Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Каплицкий, Метод оценки собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 65–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:03:55

УДК 517.984

В. М. Каплицкий

Метод оценки собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях

Предложен метод получения оценок на бесконечности собственных функций некоторых классов интегральных операторов в неограниченных областях из $\mathbb{R}^n$. Рассмотрены интегральные операторы K с ядрами $k(x, y)$, допускающими представление $k(x, y) = a(x)k_0(x, y)b(y)$, $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, где $|k_0(x, y)| \leq \theta(x - y)e^{-S(x-y)}$, а функции θ и S удовлетворяют некоторым естественным дополнительным условиям. Показано, что если оператор $T = I - K$ с соответствующим ядром является нётеровым оператором в пространстве $L_p(\Omega)$, то при определенных условиях, налагаемых на коэффициенты $a(x)$ и $b(y)$, все решения уравнения $\varphi = K\varphi$ принадлежат весовому пространству $L_p(\Omega, e^{\delta S(x)})$. Даны приложения метода к получению экспоненциальных оценок собственных функций N -частичных операторов Шрёдингера и оценок скорости убывания на бесконечности решений уравнений типа свертки с переменными коэффициентами.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: интегральный оператор, нётеров оператор, собственная функция, экспоненциальное убывание, дискретный спектр.

Введение

Многие важные задачи математической физики могут быть сведены к исследованию свойств решений однородных интегральных уравнений

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) d\mu(y),$$

где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, а оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) d\mu(y)$$

является ограниченным оператором в некотором функциональном банаховом пространстве E , вложенном в пространство всех измеримых на Ω функций. В наиболее важном частном случае имеем $E = L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, а μ – мера Лебега. Если область Ω является неограниченной, то возникает проблема описания поведения на бесконечности собственных функций оператора K . В настоящей работе мы вводим в рассмотрение класс ядер $k(x, y)$, допускающих следующее представление:

$$k(x, y) = a(x)k_0(x, y)b(y), \quad (0.1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00329-а).

© В. М. Каплицкий, 2011

где “коэффициенты” $a(x)$ и $b(y)$ – некоторые измеримые функции, а функция $k_0(x, y)$ допускает оценку

$$|k_0(x, y)| \leq \theta(x - y)e^{-S(x-y)}; \quad (0.2)$$

здесь функции θ и S удовлетворяют некоторым естественным дополнительным условиям, из которых наиболее существенным является условие, состоящее в том, что неотрицательная функция $S(x)$ является субаддитивной, т. е.

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y). \quad (0.3)$$

Функция θ в (0.2) может описывать особенность ядра на диагонали $x = y$ (чаще это степенная или логарифмическая особенность), а функция S характеризует убывание ядра при удалении от диагонали. Отметим, что представление (0.1) с функцией $k_0(x, y)$, удовлетворяющей условиям (0.2), (0.3) (с ограниченной на бесконечности функцией $\theta(x)$), характерно для широкого класса интегральных уравнений, возникающих в связи с задачами математической физики. Для интегральных операторов с ядрами рассматриваемого класса изучается вопрос о достаточных условиях, при которых всякая собственная функция оператора $K: E \rightarrow E$ удовлетворяет условию: существует постоянная $\delta > 0$, вообще говоря, зависящая от φ , такая, что

$$e^{\delta S(x)}\varphi(x) \in E. \quad (0.4)$$

В частности, если $E = L_p(\Omega)$, $S(x) = \alpha|x|$, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ – евклидова норма вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, то включение (0.4) означает экспоненциальное убывание “в среднем” всех собственных функций оператора K . В работе также исследован вопрос о достаточных условиях, гарантирующих поточечную оценку

$$|\varphi(x)| \leq Ce^{-\delta S(x)} \quad \text{при почти всех } x \in \Omega. \quad (0.5)$$

В настоящей статье мы налагаем на $S(x)$ определенные условия роста на бесконечности, которые соответствуют быстрому убыванию ядра $k_0(x, y)$ по переменной $z = x - y$ при $z \rightarrow \infty$. Случай медленного убывания на бесконечности требует, по-видимому, отдельного рассмотрения. Если $\theta(x) = A/|x|^\beta$, где $0 \leq \beta < n$ (степенная особенность на диагонали), то функция $k_0(x, y)$ из (0.1) имеет вид

$$k_0(x, y) = m_0(x, y) \frac{e^{-S(x-y)}}{|x - y|^\beta},$$

где $m_0(x, y) \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$. Этот класс ядер обозначается через $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$. Соответствующий случай изучается в настоящей статье наиболее подробно. Основной результат (см. § 2) состоит в том, что в случае не слишком “плотных” коэффициентов $a(x)$, $b(y)$ для любой собственной функции оператора K с ядром из $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$ справедливо включение

$$e^{\delta S(x)}\varphi(x) \in L_p(\Omega)$$

при условии, что оператор $I - K$ является нётеровым (Ф-оператором). Если ввести в рассмотрение весовое пространство

$$L_p(\Omega, w) = \left\{ f \in L_p(\Omega) : \|f\|_{L_p(\Omega, w)} = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x)|^p w^p(x) dx} < +\infty \right\},$$

суммируемых с p -й степенью функций, то этот результат также означает, что если оператор $I - K$ нётеров, то $\ker(I - K) \subset L_p(\Omega, e^{\delta S(x)})$ с подходящим $\delta > 0$. При некоторых дополнительных условиях, налагаемых на коэффициенты $a(x)$, $b(y)$ и параметр β , из вложения в весовое пространство $L_p(\Omega, e^{\delta S(x)})$ следует точечная оценка вида (0.5) с параметром $0 < \delta_1 < \delta$. Аналогичные утверждения доказаны и для некоторых более общих классов ядер, а также для случая, когда E – произвольное идеальное банахово пространство. Используемый в работе метод состоит в привлечении теоремы И. Ц. Гохберга о полуустойчивости дефектных чисел аналитической нётеровой оператор-функции, которая применяется к аналитической оператор-функции $T(\lambda) = U^{-1}(\lambda)TU(\lambda)$, $T = I - K$, где $U(\lambda)$ – оператор умножения на $e^{i\lambda S(x)}$. Использование этой теоремы позволяет обосновать локальное постоянство спектра и размерностей собственных подпространств оператор-функции $T(\lambda)$, что немедленно приводит к (0.4).

Идея аналитического продолжения по параметру λ оператор-функции типа $T(\lambda)$ впервые, по-видимому, была предложена О'Коннором [1] для доказательства экспоненциального убывания собственных функций оператора Шрёдингера (см. [2, гл. XIII, § 11, лемма О'Коннора]). В задачах, рассмотренных О'Коннором и другими авторами, применявшими метод аналитического продолжения, оператор $T(0)$ был самосопряженным и локальное постоянство спектра и размерностей собственных подпространств оператора $T(\lambda)$ для λ , лежащих в достаточно малой окрестности нуля, обосновывалось с помощью теории возмущений самосопряженных операторов. Возможность использования для этой цели теоремы И. Ц. Гохберга ранее, насколько известно автору, не отмечалась. Предложенный подход применим к более широкому кругу задач, в том числе к таким, которые не охватываются теорией возмущений. В § 3, 4 рассмотрены приложения к конкретным классам интегральных уравнений, а также к некоторым дифференциальным уравнениям в $\mathbb{R}^n$, для которых известно фундаментальное решение и которые могут быть сведены к эквивалентным интегральным уравнениям в $\mathbb{R}^n$ при условии, что ядра соответствующих им интегральных операторов обладают рассматриваемой в статье структурой.

В § 3 приводится доказательство экспоненциального убывания собственных функций N -частичных операторов Шрёдингера с парным взаимодействием. Рассмотренный класс потенциалов близок к тем, которые фигурируют в теореме О'Коннора–Комба–Томаса (см. [2, гл. XIII, § 11]). Доказанный в настоящей работе результат в некоторых отношениях является более общим, чем утверждение этой теоремы. Другие результаты об экспоненциальном убывании собственных функций эллиптического уравнения можно найти в [3]–[5]. В § 3 также приведен простой вывод некоторых результатов Ш. Агмона об экспоненциальном убывании собственных функций оператора Шрёдингера с потенциалом, стремящимся к нулю на бесконечности.

В § 4 рассмотрены приложения к операторам свертки со стабилизирующимися на бесконечности коэффициентами. Дается оценка скорости экспоненциального убывания собственных функций, т. е. оценка параметра δ в неравенстве (0.5). В частном случае оператора Винера–Хопфа эта оценка согласуется с известными асимптотическими формулами для принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R}^+)$ решений однородного уравнения Винера–Хопфа с экспоненциально убывающим ядром, преобразование Фурье которого аналитично в некоторой горизонтальной полосе (см. [6]). Для таких собственных функций параметр $\delta > 0$, отвечающий за скорость экспоненциального убывания, равен расстоянию от вещественной оси до ближайшей комплексной точки λ , в которой нарушается условие нётеровости аналитической оператор-функции $T(\lambda)$. Заметим, что однородные уравнения Винера–Хопфа с экспоненциально убывающими ядрами могут обладать решениями, растущими на бесконечности, а также ограниченными решениями, не принадлежащими $L_p(\mathbb{R}^+)$. Нахождение таких решений представляет значительный интерес в связи с различными приложениями (см., например, [7], [8]). Отметим также, что степенная функция $S(x) = \alpha|x|^q$ удовлетворяет условию (0.3) только при $0 < q \leq 1$. Если функция $S(x)$ является квазисубаддитивной, т. е. если условие (0.3) заменяется на более слабое условие

$$S(x+y) \leq c(S(x) + S(y)),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная, отличная от единицы, то изложенный метод доказательства включения (0.4) не подходит. Как показывают примеры, условие субаддитивности является существенным и не может быть заменено на квазисубаддитивность. Например, при помощи метода Винера–Хопфа нетрудно привести примеры одномерных интегральных уравнений $\varphi = K\varphi$ с нётеровым оператором $T = I - K$ и разностным ядром $k(x-y)$, ведущим себя как $e^{-\alpha|x-y|^q}$ с параметром $q > 1$, у которых существуют собственные функции, принадлежащие $L_p(\mathbb{R}^+)$, и которые убывают на бесконечности не быстрее, чем $e^{-\delta|x|}$ (см. [6]).

В статье использованы следующие обозначения: $L_p(\Omega) + L_q(\Omega)$ – множество функций $a = a' + a''$, где $a' \in L_p(\Omega)$, $a'' \in L_q(\Omega)$; $L_p(\Omega) + L_q^\varepsilon(\Omega)$ – подмножество в $L_p(\Omega) + L_q(\Omega)$, состоящее из функций a таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение $a = a' + a''$, где $a' \in L_p(\Omega)$, $a'' \in L_q(\Omega)$ и $\|a''\|_{L_q(\Omega)} < \varepsilon$; $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$ – множество измеримых функций $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что для некоторой окрестности U_x каждой точки x области Ω сужение φ на U_x принадлежит $L_p(U_x)$.

