. существуют функции $f_k^1 \in \mathcal{K}_a$, $1 \leq k \leq n$, такие, что справедливо представление

$$(e^{-iaz} E_n)_{kj} = \delta_{jk} - z((I - zB_a^*)^{-1} g_j^a, f_k^1), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.3)$$

Таким образом, для оператора

$$K_a^1 h := B_a^* h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^1) g_k^a, \quad h \in \mathcal{K}_a, \quad (3.4)$$

матрица-функция Φ_a вида (3.2) равна $e^{-iaz} E_n$. Заметим, что вес

$$\begin{aligned} W_\varepsilon^2(x) &= e^{-ia(x-i\varepsilon)} (w_-^*(x-i\varepsilon) w_-(x-i\varepsilon))^{-1} e^{ia(x+i\varepsilon)} \\ &= e^{-2\varepsilon} (w_-^*(x-i\varepsilon) w_-(x-i\varepsilon))^{-1} \end{aligned}$$

при любом $\varepsilon \geq 0$ принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$. Применяя к оператору (3.4) теорему 2.1', заключаем, что

$$\int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z) F_1(z, h)\|^2 dz \leq M \|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_a, \quad (3.5)$$

где в силу формул (2.3), (2.4) имеем

$$F_1(h, z) = e^{iaz} \operatorname{col}((I - zB_a^*)^{-1} h, f_j^1)_{j=1}^n, \quad h \in \mathcal{K}_a.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть векторы f_k^1 , $1 \leq k \leq n$, пространства $\mathcal{K}_a$ определяются формулами (3.3). Тогда вектор-функция

$$X(z, h) := \operatorname{col}((I - zB_a^*)^{-1} h, f_k^1)_{k=1}^n$$

обладает следующими свойствами:

1) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константы m, M такие, что

$$m \|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \|w_-(z) X(z, h)\|^2 dz \leq M \|h\|^2 \quad (3.6)$$

для всех $h \in \mathcal{K}_a$;

2) для каждого $h \in \mathcal{K}_a$ и каждого $\varepsilon > 0$ имеем

$$e^{iax} v_\varepsilon(x+i0) X(x-i\varepsilon, h) \in H_+^2(\mathbb{C}^n), \quad w_-(x-i\varepsilon) X(x-i\varepsilon, h) \in H_-^2(\mathbb{C}^n),$$

где внешняя в $\mathbb{C}_+$ матрица-функция v_ε взята из факторизации⁴

$$w_-^*(x-i\varepsilon) w_-(x-i\varepsilon) \stackrel{n \cdot \varepsilon}{=} v_\varepsilon^*(x+i0) v_\varepsilon(x+i0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

⁴Возможность такой факторизации вытекает из теоремы А.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно $F_1(z, h) = e^{iaz} X(z, h)$ имеем из (3.5) оценку сверху (3.6). Для оператора (3.4) матрица-функция $\Phi_a(z)$ равна $e^{-iaz} E_n$. Как и при доказательстве теоремы 2.1', вычислим значение $F_1(h, z)$ на векторе вида (2.6). Мы получим формулу

$$F_1(\varphi, z) = e^{iaz} \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \frac{e^{-iaz} - e^{-ia\lambda}}{\lambda - z} l(\lambda) d\lambda, \quad (3.7)$$

где функция $l(z)$ представляется в виде (1.25), т. е.

$$l(z) = w_-^{-1}(z)h(z), \quad h(z) := \int_0^a e^{izt} \overline{f(t)} dt;$$

здесь f – произвольная вектор-функция из $L_2^n(0, a)$. Из доказательства теоремы 1.4 (шаг 5) следует, что формулу (3.7) можно переписать следующим образом:

$$F_1(Sh, z) = e^{iaz} \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \frac{e^{-iaz} - e^{-ia\lambda}}{\lambda - z} w_-^{-1}(\lambda) h(\lambda) d\lambda,$$

где h (в силу теоремы Пэли–Винера) пробегает $\mathcal{K}_a$, S – некоторый автоморфизм пространства $\mathcal{K}_a$.

Если z лежит в области $\text{Im } z < -\varepsilon$, то

$$F_1(Sh, z) = 2\pi i w_-^{-1}(z)h(z) - 2\pi i \mathcal{P}_- w_-^{-1}(y - i\varepsilon)h(y - i\varepsilon).$$

Здесь был использован тот факт, что вектор-функция $e^{-iax} w_-^{-1}(x - i\varepsilon)h(x - i\varepsilon)$ принадлежит классу Харди в $\mathbb{C}_-$ с весом Макенхаупта $w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon)$. Устремляя z к точкам прямой $\mathbb{R} - i\varepsilon$, найдем:

$$(2\pi i)^{-1} w_-(x - i\varepsilon) F_1(Sh, x - i\varepsilon) = h(x - i\varepsilon) - w_-(x - i\varepsilon) \mathcal{P}_- w_-^{-1}(y - i\varepsilon)h(y - i\varepsilon). \quad (3.8)$$

Поскольку $h(x - i\varepsilon) \in H_+^2(\mathbb{C}^n)$, а второе слагаемое справа в (3.8) принадлежит $H_-^2(\mathbb{C}^n)$ (теорема C), имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \|w_-(x - i\varepsilon) F_1(Sh, x - i\varepsilon)\|^2 dx \geq m \|h(x - i\varepsilon)\|^2 \geq m_1 \|h\|^2,$$

т. е. оценка (3.6) доказана.

Умножая (3.8) на e^{-iax} , приходим к выводу, что

$$w_-(x - i\varepsilon) X(x - i\varepsilon, h) \in H_-^2(\mathbb{C}^n), \quad h \in \mathcal{K}_a.$$

Далее, так как вес $v_\varepsilon^2(x) := w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$, то вес ${}^t v_\varepsilon^{-2}(x)$ (транспонированная матрица $v_\varepsilon^{-2}(x)$) также обладает этим свойством и факторизуется следующим образом:

$${}^t v_\varepsilon^{-2}(x) = ({}^t v_\varepsilon^{-1}(x + i0))^* ({}^t v_\varepsilon^{-1}(x + i0)).$$

Оценка (3.6) означает, что каждая строка ${}^t X(z - i\varepsilon, h)$, $h \in \mathcal{K}_a$, удовлетворяет условиям теоремы 1.3 в случае веса ${}^t v_\varepsilon^{-2}(x)$. Теперь из теоремы 1.2 в случае $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$ следует включение

$${}^t X(x - i\varepsilon, h) {}^t v_\varepsilon(x + i0) e^{iaz} \in {}^* H_+^2(\mathbb{C}), \quad h \in \mathcal{K}_a,$$

что и завершает доказательство леммы.

Исследуем теперь произвольный оператор K_a вида (3.1). Из формулы (2.2) и соотношений (2.3) легко следует, что

$$(I - zK_a)^{-1}h = (I - zB_a^*)^{-1}h + z \sum_{k=1}^n f_k(h, z)(I - zB^*)^{-1}g_k^a.$$

Фиксируя $z_0 \in \mathbb{C}$, введем в рассмотрение столбец

$$\begin{aligned} K_0(z, h) &:= \text{col}((I - zK_a)^{-1}h, f_j^1(z_0))_{j=1}^n, \quad h \in \mathcal{K}_a, \\ f_j^1(z_0) &:= (I - \bar{z}_0 B)^{-1}f_j^1, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где векторы f_j^1 определяются формулами (3.3). Имеем

$$\begin{aligned} ((I - zB^*)^{-1}h, f_j^1(z_0)) &= ((I - zB^*)^{-1}(I - z_0B^*)^{-1}h, f_j^1) \\ &= \left(\frac{z(I - zB^*)^{-1}h - z_0(I - z_0B^*)^{-1}h}{z - z_0}, f_j^1 \right) = \frac{zX(z, h) - z_0X(z_0, h)}{z - z_0}, \end{aligned}$$

где $X(z, h)$ определено в формулировке леммы 3.1. Проводя аналогичные вычисления, с учетом (3.3) получим формулу

$$((I - zB^*)^{-1}g_k^a, f_j(z_0)) = \frac{(1 - e^{-iaz})\delta_{kj} - (1 - e^{-iaz_0})\delta_{kj}}{z - z_0} = \frac{e^{-iaz_0} - e^{-iaz}}{z - z_0}\delta_{kj}.$$

Таким образом, учитывая обозначение (2.4), имеем

$$K_0(z, h) = \frac{zX(z, h) - z_0X(z_0, h)}{z - z_0} + z \frac{e^{-iaz_0} - e^{-iaz}}{z - z_0} F(h, z). \quad (3.10)$$

Напомним, что вес $w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon)$ факторизуется следующим образом:

$$w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon) = v_\varepsilon^*(x + i0)v_\varepsilon(x + i0), \quad \varepsilon > 0,$$

где $v_\varepsilon(z)$ – внешняя функция в области $\mathbb{C}_+$.

