Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Карасев, Е. М. Новикова, Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 6, 55–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:20:58

УДК 517.986+517.958

М. В. Карасев, Е. М. Новикова

Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса

Алгебра симметрий квантового резонансного осциллятора в случае трех и более частот описана с помощью конечного (минимального) числа образующих и полиномиальных соотношений. Для этой алгебры указаны конструкция квантовых листов с комплексной структурой (аналог классических симплектических листов), а также конструкции квантовой кэлеровой 2-формы, воспроизводящей меры, соответствующих неприводимых представлений и когерентных состояний.

Библиография: 40 наименований.

Ключевые слова: частотный резонанс, алгебра симметрий, нелинейные коммутационные соотношения, квантовые кэлеровы формы, когерентные состояния.

§ 1. Введение

В волновой и квантовой механике многомерных систем фундаментальную роль играют состояния, локализованные вблизи устойчивого положения равновесия [1]–[3]. Гармоническая часть таких систем – осциллятор – задает главную составляющую движения, в то время как ангармоническая часть представляет возмущение. После процедуры квантового усреднения это возмущение начинает коммутировать с гармонической частью, т.е. задает элемент из ее коммутанта (алгебры симметрий). Если частоты гармонической части находятся в резонансе, то алгебра симметрий некоммутативна. Факт некоммутативности приводит к нетривиальной динамике усредненной системы и порождает ряд интересных эффектов.

В классической механике симметрии резонансного осциллятора изучались давно (см., например, [4], [5] и ссылки в фундаментальном обзоре [6]). Пуассонова структура на пространстве симметрий была исследована для некоторых частных случаев резонанса, например, в [7]–[9].

В работе [10] было показано, что алгебра симметрий общего резонансного осциллятора является алгеброй с конечным числом образующих и полиномиальными соотношениями. Она была названа *резонансной алгеброй*.

Гармоническая часть исходной системы представляет элемент Казимира (центр) резонансной алгебры. Усредненная ангармоническая часть задает еще один гамильтониан на резонансной алгебре. В устойчивом случае, когда все резонансные частоты положительны, этот гамильтониан соответствует некоторой возникшей за счет резонанса квазичастице, которую мы называем *гироном*. Оказалось, что описание самой резонансной алгебры и анализ состояний

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00606-а).

(прецессии) гирона сопровождаются появлением необычной квантовой геометрии [11]–[14]. Обнаруженные здесь новые алгебраические и геометрические объекты позволили решить давно стоявшую проблему об асимптотике спектра и волновых состояний в нано- и микрозонах вблизи резонансов.

Рассматриваемая задача о резонансах имеет два важных аспекта. Во-первых, она охватывает широкий круг базовых моделей волновой оптики и квантовой нанофизики. Во-вторых, как оказалось, она доставляет интересный класс алгебр, заданных конечным числом образующих с полиномиальными, в общем случае нелинейными соотношениями, для которых возможно построение полной теории неприводимых представлений, включая обобщение на базе квантовой геометрии известного метода орбит (разработанного для случая алгебр Ли [15]).

Систематическое рассмотрение квантовых алгебр с нелинейными соотношениями было начато школами В. П. Маслова и Л. Д. Фаддеева [16]–[25] в 1970–1980-х годах, хотя первые попытки использования таких алгебр делались физиками намного раньше.

Долгое время список физических систем, в которых алгебры с нелинейными соотношениями играют существенную роль для описания спектра и динамики, сводился к бесконечномерным полевым системам и спиновым цепочкам (см. список литературы в [22]). Примеры нелиевских алгебр с конечным числом образующих, свойства которых проявляются в фундаментальных эффектах квантовой механики (эффекты Зеемана и Зеемана–Штарка), были обнаружены и подробно изучены в работах [26]–[28]. По своему типу эти семейства алгебр подобны тем алгебрам, которые рассматривались в работе [16], т. е. число образующих в них совпадает с размерностью спектра.

Обнаруженные в [26]–[28] алгебры являются квантовыми, т. е. деформациями некоторых классических пуассоновых алгебр (с полиномиальным пуассоновым тензором). Резонансные алгебры, отвечающие многочастотному квантовому осциллятору, которые были найдены в [11]–[13], также относятся к классу квантовых алгебр, но число их образующих, вообще говоря, уже больше размерности спектра.

Квантовый осциллятор с частотами $f_1, \dots, f_n$ задается гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + \frac{1}{2}(f_1^2 q_1^2 + \dots + f_n^2 q_n^2) - \frac{\hbar}{2}(f_1 + \dots + f_n).$$

Этот оператор действует по переменным q_j в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$. Предполагаем, что параметр $\hbar$ больше нуля, и рассматриваем для простоты лишь устойчивый случай $f_j > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Определим операторы уничтожения

$$\hat{z}_j = \sqrt{\frac{f_j}{2}} q_j + \frac{\hbar}{\sqrt{2f_j}} \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad (1.1)$$

а также рассмотрим их сопряженные $\hat{z}_j^*$. Выполнены соотношения

$$[\hat{z}_j, \hat{z}_k] = 0, \quad [\hat{z}_k, \hat{z}_j^*] = \hbar \delta_{j,k}. \quad (1.2)$$

Вводя операторы действия $\hat{S}_j = \hat{z}_j^* \hat{z}_j$, $j = 1, \dots, n$, можно записать гамильтониан осциллятора в виде скалярного произведения вектора частот и

вектор-оператора действия:

$$\hat{H} = \langle f, \hat{S} \rangle. \quad (1.3)$$

Операторы действия взаимно коммутируют, их совместный спектр образует решетку с шагом $\hbar$ в n -мерном пространстве: $\text{Spectr}(\hat{S}) = \{\hbar k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n\}$.

Исследование алгебры симметрий оператора $\langle f, \hat{S} \rangle$ можно свести к исследованию простых *резонансных* случаев, когда набор частот целочисленный, $f \in \mathbb{N}^n$, и простой, т.е. любая пара частот не имеет нетривиального общего делителя (см., например, [10]). Мы рассматриваем именно такие резонансные случаи.

Из соотношений (1.2) следует, что алгебра симметрий резонансного осциллятора, т.е. алгебра операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$, коммутирующих с $\langle f, \hat{S} \rangle$, порождается генераторами

$$(\hat{z}^*)^r \hat{z}^l, \quad \text{где} \quad \langle f, l - r \rangle = 0, \quad l, r \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (1.4)$$

Обратим внимание на то, что генераторы $(\hat{z}^*)^r \hat{z}^l$ не являются независимыми и подчинены ряду тождеств.

В классической механике функции $\bar{z}^r z^l$ с условием $\langle f, l - r \rangle = 0$ называются *резонансными нормальными формами* (см. [5], [29]); они задают алгебру функций, находящихся в инволюции с классическим резонансным осциллятором. В [10] было показано, как из этого бесконечного семейства генераторов можно выделить *конечный базис “минимальных” генераторов*. В квантовом случае минимальный базис также существует.

После установления этого первого нетривиального факта возникает следующая задача: описать соотношения в ассоциативной алгебре, порожденной этим базисом. Иными словами, требуется задать алгебру симметрий резонансного осциллятора не через ее конкретное представление (минимальными) нормальными формами (1.4), а как абстрактную алгебру с конечным числом образующих и алгебраическими соотношениями. Мы называем ее *резонансной алгеброй*.

В рамках классической механики эту задачу можно переформулировать следующим образом: найти минимальное алгебраическое многообразие с алгебраической пуассоновой структурой и каноническое отображение на него стандартного фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$, находящееся в инволюции с резонансным осциллятором $\langle f, S \rangle$. Поскольку гамильтоновы траектории – это окружности, мы приходим к задаче об алгебраическом описании пуассоновой редукции пространства $\mathbb{R}^{2n}$ по действию окружности (см. детали об общей редукции по действию окружности, например, в [30]). В работе [10] было найдено решение этой задачи для случая общего резонанса. Другие подходы для некоторых вырожденных случаев резонанса развивались в [7], [9].

Отметим, что в пространстве частот можно задать естественное понятие арифметической эквивалентности по действию группы $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с единичным определителем. Однако для арифметически эквивалентных наборов частот соответствующие резонансные алгебры и их пуассоновы многообразия могут оказаться принципиально различными. Например, в двумерном случае любой набор взаимно простых частот арифметически эквивалентен набору единичных частот 1:1; при этом резонансная алгебра для первого набора задается, вообще говоря, нелинейными коммутативными соотношениями и не сводится ни к какой конечномерной алгебре Ли, а для второго

набора резонансная алгебра – это простая трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$. Таким образом, из арифметической эквивалентности не вытекает алгебраическая эквивалентность. С другой стороны, наборы частот, отличающиеся только перестановкой, конечно, эквивалентны и арифметически, и алгебраически. Далее, набор частот с общим целочисленным множителем алгебраически эквивалентен набору, в котором этот множитель сокращен. Более того, любой набор частот в алгебраическом смысле всегда можно редуцировать к элементарным наборам, в которых частоты попарно взаимно просты (см. [10]). Именно такие элементарные наборы частот мы изучаем в настоящей работе.

Нельзя сказать, что квантовая версия задачи о резонансной алгебре просто дублирует классическую. Конечно, в двухчастотном случае описание квантовой резонансной алгебры достаточно простое, оно было получено в [12], [13] параллельно с описанием классической алгебры. Однако случай квантового многочастотного резонанса при $n \geq 3$ оказался намного сложнее своей классической версии.

Случаи трех и более частот принципиально отличаются от двухчастотного тем, что резонансная решетка векторов “рождения” (переходов между точками спектра операторов действия) имеет аномалию [10]. В настоящей работе мы показываем, что в этой аномальной решетке можно выделить максимальные нормальные подрешетки. Они играют существенную роль в описании как пуассонова тензора, так и квантовых соотношений резонансной алгебры. Эти же подрешетки участвуют в конструкции когерентных преобразований; здесь нормальность подрешеток снимает проблему упорядочения операторов “рождения”.

Существование в многочастотном случае некоммутатирующих “рождений” заставляет ввести [10] понятие коммутатора между векторами целочисленной решетки. Нормальные резонансные подрешетки можно иначе определить как максимальные коммутативные подрешетки. Коммутатор между векторами решетки задает скобки между координатами “рождение”–“рождение” и “рождение”–“уничтожение” в резонансной пуассоновой алгебре.

В квантовом многочастотном случае приходится вводить еще целый ряд новых операций на целочисленной резонансной решетке. В этом случае для описания резонансной алгебры в большей степени привлекается арифметика. В частности, здесь возникают интересные “структурные полиномы” на целочисленной решетке, которые играют роль структурных функций в квантовых перестановочных соотношениях.

Рассматриваемая задача, помимо описания резонансной алгебры, содержит в себе еще и подзадачу: построение неприводимых представлений этой алгебры. Здесь неожиданно оказывается, что использовать классические геометрические объекты (пуассонов тензор, симплектические листы) для построения квантовых неприводимых представлений в прямой аналогии с методом орбит не удастся. Например, размерность квантового неприводимого представления нельзя выразить через классический объем Лиувилля симплектических листов.

В общей схеме квантования известно, что размерность определяется воспроизводящей мерой на квантовом листе, и над ним же строятся неприводимые представления алгебры [31], [32]. В настоящей работе мы даем явное описание квантовых листов для многочастотного осциллятора. Конструкция основана на групповой структуре резонансной решетки, позволяющей ввести универ-

сальное семейство многообразий с комплексной структурой, которое задается лишь резонансными частотами и собственными числами осциллятора. С одной стороны, эти многообразия могут быть вложены в резонансное пуассоновое многообразие в качестве замыкания симплектических листов. Тем самым, на них определена классическая замкнутая 2-форма Кириллова (с сингулярностями). Она является кэлеровой по отношению к комплексной структуре, но для нее нет воспроизводящей меры. С другой стороны, на этих же многообразиях можно ввести квантовую кэлерову 2-форму без сингулярностей¹, для которой имеется воспроизводящая мера. Данная мера генерирует формулу для размерности неприводимого представления резонансной алгебры, а также задает гильбертову структуру в пространстве, где действует представление. При этом операторы неприводимого представления конструируются явно в виде дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Порядок этих операторов, вообще говоря, больше единицы. Это соответствует тому факту, что соотношения в алгебре нелинейные, и при этом комплексная поляризация не инвариантна. Только в случае изотропного резонанса, когда все частоты равны единице, резонансная алгебра оказывается алгеброй Ли, поляризация инвариантна и операторы неприводимого представления имеют порядок 1.

Введенные квантовую 2-форму и соответствующую воспроизводящую меру мы называем *объектами квантовой геометрии*. В классическом пределе, вне точек сингулярности, эти объекты переходят соответственно в классическую форму Кириллова и меру Лиувилля на симплектических листах, но в окрестности сингулярностей (на замыкании листов) такого перехода нет. В принципе, можно было бы попытаться обойтись в этой задаче и без квантовой геометрии, используя лишь классические листы и общее геометрическое квантование для случая неинвариантной поляризации и следуя схеме из [34], но при этом вся конструкция была бы на порядок сложнее, операторы неприводимого представления содержали бы сингулярности и были бы псевдодифференциальными, а не дифференциальными, как в нашем варианте (см. обсуждение в [14], [31], [32]).

В настоящей работе мы предъявляем также простую формулу для когерентных преобразований, сплетающих исходное представление алгебры симметрий резонансного осциллятора с неприводимыми представлениями в пространстве антиголоморфных сечений эрмитова линейного расслоения над квантовыми листами. Отметим, что построенные когерентные состояния резонансного осциллятора позволяют также дать реализацию представлений резонансной алгебры в пространстве функций над лагранжевыми подмногообразиями в квантовом листе; она удобна для вычисления квазиклассических асимптотик (см. [13], [14]). В этой реализации, в частности, участвует фазовая функция (действие), порожденная квантовой 2-формой.

§ 2. Минимальные резонансные векторы

Решеткой мы будем называть подмножество векторов в $\mathbb{R}^n$ с целочисленными декартовыми координатами, которое является полугруппой относительно сложения.

¹Эта форма замкнута, но может вырождаться, т. е. она доставляет пример вихревой структуры [33].

Фиксируем вектор частот $f \in \mathbb{N}^n$. Резонансная решетка $\mathcal{R} = \mathcal{R}[f]$ определяется как множество целочисленных векторов из $\mathbb{R}^n$, ортогональных вектору частот. Таким образом, $\sigma \in \mathcal{R}$, если все координаты σ_j целые и

$$\langle f, \sigma \rangle = 0.$$

Такие векторы σ мы называем *резонансными*.

Пересечение резонансной решетки $\mathcal{R}$ с декартовыми квадрантами назовем *нормальными подрешетками*. На каждой такой подрешетке ни одна из декартовых координат не меняет знак. Эти подрешетки можно индексировать следующим образом:

$$\mathcal{R}^j, \mathcal{R}^{jk}, \mathcal{R}^{jkl}, \dots \quad (2.1)$$

Здесь индексы отмечают номера тех декартовых координат, которые должны быть неотрицательными (а остальные должны быть неположительными). На пересечениях этих подрешеток соответствующие координаты тождественно равны нулю; скажем, на пересечении $\mathcal{R}^j \cap \mathcal{R}^{jk}$ координата с номером k равна нулю, координата с номером j неотрицательна, а остальные координаты неположительны.

Общее количество нормальных резонансных подрешеток (2.1) задается формулой

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} = 2^n - 2.$$

Вместе они покрывают всю резонансную решетку $\mathcal{R}$.

При $n = 2$ нормальных решеток всего две: $\mathcal{R}^1$ и $\mathcal{R}^2$. Они состоят из целочисленных двумерных векторов, лежащих на прямой, ортогональной вектору частот $f \in \mathbb{N}^2$, либо по одну, либо по другую сторону от начала координат 0.

При $n = 3$ нормальных резонансных подрешеток всего шесть:

$$\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^{12}, \mathcal{R}^{23}, \mathcal{R}^{31} \subset \mathbb{Z}^3.$$

Они соответствуют шести секторам, на которые декартовы плоскости делят резонансную плоскость, ортогональную вектору частот $f \in \mathbb{N}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Ненулевой резонансный вектор назовем *минимальным*, если его нельзя получить сложением двух ненулевых векторов из нормальной подрешетки.

Множество $\mathcal{M}$ всех минимальных векторов естественно рассматривать как множество элементарных образующих резонансной решетки. В несколько иных терминах понятие минимального вектора было введено в [10]. Там же была доказана теорема о полноте: *любой резонансный вектор представим в виде линейной комбинации минимальных векторов с натуральными коэффициентами*. Этот результат можно уточнить.

Подмножество резонансной решетки назовем *нормальным*, если оно лежит в одной из нормальных резонансных подрешеток.

Резонансный вектор назовем *внутренним*, если он принадлежит только одной нормальной подрешетке. В противном случае этот вектор назовем *граничным*.

