Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:11:58

УДК 517.547.22

Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков

О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями

Найдена точная нижняя грань типов целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$, последовательность нулей которых расположена на одном луче и имеет заданные нижнюю и верхнюю плотности при показателе ρ . Систематически изучено поведение полученной экстремальной величины в зависимости от ρ и указанных характеристик распределения нулей. Дано приложение этих результатов к экстремальной задаче о радиусе полноты систем экспонент.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: экстремальные задачи, тип целой функции, верхняя и нижняя плотности нулей, полнота системы экспонент.

Введение

Вопросы полноты и базисности функциональных систем, проблемы интерполяции и аналитического продолжения часто связаны с решением экстремальных задач в определенных классах целых функций, заданных ограничениями, налагаемыми на рост и на расположение нулей. В подобных экстремальных задачах последовательность нулей целой функции характеризуется верхними и нижними плотностями различного вида. Традиционными асимптотическими характеристиками роста целой функции конечного порядка являются ее индикатор и тип при том же или некотором уточненном порядке.

Начиная с середины прошлого века экстремальные задачи для индикаторов целых функций, нули которых расположены произвольно или на одном луче и имеют заданный диапазон изменения верхней и нижней плотностей (обычных, усредненных, максимальных и т. д.), рассматривались рядом авторов. Отметим только некоторые близкие к настоящей статье работы [1, гл. V, § 5, теорема 12] и [2]–[5]. Новые результаты в описываемом классическом направлении теории целых функций, полученные разными методами в недавних работах [6] и [7], важны в связи с прикладным аспектом и свидетельствуют о возросшем в последнее время интересе к экстремальным проблемам. Пожалуй, наиболее яркой является связь этих задач с актуальными вопросами приближения аналитических функций линейными комбинациями экспонент (обобщенных экспонент), показатели которых выбираются из тех или иных классов последовательностей. В заключительной части настоящей работы эта связь изучается

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00225). Работа второго автора выполнена при поддержке Аналитической ведомственной целевой программы (АВЦП) “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/6827), ГК Рособразование (проекты П268, 795, 943) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” 2009-2013 гг. (проект П1109).

на примере систем экспонент с показателями, расположенными на нескольких лучах. Ключевая роль экстремальных задач в теории аналитического продолжения сумм рядов Дирихле и в вопросах интерполяции раскрыта в диссертации [8] (см. также библиографию в ней).

Следует указать на существенное отличие в постановках экстремальных задач, когда или фиксируется одна из характеристик распределения нулей, или указываются только пределы изменения каждой из них. Принципиально иной характер по сравнению с задачами из [2]–[4] приобретают экстремальные проблемы, в постановке которых какая-либо из плотностей изменяется в заданном интервале, а другая плотность остается фиксированной. Одна из таких ранее не изучавшихся задач о наименьшем возможном типе канонических произведений с положительными нулями фиксированной верхней плотности при показателе $\rho \in (0, 1)$ была недавно поставлена и решена в [8] (см. также [9]). Именно эта важная задача и послужила отправным пунктом настоящего исследования. Для формулировки результатов введем необходимые определения.

Каждая целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями $\Lambda = \{\lambda_n\}$ в силу известной теоремы Адамара [1] представляется каноническим произведением вида

$$L_\Lambda(z) = cz^m \prod_{|\lambda_n| > 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Обозначим ρ -тип функции $L_\Lambda(z)$ через

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) := \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln \max_{|z|=R} |L_\Lambda(z)|}{R^\rho}.$$

Пусть, далее, $n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1$ – считающая функция последовательности Λ . Введем верхнюю плотность при порядке ρ (кратко, ρ -плотность)

$$\bar{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho}$$

этой последовательности, а соответствующий нижний предел, называемый нижней ρ -плотностью Λ , обозначим $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$. Упомянутая выше задача состоит в нахождении для положительных последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и фиксированного $\beta > 0$ экстремальной величины

$$s(\beta, \rho) := \inf\{\sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \bar{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\}. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА А (А. Ю. Попов [8], [9]). При любых $\rho \in (0, 1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$s(\beta, \rho) = \beta C(\rho),$$

где $C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho}$. Нижняя грань $s(\beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

Учет нижней ρ -плотности последовательностей положительных чисел Λ естественным образом приводит к следующей экстремальной задаче, также поставленной А. Ю. Поповым. Именно, для заданных чисел $\rho \in (0, 1)$ и $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$, требуется найти величину

$$s(\alpha, \beta, \rho) := \inf\{\sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \bar{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\}. \quad (2)$$

Такая задача без ограничения, налагаемого на расположение корней функции, давно решена [10] при любом $\rho > 0$, и ответ в ней

$$\frac{\beta}{\rho} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right). \quad (3)$$

Сформулируем основной результат статьи, дающий решение проблемы (2).

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного $\rho \in (0, 1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, $\alpha \leq \beta$, справедливо равенство*

$$s(\alpha, \beta, \rho) = \beta \left(\frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (4)$$

где $k = \alpha/\beta$. Нижняя грань $s(\alpha, \beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \alpha$ и $\bar{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\alpha = 0$ из теоремы 1 получаем теорему A:

$$s(0, \beta, \rho) = s(\beta, \rho) = \beta C(\rho),$$

а при $\alpha = \beta$ равенство (4) дает известный результат о ρ -типе $L_\Lambda(z)$ с измеримой последовательностью положительных нулей:

$$s(\beta, \beta, \rho) = \frac{\pi\beta}{\sin(\pi\rho)}.$$

Исключая рассмотренные крайние случаи, в дальнейшем удобно считать $\beta = 1$, $\alpha = k \in (0, 1)$ и ввести величину

$$C(k, \rho) := \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \quad (5)$$

Определение функции $C(k, \rho)$ корректно, поскольку участвующий в ее задании максимум достигается. Действительно, при фиксированных ρ и k функция

$$\varphi(a) := \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

неотрицательна, непрерывна на луче $a > 0$, и $\lim_{a \rightarrow +0} \varphi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = 0$.

Опишем вкратце план статьи. В §1 доказывается основной результат настоящей работы. В §2 приводятся двусторонние оценки для $C(k, \rho)$, а в §3 – асимптотика этой величины при $\rho \rightarrow +0$ и фиксированном $k \in (0, 1)$. Завершающий статью §4 содержит приложение основной теоремы к изучению вопросов полноты систем экспонент в круге.

В заключение укажем, что §1 настоящей статьи принадлежит В.Б. Шерстюкову, §2 – Г.Г. Брайчеву, а §3, 4 – обоим соавторам в равной степени.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.Ю. Попову за постановку задачи и ценные обсуждения, стимулировавшие ее решение. Весьма плодотворными оказались и научные контакты с А.М. Седлецким, выразить признательность которому авторы считают своим приятным долгом.

§ 1. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1 разбивается на два этапа. Сначала выводится оценка снизу ρ -типа рассматриваемых функций. После этого следует построение примера, подтверждающего точность полученной оценки. Реализация намеченного плана на первом этапе технически намного сложнее, чем при отсутствии ограничений, налагаемых на аргументы корней. В самом деле, при

получении результата (3) первый шаг сводится к последовательному применению формулы Йенсена и оценки снизу усредненной верхней ρ -плотности через верхнюю ρ -плотность, умноженную на $\rho^{-1} \exp(k - 1)$. Наш метод получения оценки ρ -типа снизу по своей идее близок к методу получения оценки сверху индекса конденсации, используемому в работе [11] и основанному на тонких свойствах считающей функции.

Итак, согласно замечанию 1 будем устанавливать равенство $s(k, 1, \rho) = C(k, \rho)$, в котором $\rho \in (0, 1)$, $k \in (0, 1)$. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что все члены последовательности Λ положительны, и тогда

$$L_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Запишем при каждом $R > 0$

$$\ln \max_{|z|=R} |L_\Lambda(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R}{\lambda_n}\right) = \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R}{x}\right) dn_\Lambda(x).$$

Интегрирование по частям с последующей заменой переменной $x = Rt$ дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R}{x}\right) dn_\Lambda(x) &= n_\Lambda(x) \ln \left(1 + \frac{R}{x}\right) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n_\Lambda(x) \frac{R dx}{(R+x)x} \\ &= \int_0^{\infty} n_\Lambda(Rt) \frac{dt}{t(1+t)}. \end{aligned}$$

Полагая $\varphi_R(t) := n_\Lambda(Rt)/(Rt)^\rho$, приходим к равенству

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_\Lambda(z)| = \int_0^{\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt. \quad (6)$$

Пусть теперь зафиксированы произвольно числа $a > 0$ и $k' \in (0, k)$. Найдем из определения нижней ρ -плотности последовательности Λ число $c > 0$ такое, что при каждом $R \geq ac$ для всех $t \geq c/R$ выполняется неравенство $\varphi_R(t) > k'$. Полагая $\eta = \eta(R) := \varphi_R(1/a) = n_\Lambda(R/a)(R/a)^{-\rho}$, в частности, имеем $\eta > k'$. По условию

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \eta(R) = 1, \quad \underline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \eta(R) \geq k.$$

Ясно, что $n_\Lambda(Rt) \geq n_\Lambda(R/a)$ при $t \geq 1/a$. Отсюда при $R > 0$ и $t \geq 1/a$ получаем

$$\varphi_R(t) = \frac{n_\Lambda(Rt)}{(Rt)^\rho} \geq \frac{n_\Lambda(R/a)}{(Rt)^\rho} = \frac{n_\Lambda(R/a)}{(R/a)^\rho} \frac{1}{(at)^\rho} = \frac{\eta}{(at)^\rho}.$$