ЛЕММА 3.2. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия:

1) вес $W_\varepsilon^2(x) = \Phi_a(x - i\varepsilon)(w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon))^{-1}\Phi_a^*(x - i\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$;

2) матрица-функция $W_-(z) := \Phi_a(z - i\varepsilon)w_-^{-1}(z - i\varepsilon)$ внешняя в $\mathbb{C}_-$.

Тогда для столбца $K_0(z, h)$, $\text{Im } z_0 < -\varepsilon$, построенного по оператору K_a вида (3.1) с помощью формул (3.9), справедлива двусторонняя оценка

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h)\|^2 dx \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_a. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Сначала применим теорему 2.1' для оператора вида (3.1). Из условия 1) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|v_\varepsilon(x + i0)F(h, x - i\varepsilon)\|^2 dx = \int_{\mathbb{R} - i\varepsilon} \|w_-(z)F(h, z)\|^2 dz \leq M\|h\|^2$$

для всех $h \in \mathcal{K}_a$. Далее, из леммы 3.1 вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{R}} \|v_\varepsilon(x + i0)X(x - i\varepsilon, h)\|^2 dx = \int_{\mathbb{R} - i\varepsilon} \|w_-(z)X(z, h)\|^2 dz \leq M\|h\|^2.$$

После этого оценка сверху (3.11) тривиальным образом вытекает из формулы (3.10).

Шаг 2. Докажем справедливость неравенства

$$m \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{P}_- v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h)\|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h)\|^2 dx, \quad (3.12)$$

где $\mathbb{P}_-$ – ортопроектор из $L_2^n(\mathbb{R})$ на $H_+^2(\mathbb{C}^n)$, m – некоторая положительная константа. Действительно, вводя обозначение $\Psi(z) = (e^{-iaz_0} - e^{-iaz})^{-1}$, равенство (3.10) перепишем в виде

$$z^{-1}\Psi(z)(z - z_0)K_0(z, h) = e^{-iaz}\Psi(z)e^{iaz}X(z, h) - \frac{z_0}{z}\Psi(z)X(z_0, h) + F(z, h).$$

Если считать, что $\text{Im } z_0 < -\varepsilon$, то в области $\text{Im } z > -\varepsilon$ функции $\Psi(z)$, $e^{-iaz}\Psi(z)$ ограничены и аналитичны. Рассматривая последнее равенство на прямой $\mathbb{R} - i\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} & (x - i\varepsilon)^{-1}\Psi(x - i\varepsilon)(x - i\varepsilon - z_0)v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h) \\ &= -\frac{z_0}{x - i\varepsilon}\Psi(x - i\varepsilon)v_\varepsilon(x + i0)X(z_0, h) \\ & \quad + e^{-iax}\Psi(x - i\varepsilon)e^{iax}v_\varepsilon(x + i0)X(x - i\varepsilon, h) + \mathbb{P}_+ v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h) \\ & \quad + \mathbb{P}_- v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из леммы 3.1 вытекает, что все слагаемые в правой части (3.13), кроме последнего, принадлежат пространству Харди $H_+^2(\mathbb{C}^n)$, что и доказывает неравенство (3.12).

Шаг 3. Предположим теперь, что оценка снизу (3.11) не имеет места, т. е. существует последовательность $h_n \in \mathcal{K}_a$ ($\|h_n\| = 1$) такая, что

$$\int_{\mathbb{R}} \|v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h_n)\|^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Тогда из (3.12) вытекает, что

$$\mathbb{P}_- v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.14')$$

в метрике пространства $L_2^n(\mathbb{R})$. Докажем теперь, что

$$\mathbb{P}_+ v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Для этого сначала заметим, что

$$w_-(x - i\varepsilon)F(x - i\varepsilon, h) \in H_-^2(\mathbb{C}^n), \quad h \in \mathcal{K}_a. \quad (3.16)$$

Действительно, из формулы (2.3) вытекает представление

$$w_-(x - i\varepsilon)F(x - i\varepsilon, h) = w_-(x - i\varepsilon)\Phi_a^{-1}(x - i\varepsilon)\varphi(x - i\varepsilon, h),$$

где $\varphi(z, h) := \text{col}((I - zB^*)^{-1}h, f_k^a)_{k=1}^n$. Таким образом,

$${}^t(w_-(x - i\varepsilon)F(x - i\varepsilon)) = {}^t\varphi(x - i\varepsilon, h)({}^tW_-(x))^{-1}, \quad h \in \mathcal{K}_a, \quad (3.17)$$

причем в силу условий леммы вес $W_-(x) := \Phi_a(x - i\varepsilon)w_-^{-1}(x - i\varepsilon)$ участвует в факторизации вида

$$({}^tW_-(x))^*({}^tW_-(x)) = {}^t(W_-(x)W_-^*(x)) = {}^tW_\varepsilon^2(x) \in \mathcal{M}_n^2.$$

Из теоремы 2.1' вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{R}} \| {}^t\varphi(x - i\varepsilon, h)({}^tW_-(x))^{-1} \|^2 dx = \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon} \| w_-(z)F(z, h) \|^2 dz \leq M \| h \|^2.$$

Следовательно, для строки ${}^t\varphi(x - i\varepsilon, h)$ применима теорема 1.3, в силу которой эта строка находится в образе преобразования $\mathcal{B}_a(z, h)$. Теперь из теоремы 1.2 вытекает включение

$${}^t\varphi(x - i\varepsilon, h)({}^tW_-(x))^{-1} \in {}^*H_-^2(\mathbb{C}^n), \quad h \in \mathcal{K}_a,$$

что, как это следует из (3.17), и требовалось доказать.

Если рассмотреть (3.16) на введенной ранее последовательности h_n , то мы получим

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)F(x - i\varepsilon, h_n) = \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)v_\varepsilon^{-1}(x + i0)v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h_n) \\ &= \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)v_\varepsilon^{-1}(x + i0)\mathbb{P}_+ v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h_n) \\ &\quad + \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)v_\varepsilon^{-1}(x + i0)\mathbb{P}_- v_\varepsilon(x + i0)F(x - i\varepsilon, h_n). \end{aligned}$$

Из (3.14') следует, что второе слагаемое в последнем равенстве стремится к нулю. Поэтому в силу леммы 2.2 об операторе Теплица из стремления к нулю первого слагаемого следует справедливость (3.15).

Рассмотрим теперь равенство (3.13) для последовательности h_n , которую можно считать слабо сходящейся к некоторому вектору $h_0 \in \mathcal{K}_a$. Если учесть (3.14), (3.14'), (3.15), а также оценку снизу $|\Psi(x - i\varepsilon)| \geq \delta > 0$, $x \in \mathbb{R}$, то из (3.13) заключаем, что

$$v_\varepsilon(x + i0)X(x - i\varepsilon, h_n) - \frac{z_0 v_\varepsilon(x + i0)}{x - i\varepsilon} X(z_0, h_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

в метрике пространства $L_2^n(\mathbb{R})$. Из определения функционала $X(z, h)$ вытекает сходимость $X(z_0, h_n) \rightarrow X(z_0, h_0)$ в $\mathbb{C}^n$. Теперь из (3.18) следует сходимость

$$X(x - i\varepsilon, h_n) \rightarrow \frac{z_0 X(z_0, h_0)}{x - i\varepsilon}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

в $L_2^n(v_\varepsilon^2)$, где вес $v_\varepsilon^2(x) := v_\varepsilon^*(x + i0)v_\varepsilon(x + i0)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$.

