Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О числе компонент трехмерного максимального пересечения трех вещественных квадрик, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 3, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:38:17

УДК 512.7

В. А. Краснов

О числе компонент трехмерного максимального пересечения трех вещественных квадрик

Рассматриваются неособые пересечения трех вещественных пятимерных квадрик, которые для краткости названы вещественными трехмерными триквадриками. Доказывается, что существуют вещественные трехмерные M -триквадрики, число компонент которых равно любому числу k , удовлетворяющему неравенствам $1 \leq k \leq 14$.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: триквадрики, максимальные многообразия, спектральная кривая, тэта-характеристики, индекс-функция.

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Пусть даны линейно независимые квадратичные формы с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} q_1(X_0, \dots, X_6) &= q_1(X), & q_2(X_0, \dots, X_6) &= q_2(X), \\ q_3(X_0, \dots, X_6) &= q_3(X). \end{aligned} \quad (0.1)$$

Тогда можно рассмотреть связку квадрик в $\mathbb{P}^6$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X) = 0. \quad (0.2)$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – матрицы квадратичных форм (0.1). Тогда рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3) = 0. \quad (0.3)$$

Будем предполагать, что это уравнение задает неособую кривую на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$. Тогда система уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_6) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_6) = 0, \quad q_3(X_0, \dots, X_6) = 0 \quad (0.4)$$

определяет неособое трехмерное комплексное многообразие $V \subset \mathbb{P}^6$, инвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^6 \rightarrow \mathbb{P}^6$. Такое многообразие будем называть *вещественной триквадрикой*.

Пусть $\mathbb{R}V$ – вещественная часть триквадрики V . Тогда выполняется неравенство Гарнака–Смита–Тома

$$\sum_i \dim_{\mathbb{F}_2} H^i(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) \leq \sum_i \dim_{\mathbb{F}_2} H^i(V, \mathbb{F}_2).$$

Триквадрика V называется *M -многообразием*, если это неравенство становится равенством. В настоящей статье будет доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Для любого натурального числа k , удовлетворяющего неравенствам $1 \leq k \leq 14$, существует трехмерная неособая вещественная M -триквадрика V , для которой число компонент связности вещественной части $\mathbb{R}V$ равно k .*

В работе [1] доказано, что число компонент связности вещественной части произвольной трехмерной неособой вещественной триквадрики не превосходит 14, поэтому из теоремы 0.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 0.2. *Максимальное число компонент связности вещественных частей трехмерных неособых вещественных триквадрик равно 14.*

Доказательство теоремы 0.1 основывается на связи трехмерных триквадрик с плоскими кривыми степени 7. Кратко опишем эту связь (см. подробности в [1]–[3]). Каждой связке квадрик (0.2) сопоставляется пара (C, σ) , где C – плоская кривая, параметризующая особые квадрики в связке (0.2) (она задается уравнением (0.3) и называется *спектральной кривой*), а σ – тэта-характеристика на кривой C , которая определяется следующим образом. Сначала определим линейное расслоение L на кривой C , называемое *спектральным расслоением*. Если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X)$$

в пространстве $\mathbb{C}^7$. (Поскольку мы предполагаем, что кривая C неособая, ядро квадратичной формы $q_\lambda(X)$ – одномерное подпространство $\mathbb{C}^7$; см. [1].) Оказывается, что класс эквивалентности расслоения $L(5)$ является четной тэта-характеристикой кривой C , причем выполняется равенство $H^0(C, L(5)) = 0$ (см. [1], [4]). Обозначим полученную тэта-характеристику через σ (она называется *спектральной тэта-характеристикой*). Тогда связка квадрик (0.2) восстанавливается по паре (C, σ) с точностью до проективного преобразования. Пусть C – произвольная неособая плоская кривая степени 7, а σ – тэта-характеристика, удовлетворяющая следующему условию: если L_σ – линейное расслоение, представляющее тэта-характеристику σ , то $H^0(C, L_\sigma) = 0$. Тогда оказывается, что пара (C, σ) получается из некоторой связки квадрик. Это утверждение является первым основным результатом, который применяется при доказательстве теоремы 0.1.

Второй результат, который применяется при доказательстве теоремы 0.1, содержится в работе [5], где приводится классификация вещественных плоских кривых степени 7. Если теперь взять плоскую M -кривую C степени 7, то оказывается, что можно подобрать такую тэта-характеристику σ , чтобы пара (C, σ) задавала M -триквадрику. Это утверждение составляет основу доказательства теоремы 0.1.

Содержание настоящей статьи следующее. Кроме введения, в ней имеются три параграфа. В §1 рассматриваются тэта-характеристики на комплексных и вещественных кривых. Мы приводим без доказательства известные факты, которые потребуются при доказательстве теоремы 0.1, а также доказываем предложение 1.1, которое также применяется при доказательстве теоремы 0.1. В вещественном случае мы рассматриваем тэта-характеристики только на M -кривых. Тогда каждая тэта-характеристика будет вещественной. В §2

рассматриваются спектральные M -кривые, а также индекс-функция на сфере S^2 , определенной уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Эта функция равна отрицательному индексу инерции квадратичной формы $q_\lambda(X)$. В § 3 приведено доказательство теоремы 0.1. При вычислениях, проводимых в этом параграфе, мы применяем спектральные последовательности, построенные в работах [6], [7].