Таким образом, вводя в рассмотрение функцию $\psi(t) = \psi_R(t)$ по правилу

$$\psi(t) = \begin{cases} k', & 0 \leq t \leq \frac{1}{a}, \\ \frac{\eta}{(at)^\rho}, & \frac{1}{a} < t \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\eta}{k'}\right)^{1/\rho}, \\ k', & t > \frac{1}{a} \left(\frac{\eta}{k'}\right)^{1/\rho}, \end{cases}$$

мы можем утверждать, что при каждом $R \geq ac$ и любых $t \geq c/R$ справедливо неравенство

$$\varphi_R(t) \geq \psi(t). \quad (7)$$

Из (6) и (7) заключаем, что при фиксированном $R \geq ac$ имеет место оценка

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_\Lambda(z)| \geq \int_{c/R}^{\infty} \psi(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt. \quad (8)$$

Проведем преобразования интеграла, стоящего в правой части (8):

$$\begin{aligned} & \int_{c/R}^{\infty} \psi(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= k' \int_{c/R}^{a^{-1}} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \eta a^{-\rho} \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{dt}{t(1+t)} + k' \int_{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}}^{\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= k' \left(\int_{c/R}^{\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right) + \eta a^{-\rho} \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= k' \left(\frac{\pi}{\sin(\pi\rho)} - \int_0^{c/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right) + \int_{a^{-1}}^{a^{-1}(\eta/k')^{1/\rho}} \frac{\eta a^{-\rho} - k' t^{\rho}}{t(1+t)} dt \\ &= k' \left(\frac{\pi}{\sin(\pi\rho)} - \int_0^{c/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right) + \int_{a(k'/\eta)^{1/\rho}}^a \frac{\eta a^{-\rho} - k' \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Выбирая последовательность $r_j \rightarrow +\infty$, для которой $\lim_{j \rightarrow +\infty} \eta(r_j) = 1$, из неравенства (8) выводим оценку

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{c/r_j}^{\infty} \psi(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \frac{\pi k'}{\sin(\pi\rho)} + \int_{a(k')^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k' \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau.$$

Поскольку $a > 0$ и $k' \in (0, k)$ взяты произвольно, имеем

$$\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \frac{\pi k}{\sin(\pi\rho)} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau,$$

и неравенство $s(k, 1, \rho) \geq C(k, \rho)$ установлено.

Для завершения доказательства теоремы 1 требуется при любых $\rho \in (0, 1)$ и $k \in (0, 1)$ привести пример последовательности $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ с характеристиками $\underline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = k$, $\bar{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = 1$, для которой

$$\sigma_\rho(L_{\hat{\Lambda}}) = C(k, \rho) = \int_0^{\infty} \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Здесь под знаком интеграла находится функция

$$\psi_0(t) := \begin{cases} k, & 0 \leq t \leq \frac{1}{a_0}, \\ \frac{1}{(a_0 t)^\rho}, & \frac{1}{a_0} < t \leq \frac{1}{a_0 k^{1/\rho}}, \\ k, & t > \frac{1}{a_0 k^{1/\rho}}, \end{cases} \quad (9)$$

$a_0 = a_0(k, \rho)$ – точка максимума на луче $a > 0$ определенной в замечании 1 функции $\varphi(a) = \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau$.

Построение такого примера потребует некоторых усилий. Опишем выбор последовательности $\hat{\Lambda} = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$. Предварительно зададим последовательность $(m_n)_{n=1}^\infty$ по правилу $m_{n+1} = m_n^4$, $n \in \mathbb{N}$.

Точки λ_j последовательности $\hat{\Lambda}$ на отрезках $[m_n, m_n^2 - 1]$ выбираем так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью $1/k$. Первый отрезок $[m_1, m_1^2 - 1]$ не будет лишен точек λ_j , если потребовать выполнения неравенства $(m_1^2 - 1)^\rho - m_1^\rho > 1/k$. На полуинтервалах $(m_n^2 - 1, m_n^2]$ точки λ_j определим так, чтобы λ_j^ρ являлась арифметической прогрессией с разностью $\rho/((1-k)m_n^2)$. На интервалы $(m_n^2, m_n^2/k^{1/\rho})$ точки λ_j не помещаем, а оставшиеся части $[m_n^2/k^{1/\rho}, m_{n+1}]$ заполняем точками λ_j так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью $1/k$.

Для удобства введем обозначение $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^\infty$. Таким образом, при каждом $n \in \mathbb{N}$ можем записать

$$\begin{aligned} \Omega \cap [m_n^\rho, (m_n^2 - 1)^\rho] &= \left\{ m_n^\rho + \frac{\nu}{k} : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq ((m_n^2 - 1)^\rho - m_n^\rho)k \right\}, \\ \Omega \cap ((m_n^2 - 1)^\rho, m_n^{2\rho}] &= \left\{ (m_n^2 - 1)^\rho + \nu \frac{\rho}{(1-k)m_n^2} : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq (m_n^{2\rho} - (m_n^2 - 1)^\rho)\rho^{-1}(1-k)m_n^2 \right\}, \\ \Omega \cap \left(m_n^{2\rho}, \frac{1}{k}m_n^{2\rho} \right) &= \emptyset, \\ \Omega \cap \left[\frac{1}{k}m_n^{2\rho}, m_{n+1}^\rho \right] &= \left\{ \frac{1}{k}m_n^{2\rho} + \frac{\nu}{k} : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq \left(m_{n+1}^\rho - \frac{1}{k}m_n^{2\rho} \right)k \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $n_{\hat{\Lambda}}(x) = n_\Omega(x^\rho)$, то ρ -плотности (верхняя и нижняя) последовательности $\hat{\Lambda}$ совпадают с соответствующими 1-плотностями последовательности Ω . Вычислим их. Последовательность Ω построена так, что

$$n_\Omega(m_n^\rho) = km_n^\rho + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, указанное свойство вытекает из соотношений ($n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} n_\Omega(m_{n+1}^\rho) - n_\Omega(m_n^\rho) &= ((m_n^2 - 1)^\rho - m_n^\rho)k + \rho^{-1}(1-k)m_n^2(m_n^{2\rho} - (m_n^2 - 1)^\rho) \\ &\quad + \left(m_{n+1}^\rho - \frac{1}{k}m_n^{2\rho} \right)k + O(1) \\ &= k(m_n^{2\rho} - m_n^\rho + O(m_n^{2\rho-2})) + \rho^{-1}(1-k)m_n^2(\rho m_n^{2\rho-2} + O(m_n^{2\rho-4})) \\ &\quad + km_{n+1}^\rho - m_n^{2\rho} + O(1) \\ &= km_{n+1}^\rho - km_n^\rho + O(1), \end{aligned}$$

последовательное применение которых дает

$$\begin{aligned} n_\Omega(m_n^\rho) &= n_\Omega(m_{n-1}^\rho) + k(m_n^\rho - m_{n-1}^\rho) + O(1) \\ &= n_\Omega(m_{n-2}^\rho) + k(m_n^\rho - m_{n-2}^\rho) + 2O(1) = \dots \\ &\dots = k(m_n^\rho - m_1^\rho) + nO(1) = km_n^\rho + nO(1) = km_n^\rho + O(m_n^{\rho/2}). \end{aligned}$$

С учетом этого выпишем выражения для считающей функции последовательности Ω на соответствующих участках положительной полуоси.

Если $r \in [m_n^\rho, (m_n^2 - 1)^\rho]$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(m_n^\rho) + (r - m_n^\rho)k + O(1) = rk + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $r \in ((m_n^2 - 1)^\rho, m_n^{2\rho}]$, то

$$\begin{aligned} n_\Omega(r) &= n_\Omega((m_n^2 - 1)^\rho) + (r - (m_n^2 - 1)^\rho)\rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + O(1) \\ &= k(m_n^2 - 1)^\rho + (r - (m_n^2 - 1)^\rho)\rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $r \in (m_n^{2\rho}, (1/k)m_n^{2\rho})$, то

$$\begin{aligned} n_\Omega(r) &= n_\Omega(m_n^{2\rho}) = \rho^{-1}(1 - k)m_n^2(m_n^{2\rho} - (m_n^2 - 1)^\rho) + k(m_n^2 - 1)^\rho + O(m_n^{\rho/2}) \\ &= (1 - k)m_n^{2\rho} + k(m_n^{2\rho} + O(m_n^{2\rho-2})) + O(m_n^{\rho/2}) = m_n^{2\rho} + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $r \in [(1/k)m_n^{2\rho}, m_{n+1}^\rho]$, то

$$\begin{aligned} n_\Omega(r) &= n_\Omega(m_n^{2\rho}) + \left(r - \frac{1}{k}m_n^{2\rho}\right)k + O(1) = m_n^{2\rho} + \left(r - \frac{1}{k}m_n^{2\rho}\right)k \\ &\quad + O(m_n^{\rho/2}) = rk + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Проведенные вычисления позволяют при $n \in \mathbb{N}$ записать

$$\frac{n_\Omega(r)}{r} = \begin{cases} k + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in [m_n^\rho, (m_n^2 - 1)^\rho], \\ \rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + \frac{(m_n^2 - 1)^\rho}{r}(k - \rho^{-1}(1 - k)m_n^2) \\ \quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in ((m_n^2 - 1)^\rho, m_n^{2\rho}], \\ \frac{m_n^{2\rho}}{r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in \left(m_n^{2\rho}, \frac{1}{k}m_n^{2\rho}\right), \\ k + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & r \in \left[\frac{1}{k}m_n^{2\rho}, m_{n+1}^\rho\right]. \end{cases} \quad (10)$$