В силу аналога теоремы 1.3 и аналога следствия 1.1 для целых столбцов следует, что предел последовательности $X(x - i\varepsilon, h_n)$ в метрике $L_2(v_\varepsilon^2)$ должен быть целой вектор-функцией. Поэтому из (3.19) выводим, что $X(z_0, h_0) = 0$, стало быть, в силу (3.18) имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \| v_\varepsilon(x + i0)X(x - i\varepsilon, h_n) \|^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что $w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon) \stackrel{\text{п.в.}}{=} v_\varepsilon^*(x + i0)v_\varepsilon(x + i0)$, из (3.6) получаем равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, что противоречит предположению $\|h_n\| = 1$. Лемма доказана.

3.2. В этом пункте рассмотрим модельную задачу о принадлежности полу-группы $U_+(t)$ классу $\mathcal{C}_0$. Напомним, что оператор K_a , построенный по $\Theta(z) = e^{iaz}E_n$ и весу $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, задается формулой (3.1), матрица-функция $\Phi_a(z)$ определяется формулой (3.2).

ЛЕММА 3.3. Пусть оператор K_a при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям:

1) вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi_a(x - i\varepsilon)(w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon))^{-1}\Phi_a^*(x - i\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$;

2) матрица-функция $W_-(z) := \Phi_a(z - i\varepsilon)w_-^{-1}(z - i\varepsilon)$ внешняя в области $\mathbb{C}_-$.

Тогда $\text{Ker } K_a = \text{Ker } K_a^* = \{0\}$ и оператор $A := K_a^{-1}$ генерирует полугруппу $U_+(t) = \exp\{iAt\}$, $t \geq 0$, класса C_0 , причем ее экспоненциальный тип не превосходит ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Докажем сначала двустороннюю оценку

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{P}_- v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h)\|^2 dx \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_a, \quad (3.20)$$

где функционал $K_0(z, h)$ определяется формулой (3.9), m, M – положительные константы. Из леммы 3.2 следует, что достаточно доказать лишь оценку снизу. Прежде всего заметим, что

$$\mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)K_0(x - i\varepsilon, h) = 0, \quad h \in \mathcal{K}_a. \quad (3.21)$$

Чтобы убедиться в этом, умножим слева обе части равенства (3.10) на $w(x - i\varepsilon)$, в котором предварительно положим $z = x - i\varepsilon$. Тогда первое слагаемое в правой части преобразованного равенства принадлежит $H_-^2(\mathbb{C}^n)$ в силу утверждения 2) леммы 3.1, принадлежность классу $H_-^2(\mathbb{C}^n)$ второго слагаемого вытекает из (3.16).

Введем теперь оператор

$$Sh := \mathbb{P}_- v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h), \quad h \in \mathcal{K}_a,$$

и предположим, что оценка снизу (3.20) места не имеет, т.е. для некоторой последовательности h_n ($\|h_n\| = 1$) последовательность Sh_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда из равенства (3.21) следует, что

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)K_0(x - i\varepsilon, h_n) \\ &= \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)v_\varepsilon^{-1}(x + i0)\mathbb{P}_+ v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h_n) \\ &\quad + \mathbb{P}_+ w_-(x - i\varepsilon)v_\varepsilon^{-1}(x + i0)Sh_n, \end{aligned}$$

и поэтому стремится к нулю первое слагаемое справа. Из леммы 2.2 вытекает стремление к нулю последовательности $\mathbb{P}_+ v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h_n)$, что вместе с $Sh_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, влечет равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} v_\varepsilon(x + i0)K_0(x - i\varepsilon, h_n) = 0$ в метрике $L_2^n(\mathbb{R})$. Однако тогда из леммы 3.2 следует, что $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает оценку снизу (3.20).

Шаг 2. Таким образом, оператор S – изоморфизм пространства $\mathcal{K}_a$ на некоторое подпространство $\mathcal{L}$ пространства Харди $H_-^2(\mathbb{C}^n)$. Вычисления, аналогичные тем, которые проводились при выводе (2.17), показывают, что справедливо равенство

$$SK_a(I - (\mu - i\varepsilon)K_a)^{-1}h = \frac{(Sh)(x) - (Sh)(\mu)}{x - \mu}, \quad \text{Im } \mu < 0, \quad (3.22)$$

для всех $h \in \mathcal{K}_a$. Заметим, что $(\mu - i\varepsilon)^{-1} \notin \sigma(K_a)$, $\text{Im } \mu < 0$, поскольку по условию функция $W_-(z)$ является внешней в $\mathbb{C}_-$. Таким образом, подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно действия операторов

$$(R_\mu \varphi)(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(\mu)}{x - \mu}, \quad \varphi \in \mathcal{L}, \quad \mu \in \mathbb{C}_-.$$

Поэтому существует [13], [24] мероморфная в $\mathbb{C}$ и внутренняя в $\mathbb{C}_-$ матрица-функция $\Pi(z)$ такая, что

$$\mathcal{L} = H_-^2(\mathbb{C}^n) \ominus \Pi(z)H_-^2(\mathbb{C}^n).$$

Из (3.22) вытекает, что вектор-функции из $\mathcal{L}$ аналитичны в окрестности нуля. Полагая $\mu = 0$ в (3.22), получаем равенство

$$SK_a(I + i\varepsilon K_a)^{-1}h = LSh, \quad h \in \mathcal{K}_a,$$

где антидиссипативный оператор L действует по формуле

$$(L\varphi)(z) = z^{-1}(\varphi(z) - \varphi(0)), \quad \varphi \in \mathcal{L}.$$

Отсюда легко вытекает, что $\text{Ker } K_a = \text{Ker } K_a^* = \{0\}$ и оператор $A := K_a^{-1}$ есть w -возмущение оператора $A_0 := (B^*)^{-1}$. Таким образом, последнее равенство переписывается в виде

$$(A + i\varepsilon I)^{-1} = S^{-1}LS.$$

Поэтому полугруппа $U_+(t)$ принадлежит классу C_0 и имеет вид $U_+(t) = e^{\varepsilon t}S^{-1} \exp\{iL^{-1}t\}S$, причем полугруппа $\exp\{iL^{-1}t\}$ является сжимающей. Лемма доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению общего модельного оператора K , который порождается парой $\Theta \in J_n$ и $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ и действует по формуле

$$Kh = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^\Theta)g_k^\Theta, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta. \quad (3.23)$$

Напомним, что $\Delta(z) = \det \Phi(z)$, где матрица-функция $\Phi(z)$ по оператору K задается формулами (2.3). Через Λ обозначается множество корней функции Δ .

Мы предполагаем, что $\text{Ker } K_a = \text{Ker } K_a^* = \{0\}$, и рассматриваем оператор $A := K^{-1}$, который является w -возмущением оператора $A_0 := (B^*)^{-1}$ ранга n .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть оператор K порождается матрицей-функцией $\Theta \in J_n$ и весом $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$. Пусть при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия:

- 1) $\inf_{\lambda_k \in \Lambda} \text{Im } \lambda_k > -\varepsilon$;
- 2) $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\Delta(iy)| = 0$;
- 3) вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x - i\varepsilon)(w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x - i\varepsilon)$ удовлетворяет условию (A_2) .