Заметим, что метод построения трехмерных M -триквадрик, рассмотренный в настоящей статье, может применяться для построения M -триквадрик произвольной нечетной размерности (случай четной размерности разобран в работе [8]). В частности, доказательство теоремы 0.1 нетрудно переделать в доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 0.3. *Если существует неособая вещественная M -кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ степени $2m + 1$, овалы которой имеют схему*

$$\langle 1\langle n_1 \rangle \rangle \sqcup \cdots \sqcup \langle 1\langle n_r \rangle \rangle \sqcup \langle l \rangle, \quad l > 0,$$

то существует M -триквадрика V размерности $2m - 3$, для когомологий вещественной части которой выполняются равенства (когомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$)

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathbb{R}V) &= \cdots = \dim H^{m-4}(\mathbb{R}V) = 1, \\ \dim H^{m-3}(\mathbb{R}V) &= n_1 + \cdots + n_r + r, \quad \dim H^{m-2}(\mathbb{R}V) = l + 1. \end{aligned}$$

Заметим, наконец, что для любой неособой вещественной M -триквадрики V размерности $2m - 3$ выполняются равенства (см. предложение 3.6)

$$\dim H^0(\mathbb{R}V) = \cdots = \dim H^{m-4}(\mathbb{R}V) = 1.$$

§ 1. Тэта-характеристики кривой

В этом параграфе мы приведем без доказательства известные факты о тэта-характеристиках комплексных и вещественных кривых (см. подробности в [1], [9]–[11]), кроме этого докажем одно предложение.

1.1. Тэта-характеристики комплексной кривой. Пусть C – компактная комплексная кривая рода $g > 1$. Тогда элемент σ группы $\text{Pic}^{(g-1)}(C)$ называется *тэта-характеристикой*, если выполняется равенство $2\sigma = K$, где $K \in \text{Pic}^{(2g-2)}(C)$ – канонический класс. Таким образом, тэта-характеристика – это одна из половинок канонического класса. Пусть $a \in \text{Pic}^{(0)}(C)$ – элемент второго порядка. Тогда сумма $\sigma + a$ будет тэта-характеристикой, если σ была тэта-характеристикой. Обозначим через Σ множество тэта-характеристик кривой C . Оно является аффинным пространством над векторным $\mathbb{F}_2$ -пространством

$${}_2\text{Pic}^{(0)}(C) = H^1(C, \mu_2) = H^1(C, \mathbb{F}_2).$$

На множестве тэта-характеристик Σ определим две функции

$$h(\sigma) = \dim H^0(C, L_\sigma) \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(\sigma) \equiv h(\sigma) \pmod{2},$$

где L_σ – линейное расслоение на C , класс эквивалентности которого равен σ . Тэта-характеристика σ называется *четной*, если $\varphi(\sigma) = 0$, в противном случае она называется *нечетной*.

Далее мы отождествляем $\mathbb{F}_2$ -пространства $H^1(C, \mathbb{F}_2)$, $H_1(C, \mathbb{F}_2)$ с помощью изоморфизма Пуанкаре. Таким образом, на пространстве $H_1(C, \mathbb{F}_2)$ определена функция

$$\varphi_\sigma: H_1(C, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2$$

с помощью равенства $\varphi_\sigma(v) = \varphi(\sigma + v) + \varphi(\sigma)$. Эта функция является квадратичной формой относительно билинейной формы (v, w) на $H_1(C, \mathbb{F}_2)$, определенной с помощью индекса пересечения. Арф-инвариант этой квадратичной формы равен $\varphi(\sigma)$. Заметим также, что выполняется равенство

$$\varphi_{\sigma+a}(v) = \varphi_\sigma(v + a) + \varphi_\sigma(v).$$

Пусть $e_1, \dots, e_{2g}$ – симплектический базис пространства $H_1(C, \mathbb{F}_2)$, т. е. при $i \leq j$ выполняются равенства

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & j \neq g+i, \\ 1, & j = g+i. \end{cases}$$

Тогда существует и единственная четная тэта-характеристика $\sigma(e)$ такая, что

$$\varphi_{\sigma(e)}(v) = \sum_{i=1}^g v^i v^{g+i},$$

где $v^1, \dots, v^{2g}$ – координаты вектора v в базисе $e_1, \dots, e_{2g}$. Если $a^1, \dots, a^{2g}$ – координаты вектора $a \in H_1(C, \mathbb{F}_2)$ в базисе $e_1, \dots, e_{2g}$, то имеет место равенство

$$\varphi_{\sigma(e)+a}(v) = \sum_{i=1}^g v^i v^{g+i} + \sum_{i=1}^g a^i v^{g+i} + \sum_{i=1}^g a^{i+g} v^i.$$

Заметим также, что тэта-характеристика $\sigma(e) + a$ будет четной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^g a^i a^{g+i} = 0. \quad (1.1)$$

Далее мы рассмотрим тэта-характеристики неособой плоской комплексной проективной кривой C степени 7. В этом случае имеется особая четная тэта-характеристика σ' , равная классу дивизора $2H$, где H – пересечение кривой C с прямой на плоскости. Заметим, что $h(\sigma') = 6$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}$, состоящее из пар (C, σ) , где $C \subset \mathbb{P}^2$ – неособая кривая степени 7, а σ – тэта-характеристика на кривой C . Множество $\mathcal{M}$ является неособым комплексным многообразием размерности 35, которое состоит из трех компонент связности $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}'$, где $\mathcal{M}_0$ состоит из пар (C, σ) с четной тэта-характеристикой σ на C , отличной от σ' , $\mathcal{M}_1$ состоит из пар (C, σ) с нечетной тэта-характеристикой σ на C , а $\mathcal{M}'$ состоит из пар (C, σ') , где σ' – тэта-характеристика на C , равная классу дивизора $2H$. На многообразии $\mathcal{M}_0$ имеется гиперповерхность $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_0$ такая, что если пара (C, σ) принадлежит $\mathcal{N}$, то $h(\sigma) > 0$, а если пара (C, σ) принадлежит $\mathcal{M}_0 \setminus \mathcal{N}$, то $h(\sigma) = 0$.