Если x – вектор в $\mathbb{R}^m$, то через $|x|$ мы всегда будем обозначать евклидову норму вектора x .

§ 1. Классы $\mathcal{K}_{S,\theta}$ и $\mathcal{K}_S^\beta$

Пусть $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ – измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) $S(x+y) \leq S(x) + S(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $S(-x) = S(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- 3) для любого $\nu > 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\nu S(x)} dx < +\infty. \quad (1.1)$$

Пусть $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ – измеримая функция такая, что существуют $R > 0$, $C_R > 0$, при которых

$$\sup_{|x| \geq R} \theta(x) \leq C_R. \quad (1.2)$$

Типичным примером функции $S(x)$, которая удовлетворяет условиям 1)–3), является $S(x) = \alpha|x|^q$, где $0 < q \leq 1$. Пусть Ω – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество функций, допускающих следующее представление:

$$k(x, y) = a(x)k_0(x, y)b(y), \quad (1.3)$$

где $a(x)$, $b(y)$ – некоторые измеримые функции, $k_0(x, y)$ – измеримая функция, допускающая оценку

$$|k_0(x, y)| \leq \theta(x - y)e^{-S(x-y)}.$$

Совокупность таких функций будем обозначать через $\mathcal{K}_{S,\theta}(\Omega \times \Omega)$, или, проще, $\mathcal{K}_{S,\theta}$. Если функция θ имеет вид

$$\theta(x) = \frac{A}{|x|^\beta}, \quad 0 \leq \beta < n,$$

где $A > 0$ – некоторая постоянная, то соответствующее множество функций будем обозначать через $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$. Класс $\mathcal{K}_S^0(\Omega \times \Omega)$ будем обозначать через $\mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$. В настоящем параграфе мы ограничимся доказательством некоторых необходимых для дальнейшего результатов об ограниченности и компактности интегральных операторов с ядрами из $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$, хотя многие из этих результатов обобщаются на случай интегральных операторов с ядрами из класса $\mathcal{K}_{S,\theta}(\Omega \times \Omega)$ с функцией θ , отличной от степенной.

Далее нам понадобится одно достаточное условие компактности интегрального оператора, действующего в $L_p(\Omega)$, которое в частном случае $p = 2$ совпадает с условием принадлежности оператора классу Гильберта–Шмидта. Для этого приведем некоторые понятия из теории пространств со смешанной нормой. Пусть $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$. Через $L_{p_1, p_2}(\Omega \times \Omega)$ обозначим пространство всех измеримых на $\Omega \times \Omega$ функций $\varphi(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) при почти всех $y_0 \in \Omega$ функция $\varphi(x, y_0)$ принадлежит $L_{p_1}(\Omega)$;
- 2) функция $\psi(y) = \|\varphi(\cdot, y)\|_{L_{p_1}(\Omega)}$ принадлежит $L_{p_2}(\Omega)$.

Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|\varphi\|_{L_{p_1, p_2}(\Omega \times \Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |\varphi(x, y)|^{p_1} dx \right)^{p_2/p_1} dy \right]^{1/p_2},$$

если $p_1 < \infty, p_2 < \infty$. В случае, когда один или оба показателя p_1 и p_2 принимают значение ∞ , определение нормы модифицируется обычным образом. Например, если $p_2 = \infty$, то выражение для нормы имеет вид

$$\|\varphi\|_{L_{p_1, \infty}(\Omega \times \Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \Omega} \left\{ \int_{\Omega} |\varphi(x, y)|^{p_1} dx \right\}^{1/p_1}.$$

Можно показать, что если $k(x, y)$ – ядро интегрального оператора K и транспонированное ядро $k'(x, y) = k(y, x)$ принадлежит $L_{p', p}(\Omega \times \Omega)$, где $1 < p < \infty$,

p' – сопряженный показатель, то оператор K компактен в $L_p(\Omega)$. Это утверждение содержится, например, в [9] для случая ограниченной области Ω , но оно справедливо и в общем случае произвольной области. Для полноты изложения приведем полное доказательство для общего случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $1 < p < \infty$, $k'(x, y) \in L_{p',p}(\Omega \times \Omega)$ и

$$\|k'\|_{L_{p',p}(\Omega \times \Omega)} = \|k\|_p = \left[\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx \right]^{1/p} < +\infty,$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Пусть $(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) dy$. Тогда $K: L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ – компактный оператор, для нормы которого справедлива оценка

$$\|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)} \leq \|k\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к интегралу $\int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) dy$ неравенство Гёльдера, получим

$$\|K\varphi\|_{L_p(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} \|k(x, \cdot)\|_{L_{p'}(\Omega)}^p dx \right)^{1/p} \|\varphi\|_{L_p(\Omega)},$$

откуда следует, что оператор K ограничен и

$$\|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)} \leq \|k\|_p. \quad (1.4)$$

Известно, что при $1 \leq p < \infty$ пространство $X = L_p(\Omega)$ является банаховым функциональным пространством с порядково непрерывной нормой, или, в терминологии монографии [9], в X выполнено условие (А) (см. [9, с. 142–145]). Из общих результатов монографии [9] о пространствах со смешанной нормой (см. [9, гл. XI, с. 402]) следует, что если в каждом пространстве $L_{p_1}(\Omega)$ и $L_{p_2}(\Omega)$ выполнено условие (А) (т.е. если $p_1 < \infty$, $p_2 < \infty$), то в соответствующем пространстве со смешанной нормой $L_{p_1, p_2}(\Omega \times \Omega)$ плотно множество функций вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(y),$$

где $\varphi_i \in L_{p_1}(\Omega)$, $\psi_i \in L_{p_2}(\Omega)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $k'(x, y) \in L_{p',p}(\Omega \times \Omega)$ и $1 < p < \infty$, $1 < p' < \infty$, то существует функция

$$k_{\varepsilon}(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y),$$

где $f_i \in L_p(\Omega)$, $g_i \in L_{p'}(\Omega)$, такая, что $\|k - k_{\varepsilon}\|_p < \varepsilon$. Пусть K_{ε} – интегральный оператор с ядром $k_{\varepsilon}(x, y)$. Тогда в силу неравенства (1.4) имеем оценку

$$\|K - K_{\varepsilon}\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)} \leq \|k - k_{\varepsilon}\|_p < \varepsilon.$$

Оператор K_{ε} – конечномерный непрерывный оператор, а значит, он компактен. Таким образом, оператор K является равномерным пределом последовательности компактных операторов, а значит, он компактен. Предложение доказано.

Заметим, что утверждение об ограниченности и оценка $\|K\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)} \leq \|k\|_p$ справедливы при всех $1 \leq p \leq \infty$, но в случаях $p = 1$ и $p = \infty$ оператор K , вообще говоря, не является компактным.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $k(x, y) \in \mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$ и

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) dy. \quad (1.5)$$

Если $a \in L_p(\Omega) + L_{\infty}(\Omega)$, $b \in L_{p'}(\Omega) + L_{\infty}(\Omega)$, где $1/p + 1/p' = 1$, то оператор K ограничен в $L_p(\Omega)$. Если $k(x, y) \in \mathcal{K}_S^{\beta}(\Omega \times \Omega)$, то оператор K ограничен в $L_p(\Omega)$ в каждом из следующих двух случаев:

- 1) $a \in L_p(\Omega) + L_{\infty}(\Omega)$, $b \in L_{\infty}(\Omega)$, $0 < \beta < n/p'$, $p' < \infty$;
- 2) $a \in L_{\infty}(\Omega)$, $b \in L_{p'}(\Omega) + L_{\infty}(\Omega)$, $0 < \beta < n/p$, $p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = a_1 + m_1$, где $a_1 \in L_p(\Omega)$, $m_1 \in L_{\infty}(\Omega)$, и $b = b_1 + n_1$, где $b_1 \in L_{p'}(\Omega)$, $n_1 \in L_{\infty}(\Omega)$. Пусть $K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$, где K_1 , K_2 , K_3 и K_4 — интегральные операторы с ядрами $k_1(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)n_1(y)$, $k_2(x, y) = m_1(x)k_0(x, y)b_1(y)$, $k_3(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)b_1(y)$ и $k_4(x, y) = m_1(x)k_0(x, y)n_1(y)$ соответственно. Далее нам понадобится известный результат из теории операторов типа свертки: если $h(x, y) = h_0(x - y)$, где $h_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то оператор

$$(H\varphi)(x) = \int_{\Omega} h_0(x - y)\varphi(y) dy$$

ограничен в $L_p(\Omega)$ при всех $1 \leq p \leq \infty$ и $\|H\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)} \leq \|h_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$. Докажем ограниченность оператора K_1 . Поскольку $n_1 \in L_{\infty}(\Omega)$, существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k_1(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx &\leq c_1 \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |a_1(x)|^{p'} |k_0(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx \\ &\leq c_1 \int_{\Omega} |a_1(x)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_0(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx. \end{aligned}$$

Так как $|k_0(x, y)| \leq Ce^{-S(x-y)}$, то

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k_1(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx \leq c_2 \int_{\Omega} |a_1(x)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-p'S(z)} dz \right)^{p/p'} dx < \infty,$$

т. е. оператор K_1 ограничен. Ограниченность оператора K_2 доказывается аналогично. Далее,

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k_3(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx \leq \int_{\Omega} |a_1(x)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-p'S(x-y)} |b_1(y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx.$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-p'S(x-y)} |b_1(y)|^{p'} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |b_1(x - y)|^{p'} e^{-p'S(y)} dy \leq \|b_1\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^{p'}, \quad (1.6)$$

интеграл $\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k_3(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx$ конечен. Из предложения 1.1 в этом случае следует, что оператор K_3 ограничен. Оператор K_4 ограничен, поскольку его ядро имеет суммируемую разностную мажоранту, а значит, оператор K также ограничен.