Тогда полугруппа $U_+(t) = \exp\{iAt\}$ принадлежит классу C_0 и ее экспоненциальный тип не превосходит ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через a экспоненциальный тип матрицы-функции Θ . Наряду с оператором K , который задается формулой (3.23) в пространстве $\mathcal{K}_\Theta$, рассмотрим также оператор K_a вида (3.1) в пространстве $\mathcal{K}_a$:

$$K_a h = B_a^* h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^\Theta)g_k^a, \quad h \in \mathcal{K}_a.$$

Заметим, что из леммы 1.2 вытекают равенства

$$\mathbb{P}_\Theta(I - zB_a^*)^{-1}g_k^a = (I - zB^*)^{-1}g_k^\Theta, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Поэтому, вычисляя по формуле (3.2) матрицу-функцию $\Phi_a(z)$, получим

$$\begin{aligned}\Phi_a^{kj}(z) &= \delta_{kj} - z((I - zB_a^*)^{-1}g_j^a, f_k^\Theta) = \delta_{kj} - z(\mathbb{P}_\Theta(I - zB_a^*)^{-1}g_j^a, f_k^\Theta) \\ &= \delta_{kj} - z((I - zB^*)^{-1}g_j^\Theta, f_k^\Theta) = \Phi_{kj}(z), \quad 1 \leq k, j \leq n,\end{aligned}$$

т.е. $\Phi_a(z) \equiv \Phi(z)$. Заметим, что из условий 1), 2) и теоремы 1.2 вытекает тот факт, что матрица-функция $W_-(z) = \Phi_a(z - i\varepsilon)w_-^{-1}(z - i\varepsilon)$ является внешней в $\mathbb{C}_-$. В самом деле, из теоремы 1.2 следует, что элементы матрицы $(z - i\varepsilon)^{-1}\Phi_a(z - i\varepsilon)w_-(z - i\varepsilon)$ принадлежат классу H_-^2 . Поэтому имеет место факторизация

$$\Phi_a(z - i\varepsilon)w_-(z - i\varepsilon) = W_e(z)V(z),$$

где W_e – внешняя, V – внутренняя матрицы-функции в $\mathbb{C}_-$. Переходя к определителям, из условия 2) выводим, что V – унитарная константа. Таким образом, оператор K_a удовлетворяет всем условиям леммы 3.3, следовательно, полугруппа $\exp\{iK_a^{-1}t\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 .

Далее, поскольку имеет место факторизация $e^{iaz}E_n = \Theta(z)\Theta_1(z)$, $\Theta, \Theta_1 \in J_n$, то [17] пространство $\mathcal{K}_\Theta$ инвариантно относительно оператора B_a и

$$B = B_a|_{\mathcal{K}_\Theta}, \quad B^* = \mathbb{P}_\Theta B_a^*|_{\mathcal{K}_\Theta}.$$

Поэтому из определения оператора K_a и формулы (3.23) вытекает равенство

$$\mathbb{P}_\Theta K_a h = K h, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta.$$

Из приведенных формул следует, что

$$(A - zI)^{-1} = \mathbb{P}_\Theta(K_a^{-1} - zI)^{-1}|_{\mathcal{K}_\Theta}, \quad z \notin \sigma(A).$$

Таким образом, полугруппа $U_+(t) = \exp\{iAt\}$ также принадлежит классу C_0 , и ее тип не превосходит типа полугруппы $\exp\{iK_a^{-1}t\}$. Теорема доказана.

Докажем теперь необходимость условий 1)–3) теоремы 3.1.

ЛЕММА 3.4. Пусть оператор K задается формулой (3.23) и $\text{Ker } K = \text{Ker } K^* = \{0\}$. Пусть полугруппа $U_+(t) = \exp\{iAt\}$, где $A := K^{-1}$, принадлежит классу C_0 и ее экспоненциальный тип равен ω . Тогда для любого $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняются условия 1), 2) теоремы 3.1. Если матрица-функция $\Theta(z)$ такова, что при некотором $\delta > 0$ функция $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то при каждом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняется условие 3) теоремы 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия 1) теоремы 3.1 очевидна. Доказательство необходимости условия 3) при дополнительном ограничении, налагаемом на $\Theta(z)$, аналогично доказательству для случая полугруппы $U_-(t)$ и также основано на лемме 2.4.

Перейдем теперь к доказательству необходимости условия 2). Пусть полугруппа $U_+(t)$ принадлежит классу C_0 . Тогда в области $\text{Im } z < -\varepsilon$, $\varepsilon > \min\{0, \omega\}$, имеет место представление

$$i(A - zI)^{-1} = \int_0^\infty U_+(t)e^{-izt} dt.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.3 (шаг 2), заключаем, что матрица-функция $\Phi^{-1}(z)(z - z_0)^{-2}$, $\text{Im } z_0 > 0$, ограничена в области $\text{Im } z < -\varepsilon$.

Из определения $\Phi(z)$ (формула (2.3)) и того факта, что $A_0 := (B^*)^{-1}$ является диссипативным оператором, следует ограниченность матрицы-функции $\Phi(z)(z - z_0)^{-2}$ в полуплоскости $\text{Im } z < -\varepsilon$. Поэтому функция $\Delta(z)(z - z_0)^{-2n}$ ограничена в области $\text{Im } z < -\varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\Delta(z - i\varepsilon)$ – функция ограниченного вида в $\mathbb{C}_-$ [8], и поэтому она факторизуется следующим образом:

$$\Delta(z - i\varepsilon) = e^{-i\alpha z} \varphi(z), \quad \alpha \geq 0, \quad (3.24)$$

где φ – внешняя функция в $\mathbb{C}_-$.

Обозначим через $\Phi^0(z)$ матрицу, присоединенную к $\Phi(z)$. Поскольку матрица-функция $\Phi(z)(z - z_0)^{-2}$ ограничена в области $\text{Im } z < -\varepsilon$, то элементы $\Phi_{kj}^0(z - i\varepsilon)$ допускают следующие факторизации в $\mathbb{C}_-$:

$$\Phi_{kj}^0(z - i\varepsilon) = e^{-ip_{kj}z} \varphi_{kj}(z), \quad p_{kj} \geq 0, \quad (3.25)$$

φ_{kj} – внешние функции в $\mathbb{C}_-$. Из (3.24) следует, что

$$\begin{aligned} \{\Phi^{-1}(z - i\varepsilon)(z - i\varepsilon - z_0)^{-2}\}_{kj} &= \Phi_{kj}^0(z - i\varepsilon)\Delta^{-1}(z - i\varepsilon)(z - i\varepsilon - z_0)^{-2} \\ &= e^{-i(p_{kj} - \alpha)z} \Psi_{kj}(z), \end{aligned}$$

где Ψ_{kj} – внешние функции в $\mathbb{C}_-$. Ввиду ограниченности $\Phi^{-1}(z)(z - z_0)^{-2}$ отсюда вытекают равенства

$$p_{kj} = \alpha + \varepsilon_{kj}, \quad \varepsilon_{kj} \geq 0.$$

Поэтому из (3.25) следует представление

$$\det \Phi^0(z - i\varepsilon) = e^{-in\alpha z} \Psi(z), \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

причем функция Ψ после деления на $(z - i)^{2(n+1)}$ будет ограниченной в $\mathbb{C}_-$. С другой стороны, из (3.24) следует формула

$$\det \Phi^0(z - i\varepsilon) = \Delta^{n-1}(z - i\varepsilon) = e^{-i(n-1)\alpha z} \varphi^{n-1}(z),$$

что можно совместить с предыдущим равенством лишь в случае $\alpha = 0$. Тогда из (3.24) следует, что функция $\Delta(z - i\varepsilon)$ является внешней, т.е. условие 2) теоремы 3.1 выполняется. Лемма доказана.

3.3. В этом пункте мы опишем сильно непрерывные полугруппы $U_+(t) = \exp\{iAt\}$, где оператор A принадлежит классу w -возмущений конечного ранга. Напомним, в п. 1.5 было показано, что каждое w -возмущение A оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$ ранга n каноническим образом порождает вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ и матрицу-функцию $\Theta \in J_n$. Кроме того, каждому оператору A в силу формул (2.27) отвечает целая матрица-функция Φ такая, что множество Λ корней функции $\Delta(z) = \det \Phi(z)$ совпадает со спектром оператора A . Имеет место

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть оператор A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\text{exp})}$, которому отвечает пара $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$, $\Theta \in J_n$. Пусть при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия:

- 1) $\inf_{\lambda_k \in \Lambda} \text{Im } \lambda_k > -\varepsilon$;
- 2) $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\Delta(iy)| = 0$;

3) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x - i\varepsilon)(w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon))^{-1}\Phi^*(x - i\varepsilon)$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$.