1.2. Тэта-характеристики вещественной M -кривой. Пусть $\tau: C \rightarrow C$ – антиголоморфная инволюция. Тогда пара (C, τ) называется *вещественной кривой*, а инволюция τ называется *вещественной структурой* на комплексной кривой C . Множество неподвижных точек инволюции C^τ будем обозначать через $\mathbb{R}C$ и называть *вещественной частью* вещественной кривой (C, τ) . Мы предполагаем, что вещественная часть $\mathbb{R}C$ состоит из максимально возможного количества связных компонент. Тогда количество таких компонент равно $g + 1$, мы обозначаем их через $C_0, \dots, C_g$. Заметим, что при разрезании топологической поверхности C вдоль вещественной части $\mathbb{R}C$ поверхность C распадается на половинки C', C'' , каждая из которых гомеоморфна сфере с $g + 1$ дырами.

Инволюция $\tau: C \rightarrow C$ индуцирует инволюцию $\tau^*: \Sigma \rightarrow \Sigma$ на множестве тэта-характеристик. Из нашего предположения следует, что инволюция τ^* тривиальна, т. е. все тэта-характеристики кривой (C, τ) вещественные. Поэтому если σ – тэта-характеристика, то на линейном расслоении L_σ существует антиголоморфная инволюция $\hat{\tau}: L_\sigma \rightarrow L_\sigma$, которая антилинейна на слоях, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_\sigma & \xrightarrow{\hat{\tau}} & L_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\tau} & C \end{array}$$

Пара $(L_\sigma, \hat{\tau})$ называется *вещественным расслоением* на вещественной кривой (C, τ) . Это расслоение определено с точностью до изоморфизма. Отображение вещественных частей $\mathbb{R}L_\sigma \rightarrow \mathbb{R}C$ является обычным вещественным линейным расслоением. Тэта-характеристике σ сопоставим набор чисел $\varepsilon_\sigma = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_g)$ из поля $\mathbb{F}_2$, полагая $\varepsilon_i = 0$ тогда и только тогда, когда расслоение $\mathbb{R}L_\sigma$ тривиально на компоненте C_i . Этот набор чисел назовем ε -инвариантом тэта-характеристики σ .

Рис. 1

Построим симплектический базис $e_1, \dots, e_{2g}$ пространства $H_1(C, \mathbb{F}_2)$ (рис. 1). В качестве векторов $e_1, \dots, e_g$ возьмем классы гомологий $[C_1], \dots, [C_g]$. Чтобы построить векторы $e_{g+1}, \dots, e_{2g}$, отметим на каждой компоненте $C_0, \dots, C_g$ по точке $p_0, \dots, p_g$. Для каждого номера $i = 1, \dots, g$ соединим точки p_0, p_i гладкой кривой $\gamma_i \subset C'$, ортогональной к кривым C_0, C_i в некоторой римановой

метрике на поверхности C . Положим $G_i = \gamma_i \cup \tau(\gamma_i)$. Тогда классы когомологий $[G_1], \dots, [G_g]$ определяют векторы $e_{g+1}, \dots, e_{2g}$. Заметим теперь, что ε -инвариант тэта-характеристики σ устроен следующим образом: $\varepsilon_i = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\varphi_\sigma(e_i) = 1$.

Каждая тэта-характеристика σ задает на вещественной части $\mathbb{R}C$ ориентацию, определенную с точностью до обращения в противоположную. Эту ориентацию будем называть σ -ориентацией, она устроена следующим образом. Возьмем мероморфное вещественное сечение ω расслоения $(L_\sigma, \hat{\tau})$ и зафиксируем вещественный изоморфизм

$$(L_\sigma, \hat{\tau}) \otimes (L_\sigma, \hat{\tau}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{T}^*C, \tau^*),$$

где $\mathbb{T}^*C$ – кокасательное расслоение. Тогда образ сечения $\omega \otimes \omega$ расслоения

$$(L_\sigma, \hat{\tau}) \otimes (L_\sigma, \hat{\tau})$$

при этом изоморфизме будет вещественной мероморфной дифференциальной формой на кривой C . Обозначим эту дифференциальную форму через Ω . Каждый нуль и полюс формы Ω имеет четный порядок, поэтому ограничение ее на вещественную часть $\mathbb{R}C$ определит ориентацию. В силу произвольности выбора вещественной структуры на расслоении L_σ и рассмотренного изоморфизма вещественных расслоений построенная σ -ориентация определена с точностью до обращения в противоположную. Чтобы она была задана однозначно, зафиксируем ориентацию компоненты C_0 и потребуем совпадения σ -ориентации на этой компоненте с фиксированной ориентацией.