ТЕОРЕМА 2.1. *Любой резонансный вектор разлагается в сумму минимальных с неотрицательными целыми коэффициентами:*

$$\sigma = \sum_{\kappa \in \mathcal{M}_\sigma} n_\kappa^\sigma \kappa, \quad n_\kappa^\sigma \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{M}. \quad (2.2)$$

Здесь M_σ – множество минимальных векторов в пересечении всех нормальных подрешеток, которым принадлежит вектор σ . В частности, M_σ – нормальное подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор σ не минимальный. Тогда он разлагается в сумму: $\sigma = \kappa' + \kappa''$, где κ' , κ'' лежат в той нормальной подрешетке, которой принадлежит σ . Если оба вектора κ' и κ'' минимальные, то доказательство закончено, если же хоть один из них не минимальный, то опять разлагаем его в сумму двух векторов (из той же нормальной решетки), и т. д. Процедура закончится за конечное число шагов, поскольку на каждом шаге целочисленные компоненты разлагаемого вектора представляются в виде суммы целых чисел того же знака и нулей (по определению нормальной подрешетки).

Отметим, что разложение (2.2), вообще говоря, не единственно.

Например, в случае трех частот $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$ резонансный вектор $\sigma = (2, -4, 2)$ можно разложить в сумму минимальных векторов двумя способами:

$$\sigma = 2\kappa, \quad \sigma = \kappa' + \kappa'',$$

где $\kappa = (1, -2, 1)$, $\kappa' = (2, -1, 0)$, $\kappa'' = (0, -3, 2)$.

Далее, количество слагаемых в разложении (2.2) не превосходит *общего числа* $M \stackrel{\text{def}}{=} \#M$ минимальных резонансных векторов. В работе [10] было доказано, что M конечно.

Для случая $n = 3$ мы дадим явное описание множества минимальных резонансных векторов.

Прежде всего, заметим, что достаточно рассмотреть лишь случай взаимно простых частот. Действительно, если какие-то две частоты, скажем f_1 и f_2 , имеют общий множитель:

$$f_1 = m f'_1, \quad f_2 = m f'_2,$$

то ситуация легко редуцируется к новому набору частот f'_1, f'_2, f_3 . Редукция происходит следующим образом. Сначала все сводится к случаю, когда частота f_3 взаимно проста с m . Затем для этого случая используем следующий факт: *вектор $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ минимальный резонансный для набора частот (f_1, f_2, f_3) тогда и только тогда, когда вектор $(\sigma_1, \sigma_2, m\sigma_3)$ минимальный резонансный для набора частот (f'_1, f'_2, f_3) .*

Таким образом, изучение, например, резонанса $3 : 6 : 2$ редуцируется к изучению резонанса² $1 : 1 : 1$.

Для простоты в настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением случая положительных частот. Рассмотрение вариантов, в которых часть частот отрицательна, проводится аналогично. Итак, мы всюду ниже предполагаем, что выполнены следующие условия:

- (А) частоты попарно взаимно простые;
- (В) все частоты положительные.

Рассмотрим диофантово уравнение

$$\mu f_1 + \nu f_2 + f_3 = 0 \tag{2.3}$$

²Резонансы именно такого вырожденного типа, редуцируемые к резонансу единичных частот, рассматривались в [9].

относительно неизвестных целых чисел μ и ν . Используем следующее простое утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Существует единственное решение уравнения (2.3) с условием*

$$0 \leq \nu \leq f_1 - 1. \quad (2.4)$$

В частности, если $f_1 = 1$, то это решение имеет вид $\mu = -f_3$, $\nu = 0$. Если $f_1 \geq 2$, то $\nu \geq 1$.

Если $f_1 \geq 2$, то для каждого $l = 1, 2, \dots, f_1 - 1$ обозначим

$$\nu^{(l)} = l\nu \pmod{f_1}, \quad \mu^{(l)} = -\frac{lf_3 + \nu^{(l)}f_2}{f_1},$$

где ν – решение диофантова уравнения (2.3) с условием (2.4). Числа $\mu^{(l)}$, $\nu^{(l)}$ целые, причем $0 \leq \nu^{(l)} \leq f_1 - 1$. Конечно, при $l = 1$ имеем $\mu^{(1)} = \mu$, $\nu^{(1)} = \nu$.

ТЕОРЕМА 2.2. *В трехчастотном случае с условиями (А), (В) минимальные векторы в резонансной решетке $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{23} \cup \mathcal{R}^{31} \cup \mathcal{R}^{12} \cup \mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3$ устроены следующим образом:*

а) *если $f_1 = 1$, то внутренних минимальных векторов в подрешетке $\mathcal{R}^{23}$ не существует;*

б) *если $f_1 \geq 2$, то все внутренние минимальные векторы в подрешетке $\mathcal{R}^{23}$ задаются последовательностью*

$$(\mu^{(l)}, \nu^{(l)}, l), \quad l = 1, \dots, f_1 - 1, \quad (2.5)$$

причем вектор с номером l сохраняется в последовательности (2.5) только при условии, что

$$\nu^{(l)} < \nu^{(j)}, \quad j = 1, \dots, l - 1. \quad (2.6)$$

Граничные минимальные векторы в $\mathcal{R}^{23}$ имеют вид

$$(-f_3, 0, f_1) \in \mathcal{R}^{23} \cap \mathcal{R}^3, \quad (-f_2, f_1, 0) \in \mathcal{R}^{23} \cap \mathcal{R}^2. \quad (2.7)$$

Минимальные векторы нормальных подрешеток $\mathcal{R}^{31}$ и $\mathcal{R}^{12}$ получаются из предыдущего описания векторов в $\mathcal{R}^{23}$ циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Минимальные векторы в нормальной подрешетке $\mathcal{R}^j$ имеют вид $(-\sigma)$, где σ – минимальный вектор в подрешетке $\mathcal{R}^{kl}$, k и l – номера, дополняющие номер j до тройки индексов 1, 2, 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в работе [35].

В силу условия (2.6) все числа $\nu^{(l)}$ в последовательности (2.5) должны быть меньше ν . В силу взаимной простоты f_1 и f_3 последовательность (2.5) не может содержать два вектора с одной и той же второй координатой. Поэтому количество членов последовательности (2.5) не превосходит $\nu \leq f_1 - 1$. Это дает оценку сверху для числа внутренних минимальных векторов подрешетки $\mathcal{R}^{23}$. Аналогичные оценки получаются для подрешеток $\mathcal{R}^{31}$ и $\mathcal{R}^{12}$ (но частота f_1 заменяется на f_2 или f_3). Таким образом, общее число внутренних минимальных векторов не превосходит $2[(f_1 - 1) + (f_2 - 1) + (f_3 - 1)] = 2(f_1 + f_2 + f_3) - 6$, а граничных минимальных векторов (см. (2.7)) всего шесть.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *В трехчастотном случае, $n = 3$, число минимальных резонансных векторов имеет следующую верхнюю оценку:*

$$M \leq 2(f_1 + f_2 + f_3).$$

§ 3. Пуассонова алгебра симметрий резонансного осциллятора

Следуя работе [10], опишем резонансную алгебру классического осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2 + f_1^2 q_1^2 + \dots + f_n^2 q_n^2) \quad (3.1)$$

в эллиптическом случае (см. условие (B) в § 2).

На решетке $\mathbb{Z}^n$ введем следующие операции (индекс j пробегает все значения $1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow |\alpha|, & |\alpha| &\stackrel{\text{def}}{=} |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|, \\ \alpha &\rightarrow \theta(\alpha), & \theta(\alpha)_j &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_j > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha_j \leq 0, \end{cases} \\ \alpha, \beta &\rightarrow \alpha \cdot \beta, & (\alpha \cdot \beta)_j &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_j \beta_j, \\ \alpha &\rightarrow \alpha_{\pm}, & \alpha_{\pm} &\stackrel{\text{def}}{=} \pm \alpha \cdot \theta(\pm \alpha), \\ \alpha, \beta &\rightarrow \alpha|\beta, & (\alpha|\beta)_j &\stackrel{\text{def}}{=} \min\{(\alpha_-)_j, (\beta_+)_j\}, \\ \alpha, \beta &\rightarrow [\alpha|\beta], & [\alpha|\beta] &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha|\beta - \beta|\alpha, \\ \alpha, \beta &\rightarrow \alpha \overset{\circ}{+} \beta, & \alpha \overset{\circ}{+} \beta &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha|\beta + \beta|\alpha, \\ \alpha &\rightarrow \overset{\circ}{\alpha}, & \overset{\circ}{\alpha} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\alpha \overset{\circ}{+} (-\alpha)) \equiv \frac{1}{2}(\alpha_+ + \alpha_-), \\ \alpha, \beta &\rightarrow \alpha \circ \beta, & \alpha \circ \beta &= \alpha \cdot \overset{\circ}{\beta}, \\ \alpha, \beta &\rightarrow [\alpha, \beta], & [\alpha, \beta] &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_+ \cdot \beta_- - \alpha_- \cdot \beta_+. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Еще одна полезная операция будет введена далее, в (3.18). Различные свойства операций (3.2) перечислены в [10]. Последняя из операций (3.2) была названа в [10] *коммутатором*. Операция $\overset{\circ}{+}$ была названа *аномалией*.

Отметим, что операция $\circ$, введенная в (3.2), ассоциативна, а коммутатор (3.2) представим в виде

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha. \quad (3.3)$$

Однако операция $\circ$ не дистрибутивна по отношению к сложению по второму аргументу:

$$\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma - \alpha \cdot (\beta \overset{\circ}{+} \gamma),$$

где $\overset{\circ}{+}$ обозначает аномалию. Поэтому “тождество Якоби” для коммутатора (3.3) имеет нестандартный вид (см. [10]).

Будем говорить, что векторы решетки коммутируют, если их коммутатор равен нулю. Простое вычисление показывает, что

$$\alpha \overset{\circ}{+} \beta = 0 \iff [\alpha, \beta] = 0 \iff [\alpha|\beta] = 0. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.1. *Векторы из $\mathbb{Z}^n$ коммутируют тогда и только тогда, когда принадлежат одной нормальной подрешетке. Нормальная подрешетка может быть определена как максимальное коммутативное подмножество в данной решетке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что

$$[\alpha, \beta] = 0 \iff \alpha_+ \cdot \beta_- = \alpha_- \cdot \beta_+ = 0.$$

Последнее (двойное) равенство означает, что соответствующие компоненты векторов α и β не могут иметь разные знаки, т.е. эти векторы принадлежат одной и той же нормальной подрешетке.

Рассмотрим резонансную решетку $\mathcal{R} = \mathcal{R}[f]$ в $\mathbb{Z}^n$, порожденную набором частот $f \in \mathbb{N}^n$ осциллятора (3.1). Напомним, что $\mathcal{M}$ – подмножество в $\mathcal{R}$ минимальных резонансных векторов, а $\mathcal{M}_\sigma$ – нормальные подмножества в $\mathcal{M}$, по которым разлагаются резонансные векторы σ согласно (2.2). В силу леммы 3.1 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Каждое подмножество $\mathcal{M}_\sigma$ коммутативно. Все элементы $\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma$ в разложении (2.2) коммутируют друг с другом.*

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{N}^\# = \mathbb{C}^M \times \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

и определим на нем связи трех разных типов.

Напомним, что M – число элементов в множестве $\mathcal{M}$. Комплексные координаты на первом сомножителе $\mathbb{C}^M$ в (3.5) будем нумеровать элементами $\sigma \in \mathcal{M}$; обозначим эти координаты через A_σ . Вещественные координаты во втором сомножителе $\mathbb{R}^n$ в (3.5) обозначим через S_j , $j = 1, \dots, n$. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим $S^\alpha = S_1^{\alpha_1} \dots S_n^{\alpha_n}$.

Связи эрмитова типа. Для любого минимального вектора σ противоположный ему вектор $(-\sigma)$ соответствует сопряжению комплексной координаты:

$$\overline{A_\sigma} = A_{-\sigma}. \quad (3.6)$$

Связи коммутативного типа. Если два семейства $\{\rho\}$, $\{\sigma\}$ коммутирующих минимальных векторов задают одинаковые линейные комбинации:

$$\sum_\rho k_\rho \rho = \sum_\sigma m_\sigma \sigma, \quad k_\rho, m_\sigma \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

то имеет место соотношение

$$\prod_\rho (A_\rho)^{k_\rho} = \prod_\sigma (A_\sigma)^{m_\sigma}. \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Равенство (3.7) назовем *приводимым*, если коэффициенты k_ρ , m_σ допускают представление в виде суммы: $k_\rho = k'_\rho + k''_\rho$, $m_\sigma = m'_\sigma + m''_\sigma$, такое, что $\sum_\rho k'_\rho \rho = \sum_\sigma m'_\sigma \sigma$, причем $k'_\rho, k''_\rho, m'_\sigma, m''_\sigma \in \mathbb{Z}_+$ и $(\sum_\rho k'_\rho) (\sum_\rho k''_\rho)$ не равно нулю. В остальных случаях будем говорить, что равенство (3.7) *неприводимо*. Нетрудно показать, что число неприводимых равенств (3.7), а значит, и число независимых связей коммутативного типа (3.8) конечны.

Связи некоммутативного типа. Если минимальные векторы ρ и σ не коммутируют и $\rho \neq -\sigma$, то выполнено соотношение

$$A_\rho A_\sigma = S^{\rho+\sigma} \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_{\rho+\sigma}} A_\varkappa^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}, \quad (3.9)$$

где $\overset{\circ}{+}$ – аномалия, введенная в (3.2), $n_{\varkappa}^{\rho+\sigma}$ – коэффициенты разложения (2.2) вектора $\rho+\sigma$ по минимальным векторам из $\mathcal{M}_{\rho+\sigma}$. Отметим, что если ρ и σ коммутируют, то соотношение (3.9) вытекает из связей коммутативного типа (3.8).

Обозначим через $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^\#$ подмногообразие в пространстве (3.5), заданное совместно всеми уравнениями связей (3.6), (3.8), (3.9).

Для каждого неминимального резонансного вектора σ определим функцию

$$A_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma = 0, \\ \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma} A_{\varkappa}^{n_{\varkappa}^\sigma}, & \text{если } \sigma \neq 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

на подмногообразии $\mathcal{N}$; здесь подмножества $\mathcal{M}_\sigma$ и числа $n_{\varkappa}^\sigma$ определены согласно (2.2). В силу связей коммутативного типа эта функция не зависит от выбора разложения (2.2) элемента σ по минимальным.

Теперь зададим скобки на $\mathcal{N}$, следуя [10]:

$$\{S_j, S_k\} = 0, \quad \{S_j, A_\rho\} = i\rho_j A_\rho, \quad \{A_\rho, A_\sigma\} = -if_{\rho,\sigma}(S)A_{\rho+\sigma}, \quad (3.11)$$

где $j, k = 1, \dots, n$, векторы ρ, σ принадлежат $\mathcal{M}$, а полиномы $f_{\rho,\sigma}$ на $\mathbb{R}^n$ определяются следующим образом:

$$f_{\rho,\sigma}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{[\rho, \sigma]}{s} s^{\rho \overset{\circ}{+} \sigma}, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (3.12)$$

В (3.12) коммутатор $[\rho, \sigma]$ и аномалия $\rho \overset{\circ}{+} \sigma$ заданы формулами (3.2), а дробь вида $\frac{\gamma}{s}$ использована для краткого обозначения суммы:

$$\frac{\gamma}{s} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{s_j}. \quad (3.13)$$

Отметим, что в силу (3.4) функции (3.12) не имеют особенностей при $s = 0$.

Напомним, что функция на пуассоновом многообразии называется *функцией Казимира*, если она находится в инволюции со всеми функциями. Мы будем называть функцию *квазиказимиром*, если на своей нулевой поверхности уровня она находится в инволюции со всеми функциями. Очевидно, нулевая поверхность уровня квазиказимира является пуассоновым подмногообразием в исходном пуассоновом многообразии.

ТЕОРЕМА 3.1. *Формулы (3.11) задают скобки Пуассона на многообразии $\mathcal{N}$. Функция*

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, S \rangle \quad (3.14)$$

является функцией Казимира на $\mathcal{N}$. Для каждого минимального вектора ρ функция

$$C_\rho \stackrel{\text{def}}{=} A_\rho A_{-\rho} - S^{2\rho} \quad (3.15)$$

является квазиказимиром на $\mathcal{N}$; точнее, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \{C_\rho, S_j\} &= \{C_\rho, A_\rho\} = \{C_\rho, A_{-\rho}\} = 0, \\ \{C_\rho, A_\sigma\} &= 2i \frac{\sigma \circ \rho}{S} A_\sigma C_\rho, \quad \sigma \neq \pm \rho. \end{aligned}$$

Здесь $\overset{\circ}{\rho}$ и $\sigma \circ \rho$ определены согласно (3.2). В частности, в случае $n = 2$ квазиказимир (3.15) является функцией Казимира для скобки (3.11).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Подмногообразие $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$, заданное как совместная нулевая поверхность уровня квазиказимиров:

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}|_{\{C_\rho=0 \mid \rho \in \mathcal{M}\}},$$

назовем *резонансным пуассоновым многообразием*.

ГИПОТЕЗА 3.1. Резонансное пуассоново многообразие $\mathcal{N}_0$ совпадает с $\mathcal{N}$ при $n \geq 3$.