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Пусть выполнено условие 1). Тогда $a = a_1 + m_1$, где $a_1 \in L_p(\Omega)$, $m_1 \in L_{\infty}(\Omega)$. Представим оператор K в следующем виде: $K = K_1 + K_2$, где K_1, K_2 – интегральные операторы с ядрами $k_1(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)b(y)$ и $k_2(x, y) = m_1(x)k_0(x, y)b(y)$ соответственно. Поскольку

$$|k_0(x, y)| \leq D \frac{e^{-S(x-y)}}{|x-y|^{\beta}},$$

а $b \in L_{\infty}(\Omega)$, то

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k_1(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx \leq c_2 \int_{\Omega} |a_1(x)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-p'S(z)}}{|z|^{p'\beta}} dz \right)^{p/p'} dx. \quad (1.7)$$

Функция $e^{-p'S(z)}/|z|^{p'\beta}$ имеет интегрируемую особенность в нуле, так как $p'\beta < n$. Поскольку

$$\int_{|z|>1} \frac{e^{-p'S(z)}}{|z|^{p'\beta}} dz \leq \int_{|z|>1} e^{-p'S(z)} dz \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-p'S(z)} dz < +\infty,$$

интеграл в (1.7) сходится и, следовательно, оператор K_1 ограничен в $L_p(\Omega)$. Ядро оператора K_2 допускает оценку

$$|m_1(x)k_0(x, y)b(y)| \leq c_3 |k_0(x, y)| \leq c_3 \frac{e^{-S(x-y)}}{|x-y|^{\beta}},$$

так как функции b и m_1 принадлежат $L_{\infty}(\Omega)$. Поскольку $\beta < n/p' \leq n$, функция $e^{-S(x)}/|x|^{\beta}$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^n)$ ввиду условий, налагаемых на функцию $S(x)$. Поэтому оператор K_2 ограничен. Таким образом, оператор K в случае $p < \infty$ ограничен. Если $p = \infty$, то доказательство ограниченности еще проще, так как в этом случае ядро оператора K имеет суммируемую разностную мажоранту. Доказательство в случае 2) следует из соображений двойственности. Теорема доказана.

Приведем некоторые свойства интегральных операторов с ядрами из класса $\mathcal{K}_S^{\beta}(\Omega \times \Omega)$ в случае, когда один или оба коэффициента a и b принадлежат пространству $L_p(\Omega) + L_{\infty}^{\varepsilon}(\Omega)$. Как известно, *существенной нормой* ограниченного оператора A в банаховом пространстве X называется число

$$|||A||| = \inf_{T \in \text{Comp}(X)} \|A + T\|,$$

где $\text{Comp}(X)$ – идеал компактных операторов в X . Отметим, что если существенная норма оператора A равна нулю, то оператор A является равномерным пределом последовательности компактных операторов, а значит, оператор A компактен.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $1 < p < \infty$, и пусть либо $k(x, y) \in \mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$ и $a \in L_p(\Omega) + L_\infty^\varepsilon(\Omega)$, $b \in L_{p'}(\Omega) + L_\infty^\varepsilon(\Omega)$, где $1/p + 1/p' = 1$, либо $k(x, y) \in \mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$ и выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) $a \in L_p(\Omega) + L_\infty^\varepsilon(\Omega)$, $b \in L_\infty(\Omega)$, $0 < \beta < n/p'$;
- 2) $b \in L_{p'}(\Omega) + L_\infty^\varepsilon(\Omega)$, $a \in L_\infty(\Omega)$, $0 < \beta < n/p$.

Тогда оператор $K: L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай ядра из класса $\mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют компактный оператор U и ограниченный оператор K_ε такие, что $K = K_\varepsilon + U$ и $\|K_\varepsilon\| < \varepsilon$. Пусть $k(x, y) \in \mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$ и $0 < \delta < 1$. Представим функции a и b в следующем виде: $a = a_1 + m_1$, где $a_1 \in L_p(\Omega)$, $m_1 \in L_\infty(\Omega)$, и $b = b_1 + n_1$, где $b_1 \in L_{p'}(\Omega)$, $n_1 \in L_\infty(\Omega)$, причем $\|m_1\|_{L_\infty(\Omega)} < \delta$, $\|n_1\|_{L_\infty(\Omega)} < \delta$. Пусть K_1 , K_2 , K_3 и K_4 – операторы с ядрами $k_1(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)b_1(y)$, $k_2(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)n_1(y)$, $k_3(x, y) = m_1(x)k_0(x, y)b_1(y)$ и $k_4(x, y) = m_1(x)k_0(x, y)n_1(y)$ соответственно. Покажем, что операторы K_i , $i = 1, 2, 3$, компактны и $\|K_4\| \leq M\delta$, где постоянная M не зависит от δ . Для доказательства компактности операторов достаточно установить, что $\int_\Omega \left(\int_\Omega |k_i(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx < \infty$ при $i = 1, 2, 3$. Пусть $i = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\int_\Omega |a_1(x)k_0(x, y)b_1(y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx \\ & \leq \int_\Omega |a_1(x)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k_0(x, y)|^{p'} |b_1(y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Применяя оценку (1.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k_0(x, y)|^{p'} |b_1(y)|^{p'} dy \leq \|b_1\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^{p'}.$$

Из (1.8) следует, что $\int_\Omega \left(\int_\Omega |k_1(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx < \infty$, т. е. оператор K_1 компактен.

Доказательство компактности операторов K_2 , K_3 аналогично. Ядро оператора K_4 допускает оценку $|k_4(x, y)| \leq \delta e^{-S(x-y)}$, из которой следует, что $\|K_4\| \leq M\delta$, где постоянная M не зависит от δ . Полагая $\delta = \varepsilon/(2M)$, $K_\varepsilon = K_4$, $U = K_1 + K_2 + K_3$, получим $K = K_\varepsilon + U$, где операторы K_ε и U обладают требуемыми свойствами. Таким образом, существенная норма оператора K равна нулю, поэтому оператор K компактен.

Докажем вторую часть утверждения теоремы. Пусть ядро $k(x, y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$ и выполнено условие 1). Пусть $\delta > 0$. Тогда $a = a_1 + m_1$, где $a_1 \in L_p(\Omega)$, $m_1 \in L_\infty(\Omega)$ и $\|m_1\|_{L_\infty(\Omega)} < \delta$. Пусть K_1 и K_2 – операторы с ядрами $k_1(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)b(y)$ и $k_2(x, y) = m_1(x)k_0(x, y)b(y)$ соответственно. Тогда оператор K_1 компактен, так как если $\beta < n/p'$, то $\int_\Omega \left(\int_\Omega |k_1(x, y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} dx < +\infty$ (см. доказательство теоремы 1.1). Ядро оператора K_2 допускает оценку

$$|k_2(x, y)| \leq M_1 \delta \frac{e^{-S(x-y)}}{|x-y|^\beta},$$

где постоянная $M_1 > 0$ не зависит от δ . Из этой оценки следует, что $\|K_2\| \leq M_2\delta$, где постоянная $M_2 > 0$ не зависит от δ . Полагая $\delta = \varepsilon/(2M_2)$, $U = K_1$, $K_\varepsilon = K_2$, получим, что $K = K_\varepsilon + U$, причем $\|K_\varepsilon\| < \varepsilon$, а оператор U компактен. Отсюда следует, что оператор K компактен. В случае выполнения условия 2) утверждение теоремы следует из соображений двойственности. Теорема доказана.

Если один из коэффициентов a , b стремится к нулю на бесконечности, то, используя результаты С. Л. Соболева об условиях компактности операторов типа потенциала, условия для параметра β в теореме 1.2 можно ослабить. Ниже мы приведем один такой результат для случая оператора, действующего в $L_2(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $k(x, y) \in \mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$ и $p > \max\{2, n/(n - \beta)\}$. Пусть выполнено одно из условий:

- 1) $a \in L_{p, \text{loc}}(\Omega)$, $b \in L_\infty(\Omega)$, $a(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$;
- 2) $b \in L_{p, \text{loc}}(\Omega)$, $a \in L_\infty(\Omega)$, $b(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$.

Тогда K является компактным оператором в пространстве $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие 1) и $\varepsilon > 0$. Пусть $|a(x)| < \varepsilon$ при $|x| > R$. Положим $a = a_1 + a_2$, $a_1(x) = a(x)\chi_{B_R}(x)$, $a_2(x) = a(x)(1 - \chi_{B_R}(x))$, где χ_{B_R} — характеристическая функция шара B_R . Пусть $K = K_1 + K_2$, где K_i — интегральные операторы с ядрами $k_i(x, y) = a_i(x)k_0(x, y)b(y)$, $i = 1, 2$. Поскольку $|b(y)| \leq C_0$, то

$$|k_2(x, y)| \leq C_0\varepsilon|k_0(x, y)| \leq C_1\varepsilon \frac{e^{-S(x-y)}}{|x-y|^\beta},$$

откуда следует, что $\|K_2\| \leq C_2\varepsilon$. Покажем, что оператор K_1 компактен. Положим $K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)}$, где $K_1^{(1)}$, $K_1^{(2)}$ — интегральные операторы с ядрами

$$k_1^{(i)}(x, y) = a_1(x)k_0(x, y)b_i(y), \quad i = 1, 2,$$

где $b_1(y) = b(y)\chi_{B_{2R}}(y)$, $b_2(y) = b(y)(1 - \chi_{B_{2R}}(y))$. Покажем, что оператор $K_1^{(1)}$ компактен. Для этого достаточно доказать компактность оператора $K_1^{(1)}P_{2R}: L_2(B_{2R}) \rightarrow L_2(B_R)$, где P_{2R} — проектор на подпространство функций, равных нулю вне шара B_{2R} . Поскольку

$$|k_1^{(1)}(x, y)| \leq D_1 \frac{|a_1(x)|}{|x-y|^\beta},$$

то

$$\begin{aligned} K_1^{(1)}P_{2R} &= A_1T, & (A_1\varphi)(x) &= a_1(x)\varphi(x), \\ (T\varphi)(x) &= \int_{B_{2R}} \frac{m(x, y)}{|x-y|^\beta} dy, & x &\in B_R, \end{aligned}$$

где $m(x, y)$ — ограниченная функция. Из условий теоремы следует, что $a_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $p > \max\{2, n/(n - \beta)\}$. Из неравенства Гёльдера следует, что оператор A_1 ограничен из $L_q(B_R)$ в $L_2(B_R)$, если $q = 2p/(p-2)$. Если мы покажем,

что оператор $T: L_2(B_{2R}) \rightarrow L_q(B_R)$, где $q = 2p/(p-2)$, компактен, то из представления $K_1^{(1)}P_{2R} = A_1T$ будет следовать, что оператор $K_1^{(1)}P_{2R}$ компактен. Оператор T является оператором типа потенциала. Известно, что такой оператор компактен из $L_r(D)$ в $L_q(D')$, где D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, если $q < nr/(n - (n - \beta)r)$ (см. [9]). В рассматриваемом случае $r = 2$, $q = 2p/(p-2)$, что приводит к условию $p > n/(n - \beta)$. Таким образом, оператор $K_1^{(1)}$ компактен. Так как функция $1/|x - y|^\beta$ ограничена при $|x| < R$, $|y| > 2R$, то ядро оператора $K_1^{(2)}$ допускает оценку

$$|k_1^{(2)}(x, y)| \leq D_2 |a_1(x)| e^{-S(x-y)}.$$

Поскольку $a_1 \in L_2(\mathbb{R}^n)$, из последней оценки следует, что $k_1^{(2)} \in L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, откуда вытекает, что $K_1^{(2)}$ – оператор Гильберта–Шмидта, а значит, он компактен. Таким образом, оператор K_1 компактен. Из доказанных выше свойств операторов K_1 и K_2 следует, что существенная норма оператора K равна нулю, т. е. оператор K компактен. В случае выполнения условия 2) утверждение теоремы следует из соображений двойственности. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть функции $k(x, y)$, $a(x)$, $b(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2 или теоремы 1.3 и K – интегральный оператор (1.5). Тогда оператор $I + \lambda K$ является нётеровым оператором при любом $\lambda \in \mathbb{C}$.