Вещественная часть $\mathbb{R}C$ является границей каждой из половинок C' , C'' . Поэтому ориентация поверхности C индуцирует ориентацию на вещественной части $\mathbb{R}C$, которая определена с точностью до обращения в противоположную. Эта ориентация называется *комплексной*. Будем предполагать, что комплексная ориентация совпадает с фиксированной ориентацией компоненты C_0 . Тогда комплексная ориентация будет определена однозначно, причем на компоненте C_0 она совпадает с σ -ориентацией для каждой тэта-характеристики σ . Для ориентаций на компонентах $C_1, \dots, C_g$ справедливо следующее утверждение: *на компоненте C_i , где $i > 0$, σ -ориентация совпадает с комплексной ориентацией тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\varphi_\sigma(e_{g+i}) = 0$.*

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть на вещественной части $\mathbb{R}C$ задана произвольная ориентация, совпадающая с фиксированной ориентацией на компоненте C_0 . Тогда существует четная тэта-характеристика σ такая, что ее ε -инвариант удовлетворяет условию $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{g-1} = 0$, а σ -ориентация совпадает с заданной ориентацией на компонентах $C_0, \dots, C_{g-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тэта-характеристику $\sigma = \sigma(e) + a$, где координаты $a^1, \dots, a^{2g}$ вектора $a \in H_1(C, \mathbb{F}_2)$ выбираются следующим образом: $a^1 = \dots = a^{g-1} = 1$; если σ -ориентация совпадает с комплексной ориентацией на компоненте C_i , то $a^{g+i} = 0$, в противном случае $a^{g+i} = 1$, где $i = 1, \dots, g-1$; координаты a^g, a^{2g} выбираются так, чтобы выполнялось соотношение (1.1). Тогда тэта-характеристика σ искомая. Предложение доказано.

§ 2. Спектральная кривая и индекс-функция

Кривая $C \subset \mathbb{P}^2$, заданная уравнением (0.3), называется в работе [1] *спектральной кривой* связки квадратик (0.2) (в работе [3] она называется *кривой Гессе*). На спектральной кривой C определена инволюция комплексного сопряжения $\tau: C \rightarrow C$. Будем предполагать, что вещественная кривая (C, τ) является M -кривой. Тогда ее вещественная часть $\mathbb{R}C \subset \mathbb{RP}^2$ состоит из 16 компонент связности, одна из которых является односторонней кривой на вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, обозначим ее через C_0 . Другие компоненты связности вещественной части $\mathbb{R}C$ разбивают плоскость $\mathbb{RP}^2$ на диск и лист Мёбиуса, они называются *овалами*. Мы обозначаем эти овалы через $C_1, \dots, C_{15}$.

Рассмотрим двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. На этой сфере определена целочисленная функция $I(\lambda)$, равная отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X). \quad (2.1)$$

Функция $I(\lambda)$ имеет точки разрыва на кривой $\Gamma \subset S^2$, равной прообразу вещественной части $\mathbb{R}C$ спектральной кривой (C, τ) при канонической проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Функция $I(\lambda)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) функция $I(\lambda)$ полунепрерывна снизу;
- 2) множество точек разрыва функции $I(\lambda)$ совпадает с кривой Γ ;
- 3) при переходе через компоненты связности кривой Γ значения функции $I(\lambda)$ изменяются на ± 1 ;
- 4) в точках непрерывности выполняется равенство $I(-\lambda) = 7 - I(\lambda)$;
- 5) в точках разрыва выполняется равенство $I(-\lambda) = 6 - I(\lambda)$.

Обозначим через $\Gamma_0 \subset S^2$ прообраз односторонней кривой $C_0 \subset \mathbb{RP}^2$ при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Кривая Γ_0 связная, она разбивает сферу S^2 на две половины, которые мы обозначим через S' , S'' . Заметим, что S' , S'' гомеоморфны диску, поэтому мы будем далее их изображать дисками на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда кривая Γ_0 будет изображаться окружностью. Прообраз каждого овала C_i , $i = 1, \dots, 15$, при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух компонент связности, одна из которых содержится в S' , обозначим ее через Γ'_i , а другая компонента содержится в S'' , обозначим ее через Γ''_i .

Разность $S^2 \setminus \Gamma$ состоит из 32 открытых связных компонент, половина из которых содержится в S' , а другие шестнадцать компонент содержатся в S'' . Обозначим через U' ту компоненту разности $S^2 \setminus \Gamma$, которая содержится в S' , причем кривая Γ_0 входит в границу U' . Аналогично, обозначим через U'' ту компоненту разности $S^2 \setminus \Gamma$, которая содержится в S'' , причем кривая Γ_0 входит в границу U'' . Мы можем считать, что индекс-функция $I(\lambda)$ принимает на области U' значения, равные 3, а на области U'' принимает значения, равные 4. В противном случае нужно умножить квадратичные формы (0.1) на -1 (или переобозначить половины S' , S''). Зафиксируем ориентацию сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с помощью внешней нормали. Тогда мы можем определить с помощью индекс-функции $I(\lambda)$ ориентацию на компонентах связности кривой Γ следующим образом. В точке такой компоненты возьмем нормальный вектор, направленный в сторону возрастания индекс-функции, а затем берем такой касательный вектор, чтобы пара полученных векторов задавала ориентацию сферы S^2 . Тогда ориентация данной компоненты задается полученным касательным вектором. Построенная ориентация на компонентах кривой Γ называется

индекс-ориентацией. Заметим, что при антиподальной инволюции сферы S^2 индекс-ориентация на кривой Γ сохраняется. Поэтому проекция $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}C$ индуцирует *индекс-ориентацию* на кривой $\mathbb{R}C$.