Поясним вид остаточного члена в полученном представлении лишь на участке $r \in ((m_n^2 - 1)^\rho, m_n^{2\rho}]$, поскольку на остальных участках вычисления проще. При указанных r имеем $(m_n^2 - 1)^\rho \leq r$, следовательно, $m_n^2 \leq r^{1/\rho} + 1 < 2r^{1/\rho}$, откуда получаем

$$\frac{m_n^{\rho/2}}{r} < \frac{2^{\rho/4}r^{1/4}}{r} = O\left(\frac{1}{r^{3/4}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Непосредственно из (10) для построенной последовательности $\hat{\Lambda}$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \Delta_\rho(\hat{\Lambda}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_{\hat{\Lambda}}(x)}{x^\rho} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_\Omega(x^\rho)}{x^\rho} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Omega(r)}{r} = k, \\ \bar{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_{\hat{\Lambda}}(x)}{x^\rho} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_\Omega(x^\rho)}{x^\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Omega(r)}{r} = 1. \end{aligned}$$

Для нахождения ρ -типа канонического произведения $L_{\hat{\Lambda}}(z)$ полагаем в (10) $r = (Rt)^\rho$, получая при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_R(t) = \frac{n_{\hat{\Lambda}}(Rt)}{(Rt)^\rho} = \begin{cases} k + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), & t \in \left[\frac{m_n}{R}, \frac{m_n^2 - 1}{R}\right], \\ \rho^{-1}(1-k)m_n^2 + \frac{1}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2 - 1}{R}\right)^\rho (k - \rho^{-1}(1-k)m_n^2) \\ + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), & t \in \left(\frac{m_n^2 - 1}{R}, \frac{m_n^2}{R}\right], \\ \frac{1}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2}{R}\right)^\rho + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), & t \in \left(\frac{m_n^2}{R}, \frac{1}{k^{1/\rho}} \frac{m_n^2}{R}\right), \\ k + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), & t \in \left[\frac{1}{k^{1/\rho}} \frac{m_n^2}{R}, \frac{m_n^4}{R}\right]. \end{cases}$$

Нам остается лишь убедиться в том, что для построенной последовательности $\hat{\Lambda}$ при больших R функции $\varphi_R(t)$ в определенном смысле близки к $\psi_0(t)$, заданной формулой (9). Вводим для упрощения изложения функцию (при $n \in \mathbb{N}$)

$$\Phi_R(t) = \begin{cases} k, & t \in \left[\frac{m_n}{R}, \frac{m_n^2 - 1}{R}\right], \\ \rho^{-1}(1-k)m_n^2 + \frac{1}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2 - 1}{R}\right)^\rho (k - \rho^{-1}(1-k)m_n^2), & t \in \left(\frac{m_n^2 - 1}{R}, \frac{m_n^2}{R}\right], \\ \frac{1}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2}{R}\right)^\rho, & t \in \left(\frac{m_n^2}{R}, \frac{1}{k^{1/\rho}} \frac{m_n^2}{R}\right), \\ k, & t \in \left[\frac{1}{k^{1/\rho}} \frac{m_n^2}{R}, \frac{m_n^4}{R}\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi_R(t) = \Phi_R(t) + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), \quad t \in \left[\frac{m_1}{R}, +\infty\right).$$

Пусть $R_n = a_0 m_n^2$, где точка a_0 та же, что и в формуле (9). Очевидно, тип бесконечного произведения $L_{\hat{\Lambda}}(z)$ можно находить следующим образом:

$$\sigma_\rho(L_{\hat{\Lambda}}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_0^\infty \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Оценим интеграл в этом представлении сверху через $\int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt$, используя незначительный рост разности $\varphi_R(t) - \psi_0(t)$ при фиксированном R и $t \rightarrow +\infty$. Вначале сведем задачу к аналогичной с заменой $\varphi_R(t)$ на $\Phi_R(t)$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\int_0^\infty \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \int_0^{m_n R^{-1}} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n R^{-1}}^\infty \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Пусть $R \in [R_n, R_{n+1}) = [a_0 m_n^2, a_0 m_{n+1}^2)$, $n \in \mathbb{N}$. При таких R имеем

$$\int_0^{m_n R^{-1}} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \leq \int_0^{(a_0 m_n)^{-1}} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \rightarrow 0$$

равномерно по R при $n \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_0^\infty \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ & \leq \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \left[\int_{m_n R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right) \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)t^{1-\rho/2}} \right] + o(1), \\ & n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Смещение “всплесков” функции $\Phi_R(t)$ при движении R вдоль промежутка $[R_n, R_{n+1})$ вынуждает в дальнейших оценках интегралов по-разному учитывать близость R к концам этого полуинтервала.

Представляя $[R_n, R_{n+1}) = [a_0 m_n^2, m_n^7] \cup (m_n^7, a_0 m_n^8)$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(L_{\hat{\Lambda}}) & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{R_n \leq R < R_{n+1}} \int_{m_n R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ & = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \sup_{a_0 m_n^2 \leq R \leq m_n^7} \int_{m_n R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt; \right. \\ & \quad \left. \sup_{m_n^7 < R < a_0 m_n^8} \int_{m_n R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right\}. \end{aligned}$$

Пусть сначала $R \in [a_0 m_n^2, m_n^7]$. Тогда из определения функций $\Phi_R(t)$, $\psi_0(t)$ (см. (9)) и точки a_0 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_{m_n R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt & \leq \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1) + \int_{m_{n+1}^2 R^{-1}}^\infty (\Phi_R(t) - k) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ & \leq \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n}^\infty (\Phi_R(t) - k) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1) \\ & = \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1). \end{aligned}$$

Если $R \in (m_n^7, a_0 m_n^8)$, то

$$\begin{aligned} \int_{m_n R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt & = \int_{m_n R^{-1}}^{m_n^4 R^{-1}} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n^4 R^{-1}}^\infty \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ & \leq \int_{(a_0 m_n^7)^{-1}}^{m_n^{-3}} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ & \quad + \int_{m_{n+2}^2 R^{-1}}^\infty (\Phi_R(t) - k) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1) \\ & = \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\sigma_\rho(L_{\hat{\Lambda}}) \leq \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Поскольку ранее установлено обратное неравенство

$$\sigma_\rho(L_{\hat{\Lambda}}) \geq \int_0^\infty \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = C(k, \rho),$$

то $\sigma_\rho(L_{\hat{\Lambda}}) = C(k, \rho)$. Доказательство теоремы 1 закончено.

§ 2. Свойства функции $C(k, \rho)$

Как видно из выражения (3), в задаче без ограничения, налагаемого на аргументы корней, зависимость величины экстремального типа от k и ρ очень простая. В случае расположения нулей на одном луче упомянутая зависимость, описываемая с помощью (4) и (5), оказалась намного сложнее. Поэтому для применения теоремы 1 в конкретных ситуациях и сравнения ее с известными результатами полезно иметь дополнительную информацию о поведении неэлементарной функции $C(k, \rho)$. В частности, важно получить обозримые оценки $C(k, \rho)$ через исследованную ранее в [9] величину $C(\rho)$ и элементарные функции переменных k, ρ . Именно этим и определяется содержание настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $C(k, \rho)$ при фиксированном $\rho \in (0, 1)$ является выпуклой по k на отрезке $[0, 1]$. Далее, при всех $\rho \in (0, 1)$ и $k \in (0, 1)$ для функции $C(k, \rho)$ справедливы двусторонние оценки*

$$\frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + \left(1 + k \ln \frac{k}{e}\right) C(\rho) \leq C(k, \rho) \leq \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + (1 - k) C(\rho). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим выпуклость функции $C(k, \rho)$ при каждом $\rho \in (0, 1)$ на отрезке $k \in [0, 1]$. При любом фиксированном $a > 0$ функция

$$f(k) = \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

выпукла на $[0, 1]$, так как

$$f'(k) = - \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau, \quad f''(k) = \frac{a^{1-\rho} k^{1/\rho-2}}{\rho(ak^{1/\rho} + 1)} > 0$$

при всех $k \in (0, 1]$. Следовательно, $C(k, \rho)$ также является выпуклой функцией переменной k на $[0, 1]$ как максимум выпуклых функций, что доказывает первую часть теоремы.

Из выпуклости $C(k, \rho)$ при всех $\rho \in (0, 1)$ сразу выводим для нее нужную оценку сверху, поскольку в правой части (11) стоит линейная функция, принимающая вместе с $C(k, \rho)$ при $k = 0$ и $k = 1$ значения $C(\rho)$ и $\frac{\pi}{\sin(\pi \rho)}$ соответственно. Впрочем, эту часть двойного неравенства (11) можно получить и непосредственно:

$$\begin{aligned} C(k, \rho) - \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} &\leq \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = (1 - k) \max_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1 + a}{1 + ak^{1/\rho}} \right\} \\ &\leq (1 - k) \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1 + a) = (1 - k) C(\rho). \end{aligned}$$

Для получения левой части (11) при всех $a > 0$ запишем

$$\begin{aligned} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau &= \int_{ak^{1/\rho}}^a (a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}) d(\ln(\tau + 1)) \\ &= (a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}) \ln(\tau + 1) \Big|_{ak^{1/\rho}}^a - k\rho \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{\ln(\tau + 1)}{\tau^{\rho+1}} d\tau \\ &= (1 - k)a^{-\rho} \ln(1 + a) - k\rho \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{\ln(\tau + 1)}{\tau^{\rho}} \frac{d\tau}{\tau} \\ &\geq (1 - k)a^{-\rho} \ln(1 + a) + k\rho C(\rho) \ln k^{1/\rho}. \end{aligned}$$

Переход к максимуму по $a > 0$ приводит к окончательному результату:

$$C(k, \rho) \geq \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + \left(1 + k \ln \frac{k}{e}\right) C(\rho).$$

Продолжая изучение функции $C(k, \rho)$, докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Для удобства обозначим $G(\rho, a) := a^{-\rho} \ln(1 + a)$, $a > 0$, и пусть $a(\rho)$ – точка максимума этой функции, т. е. $G(\rho, a(\rho)) = C(\rho)$, где $C(\rho)$ – величина из теоремы А.