Из условий, которым удовлетворяет функция $S(x)$, следует неравенство

$$|S(x) - S(y)| \leq S(x - y), \quad (1.9)$$

которое играет роль “обратного” неравенства треугольника. В следующем параграфе мы неоднократно будем использовать это неравенство в различных оценках ядер интегральных операторов, принадлежащих классу $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$.

§ 2. Теорема о полуустойчивости дефектных чисел аналитической оператор-функции и ее следствия

В работах [10], [11] доказаны теоремы о полуустойчивости дефектных чисел аналитической оператор-функции со значениями во множестве нётеровых операторов. Здесь мы приведем некоторые из этих результатов в удобной для нас форме и дадим их приложения к оценкам собственных функций интегральных операторов с ядрами из $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, B – банахово пространство и $A(\lambda): G \rightarrow \mathcal{L}(B)$ – аналитическая оператор-функция со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов в B .

ТЕОРЕМА 2.1 [10, с. 61, 64]. Пусть $A(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция в области G , и пусть для каждой точки $\lambda \in G$ оператор $A(\lambda)$ является Φ -оператором. Тогда для любой точки $\lambda_0 \in G$ найдутся неотрицательное целое число k и проколотый круг $\dot{B}_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ такие, что $\alpha(\lambda) = \dim \ker A(\lambda) = k$ при $\lambda \in \dot{B}_\varepsilon(\lambda_0)$.

Указанное свойство дефектного числа $\alpha(\lambda)$ называется *полуустойчивостью*. Следующая теорема описывает структуру множества точек области G , в которых $\alpha(\lambda) \neq k$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда всюду в области G , за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, функция $\alpha(\lambda)$ имеет постоянное значение $\alpha(\lambda) = k$. В упомянутых изолированных точках имеет место неравенство $\alpha(\lambda) > k$.

Точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется Φ -точкой оператор-функции $A(\lambda)$, если оператор $A(\lambda_0)$ является нётеровым (Φ -оператором). Множество Φ -точек оператор-функции $A(\lambda)$ называется областью нётеровости оператор-функции $A(\lambda)$. Областью нётеровости оператора A называется область нётеровости оператор-функции $A(\lambda) = A - \lambda I$. Область нётеровости аналитической оператор-функции $A(\lambda)$ обозначается через $\Phi_{A(\lambda)}$, область нётеровости оператора A — через Φ_A . Некоторые общие свойства области нётеровости ограниченного линейного оператора изучены в [11].

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $k(x, y) \in \mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$, причем функции $a(x)$, $b(y)$ из представления (1.1) удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Пусть K — интегральный оператор (1.5) и $1 \in \Phi_K$ (т.е. оператор $I - K$ нётеров). Тогда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\ker(I - K) \subset L_p(\Omega, e^{\delta S(x)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение однопараметрическую группу операторов

$$(U(\lambda)\varphi)(x) = e^{i\lambda S(x)}\varphi(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $U(\lambda)$ обратимы, причем $U^{-1}(\lambda) = U(-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим оператор-функцию $T(\lambda)$, определенную равенством следующим образом:

$$T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda)KU(\lambda) = I - K(\lambda). \quad (2.1)$$

Покажем, что оператор-функция $T(\lambda)$ допускает продолжение до аналитической в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$ оператор-функции. Ядро оператора $K(\lambda)$ в (2.1) имеет вид

$$k_\lambda(x, y) = k(x, y)e^{-i\lambda(S(x) - S(y))}. \quad (2.2)$$

Очевидно, функция $k_\lambda(x, y)$ является целой по λ . Из определения класса $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$ следует, что

$$k_\lambda(x, y) = a(x) \frac{m_0(x, y)}{|x - y|^\beta} e^{-S_1(x, y, \lambda)} b(y), \quad (2.3)$$

где $m_0 \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$, $S_1(x, y, \lambda) = S(x - y) + i\lambda(S(x) - S(y))$.

Поскольку $|S(x) - S(y)| \leq S(x - y)$, то

$$|e^{-S_1(x, y, \lambda)}| \leq e^{-S(x - y) + \alpha S(x - y)} \leq e^{-(1 - \alpha)S(x - y)}$$

при $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha < 1$. Таким образом,

$$e^{-S_1(x, y, \lambda)} = m_1(x, y)e^{-(1 - \alpha)S(x - y)}, \quad (2.4)$$

где $m_1 \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$, откуда следует, что $k_\lambda(x, y) \in \mathcal{K}_{(1-\alpha)S}^\beta(\Omega \times \Omega)$ при $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha < 1$, причем для ядра $k_\lambda(x, y)$ выполнены условия теоремы 1.1, т. е. операторы $K(\lambda)$ ограничены при $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha < 1$.

Из (2.3) следует, что

$$\frac{dk_\lambda(x, y)}{d\lambda} = -i(S(x) - S(y))k_\lambda(x, y). \quad (2.5)$$

Из формул (2.4), (2.5) получаем

$$\frac{dk_\lambda(x, y)}{d\lambda} = -ia(x) \frac{m_0(x, y)}{|x - y|^\beta} e^{-S_1(x, y, \lambda)} (S(x) - S(y)) b(y). \quad (2.6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| |e^{-S_1(x, y, \lambda)}| &\leq |S(x) - S(y)| e^{-(1-\alpha)S(x-y)} \\ &\leq S(x - y) e^{-(1-\alpha)S(x-y)} \leq e^{-\mu S(x-y)}, \end{aligned}$$

где $0 < \mu < 1 - \alpha$. Из формулы (2.6) следует, что $dk_\lambda(x, y)/d\lambda \in \mathcal{K}_{\mu S}^\beta(\Omega \times \Omega)$ при $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha < 1$, а из теоремы 1.1 следует, что оператор $dK(\lambda)/d\lambda$ ограничен при $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha < 1$, т. е. $K(\lambda)$, а значит, и $T(\lambda) = I - K(\lambda)$ – аналитические оператор-функции в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$.

При $\lambda = 0$ имеем

$$T(0) = I - K(0) = I - K,$$

поэтому в силу условий теоремы оператор $T(0)$ нётеров. Поскольку функция $T(\lambda)$ непрерывна в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$, отсюда следует, что операторы $T(\lambda)$ нётеровы при всех достаточно малых λ , т. е. при $|\lambda| < \varepsilon_0$. Ввиду очевидного равенства

$$T(\lambda + \xi) = I - U^{-1}(\xi)T(\lambda)U(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

оператор $T(\lambda + \xi)$ нётеров при $|\lambda| < \varepsilon_0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $T(\lambda)$ – аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon_0$ нётерова оператор-функция. По теореме 2.1 существует $k \in \mathbb{Z}^+$ такое, что

$$\alpha(\lambda) = \dim \ker T(\lambda) = k, \quad 0 < |\lambda| < \varepsilon_1,$$

где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Так как при вещественных λ операторы $T(\lambda)$ и $T(0)$ подобны, имеем

$$\alpha(\lambda) = \dim \ker T(\lambda) = \dim \ker T(0) = k$$

при всех λ таких, что $0 < |\lambda| < \varepsilon_0$.

Если $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, то оператор $U(\lambda)$ ограничен, поскольку функция $e^{i\lambda S(x)}$ ограничена при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. При этом из определения $T(\lambda)$ следует равенство

$$T(0)U(\lambda) = U(\lambda)T(\lambda), \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0. \quad (2.7)$$

Если $T(\lambda)\varphi_\lambda = 0$ при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, то из равенства (2.7) следует, что $T(0)\varphi = 0$, где $\varphi = U(\lambda)\varphi_\lambda$. Положим $\lambda = i\delta$, $0 < \delta < \varepsilon$. Тогда

$$\varphi = U(i\delta)\varphi_{i\delta} = e^{-\delta S(x)}\varphi_{i\delta} = e^{-\delta S(x)}\psi, \quad (2.8)$$

где $\psi \in \ker T(i\delta) \subset L_p(\Omega)$. Поскольку $\dim \ker T(0) = \dim \ker T(i\delta)$, из равенства (2.8) следует, что $\ker T(0) = \{e^{-\delta S(x)}\psi : \psi \in \ker T(i\delta)\}$. Таким образом, если $\varphi \in \ker T(0) = \ker(I - K)$, то $e^{\delta S(x)}\varphi \in L_p(\Omega)$, т.е. $\varphi \in L_p(\Omega, e^{\delta S(x)})$. Теорема доказана.

В связи с доказанной теоремой 2.3 возникает вопрос о наилучшей постоянной $\delta > 0$ такой, что $\ker(I - K) \subset L_p(\Omega, e^{\delta S(x)})$. Введем следующую характеристику оператор-функции $T(\lambda)$:

$$\delta^* = \sup\{0 < \delta < 1 : \Pi_\delta \subset \Phi_{T(\lambda)}\}, \quad (2.9)$$

где Π_δ – полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \delta\}$, а $\Phi_{T(\lambda)}$ – область нётеровости оператор-функции $T(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо вложение

$$\ker(I - K) \subset L_p(\Omega, e^{(\delta^* - \varepsilon)S(x)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha(\lambda) = \dim \ker T(\lambda)$. По теореме 2.2 существует $k \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\alpha(\lambda) = k$ везде в полосе Π_{δ^*} , где δ^* определено формулой (2.9), за исключением, быть может, множества F , состоящего из изолированных точек. При вещественных λ операторы $T(\lambda)$ и $T(0)$ подобны, поэтому $\alpha(\lambda) = k = \dim \ker T(0)$ при $\lambda \in \Pi_{\delta^*} \setminus F$. Поскольку множество F состоит из изолированных точек, на любом интервале $(i(\delta^* - \varepsilon), i\delta^*)$ найдется точка $i\delta$ такая, что $\alpha(i\delta) = k$. Из равенства размерностей $\ker T(i\delta)$ и $\ker T(0)$ выводится вложение $\ker(I - K) \subset L_p(\Omega, e^{\delta S(x)})$ (см. доказательство теоремы 2.3). Таким образом, в качестве δ можно взять любое число, удовлетворяющее условию $0 < \delta < \delta^*$. Теорема доказана.