На спектральной кривой C определено линейное комплексное расслоение L следующим образом: если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы (2.1) в пространстве $\mathbb{C}^7$. (Поскольку мы предполагаем, что спектральная кривая C неособая, ядро квадратичной формы $q_\lambda(X)$ – одномерное подпространство в $\mathbb{C}^7$ (см. [1]).) Это расслоение называется в [1] *спектральным расслоением*. Если $L \rightarrow C$ – спектральное расслоение, то класс эквивалентности расслоения $L(5)$ является четной тэта-характеристикой кривой C , причем выполняется равенство $H^0(C, L(5)) = 0$ (см. [1], [4]). Построенную тэта-характеристику обозначим через σ_s , она называется в [1] *спектральной тэта-характеристикой* кривой C . Эта тэта-характеристика определяет σ_s -ориентацию кривой $\mathbb{R}C$. Будем считать, что σ_s -ориентация совпадает на компоненте C_0 с индекс-ориентацией. Тогда эти две ориентации совпадут на всех компонентах кривой $\mathbb{R}C$ (см. [1], [5]).

Каждая плоская неособая вещественная M -кривая C степени 7 является спектральной кривой вещественной связки пятимерных квадрик (см. [1], [2]), но не каждая четная тэта-характеристика σ на кривой C является спектральной тэта-характеристикой. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы тэта-характеристика σ на кривой C была спектральной тэта-характеристикой, является равенство $h(\sigma) = 0$, т.е. пара (C, σ) принадлежит многообразию $\mathcal{M}_0 \setminus \mathcal{N}$ (см. [1], [2]). Если пара (C, σ) принадлежит гиперповерхности $\mathcal{N}$, то после малого возмущения кривой C пара (C, σ) будет принадлежать многообразию $\mathcal{M}_0 \setminus \mathcal{N}$. Каждая σ -ориентация кривой $\mathbb{R}C$ поднимается до индекс-ориентации кривой Γ однозначно определенной функции $I_\sigma(\lambda)$ на сфере S^2 , удовлетворяющей свойствам 1)–5). Заметим, что функция $I_{\sigma'}(\lambda)$ принимает только два значения: 3 и 4 (см. [1]), где σ' – тэта-характеристика, определенная дивизором $2H$.

Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – неособая вещественная M -кривая степени 7, Γ – прообраз вещественной части $\mathbb{R}C$ при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, $I(\lambda)$ – целочисленная функция на сфере S^2 , удовлетворяющая условиям 1)–5). Тогда существует четная тэта-характеристика σ на кривой C , для которой функция $I_\sigma(\lambda)$ совпадает с функцией $I(\lambda)$ (см. [1]).

§ 3. Доказательство теоремы 0.1

Сначала приведем несколько лемм.

ЛЕММА 3.1. Пусть дана невырожденная квадратичная форма с вещественными коэффициентами

$$q(X) = \sum_{i,j=0}^N a_{ij} X_i X_j,$$

причем $\mu = \min\{\sigma^+, \sigma^-\} > 0$, где $\sigma^\pm$ – положительный и отрицательный индексы инерции этой квадратичной формы. Тогда гомоморфизм ограничения

$$H^i(\mathbb{RP}^N) \rightarrow H^i(\mathbb{R}Q)$$

не равен нулю при $0 \leq i \leq \mu - 1$ и равен нулю при $i \geq \mu$, где $Q \subset \mathbb{P}^N$ – квадрика, определенная уравнением $q(X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [8].

Неособые вещественные плоские кривые степени 7 изучались в работе [5]. В частности, там показано, что овалы такой M -кривой могут иметь только следующие схемы:

$$\langle 15 \rangle; \quad \langle 1 \langle n \rangle \rangle \sqcup \langle 14 - n \rangle, \quad 1 \leq n \leq 13.$$

Напомним, что овал называется *нечетным*, если он содержится внутри нечетного числа овалов. Кривая со второй схемой содержит n нечетных овалов. На рис. 2 изображена половина S' сферы S^2 для трех различных связок квадрик, которые рассматриваются в следующих леммах. На рис. 2 изображены также кривые $\Gamma_0, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{15}$ и значения индекс-функции на областях, на которые эти кривые разрыва разбивают S' . Значения индекс-функции на областях половины S'' определяются равенством $I(-\lambda) = 7 - I(\lambda)$, поэтому половина S'' не изображается.

