Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, Теорема о седловой точке для сильно и слабо выпуклых функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 71–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:08:31

УДК 517.982.252

Г. Е. Иванов

Теорема о седловой точке для сильно и слабо выпуклых функций

Доказана теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметров седловой точки в минимаксной задаче, возникающей, например, в теории дифференциальных игр. Полученная теорема существования седловой точки не следует из известных теорем Дж. фон Неймана, Ки Фаня, М. Сайона и других теорем, так как пересечение множеств подуровней рассматриваемой функции может оказаться не связным и не пустым. Условия полученной теоремы сформулированы в терминах свойств сильной выпуклости и слабой выпуклости функций, заданных в банаховом пространстве. Исследованы свойства сильно и слабо выпуклых функций, связанные с операциями минимизации и максимизации. Получены неупрощаемые оценки параметров выпуклости для инфимальной конволюции (эписуммы) и эпипазности функций, в результате чего построено исчисление параметров выпуклости функций относительно эпиопераций. Приведены характерные примеры и показана существенность предположений доказанных теорем.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: седловая точка, минимакс, сильная выпуклость и слабая выпуклость, дифференциальная игра.

Введение

В § 1 настоящей статьи даны определения, необходимые для формулировки теоремы о седловой точке, сформулирована эта теорема и приведен пример, показывающий, что в принятых предположениях пересечение множеств подуровней целевой функции может быть не связным. В § 2 введены обозначения, используемые в дальнейшем изложении, получены свойства и приведены характерные примеры сильно и слабо выпуклых функций, показана существенность предположений, принятых в теореме о седловой точке. В § 3 получены вспомогательные результаты и теорема об исчислении параметров выпуклости. В § 4 теорема о седловой точке доказана. В § 5 доказана непрерывная зависимость седловой точки от параметров. В § 6 рассмотрено приложение полученной теоремы о седловой точке в теории дифференциальных игр.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00139а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракты П 938 и 16.740.11.0128).

§ 1. Формулировка теоремы о седловой точке

Пусть E – банахово пространство. Обозначим $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Напомним, что *надграфиком* функции $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $\text{epi } f = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}: x \in E, y \geq f(x)\}$; *эффективным множеством* этой функции называется множество $\text{dom } f = \{x \in E: f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Функция $w: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *коэрцитивной*, если

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{w(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Функция $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равномерно выпуклой* на выпуклом множестве $B \subset E$, если

$$\inf_{\substack{x_1, x_2 \in B \\ \|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon}} (\lambda w(x_1) + (1-\lambda)w(x_2) - w(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) > 0 \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Пусть $w: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – выпуклая полунепрерывная снизу функция, $\text{dom } w \neq \emptyset$. Выпуклая полунепрерывная снизу функция $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *сильно выпуклой* относительно функции w , если существует функция $g: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такая, что

$$w(x) = \inf_{u \in E} (f(x - u) + g(u)) \quad \forall x \in E.$$

Функция $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *слабо выпуклой* относительно функции w , если $\text{dom } f \neq \emptyset$ и существует функция $g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что

$$f(x) = \sup_{u \in \text{dom } w} (g(x + u) - w(u)) \quad \forall x \in E.$$

Функция $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *слабо вогнутой* относительно функции w , если функция $x \mapsto -f(-x)$ слабо выпукла относительно функции w .

Каждой функции $w: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ и каждому числу $t > 0$ сопоставим функцию $w_{[t]}: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определяемую формулой

$$w_{[t]}(x) = tw\left(\frac{x}{t}\right) \quad \forall x \in E.$$

Заметим, что надграфик функции $w_{[t]}$ получается умножением надграфика функции w на число t .

ТЕОРЕМА 1.1 (о седловой точке). Пусть функция $w: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ коэрцитивна и для любого шара $B \subset E$ функция w ограничена и равномерно выпукла на этом шаре. Пусть заданы числа $r > 0, t > 0, R > r$ и $T > t$. Пусть функция $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ слабо выпукла относительно функции $w_{[R]}$ и слабо вогнута относительно функции $w_{[T]}$, функция $g: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ сильно выпукла относительно функции $w_{[r]}$ и функция $h: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ сильно выпукла относительно функции $w_{[t]}$. Тогда для любого вектора $x \in E$ существует и единственная седловая точка $(u_*, v_*) \in E \times E$ функции

$$F(u, v) = f(x - u + v) + g(u) - h(v), \quad u, v \in E, \quad (1.1)$$

то есть

$$F(u_*, v) < F(u_*, v_*) < F(u, v_*) \quad \forall u, v \in E: u \neq u_*, v \neq v_*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Минимаксная задача для функции вида (1.1) возникает, например, в теории игр. При этом векторы u и v – это управления игроков, вектор x – исходное состояние системы, вектор $x - u + v$ – ее конечное состояние, функция f определяет зависимость результата игры от конечного состояния системы, функция g определяет затраты на управление игрока u , функция h – затраты на управление игрока v .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В теореме 5.1 доказана непрерывная зависимость седловой точки функции (1.1) относительно вектора x в смысле сильной топологии пространства E и относительно функций f , g , h в смысле некоторой специальной топологии, более слабой, чем топология равномерной сходимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть E – гильбертово пространство, $C > 0$ и $w(x) = \frac{C}{2}\|x\|^2$ для любого $x \in E$. Пусть задана полунепрерывная снизу функция $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\text{dom } f \neq \emptyset$. Тогда:

- (i) функция f сильно выпукла относительно функции w , если и только если функция $x \mapsto f(x) - w(x)$ выпукла;
- (ii) функция f слабо выпукла относительно функции w , если и только если функция $x \mapsto f(x) + w(x)$ выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) вытекает из [1, лемма 4.8.1, теорема 4.8.5]. Утверждение (ii) следует из [2, теорема 2.4.2].

В работе [3] введено следующее понятие сильно выпуклой функции. Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *сильно выпуклой с константой $C > 0$* , если функция $x \mapsto f(x) - \frac{C}{2}\|x\|^2$ выпукла. Согласно предложению 1.1 рассматриваемые в настоящей работе понятия сильно и слабо выпуклых функций являются обобщениями понятия сильно выпуклой функции, введенного в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если пространство E гильбертово и $w(x) = \|x\|^2$, то теорема 1.1 следует из фундаментальной теоремы Дж. фон Неймана [4] и предложения 1.1. Однако в общем случае теорема 1.1 не следует из теоремы Дж. фон Неймана или других известных ее обобщений (см., например, [5], [6]). В этих и многих других теоремах для существования седловой точки функции $F(u, v)$ требуется, чтобы для любого числа $C \in \mathbb{R}$ и любого набора векторов $\{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ пересечение множеств подуровней

$$\bigcap_{k=1}^n \{u \in E: F(u, v_k) \leq C\}$$

было связно или пусто. Следующий пример показывает, что в предположениях теоремы 1.1 последнее условие может не выполняться.

ПРИМЕР 1.1. Пусть

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{R}^2, & w(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2)^2, & f &= -w, \\ t &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, & g &= h = w_{[t]}, & C &= -4, \\ \bar{x} &= (0, 0), & n &= 2, & \bar{v}_1 &= (0, 1), & \bar{v}_2 &= (0, -1), \\ F(\bar{u}, \bar{v}) &= f(\bar{x} - \bar{u} + \bar{v}) + g(\bar{u}) - h(\bar{v}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\bar{u}, \bar{v}_1) &= 2(u_1^2 + u_2^2)^2 - (u_1^2 + (u_2 - 1)^2)^2 - 2, \\ F(\bar{u}, \bar{v}_2) &= 2(u_1^2 + u_2^2)^2 - (u_1^2 + (u_2 + 1)^2)^2 - 2, \end{aligned}$$

где $\bar{u} = (u_1, u_2)$. Обозначим $U_k = \{\bar{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2: F(\bar{u}, \bar{v}_k) \leq C\}$, $k = 1, 2$. Покажем, что

$$u_2 \leq 0 \quad \forall (u_1, u_2) \in U_1. \quad (1.2)$$

Предположим противное: существует точка $\bar{u}^0 = (u_1^0, u_2^0) \in U_1$ такая, что $u_2^0 > 0$. Поскольку

$$\min_{u_1 \in \mathbb{R}} (2(u_1^2 + u_2^2)^2 - (u_1^2 + (u_2 - 1)^2)^2) = \begin{cases} -2(1 - 2u_2)^2, & u_2 \in (-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1), \\ 2u_2^4 - (1 - u_2)^4, & u_2 \notin (-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1), \end{cases}$$

то, учитывая неравенство $u_2^0 > 0$, получаем

$$\min_{u_1 \in \mathbb{R}} (2(u_1^2 + (u_2^0)^2)^2 - (u_1^2 + (u_2^0 - 1)^2)^2) > -2,$$

поэтому

$$F(\bar{u}^0, \bar{v}_1) = 2((u_1^0)^2 + (u_2^0)^2)^2 - ((u_1^0)^2 + (u_2^0 - 1)^2)^2 - 2 > -4 = C,$$

что противоречит включению $\bar{u}^0 \in U_1$. Полученное противоречие доказывает соотношение (1.2). Аналогично, $u_2 \geq 0$ для любой точки $(u_1, u_2) \in U_2$. Следовательно,

$$U_1 \cap U_2 \subset \{(u_1, 0): u_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Поэтому

$$U_1 \cap U_2 = \{(u_1, 0): 2u_1^4 - (u_1^2 + 1)^2 \leq -2\} = \{(1, 0); (-1, 0)\}.$$

Таким образом, множество $U_1 \cap U_2$ не пусто и не связно.

§ 2. Свойства сильно и слабо выпуклых функций

Через $\mathfrak{C}(E)$ обозначим множество выпуклых полунепрерывных снизу функций $w: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ таких, что $\text{dom } w \neq \emptyset$. Для заданной функции $w \in \mathfrak{C}(E)$ через $\text{SConv}(w)$, $\text{WConv}(w)$, $\text{WConc}(w)$ обозначим соответственно классы сильно выпуклых, слабо выпуклых и слабо вогнутых функций относительно функции w .

Через $\mathfrak{CB}(E)$ обозначим множество коэрцитивных функций $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого шара $B \subset E$ каждая функция $w \in \mathfrak{CB}(E)$ ограничена и равномерно выпукла на B .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если существует функция $w \in \mathfrak{CB}(E)$, то для любого числа $C > \inf_{x \in E} w(x)$ множество $\{x \in E: w(x) < C\}$ открыто, ограничено и равномерно выпукло. Отсюда следует, что в пространстве E можно ввести равномерно выпуклую норму, эквивалентную исходной. Следовательно, пространство E рефлексивно.

Через $\mathfrak{B}_R$ обозначим замкнутый шар радиуса R с центром в нуле: $\mathfrak{B}_R = \{x \in E: \|x\| \leq R\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Легко видеть, что если функция $f: \mathfrak{B}_R \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и ограничена, то она удовлетворяет условию Липшица на шаре $\mathfrak{B}_r$ при $r < R$. Отсюда следует, что любая функция $g \in \mathfrak{CB}(E)$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве.