ЛЕММА 1. Пусть a – произвольное положительное число. Тогда при всех $\rho \in (0, 1)$ и $k \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$C(k, \rho) \geq \frac{\ln(1 + a)}{a^\rho} + k \int_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \quad (12)$$

В частности, $C(k, \rho) \geq C(\rho) + k \int_{a(\rho)}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было установлено в ходе доказательства теоремы 2, функция $f(k) = \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$ выпукла на $[0, 1]$, следовательно, удовлетворяет соотношению $f(k) \geq f(0) + kf'(0)$, $k \in [0, 1]$. Подставляя сюда найденные выше значения

$$f(0) = \int_0^a \frac{a^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau = G(\rho, a), \quad f'(0) = - \int_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau,$$

при любом $a > 0$ находим

$$C(k, \rho) - \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} \geq \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \geq G(\rho, a) - k \int_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Следовательно, имеем

$$C(k, \rho) \geq \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} - k \int_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + G(\rho, a) = G(\rho, a) + k \int_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Последнее утверждение леммы получается простой подстановкой в это неравенство значения $a = a(\rho)$. Лемма доказана.

Согласно теореме А и теореме 1 из леммы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая экстремальная в задаче (1) последовательность положительных чисел Λ имеет нулевую нижнюю ρ -плотность.

В самом деле, если на некоторой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с нижней ρ -плотностью α и верхней ρ -плотностью β достигается точная нижняя грань (1), то по лемме 1 тип канонического произведения, построенного по этой последовательности, удовлетворяет неравенству

$$\beta C(\rho) = \sigma_\rho(L_\Lambda) \geq C\left(\frac{\alpha}{\beta}, \rho\right) \geq \beta C(\rho) + \alpha \int_{a(\rho)}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau,$$

что влечет $\alpha = 0$.

Заключение следствия 1, разумеется, справедливо для экстремальной последовательности, построенной в [9] при доказательстве теоремы А. Этот частный факт отмечен в [12]. Укажем также на тесную связь следствия 1 с результатами заметок [13], [14].

Выведем далее из леммы 1 оценки снизу величины $C(k, \rho)$, дополняющие (11) и отличающиеся простотой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k \in [0, 1]$. При всех $\rho \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$C(k, \rho) \geq \max_{a>0} \left\{ G(\rho, a) + kG\left(1 - \rho, \frac{1}{a}\right) \right\}. \quad (13)$$

При $\rho \in (0, 1/\ln 4]$ имеет место более простая оценка

$$C(k, \rho) \geq \max \left\{ \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)}; (1+k)C(\rho) - \frac{k}{\rho e} \right\}, \quad (14)$$

а при $\rho \in (1/\ln 4, 1)$ верна оценка

$$C(k, \rho) \geq \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + \max\{0; C(\rho) - kB(-\rho)\}, \quad (15)$$

где $B(\rho) = \int_0^1 \frac{\tau^\rho}{1+\tau} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\rho+1+n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отправляясь от неравенства (12), получаем (13):

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &\geq G(\rho, a) + k \int_a^\infty \frac{\tau^{1-\rho}}{\tau(\tau+1)} d\tau \geq G(\rho, a) + ka^{1-\rho} \int_a^\infty \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)} \\ &= G(\rho, a) + ka^{1-\rho} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) = G(\rho, a) + kG\left(1 - \rho, \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\rho \in (0, 1/\ln 4]$. Неравенство (14) будет доказано, если мы проверим, что в этом случае $C(k, \rho) \geq (1+k)C(\rho) - k/(\rho e)$.

Запишем при $a \geq 1$ цепочку неравенств

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &\geq G(\rho, a) + kG\left(1 - \rho, \frac{1}{a}\right) \geq G(\rho, a) + ka^{-\rho} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \\ &= (1+k)a^{-\rho} \ln(1+a) - \frac{k}{\rho} \frac{\ln a^\rho}{a^\rho} = (1+k)G(\rho, a) - \frac{k}{\rho} \max_{t \geq 1} \frac{\ln t}{t} \\ &= (1+k)G(\rho, a) - \frac{k}{\rho e}. \end{aligned}$$

Как показано в [9], при $\rho \in (0, 1/\ln 4]$ выполнено $a(\rho) \geq 1$. Следовательно,

$$C(k, \rho) \geq (1+k) \max_{a \geq 1} G(\rho, a) - \frac{k}{\rho e} = (1+k)C(\rho) - \frac{k}{\rho e}.$$

Рассмотрим, наконец, случай $\rho \in (1/\ln 4, 1)$. С учетом леммы 1 и доказанного в [9] неравенства $a(\rho) < 1$ получим

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &\geq C(\rho) + k \int_{a(\rho)}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \geq C(\rho) + k \int_1^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \\ &= C(\rho) + \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} - k \int_0^1 \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi k}{\sin(\pi \rho)} + C(\rho) - kB(-\rho), \end{aligned}$$

что влечет (15). Доказательство предложения завершено.

Добавим, что $B(\rho)$ совпадает со значением $\beta(\rho+1)$ хорошо известной специальной функции $\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$ [15, с. 775].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всех $\rho \in (0, 1)$ и $k \in [0, 1]$ справедлива оценка снизу

$$C(k, \rho) > \frac{e^{k-1}}{\rho}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим входящий в неравенство (12) интеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau &= \int_a^\infty \tau^{-\rho-1} \left(1 - \frac{1}{\tau+1}\right) d\tau \\ &= \int_a^\infty \tau^{-\rho-1} d\tau - \int_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau(\tau+1)} d\tau \\ &> \frac{\tau^{-\rho}}{-\rho} \Big|_a^\infty - a^{-\rho} \int_a^\infty \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)} = \frac{a^{-\rho}}{\rho} - a^{-\rho} \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке (12), имеем

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &> a^{-\rho} \left[\ln(1+a) + \frac{k}{\rho} - k \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \\ &= a^{-\rho} \left[\ln a + \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \frac{k}{\rho} - k \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \\ &= a^{-\rho} \left[\ln a + \frac{k}{\rho} + (1-k) \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \geq a^{-\rho} \left[\ln a + \frac{k}{\rho} \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь произвольностью $a > 0$, находим

$$C(k, \rho) > a^{-\rho} \left[\ln a + \frac{k}{\rho} \right] \Big|_{a=\exp(\frac{1-k}{\rho})} = e^{k-1} \left[\ln e^{\frac{1-k}{\rho}} + \frac{k}{\rho} \right] = \frac{e^{k-1}}{\rho}.$$

Требуемое неравенство получено.

Из теоремы 1 и предложения 2 следует классическое неравенство, связывающее тип целой функции с плотностями распределения ее нулей. Как отмечалось во введении, тип σ при порядке $\rho > 0$ целой функции с нулями $\Lambda \subset \mathbb{C}$, имеющими заданные нижнюю и верхнюю ρ -плотности α и β , удовлетворяет неравенству [10, с. 16] (ср. [13])

$$\sigma \geq \frac{\beta}{\rho} e^{k-1},$$

где $k = \alpha/\beta$. Неулучшаемая оценка $\sigma_\rho(L_\Lambda) \geq \beta C(k, \rho)$, полученная в теореме 1, является в силу предложения 2 уточнением указанного неравенства для типа в случае, когда $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ и $\rho \in (0, 1)$.

§ 3. Асимптотика $C(k, \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$ и фиксированном $k \in (0, 1)$

Для более детального описания картины роста целых функций и сравнения случаев, когда нули функций расположены только на одном луче или произвольно в плоскости, важно знать асимптотическое поведение найденной величины экстремального типа при малых значениях ρ . Действительно, правые части неравенств ($k = \alpha/\beta$)

$$\sigma \geq \beta \left(\frac{\pi_k}{\sin(\pi\rho)} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \right), \quad \sigma \geq \frac{\beta}{\rho} e^{k-1},$$

характеризующих эти случаи соответственно, внешне значительно отличаются. Хотя в предложении 2 эти правые части сравниваются, об их близости оценки (11)–(15) ничего не говорят. Поэтому представляет интерес помимо найденных выше равномерных по ρ и k оценок величины $C(k, \rho)$ получить асимптотические по ρ формулы для этой величины при фиксированном k .

При $k \in \{0; 1\}$ асимптотика $C(k, \rho)$ известна, поскольку $C(1, \rho) = \pi / \sin(\pi\rho)$, а

$$C(0, \rho) = C(\rho) = \frac{1}{\rho e} + \exp\left(-1 - \frac{1}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho} \exp\left(-\frac{2}{\rho}\right)\right), \quad \rho \rightarrow +0 \quad (16)$$

(см. [9]). В общей ситуации доказательство асимптотических формул для $C(k, \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$ в конспективной форме приведено в [16]. Здесь мы представляем развернутое изложение этих результатов.