Тогда полугруппа $U_+(t) := \exp\{iAt\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 и ее экспоненциальный тип не превосходит ε .

Обратно, если $U_+(t) \in C_0$ и ее тип равен ω , то при любом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняются условия 1), 2). Если при некотором $\delta > 0$ матрица-функция $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то при любом $\varepsilon > \max\{0, \omega\}$ выполняется условие 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью теоремы 1.5 задача сводится к случаю модельного оператора K , который задается формулой (3.23). Дальнейшие рассуждения полностью повторяют доказательство теоремы 2.3 и опираются на теорему 3.1 и лемму 3.4. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть A – w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$. Если при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются условия 1)–3) теоремы 3.2, то оператор $(A^* - i\varepsilon I)^{-1}$ подобен некоторому диссипативному оператору с не более чем n -мерной мнимой частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1.5 следует, что это утверждение достаточно доказать для модельного оператора K из теоремы 3.1. Как и при доказательстве теоремы 3.1, наряду с оператором

$$Kh = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^\Theta) g_k^\Theta, \quad h \in \mathcal{K}_\Theta,$$

рассмотрим также оператор

$$K_a h = B_a^* h + \sum_{k=1}^n (h, f_k^\Theta) g_k^a, \quad h \in \mathcal{K}_a.$$

Поскольку $B_a | \mathcal{K}_\Theta = B$ и $g_k^\Theta = \mathbb{P}_\Theta g_k^a$, $1 \leq k \leq n$, при любом $h \in \mathcal{K}_\Theta$ получим

$$K_a^* h = B_a h + \sum_{k=1}^n (h, g_k^a) f_k^\Theta = Bh + \sum_{k=1}^n (h, g_k^\Theta) f_k^\Theta = K^* h.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$((K^*)^{-1} - i\varepsilon I)^{-1} = ((K_a^*)^{-1} - i\varepsilon I)^{-1} | \mathcal{K}_\Theta.$$

При доказательстве леммы 3.3 было установлено, что оператор $((K_a)^{-1} + i\varepsilon I)^{-1}$ подобен некоторому антидиссипативному оператору с не более чем n -мерной мнимой частью. Поэтому оператор $(A^* - i\varepsilon I)^{-1}$, где $A = K^{-1}$, подобен некоторому диссипативному оператору L . Лемма доказана.

3.4. В этом пункте мы сделаем ряд дополнений к доказанным теоремам 2.3, 3.2. Начнем со следующего простого наблюдения. Пусть замкнутый плотно заданный оператор A в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задается формулой

$$A^{-1}h = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k) g_k, \quad (3.26)$$

где B – вольтерров диссипативный оператор с тривиальным ядром и n -мерной мнимой частью $\text{Im } B$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ оператор A задается формулой (3.26), в которой векторы $\{g_k\}_{k=1}^n$ образуют базис подпространства несамосопряженности $\mathcal{L} := (\operatorname{Im} B)\mathfrak{H}$. Тогда оператор A является w -возмущением $A_0 = (B^*)^{-1}$, которому отвечает вес Макенхаупта $w^2(x) \equiv E_n$, $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор B^* унитарно эквивалентен своей функциональной модели вида (1.4), причем при такой унитарной эквивалентности базис подпространства $\mathcal{L}$ переходит в базис подпространства несамосопряженности оператора (1.4) [17]. Поэтому можно считать, что в (3.26) оператор B^* действует по формуле (1.4) в пространстве $\mathcal{K}_\Theta$. В замечании 2.1 доказано, что образ оператора $B - B^*$ натягивается на векторы $z^{-1}(E_n - \Theta(z))e_k$, $1 \leq k \leq n$, где e_k – стандартные орты в $\mathbb{C}^n$. В замечании 2.1 также была проверена справедливость равенств

$$(I + iB^*)\mathbb{P}_\Theta \frac{e_k}{x + i} = z^{-1}(E_n - \Theta(z))e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, системы векторов

$$g_k := (I + iB^*)\mathbb{P}_\Theta \frac{Qe_k}{x + i}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где Q – произвольная обратимая матрица, описывают все базисы подпространства $\mathcal{L}$ для модельного оператора. С другой стороны, введенные векторы g_k удовлетворяют соотношениям (1.6) в случае веса $w^2(x) = Q^*Q$. Из теоремы 1.1 следует, что A – w -возмущение оператора $A_0 = (B^*)^{-1}$, которому отвечает вес Q^*Q , а значит, и вес E_n . Теорема доказана.

Во введении было отмечено, что в теореме о полугруппе $U_-(t) = \exp\{-iAt\}$, вообще говоря, нельзя избавиться от условия того, что оператор A является w -возмущением $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$ с некоторым весом Макенхаупта w^2 . Здесь мы выделим класс операторов вида (3.26) таких, что условие: оператор A есть w -возмущение оператора $A_0 = (B^*)^{-1}$, является необходимым для принадлежности $\exp\{-iAt\}$ классу C_0 . Сформулируем точный результат. Как и раньше, будем считать, что в формуле (3.26) оператор B является диссипативным с n -мерной мнимой частью и со спектром в нуле. Априори на системы векторов $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ ограничения, кроме их линейной независимости, не налагаются. В следующей формулировке через $\Theta(z)$ обозначается характеристическая матрица-функция оператора B .

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть A действует по формуле (3.26) в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть также векторы f_k , $1 \leq k \leq n$, образуют базис подпространства несамосопряженности $(\operatorname{Im} B)\mathfrak{H}$ и существует такое $\delta > 0$, что элементы матрицы $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничены в $\mathbb{C}_+$. Тогда если A генерирует полугруппу $\exp\{-iAt\}$, $t \geq 0$, класса C_0 , то существует вес $w^2 \in \mathcal{M}_n^2$ такой, что A есть w -возмущение оператора $A_0 = (B^*)^{-1}$ класса $\Sigma^{(\exp)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть полугруппа $\exp\{-iAt\}$ принадлежит классу C_0 . Тогда в силу резольвентного критерия принадлежности полугруппы классу C_0 [2] следует, что оператор $-A^*$ также генерирует C_0 -полугруппу $\exp\{-iA^*t\}$.

Заметим, что

$$(-A^*)^{-1}h = B_1^*h + \sum_{k=1}^n (h, g_k)(-f_k), \quad h \in \mathfrak{H}, \quad (3.27)$$

где введено обозначение $B_1^* := -B$. Оператор B_1 принадлежит тому же классу, что и оператор B , и между их характеристическими матрицами-функциями Θ и Θ_1 (см. формулы (1.5), (1.5')) существует простая связь:

$$\Theta_1(z) = \Theta^*(-\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поскольку для операторов B и B_1 подпространства несамосопряженности совпадают, из (3.27) и теоремы 3.3 вытекает, что оператор $-A^*$ есть w -возмущение $(B_1^*)^{-1}$, которому отвечает вес $w^2(x) \equiv E_n$. Как уже отмечалось, оператор $(-A^*)^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору вида (2.1), который порождается $\Theta_1 \in J_n$ и весом Макенхаупта E_n . Поскольку существует $\delta > 0$ такое, что функция $e^{-i\delta z}\Theta_1(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то в силу леммы 2.5 при некотором $\varepsilon > 0$ соответствующий вес $W_\varepsilon^2(x)$ принадлежит $\mathcal{M}_n^2$. В силу леммы 2.3 выполняется условие (2.20), которое равносильно тому, что матрица-функция

$$W_+(z) = \Phi_1(z + i\varepsilon)\Theta_1(z + i\varepsilon), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

является внешней. Здесь через $\Phi_1(z)$ обозначена матрица-функция, которая вычисляется по формуле (2.11) для оператора вида (3.27). Поскольку в нашем случае $w_+(z) \equiv E_n$, в силу теоремы 2.1 и леммы 2.1 при указанном ε имеет место двусторонняя оценка

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \|F(h, z)\|^2 dz \leq M\|h\|^2, \quad h \in \mathcal{K}_{\Theta_1}, \quad (3.28)$$