Для любых функций $f, g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим *эписумму*, или, что то же самое, *инфимальную конволюцию*

$$(f \boxplus g)(x) = \inf_{u \in E: \begin{cases} f(x-u) < +\infty \\ g(u) < +\infty \end{cases}} (f(x-u) + g(u)),$$

и *эпиразность*

$$(f \boxminus g)(x) = \sup_{u \in E: \begin{cases} f(x+u) > -\infty \\ g(u) < +\infty \end{cases}} (f(x+u) - g(u)).$$

Инфимальную конволюцию ввел Дж. Моро в работе [7]. Эпиразность предложил рассматривать Е. С. Половинкин в работе [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Эписумму и эпиразность функций можно представить соответственно через сумму и разность Минковского надграфиков (эпиграфов) этих функций [8, предложения 10.1, 10.2]. С этим обстоятельством связано название этих операций.

Условимся, что в выражениях, не содержащих скобок, операции эписложения и эпивычитания выполняются слева направо.

Непосредственно из определений получаем следующие свойства эпиопераций:

- (i) $f \boxplus g = g \boxplus f$;
- (ii) $f \boxplus (g \boxplus h) = f \boxplus g \boxplus h$;
- (iii) $f \boxminus (g \boxplus h) = f \boxminus g \boxminus h$;
- (iv) $f \boxplus g \boxminus g \leq f \leq f \boxminus g \boxplus g$;
- (v) $f \boxplus g \boxminus h \leq f \boxminus h \boxplus g$;
- (vi) если $f_1 \leq f_2$, $g_1 \leq g_2$, то $f_1 \boxplus g_1 \leq f_2 \boxplus g_2$, $f_1 \boxminus g_2 \leq f_2 \boxminus g_1$;
- (vii) $f \boxminus g \boxplus g \boxminus g = f \boxminus g$, $f \boxplus g \boxminus g \boxplus g = f \boxplus g$;
- (viii) если $s > 0$, $t > 0$, то $(f_{[t]})_{[s]} = f_{[ts]}$, $(f \boxplus g)_{[t]} = f_{[t]} \boxplus g_{[t]}$, $(f \boxminus g)_{[t]} = f_{[t]} \boxminus g_{[t]}$;
- (ix) если функция f выпукла, $s > 0$, $t > 0$, то $f_{[s]} \boxplus f_{[t]} = f_{[s+t]}$ и $f_{[s+t]} \boxminus f_{[s]} = f_{[t]}$.

Используя свойства (vii) и (iv), получаем следующие критерии сильной и слабой выпуклости.

ЛЕММА 2.1. Пусть $w \in \mathfrak{C}(E)$. Тогда:

(i) для любой функции $f \in \mathfrak{C}(E)$

$$\begin{aligned} f \in \text{SConv}(w) &\Leftrightarrow (\exists g: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mid f \boxplus g = w) \\ &\Leftrightarrow w \boxminus f \boxplus f = w \Leftrightarrow w \boxminus f \boxplus f \leq w; \end{aligned}$$

(ii) для любой функции $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такой, что $\text{dom } f \neq \emptyset$, имеем

$$\begin{aligned} f \in \text{WConv}(w) &\Leftrightarrow (\exists g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid g \boxminus w = f) \\ &\Leftrightarrow f \boxplus w \boxminus w = f \Leftrightarrow f \boxplus w \boxminus w \geq f; \end{aligned}$$

(iii) для любой функции $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такой, что $\text{dom } f \neq \emptyset$, имеем

$$\begin{aligned} f \in \text{WConc}(w) &\Leftrightarrow (\exists g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid g \boxplus w = f) \\ &\Leftrightarrow f \boxminus w \boxplus w = f \Leftrightarrow f \boxminus w \boxplus w \leq f. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.2. Для любой функции $w \in \mathfrak{C}(E)$ справедливо включение

$$w \in \text{SConv}(w) \cap \text{WConv}(w) \cap \text{WConc}(w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ +\infty, & x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку $w \boxplus g = w$ и $w_{[2]} \boxminus w = w$ согласно свойству (ix), в силу леммы 2.1 получаем доказываемое включение.

Из леммы 2.1 вытекают следующие две леммы.

ЛЕММА 2.3. Пусть $w \in \mathfrak{C}(E)$, $g \in \text{SConv}(w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{SConv}(g) &\subset \text{SConv}(w), & \text{WConv}(w) &\subset \text{WConv}(g), \\ \text{WConc}(w) &\subset \text{WConc}(g). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.4. Пусть заданы функции $w \in \mathfrak{C}(E)$ и $f, h: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда:

- (i) если $f \in \text{WConv}(w)$, $\text{dom}(f \boxminus h) \neq \emptyset$, то $f \boxminus h \in \text{WConv}(w)$;
- (ii) если $f \in \text{WConc}(w)$, $\text{dom}(f \boxplus h) \neq \emptyset$, то $f \boxplus h \in \text{WConc}(w)$.

ЛЕММА 2.5. Пусть заданы числа $T > t > 0$ и функция $w \in \mathfrak{C}(E)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{SConv}(w_{[t]}) &\subset \text{SConv}(w_{[T]}), & \text{WConv}(w_{[T]}) &\subset \text{WConv}(w_{[t]}), \\ \text{WConc}(w_{[T]}) &\subset \text{WConc}(w_{[t]}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства (ix) эпиопераций справедливо включение $w_{[t]} \in \text{SConv}(w_{[T]})$. Применяя лемму 2.3, получаем доказываемые включения.

ЛЕММА 2.6. Пусть заданы число $t > 0$ и функция $w \in \mathfrak{C}(E)$. Тогда:

- (i) если $f \in \text{SConv}(w)$, то $f_{[t]} \in \text{SConv}(w_{[t]})$;
- (ii) если $f \in \text{WConv}(w)$, то $f_{[t]} \in \text{WConv}(w_{[t]})$;
- (iii) если $f \in \text{WConc}(w)$, то $f_{[t]} \in \text{WConc}(w_{[t]})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении леммы 2.1 и свойства (viii) эпипераций.

Известно [2, теорема 2.3.1, (5)], что надграфик эписуммы двух функций с точностью до замыкания совпадает с суммой Минковского надграфиков этих функций. Поэтому согласно лемме 2.1 сильная выпуклость функции f относительно функции w означает, что надграфик функции f является слагаемым (в смысле суммы Минковского) надграфика функции w .

Приведем пример сильно выпуклых функций в произвольном банаховом пространстве.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная четная выпуклая функция, E – произвольное банахово пространство, $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} w(x) &= \varphi(\|x\|), & f(x) &= \begin{cases} \varphi(\|x\|), & \|x\| \leq \alpha, \\ +\infty, & \|x\| > \alpha, \end{cases} \\ g(x) &= \varphi(\|x\| + \alpha) - \varphi(\alpha) \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Тогда $f \boxplus g = w$. Поэтому функции f и g сильно выпуклы относительно функции w .

Из теоремы отделимости вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2.7. Пусть заданы функции $f, w \in \mathfrak{C}(E)$ и функция w коэрцитивна. Тогда $f \in W\text{Conv}(w)$.

ЛЕММА 2.8. Пусть $w \in \mathfrak{C}(E)$. Для функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ включение $f \in W\text{Conv}(w)$ эквивалентно условию

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in \text{dom } w: \quad \forall u \in E \quad f(x+u) - f(x) \geq -w(y-u) + w(y) - \varepsilon. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения эписуммы условие (2.1) эквивалентно соотношению

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in \text{dom } w: \quad f(x) + w(y) \leq (f \boxplus w)(x+y) + \varepsilon,$$

то есть

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq \sup_{y \in \text{dom } w} ((f \boxplus w)(x+y) - w(y)) = (f \boxplus w \boxminus w)(x).$$

Применяя лемму 2.1(ii), получаем доказываемое утверждение.

Лемма 2.8 показывает, что геометрически слабая выпуклость функции f относительно функции w означает возможность “подстыковать” снизу к любой точке графика функции f сдвиг графика функции $x \mapsto -w(-x)$ с любой заданной точностью ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из леммы 2.8 следует, что если заданы функции $w \in \mathfrak{C}(E)$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\forall x \in E \quad \exists y \in \text{dom } w: \quad \forall u \in E \quad f(x+u) - f(x) \geq -w(y-u) + w(y), \quad (2.2)$$

то $f \in \text{WConv}(w)$. Соотношение (2.2) можно переписать в виде

$$\forall x \in E \quad \exists y \in \text{dom } w: (f \boxplus w)(x + y) = f(x) + w(y).$$

Из условия $f \in \text{WConv}(w)$, вообще говоря, не следует соотношение (2.2). Например, если $E = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $w(x) = \sqrt{1 + x^2}$, то $f \in \text{WConv}(w)$, однако соотношение (2.2) не выполнено.

В теореме 1.1 предполагается, что функция f одновременно слабо выпукла относительно функции $w_{[R]}$ и слабо вогнута относительно функции $w_{[T]}$. При этом согласно лемме 2.5 функция f будет слабо выпукла и слабо вогнута относительно функции $w_{[\min\{R, T\}]}$. Предложение 2.1 дает характеризацию класса функций, одновременно слабо выпуклых и слабо вогнутых относительно функции $w(x) = \frac{C}{2} \|x\|^2$ в гильбертовом пространстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [2, теорема 2.1.2]. Пусть E – гильбертово пространство, и пусть $C > 0$ и $w(x) = \frac{C}{2} \|x\|^2$ для любого $x \in E$. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит множеству $\text{WConv}(w) \cap \text{WConc}(w)$ тогда и только тогда, когда функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и производная Фреше функции f удовлетворяет условию Липшица с константой C .

Если функция f сильно выпукла (или слабо выпукла, или слабо вогнута) относительно функции $w_{[t]}$, то, учитывая лемму 2.5, число t можно назвать параметром сильной выпуклости (или слабой выпуклости, или слабой вогнутости) функции f относительно функции w . Следующая лемма показывает, что любой многочлен четвертой степени является с некоторыми параметрами, зависящими от этого многочлена, одновременно слабо выпуклой и слабо вогнутой функцией относительно функции $w(x) = x^4 + 2x^2$.