Всюду ниже в этом параграфе $k, \rho \in (0, 1)$. Пусть, как и ранее, $\varphi(a) = \varphi_{k, \rho}(a) = \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$ и $a_0 = a_0(k, \rho)$ – точка максимума этой функции на положительной полуоси. Дифференцируя интеграл по параметру a , получим выражение

$$\varphi'(a) = a^{-1-\rho} \left(\frac{a(1-k)}{1+a} - \rho \ln \frac{1+a}{1+ak^{1/\rho}} \right) =: a^{-1-\rho} g(a).$$

Несложный анализ показывает, что функция

$$g(a) = \frac{a(1-k)}{1+a} - \rho \ln \frac{1+a}{1+ak^{1/\rho}}$$

возрастает от $g(0) = 0$ до некоторого положительного значения $g(a^*)$, где

$$a^* = \frac{1-k-\rho(1-k^{1/\rho})}{\rho(1-k^{1/\rho}) - (1-k)k^{1/\rho}},$$

а затем убывает, стремясь к своему пределу $1-k+\ln k < 0$ при $a \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что a_0 – единственный положительный корень функции $\varphi'(a)$, доставляющий максимум $\varphi(a)$.

Материал этого параграфа излагается по следующей схеме. Сначала в лемме 2 доказываются двусторонние оценки корня $a_0 = a_0(k, \rho)$ функции $\varphi'(a)$. Затем в лемме 3 дается оценка снизу для величины $C(k, \rho)$, а в лемме 4 – оценка сверху для этой же величины. Близость установленных в леммах 3, 4 оценок позволяет получить основной результат настоящего параграфа, предъявляющий двучленную асимптотику величины $s(\alpha, \beta, \rho)$ при $\rho \rightarrow +0$.

ЛЕММА 2. *При каждом фиксированном $k \in (0, 1)$ и всех достаточно малых ρ , $0 < \rho < \rho_0(k) < 1$, выполняется двойное неравенство*

$$e^{(1-k)/\rho} - \frac{1-k}{\rho} e^{1-k} - 1 < a_0 < e^{(1-k)/\rho} + 1.1k^{1/\rho} e^{2(1-k)/\rho} - 1. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (17) выведем из более точного соотношения

$$e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1 < a_0 < e^{(1-k)/\rho} v - 1, \quad (18)$$

где

$$u = e^{(1-k)(1-1/\rho)}, \quad v = (1 - k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho})^{-1}.$$

Заметим, что левое неравенство в (18) равносильно неравенству

$$g(e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1) > 0,$$

которое имеет вид

$$(1-k) \frac{e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1}{e^{(1-u)(1-k)/\rho}} - (1-k)(1-u) + \rho \ln[1 + k^{1/\rho}(e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1)] > 0.$$

Поскольку $u < 1$, то $k^{1/\rho}(e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1) > 0$, и потому достаточно проверить, что

$$(1-k) \frac{e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1}{e^{(1-u)(1-k)/\rho}} - (1-k)(1-u) > 0.$$

После сокращения на $1-k$ последнее неравенство запишется в виде

$$u > e^{(1-u)(1-k)/\rho}.$$

Подставляя сюда выражение для u , приходим к неравенству

$$e^{(\rho-1)(1-k)/\rho} > e^{(1-u)(1-k)/\rho},$$

или, что равносильно, $u < \rho$. Еще раз пользуясь определением u , убеждаемся в необходимости доказывать неравенство

$$e^{(\rho-1)(1-k)/\rho} < \rho,$$

т.е. неравенство $\frac{1-k}{\rho}(\rho-1) < \ln \rho$, переписав которое в удобной форме $\ln \frac{1}{\rho} < (1-k)(\frac{1}{\rho} - 1)$, видим, что оно выполняется при всех достаточно малых ρ .

Итак,

$$\begin{aligned} a_0 &> e^{(1-u)(1-k)/\rho} - 1 = \exp\left\{\frac{1-k}{\rho}(1 - e^{(\rho-1)(1-k)/\rho})\right\} - 1 \\ &= e^{(1-k)/\rho} \exp\left\{-\frac{1-k}{\rho}e^{(\rho-1)(1-k)/\rho}\right\} - 1. \end{aligned}$$

Для получения отсюда левой части неравенства (17) воспользуемся тем, что при всех $\mu > 0$ выполняется $e^{-\mu} > 1 - \mu$. Выбирая $\mu = \frac{1-k}{\rho}e^{(\rho-1)(1-k)/\rho}$, имеем

$$a_0 > e^{(1-k)/\rho} \left(1 - \frac{1-k}{\rho}e^{(\rho-1)(1-k)/\rho}\right) - 1 = e^{(1-k)/\rho} - \frac{1-k}{\rho}e^{1-k} - 1.$$

Теперь докажем, что имеет место правое неравенство в (18). Для этого запишем a_0 в виде $a_0 = e^{(1-k)/\rho}(1+w) - 1$, где $w = w(k, \rho) > -1$, и подставим его в равенство $g(a_0) = 0$. Получим

$$\frac{1-k}{\rho} \left(1 - \frac{1}{1+a_0}\right) - \ln(1+a_0) + \ln(1+k^{1/\rho}a_0) = 0,$$

откуда имеем

$$\ln(1+k^{1/\rho}a_0) - \ln(1+w) - \frac{1-k}{\rho} \frac{e^{(k-1)/\rho}}{1+w} = 0. \quad (19)$$

Преобразуем, а затем оценим отдельно первое слагаемое в левой части (19):

$$\begin{aligned}
 \ln(1 + k^{1/\rho} a_0) &= \ln(1 + k^{1/\rho} (e^{(1-k)/\rho} (1+w) - 1)) \\
 &= \ln(1 - k^{1/\rho} + k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} (1+w)) \\
 &= \ln(1+w) + \ln\left(\frac{1 - k^{1/\rho}}{1+w} + k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}\right) \\
 &= \ln(1+w) + \ln\left(1 - \frac{w + k^{1/\rho}}{1+w} + k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}\right) \\
 &\leq \ln(1+w) + k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} - \frac{w + k^{1/\rho}}{1+w}.
 \end{aligned}$$

Отсюда на основании (19) можно записать

$$-\frac{1-k}{\rho} \frac{e^{(k-1)/\rho}}{1+w} + k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} - \frac{w + k^{1/\rho}}{1+w} \geq 0.$$

Следовательно,

$$(1+w)(k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} - 1) \geq -1 + k^{1/\rho} + \frac{1-k}{\rho} e^{(k-1)/\rho}.$$

Поэтому

$$1+w \leq \frac{1 - k^{1/\rho} - \frac{1-k}{\rho} e^{(k-1)/\rho}}{1 - k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}} < \frac{1}{1 - k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}} = v.$$

Из представления a_0 и полученной оценки $1+w < v$ немедленно вытекает, что $a_0 < e^{(1-k)/\rho} v - 1$. Осталось вывести отсюда правую часть (17). Неравенство $\ln k + 1 - k < 0$ показывает, что при фиксированном $k \in (0, 1)$ выполняется $k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} \rightarrow +0$ при $\rho \rightarrow +0$, и потому

$$v = \frac{1}{1 - k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}} < 1 + 1.1 k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}$$

при всех достаточно малых положительных ρ . Значит, при тех же ρ

$$a_0 < e^{(1-k)/\rho} + 1.1 k^{1/\rho} e^{2(1-k)/\rho} - 1,$$

что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3. При фиксированном $k \in (0, 1)$ выполняется асимптотическая оценка

$$\begin{aligned}
 C(k, \rho) &> \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} \\
 &\quad + O(e^{-2(1-k)/\rho}) + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}), \quad \rho \rightarrow +0. \quad (20)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись хорошо известным равенством

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\rho)} = \int_0^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau,$$

преобразуем $C(k, \rho)$ к виду

$$C(k, \rho) = \max_{a>0} \psi(a),$$

где

$$\psi(a) = a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{1+k^{1/\rho}a} + k \left(\int_0^{ak^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \int_a^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} C(k, \rho) \geq \psi(e^{(1-k)/\rho}) &= e^{k-1} \ln \frac{1+e^{(1-k)/\rho}}{1+k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}} \\ &\quad + k \int_0^{k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + k \int_{e^{(1-k)/\rho}}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Оценим снизу первое слагаемое в представлении $\psi(e^{(1-k)/\rho})$, используя справедливые при всех $x > 0$ неравенства $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x - x^2/2 + x^3/3$. Имеем

$$\begin{aligned} e^{k-1} \ln \frac{1+e^{(1-k)/\rho}}{1+k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}} &= e^{k-1} \left(\frac{1-k}{\rho} + \ln(1+e^{(k-1)/\rho}) - \ln(1+k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}) \right) \\ &> e^{k-1} \left(\frac{1-k}{\rho} + e^{(k-1)/\rho} - \frac{1}{2}e^{2(k-1)/\rho} - k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k^{2/\rho}e^{2(1-k)/\rho} - \frac{1}{3}k^{3/\rho}e^{3(1-k)/\rho} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что при всех $\tau > 0$ выполняются неравенства $1/(1+\tau) > 1-\tau$ и $1/(1+\tau^{-1}) > 1-\tau^{-1}+\tau^{-2}-\tau^{-3}$, оценим снизу интегралы в записи $\psi(e^{(1-k)/\rho})$:

$$\begin{aligned} k \int_0^{k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau &> k \int_0^{k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}} (\tau^{-\rho} - \tau^{1-\rho}) d\tau \\ &= k \left(\frac{\tau^{1-\rho}}{1-\rho} - \frac{\tau^{2-\rho}}{2-\rho} \right) \Big|_0^{k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho}} = \frac{k^{1/\rho}e^{(1-k)(1/\rho-1)}}{1-\rho} - \frac{k^{2/\rho}e^{(1-k)(2/\rho-1)}}{2-\rho}, \\ k \int_{e^{(1-k)/\rho}}^\infty \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau &= k \int_{e^{(1-k)/\rho}}^\infty \frac{\tau^{-1-\rho}}{1+\tau^{-1}} d\tau \\ &> k \int_{e^{(1-k)/\rho}}^\infty \tau^{-1-\rho} (1-\tau^{-1}+\tau^{-2}-\tau^{-3}) d\tau \\ &= k \left(\frac{e^{k-1}}{\rho} - \frac{e^{-(1-k)(1/\rho+1)}}{\rho+1} + \frac{e^{-(1-k)(2/\rho+1)}}{\rho+2} - \frac{e^{-(1-k)(3/\rho+1)}}{\rho+3} \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке $C(k, \rho)$, получим