Рис. 2

ЛЕММА 3.2. Пусть M -кривая C является спектральной кривой связки квадрик (0.2), овалы которой имеют схему $\langle 15 \rangle$, а индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения на половине S' сферы S^2 так, как показано на рис. 2, b. Тогда соответствующая триквадрика V является M -многообразием, вещественная часть которой состоит из одной компоненты связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega_j \subset S^2$ – замкнутое множество, определенное неравенством $I(\lambda) \leq j$. Тогда существует спектральная последовательность (см. [1], [6])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{6-j}) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{RP}^6 \setminus \mathbb{R}V), \quad (3.1)$$

где когомологии имеют коэффициенты в поле $\mathbb{F}_2$. Теперь положим $h^r(-) = \dim H^r(-, \mathbb{F}_2)$. Тогда из этой спектральной последовательности вытекают равенства

$$h^6(\mathbb{RP}^6 \setminus \mathbb{R}V) = h^5(\mathbb{RP}^6 \setminus \mathbb{R}V) = 0, \quad h^4(\mathbb{RP}^5 \setminus \mathbb{R}V) = 15.$$

Применив двойственность Пуанкаре–Лефшеца, получим следующие равенства:

$$h^0(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V) = h^1(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V) = 0, \quad h^2(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V) = 15. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь длинную точную последовательность когомологий пары топологических пространств $(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V)$

$$\cdots \rightarrow H^i(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V) \rightarrow H^i(\mathbb{RP}^6) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V) \rightarrow H^{i+1}(\mathbb{RP}^6, \mathbb{R}V) \rightarrow \cdots \quad (3.3)$$

Поскольку индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значение 2, то из леммы 3.1 следует, что гомоморфизм ограничения

$$H^2(\mathbb{RP}^6) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V)$$

равен нулю. Поэтому из точной последовательности (3.3) и равенств (3.2) получаем следующие равенства:

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = 15.$$

Осталось заметить, что справедливо равенство (см. [1])

$$\sum_{i \geq 0} h^i(V) = 32.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим стандартное двулистное накрытие $\pi: S^6 \rightarrow \mathbb{RP}^6$. Прообраз многообразия $\mathbb{R}V$ при этом накрытии обозначим через W . Тогда существует спектральная последовательность (см. [7]), в которой при $j > 1$

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{6-j}, \Omega_{6-j-1}) \Rightarrow H^{i+j}(S^6 \setminus W), \quad (3.4)$$

где когомологии имеют коэффициенты в поле $\mathbb{F}_2$.

ЛЕММА 3.3. Пусть M -кривая C является спектральной кривой связки квадрик (0.2), овалы которой имеют схему $\langle 1 \langle n \rangle \rangle \sqcup \langle 14 - n \rangle$, $1 \leq n \leq 13$, индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения на половине S' сферы S^2 так, как показано на рис. 2, а, с, а ε -инвариант спектральной тэта-характеристики σ_s принимает нулевые значения на нечетных овалах. Тогда выполняются равенства

$$h^0(W) = 2n + 1, \quad h^1(W) = 29 - 2n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем рассматривать случай, когда индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения на половине S' сферы S^2 так, как показано на рис. 2, а. Второй случай, т.е. когда индекс-функция $I(\lambda)$ принимает значения на половине S' сферы S^2 так, как показано на рис. 2, с, разбирается аналогично.

Покажем сначала, что в этом случае дифференциал

$$d_2^{0,4}: H^0(\Omega_2) \rightarrow H^2(\Omega_3, \Omega_2)$$

в спектральной последовательности (3.4) равен нулю. В работе [7] дано описание дифференциала

$$d_2^{i,j}: E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{6-j}, \Omega_{6-j-1}) \rightarrow E_2^{i+2,j-1} = H^{i+2}(\Omega_{6-j+1}, \Omega_{6-j}) \quad (3.5)$$

при $j > 1$, которое мы сейчас приведем. Обозначим через

$$\delta^{i,j}: H^i(\Omega_{6-j}, \Omega_{6-j-1}) \rightarrow H^{i+1}(\Omega_{6-j+1}, \Omega_{6-j})$$

кограничный гомоморфизм в длинной точной последовательности когомологий тройки пространств $(\Omega_{6-j+1}, \Omega_{6-j}, \Omega_{6-j-1})$. На множестве $\Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$ рассмотрим векторное расслоение F_j , слой которого $(F_j)_\lambda$, где $\lambda \in \Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$, равен подпространству пространства $\mathbb{R}^7$, натянутому на собственные векторы матрицы

Рис. 3

квадратичной формы $q_\lambda(X)$, отвечающие отрицательным собственным значениям этой матрицы. Первый класс Штифеля–Уитни расслоения F_j обозначим через ω_j . Тогда для дифференциала (3.5) выполняется равенство (см. [7])

$$d_2^{i,j}(\xi) = \omega_{6-j+1} \cup \delta^{i,j}(\xi) + \delta^{i+1,j}(\omega_{6-j} \cup \xi), \quad (3.6)$$

где $\xi \in E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{6-j}, \Omega_{6-j-1})$.

Обозначим открытые области, на которые кривые разрыва $\Gamma_0, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{15}$ разбивают S' , через $X_0, \dots, X_{15}$ так, как показано на рис. 3. Имеют место следующие разложения:

$$H^0(\Omega_2) = H^0(\overline{X}_1) \oplus H^0(\overline{X}_{n+2}) \oplus \dots \oplus H^0(\overline{X}_{15}), \quad (3.7)$$

$$H^2(\Omega_3, \Omega_2) = H^2(\overline{X}_2, \partial\overline{X}_2) \oplus \dots \oplus H^2(\overline{X}_{n+1}, \partial\overline{X}_{n+1}). \quad (3.8)$$

Заметим, что каждое слагаемое в правых частях равенств (3.7), (3.8) является одномерным $\mathbb{F}_2$ -пространством. Базисные элементы одномерных пространств

$$H^0(\overline{X}_1), H^0(\overline{X}_{n+2}), \dots, H^0(\overline{X}_{15})$$

будем обозначать через $x_1^0, x_{n+2}^0, \dots, x_{15}^0$ соответственно. Аналогично, базисные элементы одномерных пространств

$$H^2(\overline{X}_2, \partial\overline{X}_2), \dots, H^2(\overline{X}_{n+1}, \partial\overline{X}_{n+1})$$

обозначаем через $x_2^2, \dots, x_{n+1}^2$ соответственно.