ЛЕММА 2.9. Пусть $w(x) = x^4 + 2x^2$, $f(x)$ – произвольный многочлен четвертой степени, $x \in \mathbb{R}$. Тогда существуют числа $s, t > 0$ такие, что $f \in \text{WConv}(w_{[s]}) \cap \text{WConc}(w_{[t]})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_4 \neq 0$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} (2|a_4 x^3| - |3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1|) = +\infty$, существует число $x_0 > 0$ такое, что

$$2|a_4 x^3| \geq |3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1| + 8 \quad \forall x \in \mathbb{R}: |x| \geq x_0. \quad (2.3)$$

Определим число $C > 0$ так, что

$$a_4(u^2 + 4xu + 6x^2) + a_3(u + 3x) + a_2 \leq C(u^2 + x^2 + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Определим числа

$$\tau = \max\{(5C)^{1/3}, C(x_0^2 + 1), 4Ca_4^{-2/3}\}, \quad t = \frac{1}{\tau}. \quad (2.5)$$

Зафиксируем произвольное число x . Определим число y из равенства

$$f'(x) = w'_{[t]}(y). \quad (2.6)$$

Поскольку $w_{[t]}(y) = \tau^3 y^4 + 2\tau y^2$, $w'_{[t]}(y) = 4(\tau^3 y^3 + \tau y)$, $w''_{[t]}(y) \geq 4\tau > 0$, равенство (2.6) определяет единственное число y . Покажем, что

$$C(u^2 + x^2 + 1) \leq \tau^3 \left(\frac{u^2}{5} + y^2 \right) + 2\tau \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Если $|x| \leq x_0$, то в силу первого из равенств (2.5) имеем $C \leq \frac{\tau^3}{5}$ и $C(x^2 + 1) \leq 2\tau$, что доказывает неравенство (2.7) в этом случае. Рассмотрим случай $|x| > x_0$. Из равенства (2.6) получаем

$$4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 = 4\tau y(\tau^2 y^2 + 1). \quad (2.8)$$

В силу соотношения (2.3) имеем $|4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1| \geq 2|a_4 x^3| \geq 8$. Поэтому $4\tau|y|(\tau^2 y^2 + 1) \geq 2|a_4 x^3| \geq 8$. Следовательно, $\tau|y| \geq 1$, а значит, $8\tau^3|y|^3 \geq 4\tau|y|(\tau^2 y^2 + 1) \geq 2|a_4 x^3|$, $\tau^3 y^2 \geq \frac{\tau}{4} a_4^{2/3} x^2$. Используя первое из равенств (2.5), получаем $Cx^2 \leq \tau^3 y^2$, $C \leq \frac{\tau^3}{5}$ и $C \leq 2\tau$. Отсюда следует выполнение неравенства (2.7). Из неравенств (2.4), (2.7) получаем

$$a_4(u^2 + 4xu + 6x^2) + a_3(u + 3x) + a_2 \leq \tau^3 \left(\frac{u^2}{5} + y^2 \right) + 2\tau \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Поэтому в силу соотношений $\frac{4}{5}u^2 + 4yu + 5y^2 = 5\left(y + \frac{2u}{5}\right)^2 \geq 0$ имеем

$$a_4(u^2 + 4xu + 6x^2) + a_3(u + 3x) + a_2 \leq \tau^3(u^2 + 4yu + 6y^2) + 2\tau \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_4(u^4 + 4xu^3 + 6x^2u^2) + a_3(u^3 + 3xu^2) + a_2u^2 \\ \leq \tau^3(u^4 + 4yu^3 + 6y^2u^2) + 2\tau u^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (2.8) для любого $u \in \mathbb{R}$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} a_4(u^4 + 4xu^3 + 6x^2u^2 + 4x^3u) + a_3(u^3 + 3xu^2 + 3x^2u) + a_2(u^2 + 2xu) + a_1u \\ \leq \tau^3(u^4 + 4yu^3 + 6y^2u^2 + 4y^3u) + 2\tau(u^2 + 2yu), \end{aligned}$$

то есть

$$f(x + u) - f(x) \leq w_{[t]}(y + u) - w_{[t]}(y) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$f(x) - w_{[t]}(y) = \max_{u \in \mathbb{R}} (f(x + u) - w_{[t]}(y + u)) = (f \boxminus w_{[t]})(x - y).$$

Поэтому $f(x) = (f \boxminus w_{[t]})(x - y) + w_{[t]}(y) \geq (f \boxminus w_{[t]} \boxplus w_{[t]})(x)$. Отсюда в силу леммы 2.1, (iii) получаем включение $f \in \text{WConc}(w_{[t]})$. Существование числа $s > 0$ такого, что $f \in \text{WConc}(w_{[s]})$, доказывается аналогично. Лемма доказана.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о сущестственности различных предположений теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Предположение о коэрцитивности функции w в теореме 1.1 существенно. Действительно, рассмотрим функции $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ и $f(x) = x$, заданные на пространстве $E = \mathbb{R}$. Поскольку $f \boxplus w = f \boxminus w = f$, то $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w)$. Положим $g = h = w_{[1/2]}$. Тогда выполнены все условия теоремы 1.1, кроме коэрцитивности функции w , но для любого $x \in \mathbb{R}$ функция (1.1) не имеет седловой точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Предположение, принятое в теореме 1.1, о том, что функция w равномерно выпукла на любом ограниченном множестве, существенно. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{R}^2, & B &= \{(x_1, x_2): |x_1| + |x_2| \leq 3, |x_1| \leq 2\}, \\ \tilde{w}(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in B, \\ +\infty, & (x_1, x_2) \notin B, \end{cases} \\ \tilde{w}(x_1, x_2) &= \left(1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2, & w &= \tilde{w} \boxplus \tilde{w}, \\ s(t) &= \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t, & t \in (0, 1), \\ 1, & t > 1, \end{cases} & f(x_1, x_2) &= s(|x_1| - |x_2| + 2). \end{aligned}$$

Тогда функция $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, коэрцитивна и ограничена на любом ограниченном множестве. Поскольку

$$\begin{aligned} (f \boxplus w)(x_1, x_2) &= (f \boxplus \tilde{w})(x_1, x_2) = s(|x_1| - |x_2| - 1), \\ (f \boxminus w)(x_1, x_2) &= (f \boxminus \tilde{w})(x_1, x_2) = s(|x_1| - |x_2| + 5), \\ f \boxplus w \boxminus w &= f \boxminus w \boxplus w = f, \end{aligned}$$

то $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w)$. Пусть $g = w_{[2/3]}$, $h = w_{[1/3]}$. Тогда согласно лемме 2.2 имеем $g \in S\text{Conv}(w_{[2/3]})$, $h \in S\text{Conv}(w_{[1/3]})$. Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} (f \boxplus h \boxplus g)(x_1, x_2) &= (f \boxplus w_{[1/3]})(x_1, x_2) = s(|x_1| - |x_2| + 1), \\ (f \boxplus g)(x_1, x_2) &= s(|x_1| - |x_2|), \\ (f \boxplus g \boxminus h)(x_1, x_2) &= s\left(\min\left\{|x_1| - |x_2| + 1, |x_1| + \frac{2}{3}\right\}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(f \boxplus g \boxminus h)(0, 0) = \frac{2}{3} < 1 = (f \boxminus h \boxplus g)(0, 0).$$

Поэтому для функции $F(u, v) = f(v - u) + g(u) - h(v)$ имеет место неравенство

$$\sup_{v \in E} \inf_{u \in E} F(u, v) < \inf_{u \in E} \sup_{v \in E} F(u, v).$$

Следовательно, седловая точка функции $F(u, v)$ не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Строгие неравенства $R > r$, $T > t$ в предположениях теоремы 1.1 существенны. Пусть, например, $E = \mathbb{R}$,

$$w(x) = f(x) = h(x) = x^2, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ +\infty, & x \neq 0, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $f \in \text{WConv}(w) \cap \text{WConc}(w)$, $g \in \text{SConv}(w)$, $h \in \text{SConv}(w)$. Однако функция

$$F(u, v) = f(x - u + v) + g(u) - h(v) = \begin{cases} x^2 + 2xv, & u = 0, \\ +\infty, & u \neq 0, \end{cases}$$

не имеет седловой точки при $x \neq 0$.

§ 3. Вспомогательные результаты

Через $\langle p, x \rangle$ обозначим значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$. Напомним, что *субдифференциалом* функции $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке $x_0 \in \text{dom } f$ называется множество

$$\partial f(x_0) = \{p \in E^*: f(x) - f(x_0) \geq \langle p, x - x_0 \rangle \forall x \in E\}.$$

Непосредственно из определений легко получить следующие леммы.

ЛЕММА 3.1. Для любых функций $g, h: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, векторов $a \in \text{dom } g$, $b \in \text{dom } h$ и функционала $p \in E^*$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $p \in \partial g(a) \cap \partial h(b)$;
- (ii) $(g \boxplus h)(a + b) = g(a) + h(b)$ и $p \in \partial(g \boxplus h)(a + b)$.

ЛЕММА 3.2. Для любых функций $f, g, h: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и векторов $x \in E$, $y \in \text{dom}(f \boxplus g)$ справедливо неравенство

$$(f \boxplus h)(x) - (f \boxplus g)(y) \leq (h \boxplus g)(x - y).$$

ЛЕММА 3.3. Пусть заданы функции $g, h \in \mathfrak{C}(E)$, одна из которых коэрцитивна. Тогда $g \boxplus h \in \mathfrak{C}(E)$ и

$$\forall x \in \text{dom}(g \boxplus h) \exists y \in E: (g \boxplus h)(x) = g(y) + h(y - x).$$

ЛЕММА 3.4. Пусть заданы функции $g, h \in \mathfrak{C}(E)$. Функция $g \boxplus h$ коэрцитивна тогда и только тогда, когда обе функции g и h коэрцитивны.

ЛЕММА 3.5. Пусть функция $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла, коэрцитивна и ограничена на любом ограниченном множестве; последовательность $\{y_k\} \subset E$ ограничена. Пусть заданы последовательность $\{x_k\} \subset E$ и число $\lambda \in (0, 1)$ такие, что последовательность $\{w_{[\lambda]}(x_k) - w(x_k + y_k)\}$ ограничена сверху. Тогда последовательность $\{x_k\}$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последовательность $\{x_k\}$ неограничена. Выделяя подпоследовательность, будем предполагать, не теряя общности, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = +\infty$ и $\|x_k\| > 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Для любого индекса

$k \in \mathbb{N}$ определим число $\lambda_k = \lambda(1 - \frac{1}{\|x_k\|})$ и вектор $z_k = \frac{1}{1-\lambda_k}(\frac{x_k}{\|x_k\|} + y_k)$. Поскольку $\lambda_k \in (0, 1)$ и $x_k + y_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}x_k + (1 - \lambda_k)z_k$, то в силу выпуклости функции w имеем

$$w(x_k + y_k) \leq \lambda_k w\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) + (1 - \lambda_k)w(z_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$w_{[\lambda]}(x_k) - w(x_k + y_k) \geq \frac{\lambda}{\|x_k\|} w\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) - (1 - \lambda_k)w(z_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

В силу коэрцитивности функции w справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\|x_k\|} w\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) = +\infty.$$

Поскольку последовательность $\{z_k\}$ ограничена, а функция w ограничена на любом ограниченном множестве, последовательность $\{(1 - \lambda_k)w(z_k)\}$ ограничена. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} (w_{[\lambda]}(x_k) - w(x_k + y_k)) = +\infty$, что противоречит условиям леммы.