Во многих задачах наибольший интерес представляют поточечные оценки собственных функций. Из убывания собственных функций “в среднем”, описываемого доказанными выше теоремами, легко получить поточечную оценку в случае, когда функции $a(x)$, $b(y)$ являются ограниченными. В §3 будет рассмотрен также случай, когда одна из этих функций не ограничена, но удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. В этом параграфе мы приведем поточечную оценку только в случае ограниченных “коэффициентов” $a(x)$, $b(y)$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $1 < p \leq \infty$, $k(x, y) \in \mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$, $0 \leq \beta < n/p'$, причем функции a , b из представления (1.1) принадлежат $L_\infty(\Omega)$. Пусть число δ^* определено формулой (2.9). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $\varphi \in \ker(I - K)$ справедлива оценка

$$|\varphi(x)| \leq C e^{-(\delta^* - \varepsilon)S(x)}$$

почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \delta < \delta^*$. По теореме 2.4 если $\varphi \in \ker(I - K)$, то $\varphi = e^{-\delta S(x)}\psi$, где $\psi \in L_p(\Omega)$. Поскольку $\varphi = K\varphi$, отсюда следует, что

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) e^{-\delta S(y)} \psi(y) dy.$$

Применяя к интегралу неравенство Гёльдера, получим, что при почти всех $x \in \Omega$ выполнено

$$|\varphi(x)| \leq \|k(x, y)e^{-\delta S(y)}\|_{L_{p'}(\Omega)} \|\psi\|_{L_p(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

откуда получаем

$$|\varphi(x)|^{p'} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |k(x, y)|^{p'} e^{-p'\delta S(y)} dy.$$

Пусть $\beta' = p'\beta$, $\delta' = p'\delta$. Из оценки $|k(x, y)|$, входящей в определение класса $\mathcal{K}_S^\beta(\Omega \times \Omega)$, следует, что

$$|\varphi(x)|^{p'} \leq C_2 J(x),$$

где

$$J(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{\beta'}} e^{-\delta'(S(x-y) + S(y))} dy.$$

Покажем, что при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$S(x - y) + S(y) \geq (1 - \varepsilon) S(x) + \varepsilon S(y). \quad (2.10)$$

В самом деле, из неравенства (1.9) получаем

$$S(x - y) \geq |S(x) - S(y)| \geq (1 - \varepsilon)|S(x) - S(y)| \geq (1 - \varepsilon)(S(x) - S(y)),$$

откуда следует (2.10). Применяя (2.10), получим

$$|\varphi(x)|^{p'} \leq C_2 J(x) \leq C_2 e^{-\delta'(1-\varepsilon)S(x)} F(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.11)$$

где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x - y|^{\beta'}} e^{-\delta'\varepsilon S(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{\beta'}} e^{-\nu S(x-y)} dy, \quad \nu = \delta'\varepsilon > 0.$$

Докажем, что функция F ограничена в $\mathbb{R}^n$. Пусть $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$,

$$F_1(x) = \int_B \frac{1}{|y|^{\beta'}} e^{-\nu S(x-y)} dy, \quad F_2(x) = F(x) - F_1(x),$$

где $B = \{y \in \mathbb{R}^n: |y| \leq 1\}$. Тогда, поскольку $\beta' < n$, имеем

$$F_1(x) \leq \int_B \frac{1}{|y|^{\beta'}} dy = D_1 < +\infty.$$

Далее,

$$F_2(x) = (A_\nu g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\nu S(x-y)} g(y) dy, \quad g(y) = \begin{cases} \frac{1}{|y|^{\beta'}} & \text{при } |y| > 1, \\ 0 & \text{при } |y| \leq 1. \end{cases}$$

Так как оператор свертки A_ν с суммируемым ядром ограничен во всех пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $g(y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то $F_2(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} F_2(x) \leq D_2$, и, следовательно,

$$F(x) \leq D = D_1 + D_2 \quad (2.12)$$

почти всюду.

Из равенства (2.11) получаем

$$|\varphi(x)| \leq C_4 e^{-\delta(1-\varepsilon)S(x)}$$

почти всюду. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для ядер $k(x, y) \in \mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$ с условиями $a, b \in L_\infty(\Omega)$ заключение теоремы 2.5 справедливо при всех $1 \leq p \leq \infty$. Теорема 2.3 справедлива в случае, когда ядро $k(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3. Доказательство в этом случае аналогично доказательству теоремы 2.3. Если коэффициенты $a(x)$ и $b(y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2 или теоремы 1.3, то оператор-функция $T(\lambda)$ является нётеровой во всей полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$ и, соответственно, $\delta^* = 1$.

Достаточные условия теорем 2.3, 2.4 удобны тем, что они даны в терминах свойств ядра интегрального оператора и легко проверяемы, однако для некоторых задач, в которых коэффициенты $a(x)$ и $b(y)$ имеют неточечные особенности (случай, возникающий в квантовой механике), они могут оказаться слишком ограничительными. Поэтому мы приведем здесь более общую теорему, в которой достаточные условия даны как условия ограниченности некоторых вспомогательных интегральных операторов. Кроме того, в рассматриваемом ниже обобщении теоремы 2.3 допускается случай, когда оператор K действует в пространстве вектор-функций с компонентами, принадлежащими произвольному комплексному идеальному банаховому пространству. Напомним соответствующие определения. Пусть (Ω, Σ, μ) – некоторое пространство с σ -конечной мерой, $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – пространство всех комплекснозначных измеримых на Ω функций (точнее, классов эквивалентных функций). Банахово пространство $E \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ называется *идеальным банаховым пространством*, если из условий $|f(x)| \leq |g(x)|$ при почти всех $x \in \Omega$, где $f(x)$ – измеримая функция, а $g \in E$, вытекает, что $f \in E$ и $\|f\|_E \leq \|g\|_E$. Пусть m – натуральное число. Через $E^{(m)}$ обозначим пространство вектор-функций $f = (f_1, \dots, f_m)$ с компонентами из E , наделенное нормой

$$\|f\|_{E^{(m)}} = \max_i \|f_i\|_E.$$

Отметим, что если E – идеальное банахово пространство, то $\|f\|_{E^{(m)}} = \|f\|_{E^{(m)}}$ для любого $f \in E^{(m)}$; здесь $|f| = (|f_1|, \dots, |f_m|)$.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $E \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – комплексное идеальное банахово пространство, $k(x, y): \Omega \times \Omega \rightarrow \operatorname{Mat}_m(\mathbb{C})$ – измеримая матрица-функция и функция $S(x)$ удовлетворяет условиям (1.1). Пусть

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y) d\mu(y), \quad \varphi \in E^{(m)}.$$

Пусть для любого $\theta \in (0, 1)$ интегральный оператор

$$(M_\theta\psi)(x) = \int_{\Omega} \|k(x, y)\| e^{\theta S(x-y)} \psi(y) d\mu(y), \quad \psi \in E,$$

ограничен в E , где $\|\cdot\|$ – некоторая норма на пространстве матриц. Тогда оператор K ограничен в $E^{(m)}$ и удовлетворяет условию: если оператор $T = I - K$ нётеров и $\varphi \in \ker T$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $e^{\delta S(x)}\varphi(x) \in E^{(m)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя так же, как и при доказательстве теоремы 2.3, введем оператор-функцию

$$T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda)KU(\lambda),$$

где $(U(\lambda)\varphi)(x) = e^{i\lambda S(x)}\varphi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем, что оператор-функция $T(\lambda)$ продолжается до аналитической оператор-функции в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$. Пусть $K(\lambda) = U^{-1}(\lambda)KU(\lambda)$. Тогда $K(\lambda)$ – интегральный оператор с ядром

$$k_\lambda(x, y) = k(x, y)e^{-i\lambda(S(x) - S(y))}.$$

Для определенности будем считать, что норма на пространстве $(m \times m)$ -матриц определена равенством $\|a\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$ для любой матрицы $a = (a_{ij})_{i,j=1}^m$. Если $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha < 1$, то

$$\|k_\lambda(x, y)\| \leq \|k(x, y)\|e^{\alpha|S(x) - S(y)|} \leq \|k(x, y)\|e^{\alpha S(x - y)}.$$

Пусть $\psi(x) = |K(\lambda)\varphi(x)|$. Тогда существует постоянная $c > 0$ (в качестве c можно взять, например, число m) такая, что $\psi_i(x) \leq c \max_i (M_\alpha |\varphi_i|)(x)$ почти всюду, откуда имеем

$$\|K(\lambda)\varphi\|_{E^{(m)}} \leq c \max_i \|M_\alpha |\varphi_i|\|_E \leq C_\alpha \max_i \|\varphi_i\|_E = C_\alpha \|\varphi\|_{E^{(m)}},$$

что следует из определения идеального банахова пространства. Покажем, что для любого λ_0 , принадлежащего полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$, найдутся операторы $A_n \in L(E^{(m)}, E^{(m)})$ и круг $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ такие, что

$$K(\lambda) = \sum_{n \geq 0} A_n (\lambda - \lambda_0)^n, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \quad (2.13)$$

где ряд сходится в топологии пространства $L(E^{(m)}, E^{(m)})$. Имеем

$$k_\lambda(x, y) = \sum_{n \geq 0} k(x, y) e^{-i\lambda_0(S(x) - S(y))} \frac{i^n (S(y) - S(x))^n}{n!} (\lambda - \lambda_0)^n.$$

Положим

$$(A_n \varphi)(x) = \frac{i^n}{n!} \int_{\Omega} k(x, y) e^{-i\lambda_0(S(x) - S(y))} (S(y) - S(x))^n \varphi(y) d\mu(y).$$

Из оценки $\alpha^n t^n / n! \leq e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, $t > 0$, следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{|\lambda - \lambda_0|^n}{n!} |e^{-i\lambda_0(S(x) - S(y))} (S(y) - S(x))^n| \\ & \leq e^{|\operatorname{Im} \lambda_0| |S(x) - S(y)|} \frac{|\lambda - \lambda_0|^n}{n!} |S(x) - S(y)|^n \\ & \leq e^{(|\operatorname{Im} \lambda_0| + |\lambda - \lambda_0|) |S(x) - S(y)|} \leq e^{(|\operatorname{Im} \lambda_0| + |\lambda - \lambda_0|) S(x - y)}. \end{aligned}$$