Пусть $(L, \hat{\tau})$ – спектральное линейное расслоение; тогда $(L(5), \hat{\tau})$ – линейное расслоение, отвечающее спектральной тэта-характеристике σ_s . Расслоения $\pi^*(\mathbb{R}L)$, $\pi^*(\mathbb{R}L(5))$ на кривой Γ будем обозначать просто через $\mathbb{R}L$, $\mathbb{R}L(5)$. Расслоение F_3 продолжается непрерывно на границу $\partial\overline{X}_j$, $j = 2, \dots, n+1$, если полагать, что при $\lambda \in \partial\overline{X}_j$ слой $(F_3)_\lambda$ равен подпространству пространства $\mathbb{R}^7$, натянутому на собственные векторы матрицы квадратичной формы $q_\lambda(X)$, отвечающие неположительным собственным значениям. Тогда выполняется равенство

$$F_3|_{\partial\overline{X}_j} = F_2|_{\partial\overline{X}_j} \oplus \mathbb{R}L|_{\partial\overline{X}_j}, \quad j = 2, \dots, n+1. \quad (3.9)$$

Обозначим через w первый класс Штифеля–Уитни линейного расслоения $\mathbb{R}L$. Тогда из равенства (3.9) получаем следующее равенство:

$$\omega_3|_{\partial\overline{X}_j} = \omega_2|_{\partial\overline{X}_j} + w|_{\partial\overline{X}_j}, \quad j = 2, \dots, n+1.$$

Поскольку расслоения $F_3|_{\overline{X}_j}$ тривиальны при $j = 2, \dots, n+1$, то тривиальны расслоения $F_3|_{\partial\overline{X}_j}$, поэтому из предыдущих равенств получаем

$$\omega_2|_{\partial\overline{X}_j} = w|_{\partial\overline{X}_j}, \quad j = 2, \dots, n+1. \quad (3.10)$$

Покажем теперь, что выполняются равенства

$$d_2^{0,4}(x_1^0) = w([\partial\overline{X}_2])x_2^2 + \dots + w([\partial\overline{X}_{n+1}])x_{n+1}^2, \quad (3.11)$$

$$d_2^{0,4}(x_j^0) = 0, \quad j = n+2, \dots, 15. \quad (3.12)$$

Классы когомологий

$$d_2^{0,4}(x_{n+2}^0), \dots, d_2^{0,4}(x_{15}^0)$$

принадлежат пространству $H^2(\overline{X}_0, \Gamma'_1 \cup \partial\overline{X}_{n+2} \cup \dots \cup \partial\overline{X}_{15})$, которое равно нулю. Следовательно, выполняются равенства (3.12). Равенство (3.11) вытекает из (3.6), (3.10). Поскольку расслоения $\mathbb{R}L$, $\mathbb{R}L(5)$ на овалах совпадают, из условия леммы получаем, что числа

$$w([\partial\overline{X}_2]), \dots, w([\partial\overline{X}_{n+1}])$$

равны нулю. Поэтому из равенства (3.11) вытекает, что класс когомологий $d_2^{0,4}(x_1^0)$ равен нулю. Следовательно, дифференциал $d_2^{0,4}$ в спектральной последовательности (3.4) равен нулю.

Поскольку дифференциал $d_2^{0,4}$ равен нулю, из спектральной последовательности (3.4) получаем

$$\dim E_\infty^{0,4} = h^0(\Omega_2) = 15 - n, \quad \dim E_\infty^{1,3} = h^1(\Omega_3, \Omega_2) = 14 - n,$$

$$\dim E_\infty^{2,2} = h^2(\Omega_4, \Omega_3) = 0, \quad \dim E_\infty^{0,5} = h^0(\Omega_1) = 0,$$

$$\dim E_\infty^{1,4} = h^1(\Omega_2) = n, \quad \dim E_\infty^{2,3} = h^2(\Omega_3, \Omega_2) = n.$$

Следовательно, выполняются равенства

$$h^4(S^6 \setminus W) = 29 - 2n, \quad h^5(S^6 \setminus W) = 2n.$$

Применим двойственность Александера–Понтрягина; тогда из этих равенств вытекают следующие равенства:

$$h^0(W) = 2n + 1, \quad h^1(W) = 29 - 2n.$$

Лемма доказана.