ЛЕММА 3.6. Пусть заданы положительные числа λ, μ , а также функции $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $g \in \text{SConv}(w_{[\lambda]})$ и векторы $a, b \in E$ такие, что $(g \boxplus w_{[\mu]})(a + \mu b) = g(a) + w_{[\mu]}(\mu b)$. Тогда $(w_{[\lambda]} \boxminus g)(\lambda b - a) = w_{[\lambda]}(\lambda b) - g(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $g \boxplus w_{[\mu]}$ выпукла и ограничена на любом ограниченном множестве, существует функционал $p \in \partial(g \boxplus w_{[\mu]})(a + \mu b)$. Отсюда и из равенства $(g \boxplus w_{[\mu]})(a + \mu b) = g(a) + w_{[\mu]}(\mu b)$ по лемме 3.1 следует, что $p \in \partial g(a)$ и $p \in \partial w_{[\mu]}(\mu b) = \partial w(b)$. Обозначим $h = w_{[\lambda]} \boxminus g$. Тогда в силу включения $g \in \text{SConv}(w_{[\lambda]})$ имеем $w_{[\lambda]} = g \boxplus h$. В силу леммы 3.4 функции g и h коэрцитивны. Согласно лемме 3.3 существует вектор $a_1 \in E$ такой, что $w_{[\lambda]}(\lambda b) = g(a_1) + h(\lambda b - a_1)$. Отсюда и из включения $p \in \partial w(b) = \partial w_{[\lambda]}(\lambda b)$ в силу леммы 3.1 получаем $p \in \partial g(a_1) \cap \partial h(\lambda b - a_1)$. Поскольку $p \in \partial g(a) \cap \partial h(\lambda b - a_1)$, то, применяя лемму 3.1 в другую сторону, имеем $p \in \partial(g \boxplus h)(a + \lambda b - a_1) = \partial w_{[\lambda]}(a + \lambda b - a_1)$. Отсюда и из включения $p \in \partial w_{[\lambda]}(\lambda b)$ в силу строгой выпуклости функции $w_{[\lambda]}$ имеем $a = a_1$. Следовательно, $w_{[\lambda]}(\lambda b) = g(a) + h(\lambda b - a) = g(a) + (w_{[\lambda]} \boxminus g)(\lambda b - a)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.7. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, функция $g \in \mathfrak{C}(E)$ ограничена снизу. Пусть заданы ограниченная последовательность $\{x_k\} \subset E$ и последовательности $\{a_k\} \subset E$, $\{a'_k\} \subset E$ такие, что

$$\max\{g(x_k - a_k) + w(a_k), g(x_k - a'_k) + w(a'_k)\} \leq (g \boxplus w)(x_k) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - a'_k\| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем вектор $y_0 \in \text{dom } g$. Поскольку согласно определению эписуммы для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $(g \boxplus w)(x_k) \leq g(y_0) + w(x_k - y_0)$ и функция w ограничена на любом ограниченном множестве, последовательность $\{(g \boxplus w)(x_k)\}$ ограничена сверху. Отсюда, из

соотношения (3.1) и ограниченности функции g снизу следует ограниченность сверху последовательностей $\{w(a_k)\}$ и $\{w(a'_k)\}$. Поэтому, используя коэрцитивность функции w , получаем ограниченность последовательностей $\{a_k\}$ и $\{a'_k\}$.

В силу выпуклости функции g из соотношения (3.1) следует, что

$$g\left(x_k - \frac{a_k + a'_k}{2}\right) + \frac{w(a_k) + w(a'_k)}{2} \leq (g \boxplus w)(x_k) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому согласно определению эписуммы имеем

$$\frac{w(a_k) + w(a'_k)}{2} \leq w\left(\frac{a_k + a'_k}{2}\right) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу ограниченности последовательностей $\{a_k\}$, $\{a'_k\}$ и равномерной выпуклости функции w на любом ограниченном множестве следует доказываемое утверждение.

ЛЕММА 3.8. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $\mu > 0$, $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$, и пусть заданы последовательности $\{x_k\} \subset E$, $\{a_k\} \subset E$ и $\{b_k\} \subset E$ такие, что

$$f(x_k) + w(a_k) \leq (f \boxplus w)(x_k + a_k) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

$$f(x_k) - w_{[\mu]}(\mu b_k) \geq (f \boxminus w_{[\mu]})(x_k - \mu b_k) - \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Пусть последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Тогда последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ также ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{dom}(f \boxplus w) = \emptyset$, то $\text{dom}(f \boxplus w \boxminus w) = \emptyset$, что противоречит включению $f \in W\text{Conv}(w)$. Следовательно, существует вектор $x_0 \in \text{dom}(f \boxplus w)$. Поэтому для любого вектора $x \in E$ справедливы неравенства $f(x) + w(x_0 - x) \geq (f \boxplus w)(x_0) > -\infty$. Отсюда и из включения $w \in \mathfrak{CB}(E)$ следует, что функция f ограничена снизу на любом ограниченном множестве. Аналогично, используя включение $f \in W\text{Conc}(w_{[\mu]})$, получаем ограниченность сверху функции f на любом ограниченном множестве.

Из соотношений (3.2), (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} & w(a_k) + w_{[\mu]}(\mu b_n) + f(x_k) - f(x_n) \\ & \leq (f \boxplus w)(x_k + a_k) - (f \boxminus w_{[\mu]})(x_n - \mu b_n) + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу леммы 3.2 и свойства (ix) эпиопераций имеем

$$w(a_k) + w_{[\mu]}(\mu b_n) + f(x_k) - f(x_n) \leq w_{[1+\mu]}(x_k - x_n + a_k + \mu b_n) + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

В силу ограниченности последовательности $\{x_k\}$ и ограниченности функции f на любом ограниченном множестве получаем, что последовательности $\{w(a_k) - w_{[1+\mu]}(x_k - x_1 + a_k + \mu b_1)\}$ и $\{w_{[\mu]}(\mu b_n) - w_{[1+\mu]}(x_1 - x_n + a_1 + \mu b_n)\}$ ограничены сверху. Применяя лемму 3.5, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 3.9. Пусть $w \in \mathfrak{WB}(E)$, $\mu > 0$, $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$. Тогда для любого вектора $x_0 \in E$ существует вектор $\hat{a}(x_0) \in E$, удовлетворяющий равенствам

$$(f \boxplus w)(x_0 + \hat{a}(x_0)) = f(x_0) + w(\hat{a}(x_0)), \quad (3.4)$$

$$(f \boxminus w_{[\mu]})(x_0 - \mu \hat{a}(x_0)) = f(x_0) - w_{[\mu]}(\mu \hat{a}(x_0)). \quad (3.5)$$

Кроме того, функция f на любом ограниченном множестве удовлетворяет условию Липшица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный вектор $x_0 \in E$. Поскольку $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$, то $f \boxplus w \boxminus w = f$ и $f \boxminus w_{[\mu]} \boxplus w_{[\mu]} = f$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют векторы $a_k, b_k \in E$ такие, что

$$f(x_0) + w(a_k) \leq (f \boxplus w)(x_0 + a_k) + \frac{1}{k}, \quad (3.6)$$

$$f(x_0) - w_{[\mu]}(\mu b_k) \geq (f \boxminus w_{[\mu]})(x_0 - \mu b_k) - \frac{1}{k}. \quad (3.7)$$

Применяя лемму 3.2 и свойство (ix) эпиопераций, получаем

$$w(a_k) + w_{[\mu]}(\mu b_n) \leq w_{[1+\mu]}(a_k + \mu b_n) + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \left(w(a_k) + \mu w(b_n) - (1 + \mu)w\left(\frac{a_k + \mu b_n}{1 + \mu}\right) \right) \leq 0.$$

В силу леммы 3.8 последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ ограничены. Отсюда из равномерной выпуклости функции w на любом ограниченном множестве следует, что

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|a_k - b_n\| = 0. \quad (3.8)$$

Поэтому последовательности $\{a_k\}$, $\{b_n\}$ фундаментальны, а значит, сходятся. В силу соотношения (3.8) пределы этих последовательностей совпадают. Обозначим $\hat{a}(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Из неравенств (3.6), (3.7) имеем

$$\begin{aligned} w_{[\mu]}(\mu b_k) - w_{[\mu]}(x + \mu b_k - x_0) - \frac{1}{k} &\leq f(x_0) - f(x) \leq w(x_0 + a_k - x) - w(a_k) + \frac{1}{k} \\ &\forall x \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и используя непрерывность функции w , получаем

$$\begin{aligned} w_{[\mu]}(\mu \hat{a}(x_0)) - w_{[\mu]}(x + \mu \hat{a}(x_0) - x_0) &\leq f(x_0) - f(x) \\ &\leq w(x_0 + \hat{a}(x_0) - x) - w(\hat{a}(x_0)) \quad \forall x \in E. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда по определению эпиопераций получаем, что вектор $\hat{a}(x_0)$ удовлетворяет равенствам (3.4), (3.5).

В силу леммы 3.8 функция $\hat{a}: E \rightarrow E$ ограничена на любом ограниченном множестве. Согласно замечанию 2.2 функция w на любом ограниченном множестве удовлетворяет условию Липшица. Отсюда и из неравенств (3.9) получаем, что функция f на любом ограниченном множестве удовлетворяет условию Липшица. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.10. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $\mu > 0$, $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$, $\lambda \in (0, 1)$, $g \in S\text{Conv}(w_{[\lambda]})$, $y_0 \in E$. Пусть последовательность $\{a_k\} \subset E$ удовлетворяет соотношению

$$f(y_0 - a_k) + g(a_k) \leq (f \boxplus g)(y_0) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Тогда последовательность $\{a_k\}$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $w_{[\lambda]} \boxplus g = w_{[\lambda]}$, существует вектор $z_0 \in \text{dom}(w_{[\lambda]} \boxplus g)$ и выполнено неравенство

$$w_{[\lambda]}(a_k + z_0) \leq g(a_k) + (w_{[\lambda]} \boxplus g)(z_0) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Так как $f \boxplus w \boxplus w = f$, то существует вектор $z_1 \in \text{dom}(f \boxplus w)$. По определению эписуммы

$$(f \boxplus w)(z_1) \leq f(y_0 - a_k) + w(z_1 - y_0 + a_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

$$(f \boxplus g)(y_0) \leq f(y_0 - a_1) + g(a_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Из неравенств (3.10)–(3.13) следует, что

$$\begin{aligned} & w_{[\lambda]}(a_k + z_0) - w(z_1 - y_0 + a_k) \\ & \leq (w_{[\lambda]} \boxplus g)(z_0) - (f \boxplus w)(z_1) + \frac{1}{k} + f(y_0 - a_1) + g(a_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность $\{w_{[\lambda]}(a_k + z_0) - w(z_1 - y_0 + a_k)\}$ ограничена сверху. Следовательно, в силу леммы 3.5 последовательность $\{a_k\}$ ограничена.

В силу леммы 3.9 для любого индекса $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $b_k \in E$ такой, что

$$(f \boxplus w)(y_0 - a_k + b_k) = f(y_0 - a_k) + w(b_k), \quad (3.14)$$

$$(f \boxplus w_{[\mu]})(y_0 - a_k - \mu b_k) = f(y_0 - a_k) - w_{[\mu]}(\mu b_k). \quad (3.15)$$

В силу леммы 3.2 для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & (f \boxplus w)(y_0 - a_k + b_k) - (f \boxplus w_{[\mu]})(y_0 - a_1 - \mu b_1) \\ & \leq (w \boxplus w_{[\mu]})(b_k - a_k + a_1 + \mu b_1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$(f \boxplus g)(y_0) - (f \boxplus w_{[\mu]})(y_0 - a_k - \mu b_k) \leq (g \boxplus w_{[\mu]})(\mu b_k + a_k). \quad (3.17)$$

Из соотношений (3.10), (3.15), (3.17) следует, что

$$w_{[\mu]}(\mu b_k) + g(a_k) \leq (w_{[\mu]} \boxplus g)(\mu b_k + a_k) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Соотношения (3.14)–(3.16) дают

$$f(y_0 - a_k) - f(y_0 - a_1) + w(b_k) + w_{[\mu]}(\mu b_1) \leq w_{[1+\mu]}(b_k - a_k + a_1 + \mu b_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Из ограниченности функции f на любом ограниченном множестве (лемма 3.9), ограниченности последовательности $\{a_k\}$ и соотношения (3.19) следует, что последовательность $\{w(b_k) - w_{[1+\mu]}(b_k - a_k + a_1 + \mu b_1)\}$ ограничена сверху. Поэтому согласно лемме 3.5 последовательность $\{b_k\}$ ограничена.