Отметим, что на резонансном многообразии в силу связей коммутативного и некоммутативного типов имеют место соотношения

$$A_\rho A_\sigma = S^{\rho \overset{\circ}{+} \sigma} A_{\rho+\sigma} \quad (3.16)$$

для любых минимальных векторов ρ, σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. На резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ для любых резонансных (не обязательно минимальных) векторов ρ, σ выполнены соотношения (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 11.1, которое мы приведем в § 11 при рассмотрении квантового случая.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если резонансный вектор $\varkappa$ представим в виде комбинации резонансных векторов $\varkappa^{(j)}$, т. е.

$$\varkappa = k_1 \varkappa^{(1)} + \dots + k_l \varkappa^{(l)}, \quad k_j \in \mathbb{N},$$

то на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ выполнено соотношение

$$S^{k_1 \varkappa^{(1)} \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} k_l \varkappa^{(l)}} A_\varkappa = \prod_{j=1}^l (A_{\varkappa^{(j)}})^{k_j}. \quad (3.17)$$

Здесь использована l -позиционная аномалия, которая определена следующим образом:

$$\alpha_1 \overset{\circ}{+} \dots \overset{\circ}{+} \alpha_l \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{l-1} ((\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \overset{\circ}{+} \alpha_{m+1}) = \sum_{m=1}^{l-1} ((\alpha_l + \dots + \alpha_{m+1}) \overset{\circ}{+} \alpha_m). \quad (3.18)$$

В правой части (3.18) участвует 2-позиционная аномалия $\overset{\circ}{+}$, введенная в списке операций (3.2).

Далее, построим отображение $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{N}^\#$, порожденное симметриями (1.4) резонансного осциллятора:

$$A_\sigma(q, p) = \bar{z}^\sigma z^{\sigma-}, \quad \sigma \in \mathcal{M}, \quad (3.19)$$

$$S_j(q, p) = \bar{z}_j z_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Здесь z_j – комплексные координаты на $\mathbb{R}^{2n}$, заданные формулами

$$z_j \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{f_j}{2}} q_j + \frac{i}{\sqrt{2f_j}} p_j, \quad (3.21)$$

где q, p – декартовы координаты в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$.

ЛЕММА 3.2. *Образ симметричного отображения (3.19), (3.20), $(q, p) \rightarrow (A, S)$, совпадает с той частью $\mathcal{N}_0^+$ резонансного многообразия $\mathcal{N}_0$, на которой*

$$S_1 \geq 0, \dots, S_n \geq 0. \quad (3.22)$$

Размерность резонансного многообразия $\mathcal{N}_0$ равна $2n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функции (3.19), (3.20) удовлетворяют уравнениям связей. Связи эрмитова типа вытекают из очевидного свойства

$$(-\rho)_{\pm} = \rho_{\mp} \quad \forall \rho \in \mathbb{Z}^n.$$

Связи некоммутативного типа вытекают из равенства

$$(\rho + \sigma)_{\pm} = \rho_{\pm} + \sigma_{\pm} - (\rho \overset{\circ}{+} \sigma),$$

которое справедливо для любых $\rho, \sigma \in \mathbb{Z}^n$. В частности, если векторы ρ, σ коммутируют, то $\rho \overset{\circ}{+} \sigma = 0$, и тогда мы имеем

$$(\rho + \sigma)_{\pm} = \rho_{\pm} + \sigma_{\pm}.$$

Отсюда вытекают связи коммутативного типа для функций (3.19).

Далее, из соотношений (3.17) вне точек, где $S_j = 0$, любую функцию A_{σ} , (3.19), можно выразить через независимые функции $A_{\rho^{(1)}}, \dots, A_{\rho^{(n-1)}}$, $S_1, \dots, S_n$ (см. далее замечание 4.1). Поэтому $\dim \mathcal{N}_0 = 2n - 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Подмногообразие $\mathcal{N}_0^+ \subset \mathcal{N}_0$, заданное неравенствами (3.22), является пуассоновым. Симметричное отображение (3.19), (3.20) из $\mathbb{R}^{2n}$ в $\mathcal{N}_0^+$ пуассоново, т.е. переводит каноническую скобку на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$ в скобку (3.11). Функции Казимира C , (3.14), при этом отображении соответствует гамильтониан осциллятора H , (3.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 2.5 из [10].

§ 4. Частичная комплексная структура на резонансном многообразии

Покажем, как ввести на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ частичную комплексную структуру, которая порождена симметричным отображением (3.19), (3.20) и согласована со скобками Пуассона (3.11).

Каждый минимальный вектор $\varkappa \in \mathcal{M}$ и вектор комплексных координат $z = (z_1, \dots, z_n)$, (3.21), задают функцию $z^{\varkappa}$ на $\mathbb{R}^{2n}$. Из (3.19), (3.20) следует, что

$$z^{\varkappa} = \frac{A_{-\varkappa}(q, p)}{S(q, p)^{\varkappa_-}}.$$

Таким образом, при симметричном отображении (3.19), (3.20) функции $z^{\varkappa}$ на $\mathbb{R}^{2n}$ соответствует функция

$$W_{\varkappa} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_{-\varkappa}}{S^{\varkappa_-}} \quad (4.1)$$

на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$. Функция (4.1) гладкая везде, кроме некоторого подмножества границы $\partial \mathcal{N}_0^+$, где возможны особенности за счет зануления координат S_j .

Произвольный резонансный вектор σ можно разложить по минимальным согласно (2.2) и определить

$$W_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma} (W_\varkappa)^{n_\varkappa^\sigma}, \quad (4.2)$$

где функция $W_\varkappa$ для минимального $\varkappa$ задана в (4.1). В частности, $W_0 \equiv 1$.

ЛЕММА 4.1. *Функция W_σ , (4.2), на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ не зависит от выбора представления (2.2) вектора $\sigma \in \mathcal{R}$ в виде комбинации минимальных векторов. Для любых $\rho, \sigma \in \mathcal{R}$ имеет место тождество*

$$W_{\rho+\sigma} = W_\rho W_\sigma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соотношений (3.8), (3.16).

Теперь покажем, как строятся локальные комплексные координаты на $\mathcal{N}_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Набор линейно независимых векторов $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n-1)} \in \mathcal{M}$ назовем *резонансным базисом*, если для любого резонансного вектора $\sigma \in \mathcal{R}$ коэффициенты его разложения по векторам $\rho^{(k)}$ – это целые числа:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} N_\sigma^{(k)} \rho^{(k)}, \quad N_\sigma^{(k)} \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

ЛЕММА 4.2. *Резонансный базис существует.*

(Конкретный вид резонансных базисов см. далее в примерах 4.1, 5.2 и в замечании 6.4.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если вектор σ минимальный, то из формулы (4.3) и связей типа (3.17) следует тождество

$$S^{N_\sigma^{(1)} \rho^{(1)} + \dots + N_\sigma^{(n-1)} \rho^{(n-1)}} A_\sigma = \prod_{j=1}^{n-1} (A_{\rho^{(j)}})^{N_\sigma^{(j)}}.$$

С каждым резонансным базисом можно связать комплексные координаты w_k , определенные с помощью (4.1):

$$w_k \stackrel{\text{def}}{=} W_{\rho^{(k)}}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (4.4)$$

Как следует из замечания 4.1, функции (4.2) выражаются через эти координаты мероморфно:

$$W_\sigma = w^{N_\sigma} \left(W_\sigma = \prod_{k=1}^{n-1} (w_k)^{N_\sigma^{(k)}} \right). \quad (4.5)$$

При переходе от резонансного базиса $\{\rho^{(j)}\}$ к другому резонансному базису $\{\tilde{\rho}^{(j)}\}$ изменение $w \rightarrow \tilde{w}$ координаты (4.4) происходит по степенному закону:

$$\tilde{w} = w^{\mathfrak{N}} \left(\tilde{w}_j = \prod_{k=1}^{n-1} (w_k)^{\mathfrak{N}_k^j} \right). \quad (4.6)$$

Здесь целочисленная матрица $\mathfrak{N}$ задается разложением базисных векторов $\tilde{\rho}^{(j)}$ по базисным векторам $\rho^{(k)}$:

$$\tilde{\rho}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{N}_k^j \rho^{(k)}. \quad (4.7)$$

Отметим, что обратная матрица $\mathfrak{N}^{-1}$ также имеет целые коэффициенты.

Теперь все многообразие $\mathcal{N}_0$, за исключением точки 0 (где $S = 0$ и $A_\sigma = 0$ для любого σ), мы покроем картами и каждой карте соотнесем резонансный базис так, чтобы все координатные функции $w_1, \dots, w_{n-1}$, (4.4), отвечающие этому базису, не имели особенностей везде в данной карте.

ПРИМЕР 4.1. В случае трехчастотного резонанса $f_1 : f_2 : f_3$ рассмотрим три резонансных базиса.

Первый базис состоит из двух (коммутирующих) векторов резонансной решетки:

$$(-f_2, f_1, 0), \quad (\mu, \nu, 1), \quad (4.8)$$

где μ, ν – решение диофантова уравнения (2.3) с условием (2.4). Эта пара векторов имеет отрицательной только первую компоненту. Поэтому соответствующие данному резонансному базису комплексные координаты, определенные с помощью (4.4), (4.1), не имеют особенностей при $S_1 \neq 0$.

Второй базис получается из (4.8) циклической перенумерацией частот $f_1 : f_2 : f_3 \rightarrow f_2 : f_3 : f_1$ и перестановкой компонент $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2)$ резонансных векторов. Комплексные координаты, отвечающие этому базису, не имеют особенностей при $S_2 \neq 0$.

Третий базис получается еще одной циклической перестановкой. Комплексные координаты здесь не имеют особенностей при $S_3 \neq 0$.

Эти три базиса задают локальные карты (и комплексные координаты в них), покрывающие все резонансное многообразие, за исключением точки 0.

Для общего многочастотного резонанса мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. (а) Всевозможные резонансные базисы $\{\rho^{(j)}\}$ порождают атлас карт на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0 \setminus \{0\}$ и определяют частичную комплексную структуру типа³ $(n-1, 1)$. Общей для всех карт вещественной координатой служит функция Казимира S , (3.14), а локальные комплексные координаты задаются формулой (4.4). При переходе из карты в карту комплексные координаты изменяются голоморфно согласно (4.6).

(б) Формулы (4.1), (4.2) задают представление $\sigma \rightarrow W_\sigma$ резонансной решетки $\mathcal{R}$ в пространстве мероморфных функций на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$. При комплексном сопряжении функции W_σ изменяются следующим образом:

$$\overline{W_\sigma} = S^\sigma W_{-\sigma}, \quad |W_\sigma|^2 = S^\sigma. \quad (4.9)$$

(с) Частичная комплексная структура на $\mathcal{N}_0 \setminus \{0\}$ согласована с пуассоновой структурой (3.11) в смысле [31]. Мероморфные функции (4.1), (4.2) находятся в инволюции друг с другом:

$$\{W_\rho, W_\sigma\} = 0. \quad (4.10)$$

³Модельным пространством карты служит $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ с $(n-1)$ -й комплексной координатой и одной вещественной координатой (см. [31]).

Кроме того,

$$\{W_\rho, \overline{W_\sigma}\} = i \frac{\rho \cdot \sigma}{S} W_\rho \overline{W_\sigma}, \quad (4.11)$$

где использованы обозначения (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве здесь нужны только последние две формулы. Формула (4.10) вытекает из (3.11), (3.16) и свойства коммутатора на решетке $\mathbb{Z}^n$:

$$[-\rho, -\sigma] = -[\rho, \sigma].$$

Аналогично, из (3.11), (3.16) и тождества на $\mathbb{Z}^n$

$$[-\rho, \sigma] + \rho_- \cdot \sigma + \rho \cdot \sigma_- = \rho \cdot \sigma$$

следует (4.11). Теорема доказана.

§ 5. Симплектические листы и резонансные координаты Дарбу

Введем на $\mathcal{N}_0$ угловые координаты Φ_σ по формуле

$$A_\sigma = S^{\overset{\circ}{\sigma}} \exp\{i\Phi_\sigma\} \quad \text{или} \quad W_\sigma = |W_\sigma| \exp\{-i\Phi_\sigma\}. \quad (5.1)$$

Здесь использовано обозначение $\overset{\circ}{\sigma}$, введенное в (3.2), и учтены уравнения связей (3.6), (3.16):

$$|A_\sigma| = S^{\overset{\circ}{\sigma}}.$$

ЛЕММА 5.1. Угловые координаты находятся в инволюции друг с другом:

$$\{\Phi_\sigma, \Phi_\rho\} = 0. \quad (5.2)$$

Кроме того,

$$\{A_\sigma, \Phi_\rho\} = \frac{\rho \circ \sigma}{S} A_\sigma, \quad \{S_j, \Phi_\rho\} = \rho_j, \quad (5.3)$$

где операция $\rho \circ \sigma$ определена в (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.11), (3.12) и (3.3) вытекают соотношения

$$\{e^{i\Phi_\sigma}, e^{i\Phi_\rho}\} = 0, \quad \{A_\sigma, e^{i\Phi_\rho}\} = i \frac{\rho \circ \sigma}{S} A_\sigma e^{i\Phi_\rho}, \quad \{S_j, e^{i\Phi_\rho}\} = i \rho_j e^{i\Phi_\rho},$$

а из них следуют (5.2), (5.3). Лемма доказана.

Пусть теперь $\{S = s(C)\}$ – некоторая кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, параметризованная координатой Казимира (3.14). Представим координаты S на резонансном многообразии в виде

$$S = s(C) + \sum_{k=1}^{n-1} x^{(k)} \rho^{(k)}, \quad (5.4)$$

где $\{\rho^{(k)}\}$ – некоторый резонансный базис, $x^{(k)} \in \mathbb{R}$. Таким образом, $x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$ – это новые координатные функции на резонансном многообразии относительно семейства “начальных точек” $s(C)$ и базиса $\{\rho^{(k)}\}$.

Очевидно, эти функции находятся в инволюции друг с другом, а из равенств (5.3) следует, что их скобки с угловыми координатами равны константам:

$$\{x^{(j)}, x^{(k)}\} = 0, \quad \{x^{(k)}, \Phi_\sigma\} = N_\sigma^{(k)} \quad (5.5)$$

(числа $N_\sigma^{(k)}$ заданы в (4.3)). В частности, если ввести специальные угловые координаты

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\rho^{(k)}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (5.6)$$

отвечающие данному резонансному базису, то из (5.2), (5.3) получаем канонические скобки:

$$\{x^{(j)}, x^{(k)}\} = 0, \quad \{\varphi_j, \varphi_k\} = 0, \quad \{x^{(j)}, \varphi_k\} = \delta_{j,k}.$$

Таким образом, функции $x^{(j)}$, φ_j , $j = 1, \dots, n-1$, и функция Казимира C задают координаты Дарбу всюду на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$, кроме подмногообразия особенностей $\partial\mathcal{N}_0^+$.

Рассмотрим теперь симплектические листы в $\mathcal{N}_0$ (т.е. поверхности, на которых скобка (3.11) невырождена). Все листы лежат на подмногообразиях $\{C = \text{const}\}$. Скобка Пуассона на листах порождается скобкой (3.11).

ЛЕММА 5.2. *Симплектические листы в резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ имеют максимальную размерность $2n-2$ (напомним, что $\dim \mathcal{N}_0 = 2n-1$). В области $\mathcal{N}_0^+$ замыкание всех листов компактно, однако если хотя бы одна из частот f_j больше 1, то лист может не совпадать со своим замыканием. Все вырожденные листы лежат на границе $\partial\mathcal{N}_0^+$.*

ПРИМЕР 5.1. В трехчастотном случае ($n = 3$) резонансное многообразие имеет размерность $\dim \mathcal{N}_0 = 5$. Если все частоты f_j , $j = 1, 2, 3$, равны 1, то имеется только один нульмерный лист: точка 0, а остальные симплектические листы четырехмерны и совпадают со своим замыканием. Если какая-то частота f_j больше 1, то все точки вида

$$\{A_\rho = 0, S_k = S_l = 0\} \in \mathcal{N}_0 \quad (5.7)$$

(где набор j, k, l — это перестановка чисел 1, 2, 3) являются нульмерными листами. При этом листы Ω максимальной размерности 4 получаются из своего замыкания $\bar{\Omega}$ путем удаления точек вида (5.7), отвечающих неединичным частотам.

В общем многочастотном случае все введенные выше функции на $\mathcal{N}_0$, в частности комплексные координаты w_j и канонические координаты $x^{(j)}$, φ_j , можно сузить на симплектические листы максимальной размерности.

ТЕОРЕМА 5.1. *Симплектические листы $\Omega \subset \mathcal{N}_0^+ \cap \{C = \text{const}\}$ максимальной размерности в резонансном многообразии $\mathcal{N}_0$ являются кэлеровыми многообразиями относительно комплексной структуры, индуцированной из $\mathcal{N}_0$. Симплектическая (кэлерова) форма на листах имеет вид*

$$\omega = dx \wedge d\varphi, \quad (5.8)$$

где x, φ — координаты (5.4), (5.6), заданные каким-либо резонансным базисом $\{\rho^{(k)}\} \subset \mathcal{R}$ и начальной точкой $s(C)$. Форма (5.8) имеет особенности на множестве $\bar{\Omega} \setminus \Omega$ (которое принадлежит границе $\partial\mathcal{N}_0^+$).