где вектор-функция $F(h, z)$ вычисляется по формулам (2.3), (2.4). Если снова рассмотреть оператор $-A^*$ в пространстве $\mathfrak{H}$, то с учетом (3.27) получим

$$F(h, z) = \Phi_1^{-1}(z) \operatorname{col}\{((I - zB_1^*)^{-1}h, g_k)\}_{k=1}^n, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Учитывая равенство $B_1^* = -B$, вычислим

$$\begin{aligned} \|F(h, z)\|^2 &= \|F^*(h, z)\|^2 = \|\operatorname{row}\{((I - \bar{z}B_1)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n(\Phi_1^*(z))^{-1}\|^2 \\ &= \|\operatorname{row}\{((I + \bar{z}B^*)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n V^{-1}(z)\|^2, \end{aligned}$$

где введено обозначение $V^2(z) := \Phi_1(z)\Phi_1^*(z)$. Поскольку в нашем случае $w_+(z) \equiv E_n$, для веса $W_\varepsilon^2(x)$ справедлива формула

$$W_\varepsilon^2(x) = \Phi_1(x + i\varepsilon)\Phi_1^*(x + i\varepsilon) = V^2(x + i\varepsilon) \in \mathcal{M}_n^2.$$

Таким образом, из (3.28) вытекает справедливость двусторонней оценки

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\operatorname{row}\{((I + (x - i\varepsilon)B^*)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n V^{-1}(x + i\varepsilon)\|^2 dx \leq M\|h\|^2 \quad (3.29)$$

для всех $h \in \mathfrak{H}$.

Шаг 2. Если ввести обозначение $\mathcal{F}(z, h) = \operatorname{row}\{((I - zB^*)^{-1}g_k, h)\}_{k=1}^n$, то двойную оценку (3.29) можно переписать в виде

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(x + i\varepsilon, h)V^{-1}(-x + i\varepsilon)\|^2 dx \leq M\|h\|^2 \quad (3.30)$$

для всех $h \in \mathfrak{H}$. Поскольку $V^{-1}(-x + i\varepsilon) \in \mathcal{M}_n^2$, в силу теоремы 1.3 существует оператор S , отображающий $\mathfrak{H}$ на некоторое подпространство пространства $\mathcal{K}_a$ и такой, что имеет место представление

$$\mathcal{F}(x + i\varepsilon, h) = \mathcal{B}_a(x, Sh), \quad h \in \mathfrak{H},$$

отвечающее весу $w^2(x) := V^2(-x + i\varepsilon)$. Напомним, что через a обозначается экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB^*)^{-1}$. Из (3.30) и теоремы 1.2 вытекает, что оператор S есть изоморфизм пространства $\mathfrak{H}$ на свой образ. Из неравенства (1.21) следует оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(x, h)w_-^{-1}(x - i\varepsilon)\|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}_a(x - i\varepsilon, Sh)w_-^{-1}(x - i\varepsilon)\|^2 dx \\ &\leq M \|Sh\|_{\mathcal{K}_a}^2 \leq M_1 \|h\|^2, \quad h \in \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Напомним, что вес $w_\varepsilon^2(x) := w_-^*(x - i\varepsilon)w_-(x - i\varepsilon)$, где w_- участвует в факторизации (1.1), принадлежит классу $\mathcal{M}_n^2$. Оценку снизу мы выведем из представления (1.23) и ограниченности снизу оператора T , который определен равенством (1.23'). Итак, из (1.23) следует, что для любого $h \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(x, h)w_-^{-1}(x - i\varepsilon)\|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}_a(x - i\varepsilon, Sh)w_-^{-1}(x - i\varepsilon)\|^2 dx \\ &= \int_0^\infty \|e^{-\varepsilon t}G(Sh, t)\|^2 dt \geq e^{-2\varepsilon a} \int_0^a \|(TSh)(t)\|^2 dt \geq m_1 \|Sh\|_{\mathcal{K}_a}^2 \geq m_2 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Последние два неравенства означают, что оператор A есть w -возмущение оператора $A_0 = (B^*)^{-1}$ с весом w_ε^2 . Теорема доказана.

Отметим, что аналоги теоремы 3.4 имеют место для более широких классов операторов вида (3.26), однако это мы рассматривать не будем.

Выражения для операторов $U_+(t), U_-(t)$ вытекают из общих формул теории полугрупп. Например, пусть условия теоремы 2.3 выполняются при некотором $\varepsilon \geq 0$. Тогда справедлива следующая формула:

$$U_-(t)h = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{+\infty + i\varepsilon} e^{-izt} \sum_{k=1}^n f_k(h, z) A_0(A_0 - zI)^{-1} g_k dz, \quad (3.31)$$

где функционалы $f_k(h, z)$ определяются равенствами

$$f_k(h, z) = \sum_{j=1}^n \Psi_{kj}(z) (A_0(A_0 - zI)^{-1} h, f_j),$$

$$\Psi(z) := \Phi^{-1}(z), \quad \Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z(A_0(A_0 - zI)^{-1} g_j, f_k), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Точные вычисления экспоненциальных типов полугрупп $U_+(t), U_-(t)$ мы приводить не будем. Укажем только, что такое вычисление, например для $U_-(t)$, основано на детальном изучении матрицы-функции $\Pi(z)$, которая фигурирует в формулировке следствия 2.1.

§ 4. Примеры и некоторые применения доказанных теорем

В этом параграфе мы изложим некоторые применения основных теорем о принадлежности полугрупп $U_\pm(t)$ классу C_0 .

4.1. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим оператор A , обратный к которому задается равенством

$$A^{-1}h = B^*h + \sum_{k=1}^n (h, f_k)g_k, \quad (4.1)$$

где B – вольтерров диссипативный оператор с n -мерной частью $\text{Im } B$ и тривиальным ядром, системы векторов $\{f_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ образуют базисы пространства несамосопряженности $\mathcal{L} := (\text{Im } B)\mathfrak{H}$. Таким образом, существуют обратимые матрицы $C := \|c_{kj}\|$, $D = \|d_{kj}\|$ такие, что

$$f_k = \sum_{j=1}^n d_{kj}\varphi_j, \quad g_k = \sum_{j=1}^n c_{kj}\varphi_j, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.2)$$

где попарно ортогональные векторы φ_k взяты из разложения

$$\frac{1}{i}(B - B^*)h = \sum_{k=1}^n (h, \varphi_k)\varphi_k, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Напомним, что элементы характеристической матрицы-функции $\Theta(z)$ оператора B определяются равенствами

$$\Theta_{jk}(z) = \delta_{kj} + iz((I - zB)^{-1}\varphi_k, \varphi_j), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Следующий результат доказывается путем применения теорем 2.3, 3.2 к операторам вида (4.1).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть A – плотно заданный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, обратный к которому задается формулой (4.1), $\Theta(z)$ – характеристическая матрица-функция оператора B . Если при некотором $\delta > 0$ элементы матрицы $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничены в $\mathbb{C}_+$, то полугруппа $U_-(t) = \exp\{-iAt\}$ принадлежит классу C_0 . Если, кроме того, матрица $E_n + iCD^*$ обратима, то полугруппа $U_+(t) = \exp\{iAt\}$ также принадлежит классу C_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.3 оператор A является w -возмущением оператора $A_0 = (B^*)^{-1}$ с весом $w^2(x) \equiv E_n$, $x \in \mathbb{R}$. Оператор B^* унитарно эквивалентен своей функциональной модели (1.4) в пространстве $\mathcal{K}_\Theta$. Поэтому из теоремы 1.2 вытекает, что w -возмущению A отвечают $E_n \in \mathcal{M}_n^2$, $\Theta(z) \in J_n$.

В результате простых выкладок с учетом формул (4.2) приходим к равенству

$${}^t\Phi(z) = E_n + iCD^* - iC({}^t\Theta(\bar{z}))^*D^*, \quad (4.3)$$

где $\Phi(z)$ – фигурирующая в формулировках теорем 2.3, 3.2 матрица-функция. Поскольку матрица $E_n + iCD^*$ обратима и $\lim_{y \rightarrow +\infty} \Theta^*(x + iy) = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, выполняются условия 1)–3) теоремы 3.2 для некоторого $\varepsilon > 0$, т. е. полугруппа $U_+(t)$ принадлежит классу C_0 .