В силу леммы 3.3 для любого индекса $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $a'_k \in E$ такой, что

$$(w_{[\mu]} \boxplus g)(\mu b_k + a_k) = w_{[\mu]}(\mu b_k + a_k - a'_k) + g(a'_k). \quad (3.20)$$

Отсюда и из соотношения (3.18) в силу леммы 3.7 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - a'_k\| = 0. \quad (3.21)$$

Для любого индекса $k \in \mathbb{N}$ определим вектор

$$b'_k = b_k + \frac{a_k - a'_k}{\mu}. \quad (3.22)$$

В силу равенства (3.20) и леммы 3.6 имеем

$$w_{[\lambda]}(\lambda b'_k) = g(a'_k) + (w_{[\lambda]} \boxminus g)(\lambda b'_k - a'_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

Из соотношения (3.14) следует, что

$$f(y_0 - a_k) + w(b_n + a_k - a_n) \geq f(y_0 - a_n) + w(b_n) \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, согласно неравенствам (3.10) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ имеем

$$f(y_0 - a_n) + w(b_n) - w(b_n + a_k - a_n) + g(a_k) \leq (f \boxplus g)(y_0) + \frac{1}{k} \leq f(y_0 - a'_n) + g(a'_n) + \frac{1}{k},$$

поэтому

$$w(b_n) + g(a_k) \leq w(b_n + a_k - a_n) + g(a'_n) + \delta_{nk} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, \quad (3.24)$$

где $\delta_{nk} = \frac{1}{k} + f(y_0 - a'_n) - f(y_0 - a_n)$. Согласно лемме 3.9 функция f на любом ограниченном множестве удовлетворяет условию Липшица. Отсюда и из соотношения (3.21) следует, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \delta_{nk} = 0. \quad (3.25)$$

По определению эпизарности имеем

$$w_{[\lambda]}(\lambda b'_n + a_k - a'_n) \leq g(a_k) + (w_{[\lambda]} \boxminus g)(\lambda b'_n - a'_n) \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из соотношения (3.23) получаем

$$w_{[\lambda]}(\lambda b'_n + a_k - a'_n) - w_{[\lambda]}(\lambda b'_n) \leq g(a_k) - g(a'_n) \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, согласно неравенствам (3.24) имеем

$$w_{[\lambda]}(\lambda b'_n + a_k - a'_n) - w_{[\lambda]}(\lambda b'_n) \leq w(b_n + a_k - a_n) - w(b_n) + \delta_{nk} \quad \forall k, n \in \mathbb{N},$$

поэтому

$$\lambda w\left(b_n + \frac{a_k - a_n}{\lambda}\right) + (1 - \lambda)w(b_n) \leq w(b_n + a_k - a_n) + \delta'_{nk} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, \quad (3.26)$$

где

$$\delta'_{nk} = \delta_{nk} + w_{[\lambda]}(\lambda b_n + a_k - a_n) - w_{[\lambda]}(\lambda b'_n + a_k - a'_n) + w_{[\lambda]}(\lambda b'_n) - w_{[\lambda]}(\lambda b_n).$$

Поскольку согласно замечанию 2.2 функция w на любом ограниченном множестве удовлетворяет условию Липшица, из ограниченности последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и соотношений (3.21), (3.22), (3.25) получаем равенство

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \delta'_{nk} = 0.$$

Поэтому в силу соотношения (3.26), ограниченности последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ и равномерной выпуклости функции w на любом ограниченном множестве последовательность $\{a_k\}$ фундаментальна, а значит, сходится. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.11. Пусть $w \in \mathfrak{WB}(E)$, $\mu > 0$, $f \in \text{WConv}(w) \cap \text{WConc}(w_{[\mu]})$, $\lambda \in (0, 1)$, $g \in \text{SConv}(w_{[\lambda]})$, $y_0 \in E$. Тогда минимум $\min_{a \in E} (f(y - a) + g(a))$ достигается в единственной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \boxplus w \boxminus w = f$, то $\text{dom}(f \boxplus w) \neq \emptyset$. Отсюда и из равенств $f \boxplus w = f \boxplus w_{[\lambda]} \boxplus w_{[1-\lambda]}$, $\text{dom } w_{[1-\lambda]} = E$ имеем $(f \boxplus w_{[\lambda]})(y) > -\infty$ для любого $y \in E$. Следовательно, учитывая включение $g \in \text{SConv}(w_{[\lambda]})$, получаем, что $(f \boxplus g)(y_0) > -\infty$. Поэтому в силу определения эписуммы для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $a_k \in E$ такой, что

$$f(y_0 - a_k) + g(a_k) \leq (f \boxplus g)(y_0) + \frac{1}{k}. \quad (3.27)$$

В силу леммы 3.10 последовательность $\{a_k\}$ сходится. Введем обозначение: $a_* = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. Переходя к пределу в неравенстве (3.27) и используя непрерывность функции f и полунепрерывность снизу функции g , получаем неравенство

$$f(y_0 - a_*) + g(a_*) \leq (f \boxplus g)(y_0).$$

Если вектор $a \in E$ удовлетворяет неравенству $f(y_0 - a) + g(a) \leq (f \boxplus g)(y_0)$, то в силу сходимости последовательности

$$a'_k = \begin{cases} a_*, & k \text{ чётно,} \\ a, & k \text{ нечётно,} \end{cases}$$

получаем равенство $a = a_*$. Поэтому минимум $\min_{a \in E} (f(y - a) + g(a))$ достигается в единственной точке $a = a_*$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.12. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $\mu > 0$, $f \in \text{WConv}(w) \cap \text{WConc}(w_{[\mu]})$, $\lambda \in (0, 1)$, $g \in \text{SConv}(w_{[\lambda]})$. Тогда $f \boxplus g \in \text{WConv}(w_{[1-\lambda]})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $h = f \boxplus g$, $\psi = w \boxminus g$. Зафиксируем произвольный вектор $y_0 \in E$. В силу леммы 3.11 существуют векторы $a_0, x_0 \in E$ такие, что $x_0 + a_0 = y_0$ и

$$(f \boxplus g)(y_0) = f(x_0) + g(a_0). \quad (3.28)$$

Согласно лемме 3.9 существует вектор $b_0 \in E$, удовлетворяющий равенствам

$$(f \boxplus w)(x_0 + b_0) = f(x_0) + w(b_0), \quad (3.29)$$

$$(f \boxplus w_{[\mu]})(x_0 - \mu b_0) = f(x_0) - w_{[\mu]}(\mu b_0). \quad (3.30)$$

В силу леммы 2.5 справедливо включение $\text{SConv}(w_{[\lambda]}) \subset \text{SConv}(w)$. Поэтому $g \in \text{SConv}(w)$, а значит, $\psi \boxplus g = w$. Из соотношений (3.28) и (3.30) в силу леммы 3.2 и определения эписуммы получаем равенство

$$g(a_0) + w_{[\mu]}(\mu b_0) = (g \boxplus w_{[\mu]})(a_0 + \mu b_0).$$

Следовательно, согласно лемме 3.6 имеем $(w \boxminus g)(b_0 - a_0) = w(b_0) - g(a_0)$, т. е.

$$\psi(b_0 - a_0) = w(b_0) - g(a_0).$$

Отсюда и из равенств (3.29) и $f \boxplus w = f \boxplus g \boxplus \psi = h \boxplus \psi$ следует, что

$$(h \boxplus \psi)(x_0 + b_0) = f(x_0) + g(a_0) + \psi(b_0 - a_0).$$

Поэтому согласно равенствам $x_0 + a_0 = y_0$ и (3.28) имеем

$$(h \boxplus \psi)(y_0 + b_0 - a_0) = h(y_0) + \psi(b_0 - a_0).$$

Согласно замечанию 2.4 получаем включение

$$h \in \text{WConv}(\psi). \quad (3.31)$$

Поскольку $g \in \text{SConv}(w_{[\lambda]})$, функция $\eta = w_{[\lambda]} \boxminus g$ удовлетворяет равенству $w_{[\lambda]} = \eta \boxplus g$. Следовательно, $\psi = w \boxminus g = w_{[1-\lambda]} \boxplus \eta \boxplus g \boxminus g$. Так как $w_{[\lambda]} = \eta \boxplus g$, то согласно лемме 3.4 функция g коэрцитивна. Из леммы 3.3 следует, что $w_{[1-\lambda]} \boxplus \eta \in \mathfrak{CB}(E)$. В силу леммы 2.7 справедливо равенство $w_{[1-\lambda]} \boxplus \eta \boxplus g \boxminus g = w_{[1-\lambda]} \boxplus \eta$. Поэтому $\psi = w_{[1-\lambda]} \boxplus \eta$, а значит, $w_{[1-\lambda]} \in \text{SConv}(\psi)$. Отсюда и из леммы 2.3 следует, что $\text{WConv}(\psi) \subset \text{WConv}(w_{[1-\lambda]})$. Применяя включение (3.31), получаем включение $h \in \text{WConv}(w_{[1-\lambda]})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1 (исчисление параметров выпуклости функций). Пусть заданы положительные числа R, T, t и функции

$$w \in \mathfrak{CB}(E), \quad f \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]}), \quad h \in \text{SConv}(w_{[t]}).$$

Тогда:

- (i) если $t < R$, то $f \boxplus h \in \text{WConv}(w_{[R-t]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]})$;
- (ii) если $t < T$, то $f \boxplus h \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T-t]})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение (i). Пусть $t < R$. Включение $f \boxplus h \in \text{WConv}(w_{[R-t]})$ следует из леммы 3.12. Включение $f \boxplus h \in \text{WConc}(w_{[T]})$ следует из леммы 2.4,(ii).