ПРИМЕР 5.2. В трехчастотном случае рассмотрим резонансный базис

$$\rho^{(1)} = (f_2, -f_1, 0), \quad \rho^{(2)} = (\mu, \nu, 1), \quad (5.9)$$

где μ, ν – решение диофантова уравнения (2.3) с условием (2.4). Этот базис, в отличие от (4.8), некоммутативный: $[\rho^{(1)}, \rho^{(2)}] \neq 0$. Введем комплексные координаты, отвечающие базису (5.9), по формулам (4.4), (4.1):

$$w_1 = \frac{A_{-\rho^{(1)}}}{S_2^{f_1}}, \quad w_2 = \frac{A_{-\rho^{(2)}}}{S_1^{|\mu|}}. \quad (5.10)$$

Они не имеют особенностей в области

$$S_1 \neq 0, \quad S_2 \neq 0. \quad (5.11)$$

На границе этой области лежит вершина $v = (0, C/f_2, 0)$ классического симплекса $\{S \in \mathbb{R}_+^3 \mid \langle f, S \rangle = C\}$, которой соответствует значение комплексных переменных $w_1 = w_2 = 0$.

В координатах (5.10) кэлерова форма на листах Ω задается формулой $\omega = i \sum_{k,l=1,2} (\partial^2 F / \partial \bar{w}_k \partial w_l) d\bar{w}_k \wedge dw_l$ через кэлеров потенциал⁴

$$F = S_1 + S_2 + S_3 - \frac{C}{\omega_2} \ln S_2 + \text{const}. \quad (5.12)$$

Здесь функции S_j выражаются через $|w_1|, |w_2|$ по формулам (4.9):

$$|w_1|^2 = \frac{S_1^{f_2}}{S_2^{f_1}}, \quad |w_2|^2 = \frac{S_3 S_2^\nu}{S_1^{|\mu|}}, \quad (5.13)$$

с учетом соотношения (3.14). В частности, при $|w_1| \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} S_1 &\sim \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} |w_1|^{2/f_2}, \\ S_2 &\sim \frac{C}{f_2} - \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} |w_1|^{2/f_2} - \frac{f_3}{f_2} \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_3/f_2} |w_1|^{2|\mu|/(f_1 f_2)} |w_2|^2, \\ S_3 &\sim \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_3/f_2} |w_1|^{2|\mu|/f_2} |w_2|^2. \end{aligned}$$

Хотя комплексная структура определена и в вершине v классического симплекса, принадлежащей замыканию карты (5.11), вблизи этой вершины кэлеров потенциал (5.12) имеет вид

$$F \sim \text{const} + \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} |w_1|^{2/f_2}, \quad |w_1| \rightarrow 0, \quad |w_2| \rightarrow 0.$$

Если $f_2 \neq 1$, то отвечающая этому потенциалу симплектическая форма

$$\omega \sim \left(\frac{C}{f_2}\right)^{f_1/f_2} \frac{i d\bar{w}_1 \wedge dw_1}{|w_1|^{2(f_2-1)/f_2}}, \quad |w_1| \rightarrow 0, \quad |w_2| \rightarrow 0, \quad (5.14)$$

⁴Общая формула для потенциала в n -частотном случае имеет вид $F = |S| - \ln S^\nu + \text{const}$, где v – вершина классического симплекса (см. (6.1)). Эти формулы выводятся из общего определения кэлеровой формы $\omega = \sum_{k,l} (\langle \{w_k, \bar{w}_l\} \rangle)^{-1} dw_l \wedge d\bar{w}_k$ с использованием (4.11).

имеет (слабую) особенность в точке замыкания симплектического листа $\overline{\Omega}$, отвечающей $w = 0$. (Аналогичные вычисления в двухчастотном случае см. в [14].)

Мера Лиувилля на листе Ω имеет вид

$$\frac{1}{2}|\omega \wedge \omega| = \frac{S_1 S_2 S_3}{(f_1)^2 S_1 + (f_2)^2 S_2 + (f_3)^2 S_3} \frac{|d\bar{w} \wedge dw|}{|w_1|^2 |w_2|^2},$$

а объем Лиувилля всего листа Ω задается формулой

$$\int_{\Omega} \frac{|\omega \wedge \omega|}{2} = \frac{2\pi^2 C^2}{f_1 f_2 f_3}.$$

В n -частотном случае имеем

$$\int_{\Omega} |\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n-1}| = \frac{(2\pi)^{n-1} C^{n-1}}{f_1 \dots f_n}.$$

Формула для объема Лиувилля следует, например, из представления (5.8) и сводится к вычислению объема симплекса в x -пространстве, заданном неравенствами $S_j \geq 0$ (см. (5.4)).

§ 6. Резонансные симплексы

Из формул (1.1) следует, что совместный спектр квантовых операторов действия $\hat{S}_j = \hat{z}_j^* \hat{z}_j$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ совпадает с решеткой $\hbar\mathbb{Z}_+^n = \{S = \hbar m \mid m \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Эту спектральную решетку можно рассматривать как подмножество классического пространства $\mathbb{R}_+^n$, в котором принимает значения координата S на резонансном многообразии $\mathcal{N}_0^+$.

Назовем *классическими симплексами* следующие подмножества в $\mathbb{R}_+^n$:

$$\blacktriangle[c] \stackrel{\text{def}}{=} \{S \mid \langle f, S \rangle = c\}, \quad c \geq 0. \quad (6.1)$$

Квантовые резонансные симплексы определим как непустые пересечения классических симплексов со спектральной решеткой $\hbar\mathbb{Z}_+^n$.

Каждому числу $M \in \mathbb{Z}_+$ сопоставим его *диофантов осто*:

$$\Delta[M] \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{Z}_+^n \mid \langle f, k \rangle = M\}. \quad (6.2)$$

Здесь $f = (f_1, \dots, f_n)$ – резонансный набор частот, подчиненный условиям (A), (B).

Обозначим через $d[M]$ число точек в диофантовом остове $\Delta[M]$ и назовем это число *кратностью остова*.

ЛЕММА 6.1. *Все квантовые симплексы имеют вид $\hbar\Delta[M]$ при $d[M] \geq 1$, причем*

$$\hbar\Delta[M] \subset \blacktriangle[\hbar M].$$

Спектр осциллятора $\hat{H} = \langle f, \hat{S} \rangle$, (1.3), состоит из точек $\hbar M$, для которых $d[M] \geq 1$, причем кратность остова $d[M]$ совпадает с кратностью собственного значения $\hbar M$.

Таким образом, квантовый симплекс – это то подмножество в спектре действий, которое соответствует данной точке спектра резонансного осциллятора при отражении $S \rightarrow \langle f, S \rangle$.

ЛЕММА 6.2. Если хотя бы одна из частот f_j равна 1, то $d[M] \geq 1$ при всех $M \geq 0$, т. е. в этом случае квантовый резонансный симплекс соответствует каждому числу $M \in \mathbb{Z}_+$ и все остовы $\Delta[M]$ не пусты.

В общем случае вопрос о том, при каких M диофантов остов не пуст: $\Delta[M] \neq \emptyset$, достаточно сложен.

Рассмотрим сначала двухчастотный случай ($n = 2$). Воспользуемся следующим утверждением, которое вытекает из леммы 2.1.

ЛЕММА 6.3. Любое число $M \in \mathbb{Z}_+$ можно единственным образом представить в виде

$$M = M_{12}f_1f_2 + m_{21}f_1 + m_{12}f_2, \quad (6.3)$$

где числа M_{12}, m_{12}, m_{21} целые, причем

$$M_{12} \geq -1, \quad 0 \leq m_{12} \leq f_1 - 1, \quad 0 \leq m_{21} \leq f_2 - 1. \quad (6.4)$$

Зная число M_{12} в представлении (6.3), можно вычислить кратность $d[M]$, как это было сделано в [13].

ЛЕММА 6.4. Кратность собственного значения $\hbar M$ квантового осциллятора $\hat{H} = f_1\hat{S}_1 + f_2\hat{S}_2$ дается формулой

$$d[M] = M_{12} + 1.$$

Диофантов остов $\Delta[M]$ пуст тогда и только тогда, когда $M_{12} = -1$ в представлении (6.3) числа M . Точка $\hbar M$ принадлежит спектру $\hat{H}$ тогда и только тогда, когда $M_{12} \geq 0$ в представлении (6.3). Все собственные значения вида $\hbar(m_{21}f_1 + m_{12}f_2)$, где m_{21}, m_{12} подчинены (6.4), и только они имеют кратность 1.

ПРИМЕР 6.1. Пусть $f_1 = 3, f_2 = 2$. Тогда

$$d[1] = 0, \quad d[0] = d[2] = d[3] = d[4] = d[5] = d[7] = 1, \quad d[6] = 2.$$

В общем n -частотном случае для каждой пары индексов $j, k \in (1, \dots, n)$ рассмотрим представление числа M , аналогичное (6.3):

$$M = M_{jk}f_jf_k + m_{kj}f_j + m_{jk}f_k, \quad \text{где } 0 \leq m_{kj} \leq f_k - 1. \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Справедлива оценка

$$d[M] \geq M_{jk} + 1.$$

Таким образом, если хотя бы для одной пары индексов j, k выполнено $M_{jk} \geq 0$, то $d[M] \geq 1$, т. е. диофантов остов $\Delta[M]$ не пуст, а число $\hbar M$ принадлежит спектру осциллятора $\hat{H}$, (1.3). Если при этом $M_{jk} \geq 1$, то $d[M] \geq 2$, т. е. собственное значение $\hbar M$ кратное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6.5) следует, что число M можно представить в виде $M = \langle f, k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, выбрав

$$k_j = lf_k + m_{kj}, \quad k_k = (M_{jk} - l)f_j + m_{jk}, \quad k_m = 0, \quad m \neq j, k,$$

где l – любое фиксированное целое из отрезка $0 \leq l \leq M_{jk}$. Количество способов выбрать l равно $M_{jk} + 1$. Поэтому кратность $d[M]$ не меньше, чем $M_{jk} + 1$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 6.2. Если $M \geq (f_j - 1)(f_k - 1)$ для некоторой пары индексов j, k , то $d[M] \geq 1$. Это следует из теоремы 6.1 и того, что $M_{jk} \geq 0$ (поскольку если $M_{jk} = -1$, то $M = -f_j f_k + m_{kj} f_j + m_{jk} f_k < (f_j - 1)(f_k - 1)$).

ПРИМЕР 6.3. Если в трехчастотном случае ($n = 3$) все $f_j \leq 4$, то $d[M] \geq 1$ для любых $M \in \mathbb{Z}_+$. Действительно, так как частоты f_j взаимно простые, то хотя бы одна из них равна 1, а далее используем лемму 6.2.

Пусть теперь $f_1 = 5$, $f_2 = 3$, $f_3 = 2$. Тогда $d[1] = 0$; в этом случае число $\hbar$ не принадлежит спектру осциллятора $5\hat{S}_1 + 3\hat{S}_2 + 2\hat{S}_3$, а все остальные числа $\hbar M$ ($M \geq 0$, $M \neq 1$) принадлежат этому спектру.

Среди непустых диофантовых остовов выделяется особый случай, когда они состоят ровно из одной точки, т. е. $d[M] = 1$. Этот случай тривиален.

Далее мы предполагаем, что $d[M] \geq 2$.

Точку $r \in \Delta[M]$ назовем *вершиной* диофантова остова, если существует резонансный базис такой, что для всех $l \in \Delta[M]$ вектор $l - r$ сонаправлен со всеми векторами базиса (т. е. все коэффициенты разложения $l - r$ по векторам базиса неотрицательны).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Имеет место следующий факт: *каждому резонансному базису соответствует не более одной вершины*. Действительно, если бы для данного базиса $\{\rho\}$ нашлись сразу две вершины r' и r'' , то получилось бы, что оба вектора $r' - r''$ и $r'' - r'$ сонаправлены с базисом $\{\rho\}$. Это возможно, только если $r' - r'' = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Имеет место следующий факт: *разным базисам может отвечать одна и та же вершина*. Например, в случае $f = (1, 1, f_3)$ рассмотрим два резонансных базиса:

$$\rho^{(1)} = (1, -1, 0), \quad \rho^{(2)} = (-f_3, 0, 1) \quad \text{и} \quad \tilde{\rho}^{(1)} = (1, -1, 0), \quad \tilde{\rho}^{(2)} = (0, -f_3, 1).$$

Первый базис некоммутативный из примера 5.2, а второй базис коммутативный из примера 4.1. Для каждого $M \in \mathbb{Z}_+$ получим, что точка $r = (0, M, 0)$ является вершиной остова

$$\Delta[M] = \{l \in \mathbb{Z}_+^3 \mid l_1 + l_2 + f_3 l_3 = M\}$$

по отношению к обоим базисам. Действительно, для каждой точки $l \in \Delta[M]$ имеем два разложения:

$$l = r + N^{(1)}\rho^{(1)} + N^{(2)}\rho^{(2)} = r + \tilde{N}^{(1)}\tilde{\rho}^{(1)} + \tilde{N}^{(2)}\tilde{\rho}^{(2)},$$

с неотрицательными коэффициентами

$$N^{(1)} = l_1 + f_3 l_3, \quad N^{(2)} = l_3, \quad \tilde{N}^{(1)} = l_1, \quad \tilde{N}^{(2)} = l_3.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Рассмотрим трехчастотный случай. Имеет место следующий факт: *если диофантов остов $\Delta[M]$ не пуст, то в нем существует вершина (обозначим ее через $r^{(2)}$), отвечающая базису (5.9); координаты этой вершины задаются следующими формулами*⁵:

$$r_3^{(2)} = l_3^* \stackrel{\text{def}}{=} \min_{l \in \Delta[M]} l_3, \quad r_1^{(2)} = \min_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_3 = l_3^*}} l_1, \quad r_2^{(2)} = \max_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_3 = l_3^*}} l_2. \quad (6.6)$$

⁵Отметим, что в силу уравнения $f_1 l_1 + f_2 l_2 = M - f_3 l_3^*$ минимум l_1 и максимум l_2 по множеству $\{l \in \Delta[M] \mid l_3 = l_3^*\}$ достигаются на одном и том же векторе l .

Для доказательства достаточно рассмотреть разложение векторов $l - r^{(2)}$ (при $l \in \Delta[M]$) по базису (5.9):

$$\begin{aligned} l_1 - r_1^{(2)} &= N^{(1)}f_2 + N^{(2)}\mu, & l_2 - r_2^{(2)} &= -N^{(1)}f_1 + N^{(2)}\nu, \\ l_3 - r_3^{(2)} &= N^{(2)}, \end{aligned}$$

и показать, что для каждого $l \in \Delta[M]$ коэффициенты разложения $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$ неотрицательны. Оценка $N^{(2)} \geq 0$ вытекает из третьего соотношения и формулы для $r_3^{(2)}$, а оценка $N^{(1)} \geq 0$ вытекает из первого соотношения, если учесть, что в нем $\mu < 0$, $r_1^{(2)} < f_2$. Действительно, из предположения того, что $N^{(1)} < 0$, следует

$$l_1 = (r_1^{(2)} + N^{(1)}f_2) + N^{(2)}\mu < 0,$$

что противоречит условию $l_1 \geq 0$.

Пусть теперь (j, k, s) – циклическая перестановка чисел $(1, 2, 3)$. Рассмотрим резонансный базис, полученный путем соответствующей циклической перестановки базиса (5.9). Тогда по отношению к этому базису следующая точка $r^{(k)}$ является вершиной остова $\Delta[M]$:

$$r_s^{(k)} = l_s^* \stackrel{\text{def}}{=} \min_{l \in \Delta[M]} l_s, \quad r_j^{(k)} = \min_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_s = l_s^*}} l_j, \quad r_k^{(k)} = \max_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_s = l_s^*}} l_k. \quad (6.6a)$$

При этом если в представлении (6.5) число M_{jk} не меньше нуля, то формулы (6.6a) принимают вид

$$r_s^{(k)} = 0, \quad r_j^{(k)} = m_{kj}, \quad r_k^{(k)} = M_{jk}f_j + m_{jk}. \quad (6.6b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Формула (6.6b) легко обобщается на n -частотный случай. Пусть в представлении (6.3) число M_{12} неотрицательное. Тогда точка

$$r^{(2)} = \left(m_{21}, M_{12}f_1 + m_{12}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2} \right) \quad (6.7)$$

является вершиной диофантова остова $\Delta[M]$, а в качестве соответствующего резонансного базиса можно взять базис

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= (f_2, -f_1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ \rho^{(2)} &= (\mu_3, \nu_3, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \rho^{(n-1)} &= (\mu_n, \nu_n, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Это n -мерный аналог базиса (5.9). В данных формулах μ_i, ν_i – это решение диофантова уравнения

$$\mu_i f_1 + \nu_i f_2 + f_i = 0,$$

подчиненное условию $0 \leq \nu_i \leq f_1 - 1$ (здесь $l = 3, \dots, n$).

Взяв другую пару индексов j, k , для которых $M_{jk} \geq 0$ в представлении (6.5), можно аналогично предъявить другие вершины $r^{(k)}$ остова $\Delta[M]$.

Отметим, что каждой вершине $r \in \Delta[M]$ соответствует точка $\hbar r$ в квантовом симплексе; назовем ее *вершиной квантового симплекса*.

ЛЕММА 6.5. При $\hbar \rightarrow 0$ и $M \sim \hbar^{-1}$ вершины квантового симплекса $\hbar\Delta[M]$ близки к вершинам классического симплекса $\Delta[\hbar M]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При большом M все числа M_{jk} в представлениях (6.5) также велики (и заведомо положительны). Вершина квантового симплекса, сопоставленная каждой паре индексов j, k по формуле вида (6.7), где $j = 1, k = 2$, отличается от вершины вида $(0, \frac{\hbar M}{f_2}, 0, \dots, 0)$ классического симплекса на вектор

$$\left(\hbar m_{21}, -\frac{\hbar m_{21} f_1}{f_2}, 0, \dots, 0 \right),$$

который стремится к нулю при $\hbar \rightarrow 0$. Таким образом, для вершин вида (6.7) утверждение леммы 6.5 выполнено, а остальные вершины квантового симплекса $\hbar\Delta[M]$ при $M \sim \hbar^{-1} \rightarrow \infty$ расположены ближе к вершинам классического симплекса $\Delta[\hbar M]$, чем вершины вида (6.7); поэтому для них утверждение также выполнено.