Докажем, что ряд $\sum_{n \geq 0} A_n(\lambda - \lambda_0)^n \varphi$ сходится абсолютно при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, где ε достаточно мало. Имеем

$$\sum_{n \geq 0} |\lambda - \lambda_0|^n \|A_n \varphi\|_{E^{(m)}} \leq c \max_i \int_{\Omega} \|k(x, y)\| e^{(\operatorname{Im} \lambda_0 + |\lambda - \lambda_0|)S(x-y)} |\varphi_i(y)| d\mu(y),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная. При достаточно малом ε постоянная θ равна $|\operatorname{Im} \lambda_0| + \varepsilon < 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} |\lambda - \lambda_0|^n \|A_n \varphi\|_{E^{(m)}} &\leq c \max_i \|M_\theta |\varphi_i|\|_E \leq C_\theta \max_i \| |\varphi_i| \|_E \\ &= C_\theta \|\varphi\|_{E^{(m)}} < +\infty. \end{aligned}$$

Ввиду полноты пространства $E^{(m)}$ отсюда следует, что ряд (2.13) сходится в круге $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, т.е. оператор-функция $K(\lambda)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < 1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые уже использовались в доказательстве теоремы 2.3, т.е. найдется $\delta > 0$ такое, что $\ker(I - K) = \{e^{-\delta S(x)} \psi(x) : \psi(x) \in \ker(I - K(i\delta))\}$. Отсюда следует, что если $\varphi(x) \in \ker(I - K)$, то $e^{\delta S(x)} \varphi(x) \in E^{(m)}$. Теорема доказана.

§ 3. Оценки собственных функций операторов Шрёдингера

Стационарное уравнение Шрёдингера для системы N электронов, находящихся в поле с потенциальной энергией $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_N)$, где x_i – радиус-вектор i -го электрона, имеет вид

$$-\Delta \varphi + V(x_1, x_2, \dots, x_N) \varphi = \lambda \varphi, \quad (3.1)$$

где λ – энергия соответствующего стационарного состояния. Например, для N -электронного атома функция $V(x)$ имеет вид

$$V(x) = -\gamma \sum_{k=1}^N \frac{Ne^2}{|x_k|} + \gamma \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{e^2}{|x_k - x_l|}. \quad (3.2)$$

Представляет интерес рассмотрение общего класса N -частичных потенциалов с парным взаимодействием:

$$V(x) = \sum_i V_i(x_i) + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j). \quad (3.3)$$

В случае потенциала (3.2) имеем $V_i \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty^\varepsilon(\mathbb{R}^3)$, $V_{ij} \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty^\varepsilon(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 1, \dots, N$. Сведем (3.1) к эквивалентному интегральному уравнению, предполагая, что $\lambda < 0$. Пусть $H_0 = -\Delta$ с естественной областью определения, V – оператор умножения на функцию $V(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Мы будем предполагать, что оператор $H = H_0 + V$ самосопряжен на $D(H) = D(H_0)$, как это будет, например, для гамильтониана (3.2) N -электронного атома. Известно, что фундаментальное решение оператора $-\Delta + k^2 I$, $\lambda = -k^2$, $k > 0$, удовлетворяющее условию излучения, имеет вид (см. [12])

$$\mathcal{E}_n(x, k) = C_{n,k} \frac{1}{\rho^{(n-2)/2}} K_{(n-2)/2}(k\rho), \quad (3.4)$$

где $\rho = |x|$, $C_{n,k} > 0$ – постоянная, зависящая от n и k , K_ν – функция Макдональда. Из хорошо известных асимптотических свойств функции K_ν следует, что существуют постоянные $a_1, a_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(x, k) &\sim \frac{a_1}{|x|^{(n-1)/2}} e^{-k|x|} \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \\ \mathcal{E}_n(x, k) &\leq \frac{a_2}{|x|^{\beta_n}} \quad \text{при } |x| \rightarrow 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

где $\beta_n = \max\{n-2, (n-1)/2\}$. Кроме того, функция $K_\nu(x)$ положительна при всех $\nu > 0$, поэтому из формулы (3.4) следует, что

$$\mathcal{E}_n(x, k) \geq 0.\tag{3.6}$$

Пусть $\lambda = -k^2$, $k > 0$. Перепишем уравнение (3.1) в следующем виде:

$$-\Delta\varphi + k^2\varphi = -V\varphi.$$

Обращая оператор $-\Delta + k^2$, получим

$$\varphi(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(x-y, k) V(y) \varphi(y) dy.$$

Вводя ядро

$$k(x, y) = -\mathcal{E}_n(x-y, k) V(y),\tag{3.7}$$

получим

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) \varphi(y) dy,$$

где $n = 3N$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}^3$.

Доказательство ограниченности интегрального оператора с ядром (3.7) будет дано ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $a \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда операторы T_i , T_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}(T_i\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x-y, k) a(y_i) \varphi(y) dy_1 \dots dy_N, \\ (T_{ij}\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x-y, k) a(y_i - y_j) \varphi(y) dy_1 \dots dy_N,\end{aligned}$$

ограничены в $L_2(\mathbb{R}^{3N})$ при любом $k > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a = a' + a''$, где $a' \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $a'' \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$, то операторы T_i , T_{ij} , соответствующие функции a'' , ограничены, так как $|\mathcal{E}_{3N}(x-y, k) a''(y)| \leq C \mathcal{E}_{3N}(x-y, k)$, а $\mathcal{E}_{3N}(x, k) \in L_1(\mathbb{R}^{3N})$. Поэтому достаточно доказать утверждение, считая, что $a \in L_2(\mathbb{R}^3)$. Применяя преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^{3N})$ и теорему о свертке, получим, что ограниченность оператора T_1 эквивалентна ограниченности оператора $\tilde{T}_1 = U T_1 U^{-1}$ (где U – преобразование Фурье), действующего по формуле

$$(\tilde{T}_1\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} \hat{\mathcal{E}}_{3N}(\xi) \hat{a}(\xi_1 - t_1) \varphi(t_1, \xi_2, \dots, \xi_N) dt_1.$$

Здесь $\widehat{\mathcal{E}}_{3N}$, $\hat{a}$ – преобразования Фурье функций $\mathcal{E}_{3N}$ и a . Поскольку

$$\widehat{\mathcal{E}}_{3N}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + k^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{3N},$$

имеем

$$\widehat{\mathcal{E}}_{3N}(\xi) \leq \frac{1}{|\xi_1|^2 + k^2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N), \quad \xi_i \in \mathbb{R}^3.$$

Поэтому

$$\widehat{\mathcal{E}}_{3N}(\xi) = \theta_1(\xi) \frac{1}{|\xi_1|^2 + k^2},$$

где функция $\theta_1(\xi)$ ограничена. В силу этого оператор $\widetilde{T}_1$ представим в следующем виде: $\widetilde{T}_1 = \theta_1 M_1$, где θ_1 – оператор умножения на функцию $\theta_1(\xi)$, а

$$(M_1 \varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi_1|^2 + k^2} \hat{a}(\xi_1 - t_1) \varphi(t_1, \xi_2, \dots, \xi_N) dt_1.$$

Поскольку оператор θ_1 ограничен, достаточно доказать ограниченность оператора M_1 . Применяя обратное преобразование Фурье, получим, что ограниченность оператора M_1 эквивалентна ограниченности оператора S_1 , действующего по формуле

$$(S_1 \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} k_1(x_1 - y_1) a(y_1) \varphi(y_1, x_2, \dots, x_N) dy_1,$$

где k_1 – обратное преобразование Фурье функции $1/(|\xi_1|^2 + k^2)$, т. е.

$$k_1(x_1 - y_1) = \gamma_1 \frac{e^{-k|x_1 - y_1|}}{|x_1 - y_1|}.$$

Положим

$$(A_1 \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} k_1(x - y) a(y) \varphi(y) dy, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}^3).$$

Тогда $S_1 = A_1 \otimes I$, причем можно считать, что тензорное произведение действует в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{3N}) \simeq L_2(\mathbb{R}^3) \otimes L_2(\mathbb{R}^{3N-3})$. Покажем, что если оператор $A_1: L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3)$ ограничен, то и $S_1: L_2(\mathbb{R}^{3N}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^{3N})$ ограничен. Имеем

$$\begin{aligned} \|S_1 \varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^{3N})}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{3N-3}} dx_2 dx_3 \dots dx_N \left(\left| \int_{\mathbb{R}^3} k_1(x_1 - y_1) a(y_1) \varphi(y_1, x_2, \dots, x_N) dy_1 \right|^2 \right) \\ &\leq \|A_1\|_{L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^{3N-3}} dx_2 dx_3 \dots dx_N \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(y_1, x_2, \dots, x_N)|^2 dy_1 \\ &= C_1 \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^{3N})}^2 \end{aligned}$$

в случае, если A_1 – ограниченный оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^3)$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Покажем, что ядро $k_1(x - y) a(y)$ удовлетворяет условию Гильберта–Шмидта. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} dy \int_{\mathbb{R}^3} |k_1(x - y)|^2 |a(y)|^2 dx &\leq C_1^2 \int_{\mathbb{R}^3} |a(y)|^2 dy \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-2k|x-y|}}{|x-y|^2} dx \\ &= C_1^2 \|a\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-2k|z|}}{|z|^2} dz. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку $e^{-2k|z|}/|z|^2 \in L_1(\mathbb{R}^3)$, интеграл в (3.8) сходится, т.е. A_1 – оператор Гильберта–Шмидта, а значит, оператор A_1 ограничен. Нам осталось доказать ограниченность операторов T_{ij} . Без ограничения общности можно принять, что $i = 1, j = 2$. Ядро оператора T_{12} имеет вид

$$k_{12}(x, y) = \mathcal{E}_{3N}(|x - y|)a(y_1 - y_2),$$

так как функция $\mathcal{E}_{3N}(x)$ является радиальной. Сделаем замену переменных $x' = Vx$:

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad x'_i = x_i, \quad i = 3, \dots, 3N.$$

Поскольку такое преобразование унитарно, оператор T_{12} унитарно эквивалентен оператору с ядром, получаемым после замены $x = V^{-1}x', y = V^{-1}y'$, т.е. с ядром

$$\tilde{k}_{12}(x', y') = \mathcal{E}_{3N}(|x' - y'|)a(\sqrt{2}y'_1).$$

Ограниченность оператора с таким ядром была установлена выше. Теорема доказана.