Докажем утверждение (ii). Пусть $t < T$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}$, определяемую равенством $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ при любом $x \in E$. Тогда имеем включение $\tilde{f} \in \text{WConv}(w_{[T]}) \cap \text{WConc}(w_{[R]})$. В силу утверждения (i) справедливо включение $\tilde{f} \boxplus h \in \text{WConv}(w_{[T-t]}) \cap \text{WConc}(w_{[R]})$. Отсюда и из равенства $-(\tilde{f} \boxplus h)(-x) = (f \boxplus h)(x)$ следует утверждение (ii). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценки параметров выпуклости эписуммы и эпиразности функций, приведенные в теореме 3.1, неумлучшаемы. Это следует из свойства (ix) эпиопераций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Согласно теореме 3.1 параметр слабой выпуклости функции $f \boxplus h$ равен разности параметра слабой выпуклости функции f и параметра сильной выпуклости функции h . Однако при этом существенно, что функция f слабо вогнута с некоторым параметром. Следующий пример показывает, что из условий $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $f \in \text{WConv}(w_{[R]})$, $h \in \text{SConv}(w_{[t]})$, $0 < t < R$, не следует включение $f \boxplus h \in \text{WConv}(w_{[R-t]})$.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $E = \mathbb{R}^2$,

$$w(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2, \quad f(x_1, x_2) = -(x_1^2 + (|x_2| - 1)^2)^2, \\ h = w_{[1/2]}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad R = 1.$$

Тогда $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $h \in \text{SConv}(w_{[t]})$. Поскольку

$$(f \boxplus w)(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in \{(0, 1), (0, -1)\}, \\ -\infty, & (x_1, x_2) \notin \{(0, 1), (0, -1)\}, \end{cases} \quad f \boxplus w \boxplus w = f,$$

то $f \in \text{WConv}(w_{[R]})$, а поскольку $f \boxplus h \boxplus w_{[R-t]} \boxplus w_{[R-t]} = f \boxplus w \boxplus w_{[1/2]}$, то

$$(f \boxplus h \boxplus w_{[R-t]} \boxplus w_{[R-t]})(0, 0) = \max\{-w_{[1/2]}(0, -1), -w_{[1/2]}(0, 1)\} = -8.$$

С другой стороны,

$$(f \boxplus h)(0, 0) = \inf_{\substack{u_1 \in \mathbb{R} \\ u_2 \in \mathbb{R}}} (-(u_1^2 + (|u_2| - 1)^2)^2 + 8(u_1^2 + u_2^2)^2) = -\frac{8}{7} > -8.$$

Поэтому $f \boxplus h \boxplus w_{[R-t]} \boxplus w_{[R-t]} \neq f \boxplus h$, а значит, $f \boxplus h \notin \text{WConv}(w_{[R-t]})$.

§ 4. Доказательство теоремы о седловой точке

Пусть выполнены предположения теоремы 1.1. Выберем натуральное число n такое, что $\frac{t}{n} < R - r$. Для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ определим функцию $h_k = h_{[k/n]}$. Поскольку $h \in \text{SConv}(w_{[t]})$, то согласно лемме 2.6,(i) имеем включение $h_k \in \text{SConv}(w_{[kt/n]})$. Положим

$$h_0(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ +\infty, & x \neq 0. \end{cases}$$

Покажем, что для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ справедливо равенство

$$f \boxplus h_k \boxplus g = f \boxplus g \boxplus h_k. \quad (4.1)$$

При $k = 0$ равенство (4.1) справедливо. Пусть равенство (4.1) справедливо при $k = s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Покажем, что равенство (4.1) справедливо при $k = s+1$. В силу теоремы 3.1 имеем $f \boxplus h_{s+1} \boxplus g \in \text{WConv}(w_{[R-r]})$. Отсюда и из включений $h_1 \in \text{SConv}(w_{[t/n]}) \subset \text{SConv}(w_{[R-r]})$ в силу леммы 2.3 получаем включение $f \boxplus h_{s+1} \boxplus g \in \text{WConv}(h_1)$. Поэтому справедливо равенство

$$f \boxplus h_{s+1} \boxplus g \boxplus h_1 \boxplus h_1 = f \boxplus h_{s+1} \boxplus g,$$

а следовательно, равенство

$$f \boxplus h_{s+1} \boxplus h_1 \boxplus g \boxplus h_1 = f \boxplus h_{s+1} \boxplus g. \quad (4.2)$$

В силу теоремы 3.1 справедливо включение $f \boxplus h_s \in \text{WConv}(w_{[T-\frac{s}{n}t]})$. Отсюда и из включений $h_1 \in \text{SConv}(w_{[t/n]}) \subset \text{SConv}(w_{[T-\frac{s}{n}t]})$ согласно лемме 2.3 следует, что $f \boxplus h_s \in \text{WConv}(h_1)$, а значит, $f \boxplus h_s = f \boxplus h_s \boxplus h_1 \boxplus h_1 = f \boxplus h_{s+1} \boxplus h_1$. Отсюда и из равенства (4.2) получаем

$$f \boxplus h_s \boxplus g \boxplus h_1 = f \boxplus h_{s+1} \boxplus g.$$

Поэтому, используя равенство (4.1) при $k = s$, имеем

$$f \boxplus g \boxplus h_s \boxplus h_1 = f \boxplus h_{s+1} \boxplus g,$$

что доказывает равенство (4.1) при $k = s+1$. По индукции получаем, что равенство (4.1) справедливо для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. В частности, имеем $f \boxplus h_n \boxplus g = f \boxplus g \boxplus h_n$, т. е.

$$f \boxplus h \boxplus g = f \boxplus g \boxplus h. \quad (4.3)$$

Зафиксируем произвольный вектор $x \in E$. Поскольку согласно теореме 3.1 имеем $f \boxplus h \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConv}(w_{[T-t]})$, в силу леммы 3.11 существует вектор $u_* \in E$ такой, что

$$(f \boxplus h \boxplus g)(x) = (f \boxplus h)(x - u_*) + g(u_*). \quad (4.4)$$

Аналогично, существует вектор v_* такой, что

$$(f \boxplus g \boxplus h)(x) = (f \boxplus g)(x + v_*) - h(v_*). \quad (4.5)$$

Из равенств (4.3)–(4.5) следует, что

$$(f \boxplus h)(x - u_*) + g(u_*) = (f \boxplus g)(x + v_*) - h(v_*).$$

Поэтому по определению эпиопераций получаем

$$f(x - u_* + v) + g(u_*) - h(v) \leq f(x - u + v_*) + g(u) - h(v_*) \quad \forall u, v \in E.$$

Следовательно, пара (u_*, v_*) составляет седловую точку функции (1.1). В силу леммы 3.11 седловая точка этой функции единственна. Теорема 1.1 доказана.

§ 5. Непрерывная зависимость седловой точки от параметров

Будем говорить, что последовательность функций $f_k: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *сходится к функции* $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *в смысле* $\mathfrak{EB}$, $f_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f$, если для любой ограниченной последовательности векторов $x_k \in \text{dom } f_k$ найдется последовательность векторов $z_k \in \text{dom } f$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - z_k\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x_k) - f(z_k)| = 0, \quad (5.1)$$

и, кроме того, для любой ограниченной последовательности векторов $z_k \in \text{dom } f$ найдется последовательность векторов $x_k \in \text{dom } f_k$, для которой справедливы соотношения (5.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если на любом ограниченном множестве $B \subset E$ последовательность функций $f_k: E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно сходится к функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, то, как легко видеть, $f_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f$. При этом на всем пространстве E последовательность $\{f_k\}$ может сходиться неравномерно. Например, пусть $E = \mathbb{R}$, $f_k(x) = c_k x^2$, $f(x) = c x^2$, где числовая последовательность $\{c_k\}$ сходится к числу c . Тогда $f_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f$, но на всем пространстве $E = \mathbb{R}$ последовательность $\{f_k\}$ сходится неравномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если надграфики функций f_k сходятся в смысле метрики Хаусдорфа к надграфику функции f , то, как легко видеть, $f_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f$. При этом в фиксированной точке $x \in E$ сходимость $f_k(x) \rightarrow f(x)$ может не иметь места. Пусть, например,

$$E = \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[\frac{1}{k}, 1\right], \\ +\infty, & x \notin \left[\frac{1}{k}, 1\right], \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1], \\ +\infty, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Тогда $f_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f$, но $f_k(0) \nrightarrow f(0)$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $w \in \mathfrak{EB}(E)$, и пусть последовательность функций $g_k \in \text{SConv}(w)$ сходится в смысле $\mathfrak{EB}$ к функции $g_0 \in \text{SConv}(w)$. Тогда существует ограниченная последовательность векторов $\{z_k\} \subset E$ такая, что последовательность $\{(w \boxminus g_k)(z_k)\}$ ограничена сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого индекса $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим $\varphi_k = w \boxminus g_k$. Поскольку $g_k \in \text{SConv}(w)$, то $g_k \boxplus \varphi_k = w$ при всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как функция w коэрцитивна, то согласно лемме 3.4 функции g_k, φ_k коэрцитивны при всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому в силу выпуклости и полунепрерывности снизу этих функций существуют векторы $x_k, z_k \in E$ такие, что

$$g_k(x_k) = \min_{x \in E} g_k(x), \quad \varphi_k(z_k) = \min_{x \in E} \varphi_k(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Отсюда и из равенств $g_k \boxplus \varphi_k = w$ следует, что

$$g_k(x_k) + \varphi_k(z_k) = w(x_k + z_k) = \min_{x \in E} w(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (5.2)$$

Поэтому с учетом строгой выпуклости функции w получаем равенства

$$x_k + z_k = x_0 + z_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Поскольку $g_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} g_0$, существует последовательность $\{a_k\} \subset E$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x_0\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(a_k) - g_0(x_0)| = 0.$$

Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a_k\| = 0$. Предположим противное. Тогда, выделяя подпоследовательность, без потери общности будем считать, что справедливы неравенства $\|x_k - a_k\| \geq \varepsilon_0 > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. При всех $k \in \mathbb{N}$ определим

$$u_k = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\|x_k - a_k\|}\right) a_k + \frac{\varepsilon_0}{\|x_k - a_k\|} x_k.$$

Тогда $\|u_k - a_k\| = \varepsilon_0$ и в силу выпуклости функции g_k имеем

$$g_k(u_k) \leq \max\{g_k(a_k), g_k(x_k)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из соотношений $g_k(x_k) = \min_{x \in E} g_k(x) \leq g(a_k)$ следует, что $g_k(u_k) \leq g_k(a_k)$. Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена и $g_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} g_0$, существует последовательность $\{v_k\} \subset E$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u_k\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |g_0(v_k) - g_k(u_k)| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - x_0\| = \varepsilon_0, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} g_0(v_k) \leq g_0(x_0).$$

По определению эписуммы $(g_0 \boxplus \varphi_0)(v_k + z_0) \leq g_0(v_k) + \varphi_0(z_0)$. Следовательно, имеем $\limsup_{k \rightarrow \infty} w(v_k + z_0) \leq g_0(x_0) + \varphi_0(z_0)$. Используя равенства (5.2) при $k = 0$, получаем $\limsup_{k \rightarrow \infty} w(v_k + z_0) \leq w(x_0 + z_0) = \min_{x \in E} w(x)$, что вместе с соотношением $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - x_0\| = \varepsilon_0$ противоречит равномерной выпуклости функции w на любом ограниченном множестве. Полученное противоречие доказывает соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a_k\| = 0$. Отсюда и из соотношения $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - x_0\| = 0$ следует сходимость последовательности $\{x_k\}$.