§ 7. Квантовые листы и пространства голоморфных сечений

Пару $R = (r, \{\rho\})$, состоящую из вершины r и отвечающего ей резонансного базиса $\{\rho\}$, мы назовем *репером* диофантового остова $\Delta[M]$.

Каждому реперу сопоставим пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ как модельное пространство локальной карты. Пусть заданы две карты, занумерованные реперами $R = (r, \{\rho\})$ и $\tilde{R} = (\tilde{r}, \{\tilde{\rho}\})$. Комплексные координаты w и $\tilde{w}$ в них определяются резонансными базисами $\{\rho\}$ и $\{\tilde{\rho}\}$ по формуле (4.4). Склеивка карт осуществляется по формуле (4.6), в которой $\mathfrak{N}$ – целочисленная матрица перехода (4.7) от базиса $\{\rho\}$ к базису $\{\tilde{\rho}\}$. Результатом склейки будет некоторое комплексное многообразие. Назовем его *квантовым листом* и обозначим $\Omega_{\hbar}[M]$.

Напомним, что через $\Omega = \Omega[c]$ мы обозначаем симплектические листы максимальной размерности, лежащие в $\mathcal{N}_0^+ \subset \mathcal{N}_0$ на поверхностях уровня функции Казимира $\{C = c\}$, (3.14). Конструкция комплексной структуры на $\mathcal{N}_0$ (см. формулы (4.1), (4.9)) показывает, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Классический симплектический лист $\Omega = \Omega[\hbar M]$ плотно вложен в квантовый лист $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$, т. е.

$$\Omega \subset \bar{\Omega} \approx \Omega_{\hbar}.$$

Это вложение сохраняет комплексную структуру.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Квантовые листы $\Omega_{\hbar}$ компактны.

Отметим, что классическую элерову форму ω нельзя расширить с классических листов на квантовые листы при наличии неединичных частот (это видно, например, из (5.14)). Мы покажем, как задать квантовую элерову форму на квантовых листах с помощью групповой структуры резонансной решетки, следуя общей идеологии из [31], [32]. Однако сначала введем пространство голоморфных сечений над квантовым листом.

Построим вначале пучок ростков голоморфных функций над квантовым листом и определим гильбертово пространство сечений этого пучка.

На квантовом листе $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$ в карте с номером R рассмотрим семейство функций U_R^t , заданных формулой

$$U_R^t \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\hbar^{|r|} r!}{\hbar^{|t|} t!}} W_{t-r}, \quad t \in \Delta[M]. \quad (7.1)$$

Здесь через r обозначена вершина репера R , а мероморфные функции W_{σ} определены формулой (4.5) через комплексные координаты в карте с номером R . В данных координатах эти функции являются мономами, поскольку r – вершина остова $\Delta[M]$.

Если точка t в (7.1) совпадает с какой-то вершиной остова $\Delta[M]$, то мы будем также использовать другое обозначение:

$$V_R^T \stackrel{\text{def}}{=} U_R^t, \quad (7.2)$$

где T – любой репер с вершиной t . Таким образом, для разных реперов T с одной и той же вершиной t функция V_R^T одна и та же. Очевидно, что $V_R^R \equiv 1$.

В силу группового свойства отображения $\rho \rightarrow W_{\rho}$ (лемма 4.1) при любом $t \in \Delta[M]$ на пересечении карт с номерами R и Q выполнено соотношение

$$U_Q^t = V_Q^R U_R^t. \quad (7.3)$$

В частности, для любых трех реперов R, L, Q на пересечении соответствующих трех карт имеем тождество

$$V_Q^L = V_Q^R V_R^L. \quad (7.4)$$

Свойство (7.4) означает, что набор голоморфных функций $\{V_Q^R\}$, заданных на пересечениях карт квантового листа $\Omega_{\hbar}$, можно рассматривать как *функции склейки пучка* $\Pi(\Omega_{\hbar})$ *ростков голоморфных функций на* $\Omega_{\hbar}$.

При этом формула (7.3) показывает, что для любого фиксированного $t \in \Delta[M]$ набор функций $U^t = \{U_R^t\}$ задает сечение пучка $\Pi(\Omega_{\hbar})$. Таким образом, получаем следующий результат.

ЛЕММА 7.1. *Точкам t диофантова остова $\Delta[M]$ соответствуют сечения U^t пучка $\Pi(\Omega_{\hbar})$ ростков голоморфных функций на квантовом листе $\Omega_{\hbar}$. Эти сечения линейно независимы.*

Введем теперь гильбертову структуру в пространстве сечений пучка $\Pi(\Omega_{\hbar})$ так, чтобы набор сечений $\{U^t \mid t \in \Delta[M]\}$ был ортонормированным:

$$(U^k, U^t) = \delta_{k,t}. \quad (7.5)$$

Тем самым, мы построили некоторое каноническое гильбертово пространство $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$ голоморфных сечений над квантовым листом $\Omega_{\hbar}$, порожденное групповой структурой резонансной решетки согласно (7.1) и лемме 4.1.

Вид числовых коэффициентов в (7.1) назовем *фоковским*. Он имитирует вид коэффициентов обычного нормированного базиса Фока в пространстве голоморфных функций на евклидовом пространстве [36].

Обозначим через $\mathcal{K}$ *воспроизводящее ядро* гильбертова пространства $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$. Оно определяется как сечение пучка $(\Pi^* \times \Pi)(\Omega_{\hbar})$, которое в карте с номером R задано формулой

$$\mathcal{K}_R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_t |\psi_R^t|^2. \quad (7.6)$$

Здесь суммирование ведется по любому ортонормированному базису сечений $\{\psi^t\}$ пучка $\Pi(\Omega_{\hbar})$. Хорошо известно [37], что сечение (7.6) не зависит от выбора базиса. Поэтому, выбирая в качестве базиса набор сечений $\{U^t\}$, получаем следующую формулу для воспроизводящего ядра в карте с номером R :

$$\mathcal{K}_R = \sum_{t \in \Delta[M]} |U_R^t|^2. \quad (7.7)$$

Остается подставить сюда явные выражения (7.1), (4.9).

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть число $M \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $d[M] \geq 1$, т. е. диофантов остов $\Delta[M]$ не пуст, и пусть полином $\mathcal{P}^{[M]}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ задан формулой

$$\mathcal{P}^{[M]}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\langle t, f \rangle = M \\ t \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{s^t}{\hbar^{|t|} t!}. \quad (7.8)$$

Гильбертово пространство голоморфных сечений $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$ над квантовым листом $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$ имеет размерность $d[M]$. Воспроизводящее ядро этого пространства в карте с номером R вычисляется через полином (7.8) следующим образом:

$$\mathcal{K}_R = \frac{r! \hbar^{|r|}}{S^r} \mathcal{P}^{[M]}(S). \quad (7.9)$$

Здесь через r обозначена вершина репера R , а координаты S перенесены на $\Omega_{\hbar}$ с замыкания симплектического листа $\Omega[\hbar M]$ согласно (4.9), (3.14), т. е.

$$S^{\rho} = |W_{\rho}|^2, \quad \langle f, S \rangle = \hbar M,$$

где $\{\rho\}$ – базис, отвечающий реперу R .

В локальных комплексных координатах w в карте с номером R сечение (7.9) является полиномом

$$\mathcal{K}_R = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}_r} \frac{r!}{\hbar^{|\sigma| + |-\sigma|} (r + \sigma)!} \bar{w}^{N_{\sigma}} w^{N_{\sigma}}. \quad (7.10)$$

Здесь подмножество $\mathcal{R}_r \subset \mathcal{R}$ задано условием

$$\sigma \in \mathcal{R}_r \iff r + \sigma \in \Delta[M], \quad (7.11)$$

а векторы $N_{\sigma} \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ определены разложением (4.3) векторов σ по резонансному базису из репера R с вершиной r .

§ 8. Квантовая воспроизводящая мера и квантовая кэлерава структура

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$, определенное формулой (7.5), теперь можно попытаться записать в виде интеграла по мере, следуя [31], [32]:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_{\hbar}} \rho_{\psi|\varphi} dm_{\hbar}. \quad (8.1)$$

Здесь φ, ψ – два произвольных сечения из $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$, их взаимная функция плотности $\rho_{\psi|\varphi}$ на $\Omega_{\hbar}$ задана формулой

$$\rho_{\psi|\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{\psi}\varphi}{\mathcal{K}}, \quad (8.2)$$

а воспроизводящая мера $dm_{\hbar}$ в локальных координатах w в карте с номером R определена равенством

$$dm_{\hbar} = \mathcal{K}_R \mathcal{J}_R d\bar{w} dw. \quad (8.3)$$

В этом представлении меры мы используем воспроизводящее ядро $\mathcal{K}$, (7.9), и некоторое сечение $\mathcal{J}$ пучка $(\Pi^{-1*} \times \Pi^{-1})(\Omega_{\hbar})$.

ТЕОРЕМА 8.1. *Скалярное произведение в пространстве голоморфных сечений $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$ над квантовым листом $\Omega_{\hbar}$ вычисляется по формулам (8.1)–(8.3), причем сечение $\mathcal{J}$ в (8.3), в карте с номером R , имеет вид*

$$\mathcal{J}_R = \frac{S^{r-\Sigma\rho}}{r! \hbar^{|r|}} Q^{[M]}(S). \quad (8.4)$$

Здесь r – вершина репера R , $\{\rho\}$ – соответствующий резонансный базис, $\Sigma\rho = \sum_{j=1}^{n-1} \rho^{(j)}$, $M = \langle f, r \rangle$, а функция $Q^{[M]}$ задана формулой

$$Q^{[M]}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_1 \cdots s_n}{\hbar} \int_0^\infty y^{M+|f|-1} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^{n-1} s_j y^{f_j}\right\} dy. \quad (8.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы эквивалентно проверке “воспроизводящего свойства” для полинома $\mathcal{K}_R$, (7.6)–(7.10):

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int \mathcal{K}_R(w'\bar{w}) \mathcal{K}_R(w\bar{w}'') \mathcal{J}_R dw d\bar{w} = \mathcal{K}_R(w'\bar{w}''),$$

где в аргументах полинома $\mathcal{K}_R$ используется покомпонентное умножение точек из $\mathbb{C}^{n-1}$. Заметим, что если координаты w связаны с координатами z симметричным отображением

$$w_j = z^{\rho^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

то по теореме о вычетах полином $\mathcal{K}_R$ можно представить в форме интеграла:

$$\mathcal{K}_R(w'\bar{w}'') = \frac{\hbar^{|r|} r!}{2\pi (z'\bar{z}'')^r} \int_0^{2\pi} \exp\left\{i\langle f, r \rangle t + \frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^n z'_j \bar{z}''_j e^{-if_j t}\right\} dt.$$

Теперь рассмотрим хорошо известную формулу Фока

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{C}^n} \exp\left\{\frac{\langle z', \bar{z} \rangle + \langle \bar{z}'', z \rangle - \langle \bar{z}, z \rangle}{\hbar}\right\} dz d\bar{z} = \exp\left\{\frac{\langle z', \bar{z}'' \rangle}{\hbar}\right\},$$

заменяем в ней z'_j на $z'_j e^{-if_j t'}$, z''_j на $z''_j e^{-if_j t''}$ и проинтегрируем по t' и t'' от 0 до 2π . Тогда в силу упомянутого интегрального представления для $\mathcal{K}_R$ получим тождество

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\mathbb{C}^n} \mathcal{K}_R(w'\bar{w}) \mathcal{K}_R(w\bar{w}'') \frac{|z^r|^2}{2\pi \hbar^{|r|+1} r!} e^{-|z|^2/\hbar} dz d\bar{z} = \mathcal{K}_R(w'\bar{w}'').$$

Сделаем в этом тождестве под знаком интеграла замену $w_1 = z^{\rho^{(1)}}, \dots, w_{n-1} = z^{\rho^{(n-1)}}$, $w_n = z^f$. Якобиан замены равен⁶

$$\left(\langle f, f \rangle \frac{|w_1 \cdots w_n|}{|z_1 \cdots z_n|} \right)^2.$$

Тогда получим искомое “воспроизводящее свойство” для $\mathcal{K}_R$, в котором плотность $\mathcal{J}_R$ задается формулой

$$\mathcal{J}_R(w\bar{w}) = \frac{1}{2\pi\hbar^{|r|+1} r! \langle f, f \rangle^2 |w_1 \cdots w_{n-1}|^2} \int_{\mathbb{C}} \frac{|z^r|^2 |z_1 \cdots z_n|^2}{|w_n|^2} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} dw_n d\bar{w}_n.$$

Здесь под знаком интеграла координаты z_j выражены через $w_1, \dots, w_{n-1}, w_n$ по формулам

$$z_j = w_1^{p_j^{(1)}} \cdots w_n^{p_j^{(n)}},$$

где $p^{(1)}, \dots, p^{(n)}$ – векторы, составляющие обратную матрицу по отношению к матрице из векторов $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n-1)}, \rho^{(n)} \equiv f$, т. е.

$$\sum_{l=1}^n p_j^{(l)} \rho_k^{(l)} = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, n;$$

при этом $p_j^{(n)} = f_j / \langle f, f \rangle$, а все числа $p_j^{(l)}$, $1 \leq l \leq n-1$, целые.

Переходя в последнем интеграле к координатам x, φ по формуле

$$w_n = \sqrt{x \langle f, f \rangle} e^{i\varphi}$$

и учитывая, что полярный угол пробегает промежуток $[0, 2\pi \langle f, f \rangle]$, получим новую формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_R &= \frac{1}{\hbar^{|r|+1} r!} \prod_{k=1}^{n-1} |w_k|^{2(\langle r, p^{(k)} \rangle + |p^{(k)}| - 1)} \\ &\times \int_0^\infty x^{\langle f, r \rangle + |f| - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^n x^{f_j} \prod_{k=1}^{n-1} |w_k|^{2p_j^{(k)}} \right\} dx. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что вместо $|w_j|$ здесь удобнее использовать координаты $S_1, \dots, S_n$ (см. (4.9)). После замены $x = S^{f/\langle f, f \rangle} y$ (под знаком последнего интеграла) окончательно получим (8.4), (8.5).

Из теоремы 8.1, в частности, следует, что для любого ортонормированного базиса $\{\psi^t\}$ в пространстве $\mathcal{L}(\Omega_\hbar)$ в силу (7.6) имеем

$$\dim \mathcal{L}(\Omega_\hbar) = \sum_t \|\psi^t\|^2 = \sum_t \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} \frac{|\psi^t|^2}{\mathcal{K}} dm_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_\hbar} dm_\hbar.$$

Поэтому из леммы 6.1 и теоремы 7.1 получаем следующий результат.

⁶Здесь учтено тождество для детерминанта матрицы, составленной из векторов резонансного базиса и вектора частот: $|\det(\rho^{(1)} \cdots \rho^{(n-1)} f)| = \langle f, f \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Кратность собственного значения $\hbar M$ резонансного осциллятора (1.3) вычисляется по формуле*

$$d[M] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_{\hbar}} dm_{\hbar}. \quad (8.6)$$

Здесь квантовая воспроизводящая мера имеет вид

$$dm_{\hbar} = (\mathcal{P}^{[M]} Q^{[M]})(S) \frac{d\bar{w} dw}{S^{\Sigma\rho}}, \quad (8.7)$$

где $\mathcal{P}^{[M]}$ и $Q^{[M]}$ заданы в (7.8), (8.5), через w обозначены комплексные координаты в локальной карте с номером R на квантовом листе $\Omega_{\hbar}[M]$, а ρ – резонансный базис из репера R .

Теперь построим на квантовом листе $\Omega_{\hbar}$ замкнутую 2-форму $\omega_{\hbar}$, порождаемую воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$. В карте с номером R и с комплексными координатами w эта форма задается формулой

$$\omega_{\hbar} = i\hbar \sum_{l,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial \bar{w}_l \partial w_j} (\ln \mathcal{K}_R) d\bar{w}_l \wedge dw_j. \quad (8.8)$$

От выбора карты эта форма не зависит. Мы назовем ее, следуя [31], [32], *квантовой кэлеровой формой* на $\Omega_{\hbar}$.

Вычислим асимптотику квантовой кэлеровой формы, а также воспроизводящей меры при $\hbar \rightarrow 0$.