Из предложения 3.1 следует, что интегральный оператор с ядром (3.7) является ограниченным. Пусть потенциал $V(x)$ имеет вид

$$V(x) = \sum_i V_i(x_i) + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j) + W(x),$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}^3$, где $V_i, V_{ij} \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty(\mathbb{R}^3)$ и $W \in L_\infty(\mathbb{R}^{3N})$. Используя те же оценки, что и в доказательстве предложения 3.1, и теорему Като–Реллиха [13, гл. X, п. X.I], нетрудно проверить, что в этом случае оператор $H = H_0 + V$ действует из $D(H_0)$ в $L_2(\mathbb{R}^{3N})$ и является самосопряженным.

Приведем результат об экспоненциальной оценке собственных функций оператора Шрёдингера с потенциалом из рассматриваемого класса.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $H = -\Delta + V$, $D(H) = D(-\Delta)$ – самосопряженный оператор Шрёдингера с потенциалом вида

$$V(x) = \sum_i V_i(x_i) + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j) + W(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}^3$, $V_i, V_{ij} \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty(\mathbb{R}^3)$, $i, j = 1, \dots, N$, $W \in L_\infty(\mathbb{R}^{3N})$. Пусть $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(H)$ – точка дискретного спектра оператора H , φ – соответствующая точке λ собственная функция оператора H . Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi \in L_2(\mathbb{R}^{3N}, e^{\delta|x|}). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda < 0$, так как в противном случае мы можем перейти к оператору $H' = H - aI$ при достаточно большом $a > 0$, для которого точка $\lambda' = \lambda - a < 0$ будет точкой

дискретного спектра. Положим $\lambda = -k^2$, $k > 0$, $H_0 = -\Delta$, $D(H_0) = D(-\Delta)$. Тогда

$$(H_0 + V + k^2 I)\varphi = 0.$$

Пусть $T = (H_0 + k^2 I)^{-1}(H_0 + V + k^2 I) = I - K$, где $K = -(H_0 + k^2 I)^{-1}V$. Выше было показано, что уравнение $T\varphi = 0$ является интегральным уравнением вида

$$\varphi(x) = - \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x - y, k) V(y) \varphi(y) dy.$$

Пусть $k(x, y) = -\mathcal{E}_{3N}(x - y, k) V(y)$. Покажем, что операторы

$$(M_\theta \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} |k(x, y)| e^{\theta k|x-y|} \varphi(y) dy$$

ограничены при $\theta \in (0, 1)$. Из асимптотических свойств функции $\mathcal{E}_{3N}(x, k)$ следует, что

$$\mathcal{E}_{3N}(x, k) e^{\theta k|x|} \leq C \mathcal{E}_{3N}(x, (1 - \theta)k)$$

(см. формулу (3.5)). Пусть $(1 - \theta)k = \mu$. Тогда ограниченность оператора M_θ следует из ограниченности оператора

$$(\widetilde{M}_\mu \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x - y, \mu) |V(y)| \varphi(y) dy.$$

Поскольку $V = \sum_i V_i + \sum_{i < j} V_{ij} + W$, то оператор $\widetilde{M}_\mu$ ограничен, если ограничены операторы M_i , M_{ij} и $\widetilde{M}$, где

$$\begin{aligned} (M_i \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x - y, \mu) |V_i(y_i)| \varphi(y) dy, \\ (M_{ij} \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x - y, \mu) |V_{ij}(y_i - y_j)| \varphi(y) dy, \\ (\widetilde{M} \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathcal{E}_{3N}(x - y, \mu) |W(y)| \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Из условий теоремы следует, что $|V_i|, |V_{ij}| \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty(\mathbb{R}^3)$, поэтому в силу предложения 3.1 операторы M_i , M_{ij} ограничены. Оператор $\widetilde{M}$ ограничен, так как его ядро имеет суммируемую разностную мажоранту. Отсюда следует, что операторы M_θ , $\theta \in (0, 1)$, ограничены. Для того чтобы применить к интегральному уравнению $\varphi = K\varphi$ теорему 2.6, осталось показать, что оператор $T = I - K$ нётеров. Поскольку $T\varphi = (H_0 + k^2 I)^{-1}(H + k^2 I)\varphi$ при $\varphi \in D(H_0) = D(H)$, то $(T\varphi, \psi) = (\varphi, T^*\psi)$, $\varphi \in D(H_0)$, $\psi \in L_2(\mathbb{R}^{3N})$, где $T^*: L_2(\mathbb{R}^{3N}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^{3N})$,

$$T^*\varphi = (H + k^2 I)(H_0 + k^2 I)^{-1}\varphi \quad (3.10)$$

(здесь мы воспользовались самосопряженностью операторов H и H_0). Заметим, что $T = I - K$, где оператор K ограничен, поэтому T допускает продолжение с $D(H_0)$ до ограниченного оператора во всем пространстве. Покажем, что оператор T^* нормально разрешим (по Хаусдорфу), т. е. что уравнение

$T^*\varphi = f$ имеет по крайней мере одно решение тогда и только тогда, когда $(f, \psi) = 0$ для всех $\varphi \in (\text{Im } T^*)^\perp$. Из (3.10) следует, что $\text{Im } T^* = \text{Im}(H + k^2 I)$, так как оператор $(H_0 + k^2 I)^{-1}$ отображает все пространство на $D(H_0)$. Поскольку $\lambda = -k^2$ – точка дискретного спектра самосопряженного оператора $H + k^2 I$, оператор $H + k^2 I$ нормально разрешим. Следовательно, $\text{Im } T^*$ замкнут. Как известно, в этом случае оператор T^* нормально разрешим, а значит, сопряженный оператор T также нормально разрешим. Покажем, что $\dim \ker T < +\infty$, $\dim \ker T^* < +\infty$. Если $\varphi \in \ker T$, то $(T\varphi, \psi) = (\varphi, T^*\psi) = 0$ для всех $\psi \in L_2(\mathbb{R}^{3N})$. Пусть $\psi = (H_0 + k^2 I)\psi_1$, где $\psi_1 \in D(H_0)$. Тогда $T^*\psi = (H + k^2 I)\psi_1$ и $(\varphi, (H + k^2 I)\psi_1) = 0$, откуда следует, что $\varphi \in D(H_0) = D(H)$ и $(H + k^2 I)\varphi = 0$, т.е. $\ker T = \ker(H + k^2 I)$, а значит, $\dim \ker T < +\infty$. Если $T^*\varphi = 0$, то $(H_0 + k^2 I)^{-1}\varphi \in \ker(H + k^2 I)$, т.е. $\varphi = (H_0 + k^2 I)\varphi_1$, где $\varphi_1 \in \ker(H + k^2 I)$. Поскольку $\ker(H_0 + k^2 I) = \{0\}$, то $\dim \ker T^* = \dim \ker(H + k^2 I) < +\infty$. Таким образом, оператор T является нётеровым, а тогда (3.9) следует из теоремы 2.6. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В случае, когда $V(x) = \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j)$ (т.е. когда $V_i(x_i) = 0$, $W(x) = 0$ в разложении (3.3)) и $V_{ij} \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty^\varepsilon(\mathbb{R}^3)$, утверждение теоремы 3.1 следует из результатов [2]. В [1] это утверждение доказано в случае $V_{ij} \in R + L_\infty^\varepsilon(\mathbb{R}^3)$, где R – класс Рольника (см. [2]). Метод доказательства, использованный в работах [1], [2], применим в тех случаях, когда известно, что $\sigma_{\text{ess}}(H) = [\lambda_0, +\infty)$, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (здесь $\sigma_{\text{ess}}(H)$ – существенный спектр оператора H).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При некоторых дополнительных условиях, налагаемых на поведение функций V_i, V_{ij} и W на бесконечности, из (3.9) можно вывести поточечную оценку

$$|\varphi(x)| \leq C e^{-\delta|x|}.$$

Способ вывода поточечной оценки из экспоненциального убывания “в среднем” основан на теореме Пэли–Винера (см. [2, гл. XIII, § 11]).

Рассмотрим далее случай многомерного оператора Шрёдингера с потенциалом, стремящимся к нулю на бесконечности. Здесь применение теорем из § 2 дает простое доказательство поточечного экспоненциального убывания собственных функций в случае $n = 1, 2, 3$ (см. также [3], [4]). Если $n > 3$, то аналогичные рассуждения приводят к экспоненциальному убыванию “в среднем”. Пусть вещественнозначная функция $V(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $V(x) \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $V(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow +\infty$.

Пусть H – замыкание оператора, определенного дифференциальным выражением $\mathcal{L} = -\Delta + V$ на функциях класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. При $n = 1, 2, 3$ оператор H является самосопряженным (см. [2]).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $n \leq 3$, потенциал $V(x)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и φ – собственная функция оператора H , соответствующая собственному значению $\lambda < 0$. Тогда для любого $0 < \delta < \sqrt{-\lambda}$ существуют постоянные $C > 0$, $R > 0$ такие, что

$$|\varphi(x)| \leq C e^{-\delta|x|} \quad \text{при } |x| > R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda = -k^2$, $k > 0$. Тогда $(\varphi, (H + k^2 I)\psi) = 0$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $A = H_0 + k^2 I$. Тогда A – самосопряженный оператор и $A \geq k^2 I$. Имеем $(\varphi, (A + V)\psi) = 0$ при $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathcal{L}_A = \{\varphi = A\psi : \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$. Тогда $\mathcal{L}_A$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Из равенства $(\varphi, (A + V)\psi) = 0$ получаем $(\varphi, (A + V)A^{-1}\eta) = 0$ при $\eta \in \mathcal{L}_A$. Имеем $(A + V)A^{-1} = I + VA^{-1} = I + K_1$, где

$$(K_1\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\mathcal{E}_n(x - y, k)\varphi(y) dy.$$

Из условий теоремы следует, что $V \in L_2(\mathbb{R}^n) + L_\infty^\varepsilon(\mathbb{R}^n)$. Из оценок фундаментального решения $\mathcal{E}_n$ при $n = 1, 2, 3$ и теоремы 1.1 следует, что оператор K_1 ограничен. Нетрудно видеть, что ограничен также оператор $K_2 = A^{-1}V$ и $K_2^* = K_1$. С учетом этого получим $(A^{-1}(A + V)\varphi, \eta) = ((I + K_2)\varphi, \eta) = 0$ при $\eta \in \mathcal{L}_A$, т.е. $(I + K_2)\varphi = 0$. Таким образом, всякая собственная функция φ является решением интегрального уравнения

$$\varphi(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_n(x - y, k)V(y)\varphi(y) dy.$$