Поскольку $g_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} g_0$ и функция g_0 ограничена снизу, последовательность $g_k(x_k)$ ограничена снизу. Отсюда и из равенств (5.2) следует ограниченность сверху последовательности $\{(w \boxplus g_k)(z_k)\} = \{\varphi_k(z_k)\}$. Из равенств (5.3) и ограниченности последовательности $\{x_k\}$ следует ограниченность последовательности $\{z_k\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $\mu > 0$, последовательность функций $f_k \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$ сходится в смысле $\mathfrak{CB}$ к функции $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$. Тогда существует ограниченная последовательность векторов $\{b_k\} \subset E$ такая, что последовательность $\{(f_k \boxplus w)(b_k)\}$ ограничена снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.9 для любого индекса $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $b_k \in E$ такой, что

$$(f_k \boxplus w)(b_k) = f_k(0) + w(b_k). \quad (5.4)$$

Предположим, что последовательность $\{b_k\}$ неограничена. Выделяя подпоследовательность, без потери общности будем считать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k\| = +\infty$ и $\|b_k\| > 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим вектор $u_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$. По определению эписуммы для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $(f_k \boxplus w)(b_k) \leq f_k(u_k) + w(b_k - u_k)$. Отсюда и из равенств (5.4) получаем

$$f_k(0) + w(b_k) \leq f_k(u_k) + w(b_k - u_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена, $f_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} f$ и согласно лемме 3.9 функция f ограничена на любом ограниченном множестве, последовательности $\{f_k(u_k)\}$ и $\{f_k(0)\}$ ограничены. Отсюда и из соотношения (5.5) следует, что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (w(b_k) - w(b_k - u_k)) < +\infty. \quad (5.6)$$

Используя соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k\| = +\infty$ и коэрцитивность функции w , получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{w(b_k) - w(0)}{\|b_k\|} = +\infty. \quad (5.7)$$

В силу выпуклости функции w имеем

$$w\left(b_k \left(1 - \frac{1}{\|b_k\|}\right)\right) \leq \left(1 - \frac{1}{\|b_k\|}\right) w(b_k) + \frac{1}{\|b_k\|} w(0) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\frac{w(b_k) - w(0)}{\|b_k\|} \leq w(b_k) - w(b_k - u_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из соотношения (5.7) получаем равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (w(b_k) - w(b_k - u_k)) = +\infty,$$

которое противоречит неравенству (5.6). Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности $\{b_k\}$. Из ограниченности последовательности $\{b_k\}$, равенств (5.4) и соотношения $f_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} f$ следует, что последовательность $\{(f_k \boxplus w)(b_k)\}$ ограничена. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $\mu > 0$, последовательность функций $f_k \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$ сходится в смысле $\mathfrak{CB}$ к функции $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$. Пусть $\lambda \in (0, 1)$ и последовательность функций $g_k \in S\text{Conv}(w_{[\lambda]})$ сходится в смысле $\mathfrak{CB}$ к функции $g \in S\text{Conv}(w_{[\lambda]})$. Пусть заданы последовательности $\{a_k\} \subset E$ и $\{y_k\} \subset E$ такие, что

$$f_k(y_k - a_k) + g_k(a_k) \leq (f_k \boxplus g_k)(y_k) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Тогда:

- (i) если последовательность $\{y_k\}$ ограничена, то последовательность $\{a_k\}$ также ограничена;
(ii) если последовательность $\{y_k\}$ сходится, то последовательность $\{a_k\}$ также сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть последовательность $\{y_k\}$ ограничена. Зафиксируем произвольный вектор $a_0 \in \text{dom } g$. Поскольку $g_k \xrightarrow[\mathfrak{E}\mathfrak{B}]{} g$, существует последовательность векторов $a'_k \in \text{dom } g_k$ таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a'_k - a_0\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(a'_k) - g(a_0)| = 0. \quad (5.9)$$

По определению эписуммы имеем

$$(f_k \boxplus g_k)(y_k) \leq f_k(y_k - a'_k) + g_k(a'_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из неравенств (5.8) следует, что

$$f_k(y_k - a_k) + g_k(a_k) \leq f_k(y_k - a'_k) + g_k(a'_k) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.10)$$

Поэтому, используя соотношения (5.9), $f_k \xrightarrow[\mathfrak{E}\mathfrak{B}]{} f$ и ограниченность функции f на любом ограниченном множестве (лемма 3.9), получаем ограниченность сверху последовательности $\{f_k(y_k - a_k) + g_k(a_k)\}$.

В силу лемм 5.1, 5.2 существуют ограниченные последовательности $\{z_k\}$, $\{b_k\} \subset E$ такие, что последовательность $\{(w_{[\lambda]} \boxplus g_k)(z_k)\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{(f_k \boxplus w)(b_k)\}$ ограничена снизу. По определению эписуммы и эпипазности имеем

$$\begin{aligned} (w_{[\lambda]} \boxplus g_k)(z_k) &\geq w_{[\lambda]}(z_k + a_k) - g_k(a_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ (f_k \boxplus w)(b_k) &\leq f_k(y_k - a_k) + w(b_k + a_k - y_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность $\{w_{[\lambda]}(z_k + a_k) - g_k(a_k)\}$ ограничена сверху, а последовательность $\{f_k(y_k - a_k) + w(b_k + a_k - y_k)\}$ ограничена снизу. Следовательно, последовательность $\{w_{[\lambda]}(z_k + a_k) - w(b_k + a_k - y_k) - f_k(y_k - a_k) - g_k(a_k)\}$ ограничена сверху. Отсюда, используя ограниченность сверху последовательности $\{f_k(y_k - a_k) + g_k(a_k)\}$, получаем, что последовательность $\{w_{[\lambda]}(z_k + a_k) - w(b_k + a_k - y_k)\}$ ограничена сверху. Применение леммы 3.5 и ограниченность последовательностей $\{y_k\}$, $\{z_k\}$, $\{b_k\}$ дает ограниченность последовательности $\{a_k\}$.

(ii) Пусть последовательность $\{y_k\}$ сходится к вектору y_0 . В силу леммы 3.11 существует вектор $a_0 \in E$ такой, что

$$f(y_0 - a_0) + g(a_0) = (f \boxplus g)(y_0). \quad (5.11)$$

Повторяя рассуждения из п. (i) для этого вектора a_0 , получаем последовательность векторов $a'_k \in \text{dom } g_k$, удовлетворяющую соотношениям (5.9), (5.10). Поскольку $g_k \xrightarrow[\mathfrak{E}\mathfrak{B}]{} g$, существует последовательность $\{a''_k\} \subset \text{dom } g$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a''_k - a_k\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |g(a''_k) - g_k(a_k)| = 0. \quad (5.12)$$

Для любого индекса $k \in \mathbb{N}$ определим число

$$\varepsilon_k = f(y_0 - a_k'') + g(a_k'') - f(y_0 - a_0) - g(a_0). \quad (5.13)$$

Из соотношений $f_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} f$, $\|a_k'' - a_k\| \rightarrow 0$, $\|a_k' - a_0\| \rightarrow 0$, $\|y_k - y_0\| \rightarrow 0$ и равномерной непрерывности функции f на любом ограниченном множестве (лемма 3.9) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(y_0 - a_k'') - f_k(y_k - a_k)| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f(y_0 - a_0) - f_k(y_k - a_k')| = 0.$$

Отсюда и из соотношений (5.9), (5.12), (5.13) получаем неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (f_k(y_k - a_k) + g_k(a_k) - f_k(y_k - a_k') - g_k(a_k')).$$

Поэтому согласно неравенству (5.10) имеем $\limsup_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Применяя соотношения (5.11), (5.13), получаем

$$f(y_0 - a_k'') + g(a_k'') \leq (f \boxplus g)(y_0) + \varepsilon_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу леммы 3.10 следует сходимость последовательности $\{a_k''\}$, а значит, и сходимость последовательности $\{a_k\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. Пусть $w \in \mathfrak{CB}(E)$, $\mu > 0$, и пусть последовательность функций $f_k \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$ сходится в смысле $\mathfrak{CB}$ к функции $f \in W\text{Conv}(w) \cap W\text{Conc}(w_{[\mu]})$. Пусть $\lambda \in (0, 1)$ и последовательность функций $g_k \in S\text{Conv}(w_{[\lambda]})$ сходится в смысле $\mathfrak{CB}$ к функции $g \in S\text{Conv}(w_{[\lambda]})$. Тогда последовательность $\{f_k \boxplus g_k\}$ сходится в смысле $\mathfrak{CB}$ к функции $f \boxplus g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана произвольная ограниченная последовательность $\{x_k\} \subset E$. Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(f_k \boxplus g_k)(x_k) - (f \boxplus g)(x_k)| = 0. \quad (5.14)$$

В силу леммы 3.11 для любого индекса $k \in \mathbb{N}$ существуют векторы $a_k, b_k \in E$ такие, что

$$(f \boxplus g)(x_k) = f(x_k - a_k) + g(a_k), \quad (5.15)$$

$$(f_k \boxplus g_k)(x_k) = f_k(x_k - b_k) + g_k(b_k). \quad (5.16)$$

Согласно лемме 5.3, (i) последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ ограничены. Поскольку $g_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} g$, существуют последовательности векторов $a_k' \in \text{dom } g_k$ и $b_k' \in \text{dom } g$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k' - a_k\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k' - b_k\| = 0, \quad (5.17)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(a_k') - g(a_k)| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |g(b_k') - g(b_k)| = 0. \quad (5.18)$$

Из соотношений $f_k \xrightarrow{\mathfrak{CB}} f$, (5.17) и равномерной непрерывности функции f на любом ограниченном множестве (лемма 3.9) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x_k - a_k') - f(x_k - a_k)| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k - b_k') - f(x_k - b_k)| = 0. \quad (5.19)$$

Поскольку по определению эписуммы выполняются неравенства

$$(f_k \boxplus g_k)(x_k) \leq f_k(x_k - a'_k) + g_k(a'_k) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

в силу соотношений (5.15), (5.18), (5.19) имеем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} ((f_k \boxplus g_k)(x_k) - (f \boxplus g)(x_k)) \leq 0. \quad (5.20)$$

С другой стороны, по определению эписуммы имеют место неравенства

$$(f \boxplus g)(x_k) \leq f(x_k - b'_k) + g(b'_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому согласно соотношениям (5.16), (5.18), (5.19) получаем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} ((f \boxplus g)(x_k) - (f_k \boxplus g_k)(x_k)) \leq 0.$$

Отсюда и из соотношения (5.20) следует равенство (5.14), из которого вытекает доказываемое утверждение.