ЛЕММА 8.1. *Вне окрестности точек, где хотя бы одна координата S_j обращается в нуль, воспроизводящее ядро $\mathcal{K}_R$, (7.9), и плотность $\mathcal{J}_R$, (8.4), имеют следующие асимптотики при $\hbar \rightarrow 0$ и $M \sim 1/\hbar$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_R &= c_r \frac{\exp\{|S|/\hbar\}}{S^r} (\varkappa(S) + O(\hbar)), \\ \mathcal{J}_R &= \hbar^{-|r|-1/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{r!} S^r \exp\left\{-\frac{|S|}{\hbar}\right\} \left(\frac{S_1 \cdots S_n}{S^{\rho^{(1)} + \cdots + \rho^{(n-1)}}} \varkappa(S) + O(\hbar) \right). \end{aligned}$$

Здесь ρ и r – резонансный базис и вершина репера R соответственно, а функция $\varkappa$ и константа c_r заданы формулами

$$\begin{aligned} \varkappa(S) &= (f_1^2 S_1 + \cdots + f_n^2 S_n)^{-1/2}, \\ c_r &= \hbar^{|r|+1/2} r! e^{-|r|} \sqrt{2\pi} (f_1^2 r_1 + \cdots + f_n^2 r_n)^{1/2} \sum_{\substack{\langle t-r, f \rangle = 0 \\ t \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{r^t}{t!}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $\mathcal{K}_R$ и $\mathcal{J}_R$. Эти уравнения приведены далее в замечании 13.1. Асимптотика при $\hbar \rightarrow 0$ решения этих уравнений имеет ВКБ-вид:

$$\mathcal{K}_R = \exp\left\{\frac{F}{\hbar}\right\}(\varphi + O(\hbar)), \quad \mathcal{J}_R = \exp\left\{-\frac{F}{\hbar}\right\}(\psi + O(\hbar)),$$

где F – кэлеров потенциал классической симплектической формы ω (см. формулу (5.12)). Для амплитуд φ , ψ получаются простые уравнения, решение которых приводит к формулам, указанным в лемме.

Напомним (предложение 7.1), что квантовый лист $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$ отождествляется с замыканием $\overline{\Omega}$ классического симплектического листа $\Omega = \Omega[\hbar M]$ резонансного многообразия. Из леммы 8.1 и формул (8.7), (8.8) получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8.2. *В точках квантового листа $\Omega_{\hbar}$, которые соответствуют точкам классического листа Ω , квантовая кэлерова форма (8.8) приближается классической симплектической формой (5.8), а воспроизводящая мера (8.3) при $\hbar \rightarrow 0$, $M \sim 1/\hbar$ приближается классической мерой Лиувилля $dm = \frac{1}{(n-1)!} |\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n-1}|$, а именно*

$$\omega_{\hbar} = \omega + O(\hbar), \quad dm_{\hbar} = dm + O(\hbar). \quad (8.9)$$

В точках квантового листа $\Omega_{\hbar}$, которые соответствуют граничным точкам $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ классического листа, асимптотика (8.9) нарушается; в этих точках классическая симплектическая форма ω и мера dm сингулярны.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Из (8.9) следует, что при достаточно малом $\hbar$ и $M \sim 1/\hbar$ квантовая кэлерова форма $\omega_{\hbar}$ невырождена в точках классического симплектического листа. Однако она может вырождаться на его границе, оставаясь гладкой. Невырожденность формы $\omega_{\hbar}$ в точке границы, соответствующей вершине $r \in \Delta[M]$, имеет место тогда и только тогда, когда все точки, полученные из r с помощью базисных векторов, попадают в квантовый симплекс, т. е.

$$r + \rho^{(j)} \in \Delta[M], \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (8.10)$$

Это следует из явной формулы для $\omega_{\hbar}$ в комплексных координатах w на квантовом листе, где вершине r соответствует $w = 0$:

$$\omega_{\hbar}|_{w=0} = i\hbar \sum_{r+\rho^{(j)} \in \Delta[M]} c_{\rho^{(j)}}^r d\bar{w}_j \wedge dw_j, \quad c_{\rho^{(j)}}^r = \frac{r!}{\hbar^{|\rho_+^{(j)}| - |\rho_-^{(j)}|} (r + \rho^{(j)})!}.$$

Пример, в котором квантовая форма вырождена, дает резонанс $1 : 2 : 3$ при $M = 2$ в вершине $r = (2, 0, 0)$ с базисом (4.8).

Отметим, что результат, аналогичный теореме 8.2, имеет место для целого ряда других квантовых систем, в которых алгебра симметрий не является алгеброй Ли [13], [14], [31], [32]: квантовые геометрические объекты $\omega_{\hbar}$, $dm_{\hbar}$ определены глобально и гладко на $\Omega_{\hbar}$, в отличие от классических геометрических объектов.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Асимптотические разложения (8.9) могут быть продлены до любого порядка малости по $\hbar$:

$$\omega_{\hbar} \simeq \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k \lambda_k, \quad dm_{\hbar} = dm \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k d_k \right). \quad (8.11)$$

Здесь коэффициенты λ_k – замкнутые 2-формы, а коэффициенты d_k – гладкие функции на Ω . При этом каждая d_k задается явными формулами [32] через формы $\omega, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

После подстановки (8.11) в (8.6) получаем формулу для кратности $d[M]$, в которой участвуют лишь первые $n-1$ функций d_k , причем параметр $\hbar$ можно

положить равным 1 (см. [32]):

$$d[M] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega[M]} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k\right) \frac{1}{(n-1)!} |\omega \wedge \dots \wedge \omega|.$$

§ 9. Когомологии квантового листа

Поскольку квантовый лист $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$ компактен, то все группы когомологий $H^{2k}(\Omega_{\hbar})$, где $k = 1, \dots, n-1$, нетривиальны. При этом класс когомологий квантовой кэлеровой формы $\frac{1}{2\pi\hbar}\omega_{\hbar}$, заданной в (8.8), обязан быть целочисленным [38].

Рассмотрим для простоты случай $n = 3$.

ТЕОРЕМА 9.1. *Нестягиваемые 2-циклы в квантовом листе $\Omega_{\hbar}[M]$ соответствуют ребрам классического резонансного симплекса $\blacktriangle[\hbar M]$, а именно если (j, k, s) – циклическая перестановка чисел $(1, 2, 3)$, то ребру, соединяющему j -ю и k -ю вершины, соответствует (положительно ориентированный) цикл $\Sigma_{jk} = \{f_j S_j + f_k S_k = \hbar M\}$. Выполнены формулы*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega_{\hbar} = \left[\frac{r_k^{(k)}}{f_j} \right]. \quad (9.1)$$

Здесь $r^{(k)}$ – вершина (6.6a) диофантова остова $\Delta[M]$, а квадратными скобками обозначена целая часть числа. Если $M_{jk} \geq 0$ в представлении (6.5), то формула (9.1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega_{\hbar} = M_{jk}. \quad (9.1a)$$

При $\hbar \rightarrow 0$, $M \sim 1/\hbar$ целое число (9.1) приближается величиной

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega = \frac{M}{f_j f_k}, \quad (9.2)$$

где ω – классическая симплектическая форма на листе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $j = 1$, $k = 2$. Вместо комплексных координат w_j , (5.10), отвечающих резонансному базису $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, (5.9), введем вещественные координаты X_j , Φ_j (см. (5.1)):

$$w_j = \sqrt{X_j} \exp\{-i\Phi_j\}, \quad 0 < X_j < \infty, \quad 0 \leq \Phi_j < 2\pi.$$

На ребре $\{S_3 = 0\}$ классического симплекса $\blacktriangle[\hbar M]$, соединяющем первую и вторую вершины, имеем $w_2 = 0$ (см. (5.13)), и поэтому

$$\omega_{\hbar}|_{\Sigma_{12}} = \hbar \frac{\partial}{\partial X_1} \left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \ln \mathcal{K}_R(X) \right) \Big|_{X_2 \rightarrow 0} dX_1 \wedge d\Phi_1.$$

При движении вдоль ребра $\{S_3 = 0\}$ от первой вершины, где $S_1 = \hbar M/f_1$, $S_2 = 0$, ко второй вершине, где $S_2 = \hbar M/f_2$, $S_1 = 0$, величина X_1 меняется от ∞ до 0 (см. (5.13)). Поэтому

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{12}} \omega_{\hbar} = \left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \ln \mathcal{K}_R(X) \right) \Big|_{\substack{X_1 \rightarrow \infty \\ X_2 \rightarrow 0}}.$$

Напомним, что полином $\mathcal{K}_R$ задан формулами (7.10), (7.11):

$$\mathcal{K}_R(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}_r} c_\sigma^r X_1^{N_\sigma^{(1)}} X_2^{N_\sigma^{(2)}}, \quad c_\sigma^r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r!}{\hbar^{|\sigma|+|\sigma|-} (r+\sigma)!},$$

где числа $N_\sigma^{(j)} \in \mathbb{Z}_+$ определяются разложением (4.3):

$$\sigma = N_\sigma^{(1)} \rho^{(1)} + N_\sigma^{(2)} \rho^{(2)}.$$

При $X_2=0$ в сумме, задающей полином $\mathcal{K}_R$, остаются лишь слагаемые с $N_\sigma^{(2)}=0$. Отсюда получаем

$$\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \ln \mathcal{K}_R(X) \right) \Big|_{\substack{X_1 \rightarrow \infty \\ X_2 \rightarrow 0}} = \max_{N_\sigma^{(1)} \rho^{(1)} \in \mathcal{R}_r} N_\sigma^{(1)}.$$

Включение $N_\sigma^{(1)} \rho^{(1)} \in \mathcal{R}_r$ означает, что вектор $r + N_\sigma^{(1)} \rho^{(1)}$ содержится в квантовом симплексе $\Delta[M]$, где $M = \langle f, r \rangle$. Это равносильно выполнению неравенств

$$r_l + N_\sigma^{(1)} \rho_l^{(1)} \geq 0, \quad l = 1, 2, 3.$$

Напомним, что базису (5.9), который мы используем, соответствует вершина $r \equiv r^{(2)}$, (6.6). Таким образом, приходим к системе неравенств

$$r_1^{(2)} + N_\sigma^{(1)} f_2 \geq 0, \quad r_2^{(2)} - N_\sigma^{(1)} f_1 \geq 0, \quad r_3^{(2)} \geq 0.$$

Из второго неравенства очевидно, что максимальное значение $N_\sigma^{(1)}$, при котором выполняется указанная система неравенств, равно $\left\lfloor \frac{r_2^{(2)}}{f_1} \right\rfloor$. Таким образом,

$$\max_{N_\sigma^{(1)} \rho^{(1)} \in \mathcal{R}_r} N_\sigma^{(1)} = \left\lfloor \frac{r_2^{(2)}}{f_1} \right\rfloor,$$

что и доказывает формулу (9.1).

Если $M_{12} \geq 0$ в представлении (6.5), то в силу формул (6.6b), задающих вершину, имеем

$$r_2^{(2)} = M_{12} f_1 + m_{12}.$$

Здесь $0 \leq m_{12} \leq f_1 - 1$. Поэтому в данном случае $\left\lfloor \frac{r_2^{(2)}}{f_1} \right\rfloor = M_{12}$, и мы получаем формулу (9.1a).

Далее, в силу теоремы 8.2 интеграл (9.1) при $\hbar \rightarrow 0$ приближается величиной $\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega$, где ω – классическая симплектическая форма на листе. В данном случае ее удобно записать в виде (5.8) в координатах Дарбу x_1, x_2 , (5.4), φ_1, φ_2 , (5.6). Выберем в (5.4) следующее семейство начальных точек: $s(\hbar M) = \hbar r^{(2)}$; тогда

$$S_1 = \hbar r_1^{(2)} + f_2 x_1 + \mu x_2, \quad S_2 = \hbar r_2^{(2)} - f_1 x_1 + \nu x_2, \quad S_3 = \hbar r_3^{(2)} + x_2,$$

откуда получаем, что на ребре $\{S_3 = 0\}$, соединяющем первую и вторую вершины, координата x_2 не меняется: $x_2 = -\hbar r_3^{(2)}$. Следовательно,

$$\omega|_{\Sigma_{12}} = dx_1 \wedge d\varphi_1.$$

Здесь φ_1 меняется от 0 до 2π , а при движении вдоль ребра от первой вершины ко второй координата x_1 меняется от $\hbar(r_2^{(2)} - r_3^{(2)})/f_1$ до $\hbar(\mu r_3^{(2)} - r_1^{(2)})/f_2$. Поэтому справедлива формула (9.2):

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{12}} \omega = \frac{1}{f_1 f_2} (f_1 r_1^{(2)} + f_2 r_2^{(2)} - (f_1 \mu + f_2 \nu) r_3^{(2)}) = \frac{M}{f_1 f_2}.$$

(Здесь учтены диофантово уравнение (2.3) и равенство $\langle f, r^{(2)} \rangle = M$.)

Целые числа M_{jk} , (9.1a), мы назовем *главными квантовыми числами* листа $\Omega_{\hbar}[M]$. Отметим, что эти числа не являются независимыми, поскольку все они однозначно задаются числом M (см. также следствие 9.2).

Коэффициенты m_{jk} в представлении (6.5) назовем *присоединенными числами* листа $\Omega_{\hbar}[M]$. Из формул (9.2) и (6.5) получаем

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Класс когомологий классической симплектической формы на листе задается формулой*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma_{jk}} \omega = M_{jk} + \frac{m_{jk}}{f_j} + \frac{m_{kj}}{f_k}, \quad (9.3)$$

где M_{jk} – главные, а m_{jk} – присоединенные числа листа, причем

$$0 \leq \frac{m_{jk}}{f_j} + \frac{m_{kj}}{f_k} \leq 2 - \left(\frac{1}{f_j} + \frac{1}{f_k} \right) < 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Из (9.3) следует, что если хотя бы одна из частот f_j не равна 1, то класс когомологий классической симплектической формы $\omega/(2\pi\hbar)$ на листах с ненулевыми присоединенными числами не будет целочисленным. Именно поэтому форма ω не удобна для построения квантовых геометрических конструкций.

Теперь вычислим класс квантовой 4-формы $\omega_{\hbar} \wedge \omega_{\hbar}$. Поскольку при $n = 3$ листы $\Omega[\hbar M] \subset \Omega_{\hbar}[M]$ четырехмерны, то указанная 4-форма задает их квантовый объем.

ТЕОРЕМА 9.2. *В трехчастотном случае ($n = 3$) квантовый объем вычисляется следующим образом:*

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\Omega} \frac{\omega_{\hbar} \wedge \omega_{\hbar}}{2} = \frac{1}{2} \underset{=(1,2,3)}{\mathfrak{S}}_{(j,k,s)} (\tilde{r}_j - r_j^{(s)}) \left[\frac{r_s^{(s)}}{f_k} \right], \quad (9.4)$$

где вершины $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}$ определены, как в замечании 6.3, $\tilde{r}$ – одна из этих трех вершин, а сумма $\mathfrak{S}$ берется по всем циклическим перестановкам тройки индексов $(1, 2, 3)$. Например, если $\tilde{r} = r^{(2)}$, то правая часть (9.4) имеет вид

$$\frac{1}{2} \left((r_1^{(2)} - r_1^{(3)}) \left[\frac{r_3^{(3)}}{f_2} \right] + (r_2^{(2)} - r_2^{(1)}) \left[\frac{r_1^{(1)}}{f_3} \right] \right).$$

Здесь и в формуле (9.4) квадратные скобки обозначают целую часть числа. Если $M_{12} \geq 0$, $M_{23} \geq 0$ и $M_{31} \geq 0$ в представлении (6.5), то (9.4) принимает вид

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\Omega} \frac{\omega_{\hbar} \wedge \omega_{\hbar}}{2} = \frac{1}{2} (M_{ks} (M_{sj} f_s + m_{sj}) + M_{jk} m_{js}). \quad (9.4a)$$

Здесь (j, k, s) – любая циклическая перестановка тройки $(1, 2, 3)$.

Доказательство теоремы 9.2 приведено в приложении.

Отметим, что при $\hbar \rightarrow 0$, $M \sim 1/\hbar$ квантовый вихревой объем (9.4) приближается классическим объемом

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\Omega} \frac{\omega \wedge \omega}{2} = \frac{M^2}{2f_1 f_2 f_3}. \quad (9.5)$$

При этом оба числа (9.4a) и (9.5) приближают размерность $d[M]$, (8.6), но не совпадают с ней.

Кроме того, теорема 9.2 дает интересные тождества для главных и присоединенных квантовых чисел.

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Пусть $n = 3$. Предположим, что в представлении (6.5) все три числа M_{12} , M_{23} , M_{31} неотрицательны. Тогда выполнены тождества

$$\begin{aligned} M_{31}M_{12}f_1 + M_{31}m_{12} + M_{23}m_{21} &= M_{12}M_{23}f_2 + M_{12}m_{23} + M_{31}m_{32} \\ &= M_{23}M_{31}f_3 + M_{23}m_{31} + M_{12}m_{13}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы (9.4a): все три указанных числа совпадают с удвоенным квантовым объемом.

§ 10. Квантовая резонансная алгебра

Для любых $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ определим

$$(a)_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (a + \hbar) \cdots (a + m\hbar) & \text{при } m \geq 1, \\ 1 & \text{при } m = 0, \\ a(a - \hbar) \cdots (a - \hbar(|m| - 1)) & \text{при } m \leq -1. \end{cases} \quad (10.1)$$

Для векторов $s \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$(s)_\rho \stackrel{\text{def}}{=} (s_1)_{\rho_1} \cdots (s_n)_{\rho_n}, \quad (10.1a)$$

где каждый из сомножителей задается с помощью (10.1).

Введенные операции (10.1), (10.1a) являются обобщением известных “символов Похгаммера” в случае отрицательных нижних индексов. При нашем модифицированном определении этих символов выполняется важное свойство, сформулированное в следующей лемме.