Покажем наконец, что справедлива

ЛЕММА 3.4. Пусть выполняются условия леммы 3.3. Тогда вещественная триквадрика V , полученная из связки квадрик (0.2), является M -многообразием, вещественная часть которого имеет $n+1$ компонент связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать так же, как при доказательстве леммы 3.2, т.е. рассмотрим спектральную последовательность (3.1), применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца, а затем рассмотрим длинную точную последовательность когомологий (3.3) пары $(\mathbb{R}P^6, \mathbb{R}V)$. Тогда получим

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Если гомоморфизм ограничения $H^1(\mathbb{RP}^6) \rightarrow H^1(\mathbb{R}V)$ не равен нулю, то выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = 15 - n,$$

в противном случае выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = n, \quad h^1(\mathbb{R}V) = 14 - n.$$

Чтобы показать, что равенство $h^0(\mathbb{R}V) = n$ не выполняется, рассмотрим длинную точную последовательность Смита двулистного накрытия $\pi: W \rightarrow \mathbb{R}V$

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}V) \rightarrow H^0(W) \rightarrow H^0(\mathbb{R}V) \rightarrow \dots$$

Поскольку $h^0(W) = 2n + 1$, из этой точной последовательности следует, что равенство $h^0(\mathbb{R}V) = n$ не выполняется. Лемма доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы 0.1, нужно показать, что условия лемм 3.2, 3.3 реализуются. Покажем сначала, что условия леммы 3.2 реализуются. Рассмотрим неособую вещественную кривую $C \subset \mathbb{P}^2$, овалы вещественной части которой имеет схему $\langle 15 \rangle$. Существует четная тэта-характеристика σ на C такая, что функция $I_\sigma(\lambda)$ совпадает с функцией, значения которой на S' изображены на рис. 2, b. Эта тэта-характеристика не равна собой тэта-характеристике σ' , так как функция $I_{\sigma'}(\lambda)$ принимает на сфере S^2 только два значения. Поэтому если условие $h(\sigma) = 0$ не выполняется, то малым возмущением кривой C можно добиться выполнения этого условия. Таким образом, условия леммы 3.2 реализуются. Чтобы показать, что условия леммы 3.3 реализуются, нужно рассуждать аналогично и применить предложение 1.1. Подробности приводить не будем, заметим только, что если не реализуются условия с индекс-функцией, изображенной на рис. 2, a, то реализуются условия с индекс-функцией, изображенной на рис. 2, c. Теорема 0.1 доказана.

Мы не приводим доказательства общей теоремы 0.3, так как после соответствующих изменений ее доказательство почти повторяет доказательство теоремы 0.1. Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть V – неособая вещественная M -триквадрика размерности $2m - 1 > 3$. Тогда выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = \dots = h^{m-3}(\mathbb{R}V) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое M -многообразие является GM -многообразием (см. [13]). Триквадрика V является полным пересечением и GM -многообразием, поэтому гомоморфизм ограничения

$$H^{m-1}(\mathbb{RP}^{2m+2}) \rightarrow H^{m-1}(\mathbb{R}V)$$

не равен нулю (см., например, [14]). Поэтому из леммы 3.1 следует, что индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $I(\lambda) \geq m$. Будем рассуждать так же, как при доказательстве леммы 3.2, т. е. рассмотрим спектральную последовательность, аналогичную спектральной последовательности (3.1), применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца, а затем рассмотрим длинную точную последовательность когомологий пары $(\mathbb{RP}^{2m+2}, \mathbb{R}V)$. Тогда получим нужные равенства. Предложение доказано.

Список литературы

1. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On the number of components of a complete intersection of real quadrics*, arXiv:0806.4077.
2. A. C. Dixon, "Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **5** (1902), 350–351.
3. А. Н. Тюрин, "О пересечении квадрик", *УМН*, **30:6** (1975), 51–99; англ. пер.: A. N. Tyurin, "On intersections of quadrics", *Russian Math. Surveys*, **30:6** (1975), 51–105.
4. I. V. Dolgachev, *Topics in classical algebraic geometry*. I, <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/topics.pdf>.
5. О. Я. Виро, "Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл", *Докл. АН СССР*, **254:6** (1980), 1306–1310; англ. пер.: O. Ja. Viro, "Curves of degree 7, curves of degree 8, and the Ragsdale conjecture", *Soviet Math. Dokl.*, **22:2** (1980), 566–570.
6. А. А. Аграчев, "Гомологии пересечений вещественных квадрик", *Докл. АН СССР*, **299:5** (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachev, "Homology of intersections of real quadrics", *Soviet Math. Dokl.*, **37:2** (1988), 493–496.
7. А. А. Аграчев, "Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений", *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, "Topology of quadratic maps and hessians of smooth maps", *J. Soviet Math.*, **49:3** (1990), 990–1013.
8. В. А. Краснов, "Максимальные пересечения трех вещественных квадрик", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75:3**, 127–146.
9. M. F. Atiyah, "Riemann surfaces and spin structures", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **4** (1971), 47–62.
10. D. Mumford, "Theta characteristics of an algebraic curve", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **4** (1971), 181–192.
11. С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических поверхностей и их супераналоги*, МЦНМО, М., 2003; англ. пер.: S. M. Natanzon, *Moduli of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogs*, Transl. Math. Monogr., **225**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
12. V. Vinnikov, "Self-adjoint determinantal representations of real plane curves", *Math. Ann.*, **296:3** (1983), 453–479.
13. В. А. Краснов, "Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47:2** (1983), 268–297; англ. пер.: V. A. Krasnov, "Harnack–Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties", *Math. USSR-Izv.*, **22:2** (1984), 247–275.
14. В. А. Краснов, "Вещественные алгебраические GM-многообразия", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62:3** (1998), 39–66; англ. пер.: V. A. Krasnov, "Real algebraic GM-varieties", *Izv. Math.*, **62:3** (1998), 465–491.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
 E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
 26.03.2009