Поскольку $\Theta^*(\bar{z})\Theta(z) = E_n$ [17], из (4.3) выводим равенство

$${}^t\Phi(z)(D^*)^{-1}({}^t\Theta(z)) = \Delta(D^*)^{-1}({}^t\Theta(z) - iC), \quad \Delta := E_n - iCD^*,$$

из которого следует, что $\sigma(A)$ лежит в некоторой области $\text{Im } z < \varepsilon$. Кроме того, отсюда следует равенство

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log(\Phi(iy)\Theta(iy)) = 0,$$

которое равносильно условию 2) теоремы 2.3 (этот факт установлен при доказательстве теоремы 2.3).

Далее, равенство (4.3) можно переписать в виде

$$\Phi(z) = R + S\Theta^*(\bar{z})T, \quad (4.4)$$

где R, S, T – обратимые матрицы. Поскольку $\Theta^*(\bar{z}) = \Theta^{-1}(z)$, в полуплоскости $\text{Im } z > \varepsilon$, где $\Phi(z)$ обратима, получим

$$\Phi^{-1}(z) = T^{-1}\Theta(z)(S^{-1}RT^{-1}\Theta(z) + E_n)^{-1}S^{-1}. \quad (4.5)$$

Учитывая, что $e^{-i\delta z}\Theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$ и $\|\Theta(x + ib)\| \leq C(b)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ [17], из равенств (4.4), (4.5) следует, что при достаточно больших $\varepsilon > 0$ имеют место оценки

$$\|\Phi(x + i\varepsilon)\| \leq M, \quad \|\Phi^{-1}(x + i\varepsilon)\| \leq M, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Они означают, что выполняется условие 3) теоремы 2.3. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь один частный случай теоремы 4.1. Предположим, что $g_k = \sum_{p=1}^n Q_{kp}f_p$, $1 \leq k \leq n$, где матрица Q удовлетворяет условию $\text{Im } Q \leq 0$. Тогда из (4.1) следует, что для любого $h \in \mathfrak{H}$

$$\text{Im}(A^{-1}h, h) = \text{Im}(B^*h, h) + \text{Im} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n Q_{kp}(f_p, h) \overline{(f_k, h)} \leq 0.$$

Таким образом, $\text{Im}(Af, f) \geq 0$ для всех $f \in D_A$, и поэтому полугруппа $U_+(t)$ заведомо принадлежит классу C_0 . С другой стороны, из (4.2) вытекает, что в этом случае $C = QD$. Поскольку матрица $E_n + iCD^* = E_n + iQDD^*$ всегда обратима, из теоремы 4.1 вытекает тот же результат, однако при дополнительном предположении ограниченности матрицы-функции $e^{-i\delta z}\Theta(z)$. Вместе с тем, доказательство теоремы 4.1 показывает, что это предположение является весьма грубым и, по-видимому, его можно заменить более слабым условием.

4.2. Напомним, что пространство Соболева $W_2^1([0, a], \mathbb{C}^n)$ состоит из вектор-функций $u(x) = \text{col}(u_k(x))_{k=1}^n$ с абсолютно непрерывными на отрезке $[0, a]$ координатами $u_k(t)$, $1 \leq k \leq n$. На этом пространстве задана норма

$$\|u\|_+^2 := \sum_{k=1}^n \int_0^a |u_k(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n \int_0^a |u'_k(x)|^2 dx < \infty.$$

Рассмотрим систему φ_k , $1 \leq k \leq n$, ограниченных в $W_2^1([0, a], \mathbb{C}^n)$ функционалов, удовлетворяющих условию нормировки:

$$\varphi_k(e_j) = \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq n, \quad (4.6)$$

где $e_j = \text{col}(\delta_{kj})_{k=1}^n$ – стандартный орт, рассматриваемый как элемент пространства $W_2^1([0, a], \mathbb{C}^n)$. Предполагается, что система φ_k линейно независима по mod $L_2^n(0, a)$, т.е. любая линейная комбинация $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ неограничена в $L_2^n(0, a)$. В силу последнего условия линейал

$$\mathcal{L} := \bigcap_{k=1}^n \text{Ker } \varphi_k$$

всюду плотен в $L_2^n(0, a)$. В пространстве $L_2^n(0, a)$ рассмотрим оператор

$$A = i \frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D}_A = \mathcal{L}, \quad (4.7)$$

а также оператор $A_0 = i \frac{d}{dx}$, область определения которого состоит из всех

функций $u \in W_2^1([0, a], \mathbb{C}^n)$ таких, что $u(0) = 0$. Чтобы найти обратный оператор A^{-1} , решаем уравнение $iu'(x) = h(x)$ с условием $u \in \mathcal{L}$. Поскольку

$$u(x) = -i \int_0^x h(s) ds + \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad (4.8)$$

где c_k – произвольные константы, из условий $\varphi_k(u) = 0$, $1 \leq k \leq n$, с учетом (4.6) найдем

$$c_k = \varphi_k \left(i \int_0^x h(s) ds \right), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.9)$$

Легко видеть, что функционалы c_k ограничены в пространстве $L_2^n(0, a)$ и поэтому в силу теоремы Рисса допускают представления

$$c_k(h) = (h, f_k), \quad f_k \in L_2^n(0, a), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.10)$$

Таким образом, из (4.8) следует равенство

$$A^{-1}h = A_0^{-1}h + \sum_{k=1}^n (h, f_k) e_k, \quad (A_0^{-1}h)(x) := -i \int_0^x h(s) ds.$$

В результате элементарных вычислений приходим к формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(z, h) &= \text{row}\{A_0(A_0 - zI)^{-1}e_k, h\}_{k=1}^n = \text{row}\left\{\int_0^a e^{-izx} \overline{h_k}(x) dx\right\}_{k=1}^n, \\ h &= \text{col}(h_k)_{k=1}^n, \end{aligned}$$

из которой следует, что A есть w -возмущение оператора $A_0 \in \Sigma^{(\exp)}$, которому отвечают постоянный (A_2) -вес E_n и матрица-функция $\Theta(z) = e^{iaz} E_n$. Вычислим теперь соответствующую матрицу-функцию $\Phi(z)$. С учетом формулы (4.6), а также соотношений (4.9) и (4.10) найдем

$$\begin{aligned} \Phi_{kj}(z) &= \delta_{kj} - z(A_0(A_0 - zI)^{-1}e_j, f_k) = \delta_{kj} - z\varphi_k\left(i \int_0^a e^{-izs} e_j ds\right) \\ &= \varphi_k(e^{izx} e_j), \quad 1 \leq k, j \leq n. \end{aligned}$$

Таким образом, применяя теоремы 2.3, 3.2, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть A – произвольный оператор дифференцирования вида (4.7), Λ – множество корней целой функции $\Delta(z) = \det \Phi(z)$, где элементы матрицы $\Phi(z)$ определяются по формулам $\Phi_{kj}(z) = \varphi_k(e^{-izx} e_j)$, $1 \leq j, k \leq n$. Тогда:

1) полугруппа $U_-(t) = \exp\{-iAt\}$ принадлежит классу C_0 в том и только в том случае, когда при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия:

(i) $\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \text{Im } \lambda_k < \varepsilon$;

(ii) $\limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |\Delta(iy)| = na$;

(iii) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x + i\varepsilon)\Phi^*(x + i\varepsilon)$ удовлетворяет (A_2) -условию на $\mathbb{R}$;

2) полугруппа $U_+(t) = \exp\{iAt\}$ принадлежит классу C_0 в том и только в том случае, когда при некотором $\varepsilon \geq 0$ выполняются условия:

(i) $\sup_{\lambda_k \in \Lambda} \text{Im } \lambda_k > -\varepsilon$;

(ii) $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\Delta(iy)| = 0$;

(iii) матричный вес $W_\varepsilon^2(x) := \Phi(x - i\varepsilon)\Phi^*(x - i\varepsilon)$ удовлетворяет (A_2) -условию на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2^n(0, a)$ задачу Коши

$$\frac{dh(t)}{dt} = -iAh(t), \quad h(0) = h_0 \in \mathcal{D}_A, \quad (4.11)$$

которой отвечает полугруппа $U_-(t)$. Предположим, что $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 . Поскольку A порождается операцией $i \frac{d}{dx}$, каждая функция $h_0 \in \mathcal{D}_A$ может быть единственным образом продолжена до функции $\tilde{h}(x)$, $x \geq 0$, так, чтобы выполнялись условия:

- а) $\tilde{h}(x) = h_0(x)$, $0 \leq x \leq a$;
- б) $\tilde{h}(x+t) \in \bigcap_{k=1}^n \text{Ker } \varphi_k$ для каждого $t > 0$;
- с) существует константа M такая, что $\|\tilde{h}(x+a)\|_{L_2^n(0,a)} \leq M \|\tilde{h}(x)\|_{L_2^n(0,a)}$.