ЛЕММА 10.1. Операция $\rho \rightarrow (s)_\rho$ обладает аналогом группового свойства:

$$(s)_{\rho+\sigma} = \frac{(s + \hbar\sigma)_\rho (s)_\sigma}{(s + \hbar\sigma)_{[\sigma|\rho]}^2},$$

где вектор $[\sigma|\rho]$ задан согласно (3.2). В частности, если $[\rho, \sigma] = 0$ (см. (3.2)), то $(s)_{\rho+\sigma} = (s + \hbar\sigma)_\rho (s)_\sigma$.

Далее, для пары векторов $\rho, \sigma \in \mathbb{Z}^n$ определим структурный полином $g_{\rho, \sigma}$ на $\mathbb{R}^n$ формулой

$$g_{\rho, \sigma}(s) \stackrel{\text{def}}{=} (s - \hbar\rho)_{[\sigma|\rho]}, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (10.2)$$

Структурные полиномы $g_{\rho, \sigma}$ обладают целым рядом интересных свойств. Мы приведем здесь лишь несколько тождеств, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

ЛЕММА 10.2. *Выполнены следующие тождества:*

- 1) если $[\rho, \sigma] = 0$ (см. (3.2)), то $g_{\rho, \sigma}(s) \equiv 1$,
- 2) $g_{\rho, \sigma}(s)g_{\rho+\sigma, \varkappa}(s) = g_{\rho, \sigma+\varkappa}(s)g_{\sigma, \varkappa}(s - \hbar\rho)$,
- 3) $g_{\rho, \sigma}(s + \hbar\rho + \hbar\sigma) = g_{-\sigma, -\rho}(s)$,

а также их следствия:

- 4) $g_{\rho, -\rho}(s) = g_{-\rho, \rho}(s - \hbar\rho)$,
- 5) если $[\rho, \sigma] = 0$, то $g_{-\rho, \sigma}(s)g_{-\rho, \rho}(s - \hbar\sigma) = g_{\sigma, -\rho}(s)g_{-\rho, \rho}(s)$,
- 6) если $[\rho', \rho''] = [\sigma', \sigma'']$, то $g_{\rho', \sigma'}(s - \hbar\rho'')g_{\rho'+\sigma', \sigma''}(s - \hbar\rho'')g_{\rho'', \rho'+\sigma'+\sigma''}(s) = g_{\rho'+\rho'', \sigma'+\sigma''}(s)$.

Теперь зададим квантовую резонансную алгебру. Ее образующие по аналогии с классическими координатами A_σ, S_j будем обозначать через $\mathbf{A}_\sigma, \mathbf{S}_j$, где $j = 1, \dots, n$, а вектор σ пробегает множество $\mathcal{M}$ минимальных резонансных векторов.

Связи (3.6), (3.8), (3.9) и скобки Пуассона (3.11) мы заменим квантовыми связями и коммутационными соотношениями между образующими $\mathbf{A}_\sigma, \mathbf{S}$.

Квантовые связи эрмитова типа задаются следующим образом:

$$\mathbf{S}_j^* = \mathbf{S}_j, \quad \mathbf{A}_\sigma^* = \mathbf{A}_{-\sigma} \quad (10.3)$$

для любого $j = 1, \dots, n$ и любого $\sigma \in \mathcal{M}$.

Квантовые связи коммутативного типа задаются следующим образом:

$$\prod_{\rho} (\mathbf{A}_\rho)^{k_\rho} = \prod_{\sigma} (\mathbf{A}_\sigma)^{m_\sigma} \quad (10.4)$$

для любых семейств коммутирующих векторов $\rho, \sigma \in \mathcal{M}$ и чисел $k_\rho, m_\sigma \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\sum_{\rho} k_\rho \rho = \sum_{\sigma} m_\sigma \sigma.$$

Квантовые связи некоммутативного типа задаются следующим образом: если минимальные векторы ρ и σ не коммутируют и $\rho \neq -\sigma$, то выполнено соотношение

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma = g_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_{\rho+\sigma}} (\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}, \quad (10.5)$$

где $g_{\rho, \sigma}$ – структурный полином (10.2), а $n_\varkappa^{\rho+\sigma}$ – коэффициенты разложения (2.2) вектора $\rho + \sigma$ по минимальным векторам из $\mathcal{M}_{\rho+\sigma}$.

Коммутационные соотношения задаются следующим образом:

$$[\mathbf{S}_j, \mathbf{S}_k] = 0, \quad [\mathbf{S}_j, \mathbf{A}_\rho] = \hbar \rho_j \mathbf{A}_\rho, \quad [\mathbf{A}_{-\rho}, \mathbf{A}_\rho] = \hbar F_{-\rho, \rho}(\mathbf{S}) \quad (10.6)$$

для любых $j, k = 1, \dots, n$ и $\rho \in \mathcal{M}$, где полиномы $F_{\rho, \sigma}$ заданы формулой

$$F_{\rho, \sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} (g_{\rho, \sigma} - g_{\sigma, \rho}). \quad (10.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Множество связей некоммутативного типа (10.5) состоит из коммутационных соотношений

$$[\mathbf{A}_\rho, \mathbf{A}_\sigma] = \hbar F_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_{\rho+\sigma}} (\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}$$

и антикоммутиационных соотношений

$$[\mathbf{A}_\rho, \mathbf{A}_\sigma]_+ = (g_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) + g_{\sigma, \rho}(\mathbf{S})) \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_{\rho+\sigma}} (\mathbf{A}_\varkappa)^{n_\varkappa^{\rho+\sigma}}. \quad (10.5a)$$

Назовем соотношения (10.5a) *актуальными связями некоммутативного типа*.

Множество связей коммутативного типа (10.4) тоже содержит коммутационные соотношения. Это связи (10.4), соответствующие векторным равенствам $\rho + \sigma = \sigma + \rho$ для векторов $\rho, \sigma \in \mathcal{M}$ из одной нормальной подрешетки. Исключив коммутационные соотношения из множества связей (10.4), мы получим *актуальные связи коммутативного типа*.

Таким образом определенные актуальные связи не все являются независимыми. Число независимых актуальных связей равно $M - n + 1$, где M – число минимальных векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Резонансной алгеброй $\mathcal{A}$ назовем алгебру с инволюцией, порожденную образующими $\mathbf{A}_\sigma$, $\sigma \in \mathcal{M}$, $\mathbf{S}_j$, $j = 1, \dots, n$, и соотношениями (10.3)–(10.6).*

По аналогии с (3.10) каждому неминимальному резонансному вектору σ сопоставим следующий элемент $\mathbf{A}_\sigma$ резонансной алгебры:

$$\mathbf{A}_\sigma = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{если } \sigma = 0, \\ \prod_{\varkappa \in \mathcal{M}_\sigma} \mathbf{A}_\varkappa^{n_\varkappa^\sigma}, & \text{если } \sigma \neq 0; \end{cases} \quad (10.8)$$

здесь подмножества $\mathcal{M}_\sigma$ и числа $n_\varkappa^\sigma$ определены согласно (2.2). В силу связей коммутативного типа (10.4) это обозначение корректно, т. е. не зависит от разложения вектора σ по минимальным.

С помощью этого обозначения запишем (10.5) в виде

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma = g_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho+\sigma}$$

(здесь $\rho, \sigma \in \mathcal{M}$, $\rho \neq -\sigma$).

Отсюда и из (10.6) получим, что для любых минимальных векторов ρ, σ имеет место следующее коммутационное соотношение:

$$[\mathbf{A}_\rho, \mathbf{A}_\sigma] = \hbar F_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho+\sigma}, \quad (10.9)$$

где $F_{\rho, \sigma}$ – полиномы (10.7).

Выпишем также ряд полезных перестановочных соотношений, вытекающих из связей (10.4), (10.5) и коммутационных соотношений (10.6).

СЛЕДСТВИЕ 10.1. *Образующие резонансной алгебры $\mathcal{A}$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:*

- (а) *если $\rho, \sigma \in \mathcal{M}$, $\rho \neq -\sigma$, то $g_{\sigma, \rho}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma = g_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_\sigma \mathbf{A}_\rho$;*
- (б) *если $\rho \in \mathcal{M}$, P – полином, $k \in \mathbb{N}$, то $(\mathbf{A}_\rho)^k P(\mathbf{S}) = P(\mathbf{S} - \hbar k \rho)(\mathbf{A}_\rho)^k$;*
- (с) *если $\rho \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$, то $[\mathbf{A}_{-\rho}, (\mathbf{A}_\rho)^k] = g_{-\rho, \rho}(\mathbf{S})(\mathbf{A}_\rho)^{k-1} - (\mathbf{A}_\rho)^{k-1} g_{\rho, -\rho}(\mathbf{S})$.*

При доказательстве соотношения (с) нужно учесть, что структурные полиномы удовлетворяют тождеству 4) из леммы 10.2.

Отметим, что при $\hbar \rightarrow 0$ для любого $s \in \mathbb{R}^n$ и любых $\rho, \sigma, \sigma_j \in \mathbb{Z}^n$, $j = 1, \dots, l$, $l \geq 2$, мы имеем

$$(s)_{[\rho|\sigma]} = s^{\rho+\sigma} + O(\hbar), \quad g_{\rho, \sigma}(s) = s^{\rho+\sigma} \left(1 + \hbar \frac{\rho \& \sigma}{s} + O(\hbar^2) \right),$$

где

$$\rho \& \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\sigma_- - \rho_+) \cdot (\sigma | \rho) + \frac{1}{2}(\rho_- - \sigma_+) \cdot (\rho | \sigma) + \frac{1}{2}(\rho \overset{\circ}{+} \sigma) - \frac{1}{2}[\rho, \sigma].$$

Отсюда получаем

$$F_{\rho, \sigma}(s) = -s^{\rho \overset{\circ}{+} \sigma} \frac{[\rho, \sigma]}{s} + O(\hbar).$$

СЛЕДСТВИЕ 10.2. При $\hbar \rightarrow 0$ квантовая резонансная алгебра $\mathcal{A}$ соответствует пуассоновой алгебре функций на резонансном многообразии $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сравнить квантовые и классические коммутационные соотношения (10.6), (10.9) и (3.11), а также квантовые и классические уравнения связей (10.3)–(10.5) и (3.6), (3.8), (3.9) и учесть вычисленные асимптотики. Например, при $\hbar \rightarrow 0$ коммутационное соотношение (10.9) в силу асимптотической формулы

$$F_{\rho, \sigma}(s) = -f_{\rho, \sigma}(s) + O(\hbar)$$

переходит в третье соотношение (3.11).

Два элементарных свойства резонансной алгебры приведены в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 10.1. Центр резонансной алгебры $\mathcal{A}$ содержит элемент

$$\mathbf{C} = f_1 \mathbf{S}_1 + \dots + f_n \mathbf{S}_n. \quad (10.10)$$

Резонансная алгебра имеет представление

$$\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \hat{A}_\sigma, \quad \mathbf{S}_j \rightarrow \hat{S}_j \quad (10.11)$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ операторами симметрий резонансного осциллятора

$$\hat{S}_j = \hat{z}_j^* \hat{z}_j, \quad \hat{A}_\sigma = (\hat{z}^*)^{\sigma_+} \hat{z}^{\sigma_-}. \quad (10.12)$$

В этом представлении элемент (10.10) совпадает с гамильтонианом осциллятора (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что операторы (10.12) удовлетворяют всем уравнениям связей и коммутационным соотношениям (10.3)–(10.6), вытекает из простых формул перестановки

$$\hat{z} \hat{S}_j = (\hat{S}_j + \hbar) \hat{z}, \quad \hat{z}_j^m (\hat{z}_j^*)^m = (\hat{S}_j)_m, \quad (\hat{z}_j^*)^m \hat{z}_j^m = (\hat{S}_j)_{-m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема доказана.

§ 11. Вакуумные векторы и неприводимые представления

Рассмотрим теперь абстрактное представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Операторы представления будем обозначать теми же буквами $\mathbf{S}_j$, $\mathbf{A}_\sigma$, $j = 1, \dots, n$, $\sigma \in \mathcal{M}$, что и образующие алгебры $\mathcal{A}$. Для неминимального резонансного вектора σ мы обозначаем через $\mathbf{A}_\sigma$ оператор, заданный формулой (10.8).

Фиксируем число $M \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $d[M] \neq 0$ (т. е. диофантов остов $\Delta[M]$, (6.2), не пуст). Пусть $R = (r, \{\rho\})$ – репер диофантова остова $\Delta[M]$. Обозначим

через $\mathcal{R}_R^-$ подмножество тех векторов σ резонансной решетки $\mathcal{R}$, для которых $r + \sigma \notin \Delta[M]$.

Предположим, что (хотя бы для одного репера R) в пространстве $\mathcal{H}$ существует нормированный вектор $\mathbf{p}_R$ такой, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\rho \mathbf{p}_R &= 0, & \rho &\in \mathcal{R}_R^-, \\ \mathbf{S}_j \mathbf{p}_R &= \hbar r_j \mathbf{p}_R, & j &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где r – вершина репера R . Вектор $\mathbf{p}_R$ назовем *вакуумным*.

Применяя к вакуумному вектору всевозможные операторы представления $\mathbf{A}_\sigma$, построим линейное подпространство $\mathcal{H}_M \subseteq \mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_M = \overline{\text{span}}\{\mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R \mid \sigma \in \mathcal{R}\}. \quad (11.2)$$

Отметим, что подпространство $\mathcal{H}_M$ не зависит от выбора репера R в условии (11.1). Это следует из леммы 12.1, которая будет доказана далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *На подпространстве $\mathcal{H}_M$ для любых резонансных векторов ρ, σ справедливо равенство*

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma = g_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho + \sigma}. \quad (11.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. В случае минимальных резонансных векторов ρ и σ , $\rho \neq -\sigma$, равенство (11.3) выполнено на всем пространстве $\mathcal{H}$ в силу связей некоммутативного типа (10.5).

Чтобы доказать предложение 11.1, нам понадобятся следующие три леммы.

ЛЕММА 11.1. *Пусть ρ, σ – резонансные векторы. Тогда:*

- (а) *если $\rho \notin \mathcal{R}_R^-$, то либо $\rho = 0$, либо $-\rho \in \mathcal{R}_R^-$;*
- (б) *если $\rho \in \mathcal{R}_R^-$ и $[\rho, \sigma] = 0$, то $(\rho + \sigma) \in \mathcal{R}_R^-$.*

ЛЕММА 11.2. *Пусть ρ, σ, θ – резонансные векторы. Тогда:*

- (а) *если $(\rho + \theta) \in \mathcal{R}_R^-$, $\theta \notin \mathcal{R}_R^-$, то $g_{-\rho, \rho}(\hbar r + \hbar \theta) = 0$;*
- (б) *если $\sigma \notin \mathcal{R}_R^-$ и $\theta \notin \mathcal{R}_R^-$, то для любого $\rho \in \mathcal{R}$ справедливо неравенство $g_{\theta - \sigma, \rho}(\hbar r + \hbar \theta) > 0$.*

ЛЕММА 11.3. *Пусть $\rho \in \mathcal{M}$, $\varkappa \in \mathcal{R}$, причем $[\rho, \varkappa] = 0$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathbf{A}_{-\rho} \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\varkappa \mathbf{p}_R = g_{-\rho, \rho}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_\varkappa \mathbf{p}_R. \quad (11.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 10.1, (b) и свойств (11.1) вакуумного вектора следует, что вместо (11.4) достаточно доказать эквивалентное равенство

$$\mathbf{A}_{-\rho} \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\varkappa \mathbf{p}_R = g_{-\rho, \rho}(\hbar r + \hbar \varkappa) \mathbf{A}_\varkappa \mathbf{p}_R. \quad (11.4a)$$

Если $(\rho + \varkappa) \in \mathcal{R}_R^-$, то левая часть (11.4a) равна нулю, поскольку из условий (11.1) имеем $\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\varkappa \mathbf{p}_R = \mathbf{A}_{\rho + \varkappa} \mathbf{p}_R = 0$. При этом и правая часть (11.4a) также равна нулю: в случае $\varkappa \in \mathcal{R}_R^-$ за счет того, что $\mathbf{A}_\varkappa \mathbf{p}_R = 0$, а в случае $\varkappa \notin \mathcal{R}_R^-$ за счет зануления коэффициента, т.е. $g_{-\rho, \rho}(\hbar r + \hbar \varkappa) = 0$ (здесь применена лемма 11.2, (а)). Итак, если $(\rho + \varkappa) \in \mathcal{R}_R^-$, то (11.4a) доказано.