Поскольку $V \in L_2(\mathbb{R}^n) + L_\infty^\varepsilon(\mathbb{R}^n)$, из теоремы 2.5 и следствия 1.1 следует, что $e^{\delta|x|}\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ при $0 < \delta < \sqrt{-\lambda}$. Так как $V(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $|V(x)| \leq 1$ при $|x| > R_1$. Положим $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= - \int_{B_{R_1}} \mathcal{E}_n(x - y, k)V(y)\varphi(y) dy, \\ \varphi_2(x) &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_1}} \mathcal{E}_n(x - y, k)V(y)\varphi(y) dy, \end{aligned}$$

где B_{R_1} – шар радиуса R_1 . Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $R > R_1$ справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n(x - y, k) \leq C_1 \frac{e^{-k|x-y|}}{|x - y|^\beta} \leq C_2 e^{-(k-\varepsilon)|x|}$$

при $|x| > R$, $|y| < R_1$, то

$$|\varphi_1(x)| \leq C_2 e^{-(k-\varepsilon)|x|} \int_{B_{R_1}} |V(y)| |\varphi(y)| dy \leq C_3 e^{-(k-\varepsilon)|x|}.$$

Далее,

$$|\varphi_2(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_1}} \mathcal{E}_n(x - y, k) e^{-\delta|y|} |\psi(y)| dy,$$

где $\varphi = e^{-\delta|x|}\psi$, $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Из неравенства Гёльдера и оценок функции $\mathcal{E}_n$ (см. формулу (3.5)) получим

$$|\varphi_2(x)| \leq C_4 \|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \sqrt{J(x)},$$

где

$$J(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-2\delta|x-y| - 2\delta|y|}}{|x - y|^{2\beta_n}} dy,$$

причем $2\beta_n < n$ при $n = 1, 2, 3$. Такой интеграл мы уже оценивали в § 2 при выводе теоремы 2.5. Применяя оценки (2.10)–(2.12), получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $D_\varepsilon > 0$ такое, что

$$J(x) \leq D_\varepsilon e^{-2\delta(1-\varepsilon)|x|}.$$

Из полученных неравенств следует, что $|\varphi(x)| \leq C_\varepsilon e^{-\delta(1-\varepsilon)|x|}$ при $|x| > R$, это равносильно утверждению теоремы.

Пусть $A: D(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ – самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$ такой, что $D(A) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и $\lambda \in \mathbb{R}$. Обобщенной собственной функцией оператора A , соответствующей собственному значению λ , будем называть функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$(\varphi, (A - \lambda I)\psi) = 0$$

для любой $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $n > 3$, $V \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, где $p > n/2$, $V(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и H – некоторое самосопряженное расширение минимального оператора, соответствующего дифференциальному выражению $-\Delta + V$, то, используя теорему 1.3, можно доказать, что всякая обобщенная собственная функция φ оператора H , соответствующая собственному значению $\lambda < 0$, экспоненциально убывает “в среднем”. Если при этом φ принадлежит пространству Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^n)$, то справедлива и поточечная экспоненциальная оценка (см. [4]).

§ 4. Оценки собственных функций одномерных операторов типа свертки

Для многих классов одномерных интегральных операторов типа свертки с переменными коэффициентами известны конструктивные условия нётеровости, выраженные в терминах их символов. Для таких случаев теорема 2.5 приводит к простым достаточным условиям справедливости поточечной оценки

$$|\varphi(x)| \leq C e^{-\delta|x|^q}, \quad \varphi \in \ker(I - K). \quad (4.1)$$

ПРИМЕР 4.1. Пусть $B^{\text{sup}}(\mathbb{R}^2)$ – множество таких функций $a(x, y) \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, что существуют числа $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$ такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{x > N, y > N} |a(x, y) - a(+\infty, +\infty)| &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \text{ess sup}_{x < -N, y < -N} |a(x, y) - a(-\infty, -\infty)| &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $k_i(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $a_i(x, y) \in B^{\text{sup}}(\mathbb{R}^2)$, причем

$$|k_i(x)| \leq C_i e^{-\alpha|x|^q}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < q \leq 1, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.2)$$

Рассмотрим оператор T вида

$$(T\varphi)(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^s \int_{-\infty}^{+\infty} a_i(x, y) k_i(x - y) \varphi(y) dy. \quad (4.3)$$

Символом оператора T называется пара функций

$$\begin{aligned}\sigma_T^+(\xi) &= 1 - \sum_{i=1}^s a_i(+\infty, +\infty) \hat{k}_i(\xi), \\ \sigma_T^-(\xi) &= 1 - \sum_{i=1}^s a_i(-\infty, -\infty) \hat{k}_i(\xi),\end{aligned}$$

где $\hat{k}_i(\xi)$ – преобразование Фурье функции $k_i(x)$. Известно (см. [14, с. 27]), что оператор (4.3) нётеров в $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\sigma_T^\pm(\xi) \neq 0, \quad -\infty < \xi < +\infty. \quad (4.4)$$

Ядро $k(x, y)$ оператора K принадлежит классу $\mathcal{K}_S(\Omega \times \Omega)$, причем функция $S(x)$ в рассматриваемом случае имеет вид $S(x) = \alpha|x|^q$. Применяя теорему 2.5, получаем, что при выполнении условия (4.4) для любой функции $\varphi \in \ker T$ справедлива оценка (4.1).

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим оператор свертки на полуоси (оператор Винера–Хопфа):

$$(T\varphi)(x) = \varphi(x) - \int_0^{+\infty} k(x-y)\varphi(y) dy,$$

где $k(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Если функция $k(x)$ удовлетворяет условию

$$|k(x)| \leq C e^{-\alpha|x|^q}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < q \leq 1, \quad (4.5)$$

то ядро $k(x-y)$ принадлежит $\mathcal{K}_S(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, где $S(x) = \alpha|x|^q$, причем коэффициенты $a(x)$ и $b(y)$ из представления (1.3) в этом случае равны 1. Пусть $\sigma_T(\xi)$ – символ оператора T . Как известно [6], условие нётеровости T имеет вид

$$\sigma_T(\xi) = 1 - \hat{k}(\xi) \neq 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad (4.6)$$

где $\hat{k}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $k(x)$. При выполнении (4.5) для любого $\varphi \in \ker T$ справедлива оценка (4.1) с некоторым $\delta > 0$. Рассмотрим более подробно случай $q = 1$. Из (4.5) следует, что в этом случае преобразование Фурье $\hat{k}(\xi)$ аналитично в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \alpha$. Условие (4.6), очевидно, сохраняется в максимальной полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \delta_0 < \alpha$, в которой нет нулей функции $\sigma_T(\xi)$, поэтому величина δ в оценке (4.1) в нашем примере определяется расстоянием от вещественной оси до ближайшего к ней комплексного нуля символа $\sigma_T(\xi)$. В частности, отсюда следует, что постоянная δ может быть сколь угодно малой. Этот вывод интересно сравнить с асимптотическими формулами для решений уравнения $T\varphi = 0$ в случае ядер, удовлетворяющих условию (4.5) при $q = 1$. Эти асимптотические формулы были получены И. А. Фельдманом и М. Г. Крейном (см. [6]). Пусть ν_i , $i = 1, \dots, N$, – нули символа $\sigma_T(\xi)$, лежащие в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \alpha$. Как следует из [6], если все числа $\operatorname{Im} \nu_i$ различны, то решения уравнения $T\varphi = 0$ имеют асимптотику

$$\varphi(x) \sim P(x) e^{-i\nu_k x} \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty,$$

где ν_k – один из корней ν_i , $i = 1, \dots, N$, и $P(x)$ – некоторый многочлен. В этом случае величина δ^* (см. формулу (2.5)) для ядра $k(x - y)$ определяется равенством

$$\delta^* = \min\{|\operatorname{Im} \nu_i| : \operatorname{Im} \nu_i < 0\}.$$

В случае $0 < q < 1$ преобразование Фурье $\hat{k}(\xi)$, вообще говоря, не продолжается аналитически ни в какую полосу $|\operatorname{Im} \xi| < \delta$ и метод работы [6] не применим. Результаты, аналогичные сформулированным выше, справедливы для многомерных операторов свертки в конусах, условия нётеровости которых получены в [15], и для одномерных операторов Винера–Хопфа с осциллирующими коэффициентами, для которых условия нётеровости могут быть получены из соответствующей теории для сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом (см. [16], [17]).

В заключение автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. A. J. O'Connor, "Exponential decay of bound state wave functions", *Comm. Math. Phys.*, **32**:4 (1973), 319–340.
2. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. IV: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. IV: *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978.
3. Sh. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*, Math. Notes, **29**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.
4. S. Nakamura, "Agmon-type exponential decay estimates for pseudodifferential operators", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **5**:4 (1998), 693–712.
5. P. D. Hislop, "Exponential decay of two-body eigenfunctions: a review", *Proceedings of the Symposium on Mathematical Physics and Quantum Field Theory* (Berkeley, CA, 1999), Electron. J. Differ. Equ. Conf., **4**, Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX, 2000, 265–288.
6. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения*, Наука, М., 1971; англ. пер.: I. C. Gohberg, I. A. Fel'dman, *Convolution equations and projection methods for their solution*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
7. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244; англ. пер.: L. G. Arabadzhyan, N. B. Engibaryan, "Convolution equations and nonlinear functional equations", *J. Soviet Math.*, **36**:6 (1987), 745–791.
8. З. Прёсдорф, *Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений*, Мир, М., 1979; пер. с нем.: S. Prössdorf, *Einige Klassen singularer Gleichungen*, Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1974.
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
10. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов", *УМН*, **12**:2 (1957), 44–118.

11. И. Ц. Гохберг, “О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра”, *Докл. АН СССР*, **78**:4 (1951), 629–632.
12. А. И. Комеч, “Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **31**, ВИНТИ, М., 1988, 127–261; англ. пер.: A. I. Komech, “Linear partial differential equations with constant coefficients”, *Partial differential equations. II*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **31**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 121–255.
13. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. II: *Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York–London, 1975.
14. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения*, Изд-во Ростов. ун-та, Ростов-на-Дону, 1988.
15. И. Б. Симоненко, “Операторы типа свертки в конусах”, *Матем. сб.*, **74(116)**:2 (1967), 298–313; англ. пер.: I. B. Simonenko, “Operators of convolution type in cones”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:2 (1967), 279–293.
16. G. S. Litvinchuk, *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift*, *Math. Appl.*, **523**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
17. V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, *Introduction to the theory of singular integral operators with shift*, *Math. Appl.*, **289**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

В. М. Каплицкий (V. M. Karlitskii)
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
E-mail: kaplitsky@donpac.ru

Поступило в редакцию
24.03.2009
03.03.2010