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &> e^{k-1} \left(\frac{1-k}{\rho} + e^{(k-1)/\rho} - \frac{1}{2}e^{2(k-1)/\rho} - k^{1/\rho}e^{(1-k)/\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k^{2/\rho}e^{2(1-k)/\rho} - \frac{1}{3}k^{3/\rho}e^{3(1-k)/\rho} \right) \\ &\quad + \frac{k^{1/\rho}e^{(1-k)(1/\rho-1)}}{1-\rho} - \frac{k^{2/\rho}e^{(1-k)(2/\rho-1)}}{2-\rho} \\ &\quad + k \left(\frac{e^{k-1}}{\rho} - \frac{e^{-(1-k)(1/\rho+1)}}{\rho+1} + \frac{e^{-(1-k)(2/\rho+1)}}{\rho+2} - \frac{e^{-(1-k)(3/\rho+1)}}{\rho+3} \right) \\ &= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1} \right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + \left(\frac{k}{\rho+2} - \frac{1}{2} \right) e^{-(1-k)(2/\rho+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{1-\rho} - 1 \right) k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-\rho} \right) k^{2/\rho} e^{(1-k)(2/\rho-1)} \\
& - \frac{k}{\rho+3} e^{-(1-k)(3/\rho+1)} - \frac{1}{3} k^{3/\rho} e^{(1-k)(3/\rho-1)} \\
& = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1} \right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O(e^{-(1-k)(2/\rho+1)}) \\
& + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O(\rho k^{2/\rho} e^{(1-k)(2/\rho-1)}), \quad \rho \rightarrow +0.
\end{aligned}$$

Последнее совпадает с требуемой оценкой (20).

ЛЕММА 4. При каждом фиксированном $k \in (0, 1)$ выполняется асимптотическая оценка

$$\begin{aligned}
C(k, \rho) & < \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1} \right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} \\
& + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho} \right) + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}), \quad \rho \rightarrow +0. \quad (21)
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если, как и прежде, $a_0 = a_0(k, \rho)$ – точка максимума функции $\psi(a)$, то

$$\begin{aligned}
C(k, \rho) & = \max_{a>0} \psi(a) = \psi(a_0) \\
& = a_0^{-\rho} \ln \frac{1+a_0}{1+k^{1/\rho}a_0} + k \left(\int_0^{a_0 k^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \int_{a_0}^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right).
\end{aligned}$$

Оценим теперь сверху каждое слагаемое в представлении $\psi(a_0)$. В оценке первого слагаемого применим те же неравенства, что и в лемме 3:

$$a_0^{-\rho} \ln \frac{1+a_0}{1+k^{1/\rho}a_0} < a_0^{-\rho} \left(\ln a_0 + a_0^{-1} - \frac{a_0^{-2}}{2} + \frac{a_0^{-3}}{3} - a_0 k^{1/\rho} + \frac{1}{2} a_0^2 k^{2/\rho} \right).$$

Для оценки интегралов, входящих в выражение $\psi(a_0)$, используем неравенства $1/(1+\tau) < 1-\tau+\tau^2$ и $1/(1+\tau^{-1}) < 1-\tau^{-1}+\tau^{-2}$, в которых $\tau > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_0 k^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau & < \int_0^{a_0 k^{1/\rho}} (\tau^{-\rho} - \tau^{-1-\rho} + \tau^{-2-\rho}) d\tau \\
& = \frac{(a_0 k^{1/\rho})^{1-\rho}}{1-\rho} - \frac{(a_0 k^{1/\rho})^{2-\rho}}{2-\rho} + \frac{(a_0 k^{1/\rho})^{3-\rho}}{3-\rho}, \\
\int_{a_0}^{\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau & < \int_{a_0}^{\infty} (\tau^{-\rho-1} - \tau^{-\rho-2} + \tau^{-\rho-3}) d\tau = \frac{a_0^{-\rho}}{\rho} - \frac{a_0^{-\rho-1}}{\rho+1} + \frac{a_0^{-\rho-2}}{\rho+2}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
C(k, \rho) & < a_0^{-\rho} \left(\ln a_0 + \frac{k}{\rho} \right) + a_0^{-\rho-1} \left(1 - \frac{k}{\rho+1} \right) - a_0^{-\rho-2} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\rho+2} \right) + \frac{a_0^{-3-\rho}}{3} \\
& + a_0^{1-\rho} k^{1/\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} - 1 \right) - a_0^{2-\rho} k^{2/\rho} \left(\frac{1}{2-\rho} - \frac{1}{2} \right) + k \frac{(a_0 k^{1/\rho})^{3-\rho}}{3-\rho}.
\end{aligned}$$

Не учитывая отрицательные слагаемые, но учитывая, что для всех $a > 0$ выполняется неравенство $a^{-\rho}(\ln a + k/\rho) \leq e^{k-1}/\rho$, получаем

$$C(k, \rho) < \frac{e^{k-1}}{\rho} + a_0^{-\rho-1} \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) + a_0^{1-\rho} \frac{\rho k^{1/\rho}}{1-\rho} + \frac{a_0^{-3-\rho}}{3} + \frac{a_0^{3-\rho} k^{3/\rho}}{3-\rho}. \quad (22)$$

При оценке сверху второго слагаемого в (22) воспользуемся левым неравенством (17) и тем, что для всех достаточно малых $x > 0$ выполняется $(1-x)^{-(\rho+1)} < 1+2x$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0^{-\rho-1} &< \left(e^{(1-k)/\rho} - \frac{1-k}{\rho} e^{1-k} - 1 \right)^{-1-\rho} \\ &= e^{-(1-k)(1/\rho+1)} \left(1 - \frac{1-k}{\rho} e^{(1-k)(1-1/\rho)} - e^{(k-1)/\rho} \right)^{-(\rho+1)} \\ &< e^{-(1-k)(1/\rho+1)} \left(1 + 2e^{(k-1)/\rho} \left(\frac{1-k}{\rho} e^{1-k} + 1 \right) \right)^{-(\rho+1)} \\ &= e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + 2e^{-(1-k)(2/\rho+1)} \left(\frac{1-k}{\rho} e^{1-k} + 1 \right) \\ &= e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho} \right), \quad \rho \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Значит, при $\rho \rightarrow +0$ можем записать

$$\left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) a_0^{-\rho-1} < \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho} \right). \quad (23)$$

Для оценки сверху третьего слагаемого в (22) используем наряду с правой частью (17) справедливое для $x \geq -1$ неравенство $(1+x)^{1-\rho} \leq 1 + (1-\rho)x$:

$$\begin{aligned} a_0^{1-\rho} &< (e^{(1-k)/\rho} + 1.1k^{1/\rho} e^{2(1-k)/\rho} - 1)^{1-\rho} \\ &= e^{(1-k)(1/\rho-1)} (1 + 1.1k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} - e^{(k-1)/\rho})^{1-\rho} \\ &\leq e^{(1-k)(1/\rho-1)} (1 + (1-\rho)(1.1k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho} - e^{(k-1)/\rho})) \\ &< e^{(1-k)(1/\rho-1)} + (1-\rho)1.1k^{1/\rho} e^{2(1-k)/\rho}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_0^{1-\rho} \frac{\rho k^{1/\rho}}{1-\rho} < \frac{\rho k^{1/\rho}}{1-\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}), \quad \rho \rightarrow +0. \quad (24)$$

Последних два слагаемых в (22) имеют простую оценку. Действительно, в силу леммы 2, когда $\rho \rightarrow +0$, имеем $a_0 \sim e^{(1-k)/\rho}$, а это влечет

$$\frac{1}{3} a_0^{-3-\rho} = o(e^{-2(1-k)/\rho}), \quad \frac{a_0^{3-\rho} k^{3/\rho}}{3-\rho} = o(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}), \quad \rho \rightarrow +0. \quad (25)$$

Подставляя в (22) найденные оценки (23)–(25), получаем требуемое утверждение: при $\rho \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &< \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho} \right) + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}). \end{aligned}$$

Как видно из лемм 3, 4, первые слагаемые в оценках (20), (21) одинаковы и, следовательно, совпадают с первым членом искомой асимптотики. Чтобы выделить второй и остаточный члены, необходимо сравнить показатели степеней, входящих в эти члены. Решив эту задачу, мы придадим надлежащий вид предварительной формуле для $C(k, \rho)$, объединяющей утверждения лемм 3, 4:

$$C(k, \rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho}\right) + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}), \quad \rho \rightarrow +0. \quad (26)$$

Сначала определим, какое из слагаемых формулы (26) является вторым членом заявленной асимптотики:

$$\left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)}.$$

С этой целью сравним $-(1-k)\left(\frac{1}{\rho}+1\right)$ и $\frac{1}{\rho} \ln k + (1-k)\left(\frac{1}{\rho}-1\right)$. Эквивалентные преобразования приводят к сравнению чисел $2(k-1)$ и $\ln k$. Обозначим через $k_1 = 0.20319\dots$ единственный в интервале $(0, 1)$ корень уравнения

$$\ln k = 2(k-1). \quad (27)$$

Тогда при всех $k \in (0, k_1]$ вторым членом в формуле (26) должен быть записан $\left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)}$, а при $k \in (k_1, 1)$ его заменит $\frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)}$. Пусть $k \in (0, k_1]$. Для получения из (26) двучленной асимптотики требуется выяснить, какая из величин убывает медленнее при $\rho \rightarrow +0$:

$$\frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} \quad \text{или} \quad O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho}\right).$$