ЛЕММА 5.5. Пусть $w \in \mathfrak{EB}(E)$, $R > 0$, $T > 0$, $t > 0$, последовательность функций $f_k \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]})$ сходится в смысле $\mathfrak{EB}$ к функции $f_0 \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]})$, а последовательность функций $g_k \in \text{SConv}(w_{[t]})$ сходится в смысле $\mathfrak{EB}$ к функции $g_0 \in \text{SConv}(w_{[t]})$. Тогда:

(i) если $t < R$, то $f_k \boxplus g_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f_0 \boxplus g_0$;

(ii) если $t < T$, то $f_k \boxminus g_k \xrightarrow{\mathfrak{EB}} f_0 \boxminus g_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из леммы 5.4. Докажем утверждение (ii). Для любого индекса $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим функцию $\tilde{f}_k(x) = -f_k(-x)$. Тогда $\tilde{f}_k \in \text{WConv}(w_{[T]}) \cap \text{WConc}(w_{[R]})$, $(f_k \boxminus g_k)(x) = -(\tilde{f}_k \boxplus g_k)(-x)$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Применяя (i), получаем (ii). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1 (непрерывная зависимость седловой точки от параметров). Пусть $w \in \mathfrak{EB}(E)$, $0 < r < R$, $0 < t < T$, последовательность функций $f_k \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]})$ сходится в смысле $\mathfrak{EB}$ к функции $f_0 \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]})$. Пусть последовательность $g_k \in \text{SConv}(w_{[r]})$ сходится в смысле $\mathfrak{EB}$ к функции $g_0 \in \text{SConv}(w_{[r]})$ и последовательность функций $h_k \in \text{SConv}(w_{[t]})$ сходится в смысле $\mathfrak{EB}$ к функции $h_0 \in \text{SConv}(w_{[t]})$. Пусть последовательность векторов $x_k \in E$ сходится по норме E к вектору $x_0 \in E$ и для любого индекса $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ пара векторов $(u_k, v_k) \in E \times E$ составляет седловую точку функции

$$F_k(u, v) = f_k(x_k - u + v) + g_k(u) - h_k(v).$$

Тогда последовательности $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ сходятся по норме E соответственно к векторам u_0 и v_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого индекса $k \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ определим функцию $H_k = f_k \boxminus h_k$. По определению седловой точки имеем

$$H_k(x_k - u_k) + g_k(u_k) = (H_k \boxplus g_k)(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cap \{0\}.$$

В силу леммы 5.5,(ii) справедливо соотношение $H_k \xrightarrow[\text{с.з.}]{\longrightarrow} H_0$. Применяя лемму 5.3,(ii), получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_0\| = 0$. Применяя полученный результат для функций

$$\tilde{f}_k(x) = -f_k(-x), \quad \tilde{g}_k = h_k, \quad \tilde{h}_k = g_k, \quad \tilde{F}_k(v, u) = -F_k(u, v),$$

имеем соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v_0\| = 0$. Теорема доказана.

§ 6. Применение теоремы о седловой точке в теории дифференциальных игр

Теория антагонистических дифференциальных игр рассматривает задачи управления динамической системой двумя игроками, имеющими противоположные цели. В рамках теории дифференциальных игр может быть исследовано оптимальное управление объектом в конфликтных ситуациях, а также в ситуациях, когда на объект воздействует помеха, играющая роль одного из игроков. Задача состоит в нахождении оптимальной стратегии управления объектом, обеспечивающей оптимальный гарантированный результат, т. е. наилучший результат (значение целевого функционала), который может достичь игрок при самых неблагоприятных действиях соперника.

Большинство современных алгоритмов построения стратегий в дифференциальных играх используют метод стабильного моста Н. Н. Красовского [9] или альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина [10]. Как показали многочисленные работы, эти алгоритмы весьма трудоемки и не всегда могут быть реализованы на практике. Ситуация значительно упрощается, если в дифференциальной игре существует седловая точка в классе программных стратегий. В этом случае оптимальную стратегию можно находить с помощью более простых алгоритмов, основанных на принципе максимума Л. С. Понтрягина. В этом параграфе получены достаточные условия, при которых для дифференциальной игры седловая точка в классе программных стратегий существует.

Рассмотрим линейную дифференциальную игру с динамикой

$$\frac{dx}{dt} = B(t)v(t) - A(t)u(t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad (6.1)$$

начальным условием

$$x(0) = x_0 \quad (6.2)$$

и целевым функционалом

$$J(x_0, u, v) = f(x(\vartheta)) + \int_0^{\vartheta} (\alpha(t, u(t)) - \beta(t, v(t))) dt. \quad (6.3)$$

Здесь $u: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $v: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^q$ — управления игроков, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $A: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$, $B: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$ — заданные кусочно непрерывные матричнозначные функции.

Управления игроков подчиняются геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P(t), \quad v(t) \in Q(t) \quad \forall t \in [0, \vartheta], \quad (6.4)$$

где P, Q – заданные многозначные отображения, значениями которых являются выпуклые множества $P(t) \subset \mathbb{R}^p$, $Q(t) \subset \mathbb{R}^q$.

Цель игрока u состоит в минимизации функционала J , цель игрока v – в его максимизации.

Заметим, что дифференциальная игра с линейной динамикой

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x(t) + B(t)v(t) - A(t)u(t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad (6.5)$$

линейным преобразованием фазового вектора системы сводится к игре с динамикой (6.1). Поэтому полученные здесь результаты применимы к дифференциальным играм с динамикой (6.5).

Функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, определяющую зависимость целевого функционала (6.3) от значения фазового вектора в конечный момент времени ϑ , будем называть *терминальной*. Функции α, β будем называть *штрафными*.

Будем предполагать, что штрафные функции $\alpha: [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $\beta: [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ являются борелевскими и согласованы с множествами допустимых управлений игроков (6.4), а именно

$$\text{dom } \alpha(t, \cdot) = P(t), \quad \text{dom } \beta(t, \cdot) = Q(t) \quad \forall t \in [0, \vartheta].$$

Кроме того, для любого $t \in [0, \vartheta]$ функции $u \mapsto \alpha(t, u)$ и $v \mapsto \beta(t, v)$ выпуклы и полунепрерывны снизу. Пусть существуют интегрируемые по Лебегу функции $\alpha_0: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta_0: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$ и коэрцитивная функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такие, что

$$\begin{aligned} \alpha(t, u) &\geq \alpha_0(t) + \varphi(\|u\|), & \beta(t, v) &\geq \beta_0(t) + \varphi(\|v\|) \\ \forall t \in [0, \vartheta], & \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, & \quad \forall v \in \mathbb{R}^q. \end{aligned}$$

Множеством $\mathcal{U}$ допустимых программных стратегий игрока u будем называть множество интегрируемых по Лебегу функций $u: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^p$ таких, что $u(t) \in P(t)$ для любых $t \in [0, \vartheta]$ и $\int_0^\vartheta \alpha(t, u(t)) dt < +\infty$. Множеством $\mathcal{V}$ допустимых программных стратегий игрока v будем называть множество интегрируемых по Лебегу функций $v: [0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^q$ таких, что $v(t) \in Q(t)$ для любых $t \in [0, \vartheta]$ и $\int_0^\vartheta \beta(t, v(t)) dt < +\infty$.

Для любых векторов $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^n$ определим интегральные штрафные функции

$$g(\tilde{u}) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{U}: \\ \int_0^\vartheta A(t)u(t)dt = \tilde{u}}} \int_0^\vartheta \alpha(t, u(t)) dt, \quad h(\tilde{v}) = \inf_{\substack{v \in \mathcal{V}: \\ \int_0^\vartheta B(t)v(t)dt = \tilde{v}}} \int_0^\vartheta \beta(t, v(t)) dt. \quad (6.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. При выполнении перечисленных выше предположений согласно [11, гл. VIII, теорема 2.2] для любых $\tilde{u} \in \text{dom } g$, $\tilde{v} \in \text{dom } h$ инфимумы (6.6) достигаются.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены предположения, принятые в настоящем параграфе. Пусть заданы функция $w \in \mathfrak{CB}(\mathbb{R}^n)$ и числа r, t, R, T такие, что

$R > r > 0$, $T > t > 0$. Пусть терминальная функция f и интегральные штрафные функции g, h удовлетворяют условиям

$$f \in \text{WConv}(w_{[R]}) \cap \text{WConc}(w_{[T]}), \quad g \in \text{SConv}(w_{[r]}), \quad h \in \text{SConv}(w_{[t]}).$$

Тогда для дифференциальной игры (6.1)–(6.4) при любой начальной позиции (6.2) существует седловая точка в классе программных стратегий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В силу теоремы 1.1 существуют векторы $\tilde{u}_* \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{v}_* \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f(x_0 - \tilde{u}_* + \tilde{v}) + g(\tilde{u}_*) - h(\tilde{v}) \leq f(x_0 - \tilde{u} + \tilde{v}_*) + g(\tilde{u}) - h(\tilde{v}_*) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.7)$$

В силу замечания 6.1 существуют функции $u_* \in \mathcal{U}$, $v_* \in \mathcal{V}$ такие, что

$$\begin{aligned} \int_0^\vartheta A(t)u_*(t) dt &= \tilde{u}_*, & \int_0^\vartheta B(t)v_*(t) dt &= \tilde{v}_*, \\ g(\tilde{u}_*) &= \int_0^\vartheta \alpha(t, u_*(t)) dt, & h(\tilde{v}_*) &= \int_0^\vartheta \beta(t, v_*(t)) dt. \end{aligned}$$

Пусть заданы произвольные программные стратегии $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$. Обозначим

$$\tilde{u} = \int_0^\vartheta A(t)u(t) dt, \quad \tilde{v} = \int_0^\vartheta B(t)v(t) dt.$$

Из равенств (6.6) следуют неравенства

$$g(\tilde{u}) \leq \int_0^\vartheta \alpha(t, u(t)) dt, \quad h(\tilde{v}) \leq \int_0^\vartheta \beta(t, v(t)) dt.$$

Отсюда и из неравенства (6.7) получаем

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \int_0^\vartheta (B(t)v(t) - A(t)u_*(t)) dt\right) + \int_0^\vartheta (\alpha(t, u_*(t)) - \beta(t, v(t))) dt \\ \leq f\left(x_0 + \int_0^\vartheta (B(t)v_*(t) - A(t)u(t)) dt\right) + \int_0^\vartheta (\alpha(t, u(t)) - \beta(t, v_*(t))) dt. \end{aligned}$$

Согласно соотношениям (6.1)–(6.3) последнее неравенство можно переписать в виде $J(x_0, u_*, v) \leq J(x_0, u, v_*)$. Отсюда в силу произвольности программных стратегий $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ следует, что пара программных стратегий (u_*, v_*) составляет седловую точку в дифференциальной игре (6.1)–(6.4). Теорема доказана.

Список литературы

1. Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, 1-е изд., Физматлит, М., 2004; 2-е изд., испр и доп.; Физматлит, М., 2007.
2. Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции*, Физматлит, М., 2006.

3. Б. Т. Поляк, “Теоремы существования и сходимости минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений”, *Докл. АН СССР*, **166**:2 (1966), 287–290; англ. пер.: B. T. Poljak, “Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 72–75.
4. Дж. фон Нейман, “К теории стратегических игр”, *Теория игр. Матричные игры*, Физматгиз, М., 1961, 173–204; пер. с англ.: J. von Neumann, “On the theory of games of strategy”, *Contributions to the theory of games*, v. IV, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1959, 13–42.
5. К. Фан, “Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38**:2 (1952), 121–126.
6. М. Сion, “On general minimax theorems”, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 171–176.
7. Ж.-Ж. Морeau, “Inf-convolution des fonctions numeriques sur un espace vectoriel”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 5047–5049.
8. Е. С. Половинкин, “О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях”, *Тр. международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина* (Москва, 1998), т. 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **61**, Негладкий анализ и оптимизация, ВИНТИ, М., 1999, 66–138; англ. пер.: E. S. Polovinkin, “On strongly convex sets and strongly convex functions”, *J. Math. Sci. (New York)*, **100**:6 (2000), 2633–2681.
9. Н. Н. Красовский, *Управление динамической системой*, Наука, М., 1985.
10. Л. С. Понтрягин, “Линейные дифференциальные игры преследования”, *Матем. сб.*, **112**(154):3(7) (1980), 307–330; англ. пер.: L. S. Pontrjagin, “Linear differential games of pursuit”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 285–303.
11. И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.

Г. Е. Иванов (G. E. Ivanov)
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: givanov@mail.mipt.ru

Поступило в редакцию
27.03.2009
19.06.2009