При этом решение задачи Коши (4.11) имеет вид

$$h(t) = \tilde{h}(x+t), \quad 0 \leq x \leq a, \quad t > 0.$$

Верно также обратное утверждение, т.е. если каждая функция $h_0 \in \mathcal{D}_A$ допускает единственное продолжение $\tilde{h}$, удовлетворяющее условиям а)–с), то полугруппа $U_-(t)$ принадлежит классу C_0 . Можно доказать, что условие с) является следствием условий а), б). Однако мы не будем здесь приводить это доказательство.

В случае $n = 1$ аналогичные продолжения функций из пространства $C[0, a]$ за пределы интервала были введены Дж. Дельсартом и называются *периодическими в среднем* [27]. Поэтому продолжение функций вправо, удовлетворяющих условиям а)–с), естественно называть периодическим в среднем относительно системы функционалов φ_k , $1 \leq k \leq n$. Рассматривая полугруппу $U_+(t)$, мы придем к понятию периодических в среднем продолжений вектор-функций влево.

Заметим, что каждый функционал φ_k в силу теоремы Рисса представим в виде

$$\varphi_k(u) = \sum_{j=1}^n \int_0^a u_j(x) g_{kj}(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_0^a u'_j(x) g'_{kj}(x) dx,$$

где $u = \text{col}(u_k)_{k=1}^n$, а элементы матрицы $G(x) := \|g_{kj}\|$ принадлежат пространству Соболева $W_2^1(0, a)$. Рассмотрим теперь систему интегро-дифференциальных уравнений со сдвигом аргумента:

$$\int_0^a G(x) \tilde{h}(x+t) dx + \int_0^a G'(x) \frac{d\tilde{h}(x+t)}{dx} dx = 0, \quad \tilde{h}(x) = h_0(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (4.12)$$

где $h_0 \in \mathcal{L} = \bigcap_{k=1}^n \text{Ker } \varphi_k$.

Назовем задачу (4.12) *корректной*, если при каждом $h_0 \in \mathcal{L}$ она имеет единственное решение $\tilde{h}$, которое удовлетворяет условиям а)–с). Ясно, что корректность задачи (4.12) равносильна принадлежности полугруппы $\exp\{-iAt\}$, где A задается формулой (4.7), классу C_0 . Таким образом, первая часть теоремы 4.2 дает описание всех корректных задач (4.12).

Из общей формулы (3.31) вытекает, что решение $\tilde{h}(x)$, $x \geq 0$, корректной задачи (4.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\varepsilon_1}^{+\infty+i\varepsilon_1} e^{-izx} \sum_{j=1}^n \Psi_{kj}(z) \varphi_j \right. \\ \left. \times \left(\int_0^x h_0(x-s) e^{-izs} ds \right) dz \right) e_k, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что условия первой части теоремы 4.2 выполняются при некотором значении $\varepsilon \geq 0$. Тогда в приведенной формуле $\varepsilon_1 \geq \varepsilon$, при этом $\Phi^{-1}(z) = \|\Psi_{kj}(z)\|$, $\Phi(z) = \|\varphi_k(e^{-izx} e_j)\|$, $e_k = \text{col}(\delta_{kj})_{j=1}^k$.

Список литературы

1. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
2. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1957.
3. С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967; англ. пер.: S. G. Kreĭn, *Linear differential equations in Banach space*, Transl. Math. Monogr., **29**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1971.
4. W. Arendt, Ch. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Monogr. Math., **96**, Birkhäuser, Basel, 2001.
5. С. Чичоне, Ю. Латушкин, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
6. K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000.
7. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci., **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.
8. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
9. Г. М. Губреев, “Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B -представимых вектор-функций (метод проектирования: 20 лет спустя)”, *Алгебра и анализ*, **12**:6 (2000), 1–97; англ. пер.: G. M. Gubreev, “Spectral theory of regular quasiaxponentials and regular B -representable vector-valued functions (the projection method: 20 years later)”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:6 (2001), 875–947.
10. Б. С. Павлов, “Спектральный анализ диссипативного сингулярного оператора Шрёдингера в терминах функциональной модели”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 8, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **65**, ВИНТИ, М., 1991, 95–163; англ. пер.: B. S. Pavlov, “Spectral analysis of a dissipative singular Schrodinger operator in terms of a functional model”, *Partial differential equations VIII*, Encyclopaedia Math. Sci., **65**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 87–153.
11. Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, “Возмущения сильно непрерывных полугрупп операторов и матричные веса Макенхаупта”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:3 (2008), 85–89; англ. пер.: G. M. Gubreev, Yu. D. Latushkin, “Perturbations of strongly continuous operator semigroups, and matrix Muckenhoupt weights”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:3 (2008), 234–238.

12. S. Treil, A. Volberg, “Wavelets and the angle between past and future”, *J. Funct. Anal.*, **143**:2 (1997), 269–308.
13. D.Z. Arov, H. Dym, *J-contractive matrix valued functions and related topics*, Encyclopedia Math. Appl., **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
14. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970; пер. с фр.: B. Szökefalvi-Nagy, C. Foias, *Analyse harmonique des operateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Cie, Paris, 1967.
15. В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*, Из-во Харьковского национальн. ун-та, Харьков, 2003.
16. В. П. Потапов, “Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций”, Тр. ММО, **4**, Физматлит, М., 1955, 125–236; англ. пер.: V. P. Potapov, “The multiplicative structure of J -contractive matrix functions”, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **15** (1960), 131–243.
17. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, Наука, М., 1969; англ. пер.: M. S. Brodskii, *Triangular and Jordan representations of linear operators*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.
18. S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
19. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
20. Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, “Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 657–702; англ. пер.: B. Ya. Levin, J. I. Ljubarskii, “Interpolation by means of special classes of entire functions and related expansions in series of exponentials”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 621–662.
21. А. М. Седлецкий, “Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения”, *Матем. сб.*, **96(138)**:1 (1975), 75–82; англ. пер.: A. M. Sedleckii, “An equivalent definition of H_p spaces in the half-plane and some applications”, *Math. USSR-Sb.*, **25**:1 (1975), 69–76.
22. И. М. Гельфанд, “Об одной лемме теории линейных пространств”, *Сообщ. Харьковского мат. общества*, **13**:4 (1936), 35–40.
23. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Вища школа, Киев, 1977; англ. пер.: N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Boston–London, Pitman, 1981.
24. Z. D. Arova, *Operator nodes with strongly regular characteristic functions*, Huisdrukerij Vrije Universitet, Amsterdam, 2003.
25. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980; англ. пер.: N. K. Nikol'skii, *Treatise on the shift operator*, Grundlehren Math. Wiss., **273**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1986.

26. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
27. J. Delsarte, “Les fonctions “moyenne-périodiques”, *J. Math. Pures Appl.*, **14** (1935), 403–453.

Г. М. ГУБРЕЕВ (G. M. GUBREEV)

Полтавский национальный технический университет

им. Ю. Кондратюка, Украина

E-mail: gubreev@yandex.ru

Поступило в редакцию

16.03.2009

Ю. Д. ЛАТУШКИН (YU. D. LATUSHKIN)

University of Missouri-Columbia, USA

E-mail: yuri@math.missouri.edu