Этот вопрос приводит к сравнению величин $\frac{1}{\rho} \ln k + \frac{1-k}{\rho}$ и $-\frac{2(1-k)}{\rho}$, а оно, в свою очередь, приводит к уравнению

$$\ln k = 3(k-1), \quad (28)$$

единственным корнем которого на $(0, 1)$ будет $k_0 = 0.05952\dots$. Теперь при рассматриваемых k остаточный член в (26) известен и можно сделать следующий промежуточный вывод ($\rho \rightarrow +0$): при $k \in (0, k_0]$

$$C(k, \rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho}\right)$$

и при $k \in (k_0, k_1]$

$$C(k, \rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O(\rho k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}).$$

Осталось рассмотреть значения $k \in (k_1, 1)$. Формула (26) показывает, что для выделения остаточного члена в этом случае необходимо сравнить скорости убывания $e^{-(1-k)/\rho}$ и $\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}$ при $\rho \rightarrow +0$. В результате сравнения получим еще одно уравнение:

$$\ln k = \frac{3}{2}(k-1), \quad (29)$$

с корнем $k_2 = 0.41719\dots$, что приводит к следующему выводу: если $\rho \rightarrow +0$, то при $k \in (k_1, k_2]$

$$C(k, \rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O(e^{-(1-k)/\rho}),$$

а при $k \in (k_2, 1)$

$$C(k, \rho) = \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}).$$

Полученную информацию удобно собрать в отдельное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть k_j , $j = 0, 1, 2$, – корни на интервале $(0, 1)$ соответственно уравнений (28), (27), (29). Для величины $C(k, \rho)$ при фиксированном k и $\rho \rightarrow +0$ справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} C(k, \rho) &= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O\left(\frac{1}{\rho} e^{-2(1-k)/\rho}\right), & k \in (0, k_0], \\ C(k, \rho) &= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \left(1 - \frac{k}{\rho+1}\right) e^{-(1-k)(1/\rho+1)} + O(\rho k^{1/\rho} e^{(1-k)/\rho}), & k \in (k_0, k_1], \\ C(k, \rho) &= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O(e^{-(1-k)/\rho}), & k \in (k_1, k_2], \\ C(k, \rho) &= \frac{e^{k-1}}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho} k^{1/\rho} e^{(1-k)(1/\rho-1)} + O(\rho k^{2/\rho} e^{2(1-k)/\rho}), & k \in (k_2, 1). \end{aligned} \quad (30)$$

Теорема 3 открывает несколько неожиданный факт существенной зависимости асимптотики при $\rho \rightarrow +0$ экстремальной величины $C(k, \rho)$ (и, следовательно, $s(\alpha, \beta, \rho)$) от $k = \alpha/\beta$, не только количественной, сказавшейся в различии вторых членов формул (30), но и качественной, выраженной в отличии остаточных членов.

Заметим, что асимптотическое равенство (16) согласуется с первым случаем в теореме 3, так как получается подстановкой в него $k = 0$.

Отметим также, что каково бы ни было $k \in [0, 1]$, формулы (16) и (30) показывают, что величины, описывающие экстремальный тип целых функций с нулевыми и произвольными аргументами корней, при порядке ρ , близком к нулю, мало отличаются.

Однако при $\rho \rightarrow 1$ ситуация резко меняется. Так, при $k = 0$ экстремальные величины типов, описывающие произвольное расположение нулей и на фиксированном луче, асимптотически близки к $1/e$ и 1 (см. [9]) соответственно. В то же время, при $k \in (0, 1]$ сравниваются величины e^{k-1} и $C(k, \rho) \geq \pi k / \sin(\pi \rho) > k/(1-\rho) \rightarrow +\infty$, $\rho \rightarrow 1-0$.

§ 4. Приложение к вопросам полноты систем экспонент

В теории полноты систем экспонент в различных функциональных пространствах важную роль играют целые функции экспоненциального типа (см., например, [1], [17]). Среди них, как показано в [18], видное место занимают бесконечные произведения

$$W_\Lambda(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m}\right), \quad (31)$$

нули которых расположены одинаково на m лучах $\arg z = 2\pi j/m$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Имеется очевидная связь между этими произведениями и функциями вида $L_{\Lambda^m}(w) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - w/\lambda_n^m)$ с нулями на луче, изучавшимися нами ранее. Для того чтобы ею воспользоваться, рассмотрим положительную последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lambda_n \nearrow +\infty, \quad \underline{\Delta}(\Lambda) := \underline{\Delta}_1(\Lambda) \geq \alpha, \quad \bar{\Delta}(\Lambda) := \bar{\Delta}_1(\Lambda) = \beta,$$

где $\beta > 0$ и $0 \leq \alpha \leq \beta$ заранее заданы. Обозначив $\Lambda^m := \{\lambda_n^m\}_{n=1}^{\infty}$, видим, что

$$\bar{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\lambda_n^m)^{1/m}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \bar{\Delta}(\Lambda)$$

и $L_{\Lambda^m}(w)$ – целая функция конечного типа при порядке $\rho = 1/m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \sigma(W_{\Lambda}) &:= \sigma_1(W_{\Lambda}) = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \ln \max_{|z|=R} \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m} \right| \\ &= \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \ln \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \left(\frac{R}{\lambda_n} \right)^m e^{im\varphi} \right| \\ &= \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \ln \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\lambda_n} \right)^{2m} - 2 \left(\frac{R}{\lambda_n} \right)^m \cos(m\varphi)} \\ &= \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{R}{\lambda_n} \right)^m \right) = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \ln \max_{|w|=R^m} |L_{\Lambda^m}(w)| \\ &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-1/m} \ln \max_{|w|=r} |L_{\Lambda^m}(w)| = \sigma_{1/m}(L_{\Lambda^m}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\inf \{ \sigma(W_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}(\Lambda) \geq \alpha, \bar{\Delta}(\Lambda) = \beta \} \\ &= \min \{ \sigma_{1/m}(L_{\Lambda^m}) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) \geq \alpha, \bar{\Delta}_{1/m}(\Lambda^m) = \beta \} = s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{m}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Конкретизируем при $\rho = 1/m$ величину

$$s(\alpha, \beta, \rho) = s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{m}\right) = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi/m)} + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^m}^a \frac{\beta a^{-1/m} - \alpha \tau^{-1/m}}{\tau + 1} d\tau$$

из (4). Производя замену переменной $\tau = t^{-m}$, запишем

$$\int_{a(\alpha/\beta)^m}^a \frac{\tau^{-1/m}}{\tau + 1} d\tau = m \int_{a^{-1/m}}^{(\beta/\alpha)a^{-1/m}} \frac{dt}{t^m + 1}. \quad (33)$$

Первообразную функции $1/(t^m + 1)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, можно представить (см., например, [15, с. 28]) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{[(m-2)/2]} \left(2 \sin \frac{\pi(2j+1)}{m} \operatorname{arctg} \frac{t - \cos \frac{\pi(2j+1)}{m}}{\sin \frac{\pi(2j+1)}{m}} \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\pi(2j+1)}{m} \ln \left(t^2 - 2t \cos \frac{\pi(2j+1)}{m} + 1 \right) \right) + \frac{1 - (-1)^m}{2m} \ln |t + 1|. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя представления (33) и (34), при тех же m получаем

$$\begin{aligned}
 s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{m}\right) &= \frac{\pi\alpha}{\sin \frac{\pi}{m}} + \max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt[m]{a}} \ln \frac{1+a}{1+a(\frac{\alpha}{\beta})^m} - \alpha m \int_{1/\sqrt[m]{a}}^{\beta/(\alpha \sqrt[m]{a})} \frac{dt}{t^m + 1} \right\} \\
 &= \frac{\pi\alpha}{\sin \frac{\pi}{m}} + \max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt[m]{a}} \ln \frac{1+a}{1+a(\frac{\alpha}{\beta})^m} + \frac{1-(-1)^m}{2m} \ln \frac{\alpha \sqrt[m]{a} + \beta}{\alpha \sqrt[m]{a} + \alpha} \right. \\
 &\quad - \alpha \sum_{j=0}^{[(m-2)/2]} \left(2 \sin \frac{\pi(2j+1)}{m} \operatorname{arctg} \frac{(\beta - \alpha) \sin \frac{\pi(2j+1)}{m}}{\alpha \sqrt[m]{a} + \frac{\beta}{\sqrt[m]{a}} - (\alpha + \beta) \cos \frac{\pi(2j+1)}{m}} \right. \\
 &\quad \left. \left. + \cos \frac{\pi(2j+1)}{m} \ln \frac{\alpha^2 - 2\alpha^2 \sqrt[m]{a} \cos \frac{\pi(2j+1)}{m} + (\alpha \sqrt[m]{a})^2}{\beta^2 - 2\beta\alpha \sqrt[m]{a} \cos \frac{\pi(2j+1)}{m} + (\alpha \sqrt[m]{a})^2} \right) \right\}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Из теоремы 1 с учетом соотношения (32) получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Наименьшее значение экспоненциальных типов $\sigma(W_\Lambda)$ всевозможных бесконечных произведений вида (31) с целым $m \geq 2$ и характеристиками $\underline{\Delta}(\Lambda) \geq \alpha$ и $\bar{\Delta}(\Lambda) = \beta$ положительной последовательности Λ вычисляется по формуле (35).*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathcal{E}_\Lambda = \{z^{n-1}e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, n = 1, 2, \dots, \Lambda(\lambda)\}$, $z \in \mathbb{C}$, где $\Lambda(\lambda)$ – число вхождений точки λ в последовательность Λ . Будем говорить, что система (кратных) экспонент $\mathcal{E}_\Lambda$ полна в круге $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R > 0$, если она полна в пространстве $\mathcal{A}(K_R)$ функций, аналитических в этом круге, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах из K_R . Через $R(\Lambda)$ обозначим радиус круга полноты, т.е. точную верхнюю грань радиусов кругов K_R , в которых полна система $\mathcal{E}_\Lambda$. Открытой до сих пор остается поставленная в [19, с. 177, 198] проблема нахождения точного выражения для $R(\Lambda)$ в терминах, характеризующих распределение точек из Λ на плоскости.

Через $[1; \sigma]$ обозначим класс целых функций типа не выше σ при порядке 1. Рассмотрим, следуя [20], экстремальный тип

$$\sigma_{\inf}(\Lambda) := \inf\{\sigma > 0 : \exists f \in [1; \sigma], f \not\equiv 0, f(\Lambda) = 0\}.$$

Из известного критерия полноты в пространстве $\mathcal{A}(K_R)$ системы $\mathcal{E}_\Lambda$ сразу вытекает равенство $\sigma_{\inf}(\Lambda) = R(\Lambda)$.

При фиксированных α, β , $0 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$, и $m \geq 2$ введем в рассмотрение класс $\mathcal{P}(\alpha, \beta, m)$ всех последовательностей комплексных чисел вида

$$\Lambda = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{\lambda_n e^{2\pi j i/m}\}_{n=1}^\infty,$$

где $\Lambda_0 := \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ пробегает семейство всевозможных неубывающих последовательностей положительных чисел, нижняя плотность которых не меньше, чем α , а верхняя плотность совпадает с β . Пусть также

$$R(\alpha, \beta, m) := \inf_{\Lambda \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, m)} R(\Lambda).$$

Теперь мы можем сформулировать еще одно следствие из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. Для любых $\beta > 0$, $0 \leq \alpha \leq \beta$ и целого $m \geq 2$ справедливо неравенство

$$R(\alpha, \beta, m) \leq \min_{\Lambda \in \mathcal{P}(\alpha, \beta, m)} \sigma(W_\Lambda) = s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{m}\right),$$

в котором величина $s(\alpha, \beta, \frac{1}{m})$ задается формулой (35). В частности,

$$R(\beta, m) := R(0, \beta, m) \leq \beta C\left(\frac{1}{m}\right).$$

Выделим особо важный в вопросах полноты класс бесконечных произведений с симметричными нулями:

$$W_\Lambda(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad \lambda_n \nearrow +\infty, \quad (36)$$

соответствующий случаю $\rho = \frac{1}{2}$ ($m = 2$).

Как показано в работе [21] (см. также [22]), величина $\sigma_{\inf}(\Lambda)$ для положительной последовательности Λ конечной верхней плотности не обязательно достигается на каноническом четном произведении Адамара–Вейерштрасса (36). Мы продемонстрируем этот несколько неожиданный факт на примере экстремальной задачи, поставленной в [22]. Рассмотрим систему экспонент $\mathcal{E}_{\pm\Lambda}$, в которой $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная неубывающая последовательность положительных чисел с $\Delta(\Lambda) < +\infty$. Через $\mathcal{P}(\beta)$, $0 < \beta < +\infty$, обозначим класс всех неубывающих последовательностей положительных чисел, верхняя плотность которых равна β . В предшествующих обозначениях $\mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(0, \beta, 2)$. Требуется найти (или оценить как можно точнее) величину $R(\beta) := \inf_{\Lambda \in \mathcal{P}(\beta)} R(\pm\Lambda)$. Очевидна справедливость неравенства $\sigma(W_\Lambda) \geq R(\pm\Lambda)$. Приведем гораздо более тонкий результат.

ТЕОРЕМА В [22, теоремы 1, 2]. Справедливы соотношения

$$R(\beta) < 0.8\beta < \min_{\Lambda \in \mathcal{P}(\beta)} \sigma(W_\Lambda) = C\left(\frac{1}{2}\right)\beta = \beta \cdot 0.8047\dots$$

Рассмотрим класс $\mathcal{P}(\alpha, \beta) := \mathcal{P}(\alpha, \beta, 2)$, $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, всех неубывающих последовательностей положительных чисел, нижняя плотность которых не меньше, чем α , а верхняя плотность совпадает с β . Пусть также $R(\alpha, \beta) := R(\alpha, \beta, 2) = \inf_{\Lambda \in \mathcal{P}(\alpha, \beta)} R(\pm\Lambda)$. При $m = 2$ формула (35) принимает достаточно простой вид

$$s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\right) = \pi\alpha + \max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{a}} \ln \frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} - 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}{\beta+a\alpha} \right\}$$

и приводит к следствию из теоремы 5, содержащему часть теоремы В. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 6. Для любых $\beta > 0$ и $0 \leq \alpha \leq \beta$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta) &\leq \min_{\Lambda \in \mathcal{P}(\alpha, \beta)} \sigma(W_\Lambda) = \beta C\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \pi\alpha + \max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{a}} \ln \frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} - 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}{\beta+a\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

С учетом неравенства (11) из теоремы 6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеем*

$$R(\alpha, \beta) \leq \pi\alpha + (\beta - \alpha)C\left(\frac{1}{2}\right) = \beta \cdot 0.8047\dots + \alpha \cdot 2.3368\dots$$

Отметим, что нахождение оценки сверху для $R(\alpha, \beta)$, которая уточняла бы неравенство $R(\beta) < 0.8\beta$ из теоремы В и учитывала нижнюю ρ -плотность последовательностей Λ , требует отдельного глубокого исследования, выходящего за рамки этой статьи. Однако даже полученная в следствии 2 из теоремы 6 оценка дает представление о степени возможного влияния величины α на значение $R(\alpha, \beta)$ точной нижней грани радиусов кругов полноты систем вида $\mathcal{E}_{\pm\Lambda}$.

Список литературы

1. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: В. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
2. А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV”, *Матем. сб.*, **66(108)**:3 (1965), 411–457.
3. Н. В. Говоров, “Экстремальный индикатор цілої функції з додатними нулями заданої верхньої та нижньої густини”, *Доп. АН УРСР*, **2** (1966), 148–150.
4. А. А. Кондратьук, “Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями”, *Сиб. матем. журн.*, **11**:5 (1970), 1084–1092; англ. пер.: А. А. Kondratyuk, “On the extremal indicator of entire functions with positive zeros”, *Siberian Math. J.*, **11**:5 (1970), 805–811.
5. М. И. Андрашко, “Экстремальный индикатор цілої функції з додатними нулями порядку менше одиниці”, *Доп. АН УРСР*, **7** (1960), 869–872.
6. Б. Н. Хабибуллин, “Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 129–158; В. N. Khabibullin, “Zero sequences of holomorphic functions, representation of meromorphic functions. II. Entire functions”, *Sb. Math.*, **200**:2 (2009), 283–312.
7. А. Ю. Попов, “О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 246–260; англ. пер.: А. Yu. Popov, “On the least type of an entire function of order ρ with roots of a given upper ρ -density lying on one ray”, *Math. Notes*, **85**:1–2 (2009), 226–239.
8. А. Ю. Попов, *Экстремальные задачи в теории целых функций*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2005.
9. А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **1** (2005), 31–36; А. Yu. Popov, “The least possible type under the order $\rho < 1$ of canonical products with positive zeros of a given upper ρ -density”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 32–36.
10. R. Ph. Boas, jr., *Entire functions*, Academic Press, New-York, 1954.
11. А. Ю. Попов, “Точная оценка индекса конденсации последовательности положительных чисел”, Тр. МИАН, Дополнение 1, МИАН, М., 2004, 183–206; англ. пер.: А. Yu. Popov, “Exact estimates for the condensation index of a sequence of positive numbers”, *Topology, mathematical control theory and differential equations, approximation theory*, Nauka, Moscow, 2004.

12. G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, "On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk", *Asian-Eur. J. Math.*, **1**:1 (2008), 15–26.
13. R. C. Buck, "On the distribution of the zeros of an entire function", *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **16**:4 (1952), 147–149.
14. G. G. Braichev, V. B. Sherstyukov, "Sharp relation between densities of the zeros of entire functions of finite order", *Mat. Stud.*, **30**:2 (2008), 183–188.
15. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions*, Gordon & Breach, New York, 1986.
16. Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, "Асимптотическая оценка экстремальной величины в одной задаче теории целых функций", *Тез. докладов Международной научно-образовательной конференции "Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования"*, РУДН, М., 2009, 241–252.
17. Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, РИЦ БашГУ, Уфа, 2006.
18. А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
19. P. Malliavin, L. A. Rubel, "On small entire functions of exponential type with given zeros", *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 175–206.
20. Б. Н. Хабибуллин, "О типе целых и мероморфных функций", *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 35–44; англ. пер.: B. N. Khabibullin, "On the type of entire and meromorphic functions", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 293–301.
21. L. A. Rubel, "Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83**:2 (1956), 417–429.
22. А. Ю. Попов, "О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 48–52; англ. пер.: A. Yu. Popov, "Completeness of exponential systems with real exponents of a prescribed under density in spaces of analytic functions", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **54**:5 (1999), 47–51.

Г. Г. БРАЙЧЕВ (G. G. BRAICHEV)

Национальный исследовательский ядерный университет

"МИФИ", г. Москва

E-mail: braichev@mail.ru

Поступило в редакцию

06.04.2009

31.08.2009

В. Б. ШЕРСТЮКОВ (V. B. SHERSTYUKOV)

Национальный исследовательский ядерный университет

"МИФИ", г. Москва

E-mail: shervb73@gmail.com