Пусть теперь $(\rho + \varkappa) \notin \mathcal{R}_R^-$. Рассмотрим последовательно следующие возможные случаи разложения резонансного вектора $\varkappa$ в сумму коммутирующих минимальных векторов:

- ⟨1⟩ $\varkappa = k\rho$;
- ⟨2⟩ $\varkappa = k\rho + \sigma$, где $[\rho, \sigma] = 0$, $\rho \neq \sigma$;
- ⟨3⟩ $\varkappa = k\rho + \sigma + \sigma'$, где $[\rho, \sigma] = [\rho, \sigma'] = [\sigma, \sigma'] = 0$, $\rho \neq \sigma$, $\rho \neq \sigma'$;

.....
Здесь $\sigma, \sigma', \dots \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

В случае ⟨1⟩ имеем $(k+1)\rho \notin \mathcal{R}_R^-$. Значит, в силу леммы 11.1 имеем $\rho \notin \mathcal{R}_R^-$, а тогда $-\rho \in \mathcal{R}_R^-$. Следовательно, во-первых, $\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{p}_R=0$ и, во-вторых, $g_{\rho,-\rho}(\hbar r) = 0$. В силу следствия 10.1, (b), (c) отсюда вытекает справедливость равенства (11.4a) при $\varkappa = k\rho$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho}\mathbf{p}_R &= \mathbf{A}_{-\rho}(\mathbf{A}_\rho)^{k+1}\mathbf{p}_R = [\mathbf{A}_{-\rho}, (\mathbf{A}_\rho)^{k+1}]\mathbf{p}_R \\ &= (g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})(\mathbf{A}_\rho)^k - (\mathbf{A}_\rho)^k g_{\rho,-\rho}(\mathbf{S}))\mathbf{p}_R = g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{k\rho}\mathbf{p}_R. \end{aligned}$$

В случае ⟨2⟩, поскольку $\rho \neq \sigma$, применимо следствие 10.1, (a):

$$g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\sigma = g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_{-\rho}.$$

Используя также равенство, доказанное в случае ⟨1⟩, и, далее, следствие 10.1, (b) и тождество 5) из леммы 10.2, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho+\sigma}\mathbf{p}_R &= g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho}\mathbf{p}_R \\ &= g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_{-\rho}\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{k\rho}\mathbf{p}_R = g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_\sigma g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{k\rho}\mathbf{p}_R \\ &= g_{-\rho,\sigma}(\mathbf{S})g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S} - \hbar\sigma)\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_{k\rho}\mathbf{p}_R = g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})g_{-\rho,\rho}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{k\rho+\sigma}\mathbf{p}_R \quad (11.5) \end{aligned}$$

(здесь важно, что $[\rho, \sigma] = 0$). За счет свойства (11.1) вакуумного вектора операторный множитель $g_{\sigma,-\rho}(\mathbf{S})$ (имеющийся и в начальной, и в конечной частях равенства) можно заменить числом $g_{\sigma,-\rho}(\hbar r + \hbar k\rho + \hbar\sigma)$. В силу лемм 11.1, (b), 11.2, (b) это число отлично от нуля. Поделив (11.5) на него, придем к тождеству (11.4a) для случая ⟨2⟩.

В случае ⟨3⟩, действуя точно так же, как в случае ⟨2⟩, и используя результат, полученный в случае ⟨2⟩, придем к равенству (11.4a). Продолжая далее, по индукции получим, что (11.4a) выполнено для любых $\varkappa$, коммутирующих с ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.1. Прежде всего, отметим, что равенство (11.3) достаточно доказать на вакуумном векторе $\mathbf{p}_R$:

$$\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathbf{p}_R = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathbf{p}_R. \quad (11.3a)$$

Действительно, считая (11.3) доказанным на $\mathbf{p}_R$, получим, что (11.3) выполнено и на векторах вида $\mathbf{A}_\varkappa\mathbf{p}_R$, где $\varkappa \in \mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\varkappa\mathbf{p}_R &= \mathbf{A}_\rho g_{\sigma,\varkappa}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\sigma+\varkappa}\mathbf{p}_R = g_{\sigma,\varkappa}(\mathbf{S} - \hbar\rho)\mathbf{A}_\rho\mathbf{A}_{\sigma+\varkappa}\mathbf{p}_R \\ &= g_{\sigma,\varkappa}(\mathbf{S} - \hbar\rho)g_{\rho,\sigma+\varkappa}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma+\varkappa}\mathbf{p}_R \\ &= g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})g_{\rho+\sigma,\varkappa}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma+\varkappa}\mathbf{p}_R = g_{\rho,\sigma}(\mathbf{S})\mathbf{A}_{\rho+\sigma}\mathbf{A}_\varkappa\mathbf{p}_R. \end{aligned}$$

Здесь использованы следствие 10.1, (b) и лемма 10.2, 2).

Пусть $\rho, \sigma \in \mathbb{Z}^n$. Число таких j , для которых $[\rho, \sigma]_j \neq 0$, назовем *индексом некоммутативности* $m(\rho, \sigma)$ векторов ρ, σ ; $m(\rho, \sigma) \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

ЛЕММА 11.4. Пусть $\rho = \rho' + \rho''$, $\sigma = \sigma' + \sigma''$, причем $[\rho', \rho''] = [\sigma', \sigma''] = 0$. Тогда:

- (a) $m(\rho' + \sigma', \sigma'') \leq m(\rho, \sigma)$;
- (b) $m(\rho'', \rho' + \sigma) \leq m(\rho, \sigma)$;
- (c) если существует j такое, что $[\rho, \sigma]_j \neq 0$, $\rho'_j + \sigma'_j = 0$, то $m(\rho' + \sigma', \sigma'') \leq m(\rho, \sigma)$;
- (d) если существует j такое, что $[\rho, \sigma]_j \neq 0$, $\rho''_j = 0$, то $m(\rho'', \rho' + \sigma) \leq m(\rho, \sigma)$.

Доказательство равенства (11.3a) проведем путем индукции по величине индекса некоммутативности $m(\rho, \sigma)$.

Если $m(\rho, \sigma) = 0$, т. е. $[\rho, \sigma] = 0$, то (11.3) вытекает из связей (10.4) коммутативного типа и тождества 1) из леммы 10.2.

Предположение индукции формулируется следующим образом:

(П1) пусть формула (11.3a) выполнена для всех $\rho, \sigma \in \mathcal{R}$ таких, что

$$m(\rho, \sigma) \leq m.$$

Исходя из этого, докажем (11.3a) для таких $\rho, \sigma \in \mathcal{R}$, что $m(\rho, \sigma) = m + 1$.

Поскольку $m(\rho, \sigma) \geq 1$, то хотя бы одна из компонент коммутатора $[\rho, \sigma]$ отлична от нуля, т. е.

$$\exists j: [\rho, \sigma]_j \neq 0.$$

Поэтому векторы ρ и σ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho' + \rho'', & \rho' &\in \mathcal{M}, & \rho'' &\in \mathcal{R}, & [\rho', \rho''] &= 0, & \rho'_j &\neq 0, \\ \sigma &= \sigma' + \sigma'', & \sigma' &\in \mathcal{M}, & \sigma'' &\in \mathcal{R}, & [\sigma', \sigma''] &= 0, & \sigma'_j &\neq 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R = \mathbf{A}_{\rho''} \mathbf{A}_{\rho'} \mathbf{A}_{\sigma'} \mathbf{A}_{\sigma''} \mathbf{p}_R.$$

В правой части этого равенства произведение $\mathbf{A}_{\rho'} \mathbf{A}_{\sigma'}$ можно заменить на $g_{\rho', \sigma'}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho' + \sigma'}$: если $\rho' \neq -\sigma'$, то в силу связей (10.6) некоммутативного типа, а если $\rho' = -\sigma'$, то в силу леммы 11.3 (см. также обозначение (10.8)). В результате (используя следствие 10.1, (b)) получим следующее равенство:

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R = g_{\rho', \sigma'}(\mathbf{S} - \hbar \rho'') \mathbf{A}_{\rho''} \mathbf{A}_{\rho' + \sigma'} \mathbf{A}_{\sigma''} \mathbf{p}_R. \quad (11.7)$$

Дополнительно проведем индукцию по величине $M_j(\rho, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} |[\rho, \sigma]_j|$.

Если $M_j(\rho, \sigma) = 1$, то, очевидно, $\rho'_j = -\sigma'_j$, $\rho''_j = 0$. Отсюда в силу утверждений (c), (d) леммы 11.4 следует, что выполнены неравенства

$$m(\rho' + \sigma', \sigma'') < m + 1, \quad m(\rho'', \rho' + \sigma) < m + 1,$$

и, значит, по предположению индукции (П1) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\rho' + \sigma'} \mathbf{A}_{\sigma''} \mathbf{p}_R &= g_{\rho' + \sigma', \sigma''}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho' + \sigma' + \sigma''} \mathbf{p}_R, \\ \mathbf{A}_{\rho''} \mathbf{A}_{\rho' + \sigma} \mathbf{p}_R &= g_{\rho'', \rho' + \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho'' + \rho' + \sigma} \mathbf{p}_R. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Подставляя эти равенства в (11.7) и используя следствие 10.1, (b), а также тождество 6) из леммы 10.2, получим искомое равенство (11.3a) для случая $m(\rho, \sigma) = m + 1$, $M_j(\rho, \sigma) = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R &= g_{\rho', \sigma'}(\mathbf{S} - \hbar \rho'') \mathbf{A}_{\rho''} g_{\rho' + \sigma', \sigma''}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho' + \sigma} \mathbf{p}_R \\ &= g_{\rho', \sigma'}(\mathbf{S} - \hbar \rho'') g_{\rho' + \sigma', \sigma''}(\mathbf{S} - \hbar \rho'') g_{\rho'', \rho' + \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho + \sigma} \mathbf{p}_R \\ &= g_{\rho' + \rho'', \sigma' + \sigma''}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho + \sigma} \mathbf{p}_R = g_{\rho, \sigma}(\mathbf{S}) \mathbf{A}_{\rho + \sigma} \mathbf{p}_R. \end{aligned}$$

Предположение индукции формулируется следующим образом:

(П2) пусть формула (11.3a) выполнена для всех $\rho, \sigma \in \mathcal{R}$ таких, что

$$m(\rho, \sigma) = m + 1 \text{ и } M_j(\rho, \sigma) \leq M_j.$$

Рассмотрим такие $\rho, \sigma \in \mathcal{R}$, что $m(\rho, \sigma) = m + 1$ и $M_j(\rho, \sigma) = M_j + 1$. Тогда, во-первых, из утверждений (а), (б) леммы 11.4 получим, что выполнены неравенства

$$m(\rho' + \sigma', \sigma'') \leq m + 1, \quad m(\rho'', \rho' + \sigma) \leq m + 1,$$

и, во-вторых, из (11.6) получим неравенства

$$M_j(\rho' + \sigma', \sigma'') \leq M_j, \quad M_j(\rho'', \rho' + \sigma) \leq M_j.$$

Значит, выполнено одно из двух предположений индукции: либо (П1), либо (П2). В любом из этих двух случаев справедливы равенства (11.8). Подставляя их в (11.7), приходим к формуле (11.3a) для случая $m(\rho, \sigma) = m + 1$, $M_j(\rho, \sigma) = M_j + 1$.

Итак, в силу принципа математической индукции формула (11.3a) выполнена при всех значениях $m(\rho, \sigma) \in \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 11.1. *Подпространство $\mathcal{H}_M$, (11.2), инвариантно и минимально относительно представления резонансной алгебры (т. е. это подпространство неприводимого представления алгебры $\mathcal{A}$). На векторы из $\mathcal{H}_M$ операторы представления действуют следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R &= \hbar(r_j + \sigma_j) \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R, \\ \mathbf{A}_\rho \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R &= g_{\rho, \sigma}(\hbar r + \hbar \rho + \hbar \sigma) \mathbf{A}_{\rho + \sigma} \mathbf{p}_R. \end{aligned}$$

Отсюда и из (11.1), а также из леммы 10.2, 4) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 11.2. *Пусть $\sigma, \theta \in \mathcal{R}$. Тогда:*

- (а) если $(r + \sigma) \notin \Delta[M]$, то $\mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R = 0$;
- (б) если $(r + \sigma) \in \Delta[M]$, то $\|\mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R\| = (\hbar r)_{-\sigma}^{-1/2}$;
- (с) если $\sigma \neq \theta$, то $(\mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_R, \mathbf{A}_\theta \mathbf{p}_R) = 0$.

§ 12. Когерентные состояния

Рассмотрим неприводимое представление резонансной алгебры в пространстве $\mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}$, (11.2), порожденном вакуумным вектором. Каждой точке остова $t \in \Delta[M]$ сопоставим вектор из подпространства $\mathcal{H}_M$ по формуле

$$\mathbf{p}^t \stackrel{\text{def}}{=} (\hbar r)_{t-r}^{-1/2} \mathbf{A}_{t-r} \mathbf{p}_R, \quad (12.1)$$

где $\mathbf{p}_R$ – вакуумный вектор, а r – вершина репера R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. 1) Векторы $\mathbf{p}^t$, (12.1), образуют в $\mathcal{H}_M$, (11.2), ортонормированный базис.

2) Операторы представления алгебры $\mathcal{A}$ в базисе $\{\mathbf{p}^t \mid t \in \Delta[M]\}$ имеют вид

$$\mathbf{S}_j \mathbf{p}^t = \hbar t_j \mathbf{p}^t, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12.2)$$

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{p}^t = (\hbar t)_\rho^{1/2} \mathbf{p}^{\rho+t}, \quad \rho \in \mathcal{R}. \quad (12.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пояснении нуждается только формула (12.3). Пусть $(\rho + t) \in \Delta[M]$. Тогда в силу следствия 11.1 и определения (12.1) имеем

$$\mathbf{A}_\rho \mathbf{p}^t = \sqrt{\frac{(\hbar r)_{\rho+t-r}}{(\hbar r)_{t-r}}} g_{\rho, t-r}(\hbar \rho + \hbar t) \mathbf{p}^{\rho+t}.$$

Согласно лемме 10.1 и определению (10.2) выполнено тождество

$$(g_{\rho, \sigma}(s))^2 = \frac{(s - \hbar \rho)_\rho (s - \hbar \rho - \hbar \sigma)_\sigma}{(s - \hbar \rho - \hbar \sigma)_{\rho+\sigma}}, \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad \rho, \sigma \in \mathbb{Z}^n.$$

Отсюда и из леммы 11.2 получаем

$$g_{\rho, t-r}(\hbar \rho + \hbar t) = \sqrt{\frac{(\hbar t)_\rho (\hbar r)_{t-r}}{(\hbar r)_{\rho+t-r}}}$$

и приходим к формуле (12.3).

Пусть теперь $(\rho + t) \notin \Delta[M]$. Тогда левая часть равенства (12.3) равна нулю согласно следствию 11.2, а правая часть (12.3) равна нулю за счет коэффициента: $(\hbar t)_\rho = 0$. Таким образом, формула (12.3) выполнена и в этом случае.

ЛЕММА 12.1. Пусть выполнено условие существования вакуумного вектора $\mathbf{p}_R$, (11.1), для некоторого репера R резонансного остова $\Delta[M]$. Тогда для любого другого репера L остова $\Delta[M]$ существует вакуумный вектор $\mathbf{p}_L$, а именно

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{p}^l.$$

Здесь l – вершина резонансного репера L , а вектор $\mathbf{p}^l$ задается формулой (12.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\sigma \in \mathcal{R}_L^- \iff (l + \sigma) \notin \Delta[M]$. Отсюда в силу предложения 12.1 получаем, что вектор $\mathbf{p}_L = \mathbf{p}^l$ удовлетворяет условиям (11.1) для вакуумного вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_L &= 0, & 0 \in \mathcal{R}_L^-, \\ \mathbf{S}_j \mathbf{p}_L &= \hbar l \mathbf{p}_L, & j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Кроме того, согласно предложению 12.1, 1) вектор $\mathbf{p}_L$ нормирован: $\|\mathbf{p}_L\| = 1$. Значит, $\mathbf{p}_L$ – вакуумный вектор, соответствующий реперу L .

ЛЕММА 12.2. Вектор $\mathbf{p}^t$, (12.1), не зависит от выбора репера R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (12.3) имеем

$$\mathbf{A}_{t-l} \mathbf{p}^l = (\hbar l)_{t-l}^{1/2} \mathbf{p}^t.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{p}^t$ может быть задан формулой

$$\mathbf{p}^t = (\hbar l)_{t-l}^{-1/2} \mathbf{A}_{t-l} \mathbf{p}_L$$

через вакуумный вектор $\mathbf{p}_L = \mathbf{p}^l$, отвечающий произвольному реперу L . Сравнивая полученное выражение с (12.1), приходим к выводу о независимости $\mathbf{p}^t$ от выбора репера.

ПРИМЕР 12.1. В случае, если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ и представление алгебры $\mathcal{A}$ задано формулами (10.12), базисные векторы $\mathbf{p}^t$ являются функциями на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{p}^t(q) = \frac{1}{\sqrt{2^{|t|} t!}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{f_j}{\pi \hbar}} H_{t_j} \left(\sqrt{\frac{f_j}{\hbar}} q_j \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \sum_{j=1}^n f_j q_j^2 \right\}, \quad q \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь H_k – стандартные полиномы Эрмита, определяемые следующим образом:

$$H_k(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k e^{\xi^2} \frac{d^k}{d\xi^k} (e^{-\xi^2}).$$

Действительно, в этом случае вакуумный вектор задан формулой

$$\mathbf{p}_R = c(r)(\hat{z}^*)^r \chi_0,$$

где

$$c(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[4]{\frac{f_1 \cdots f_n}{(\pi \hbar)^n}} \frac{1}{\sqrt{\hbar^{|r|} r!}}, \quad \chi_0(q) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \sum_{j=1}^n f_j q_j^2 \right\}.$$

Из определения (12.1) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^t &= c(r)(\hbar r)_{t-r}^{-1/2} (\hat{z}^*)^{(t-r)+} \hat{z}^{(t-r)-} (\hat{z}^*)^r \chi_0 \\ &= c(t) (\hat{z}^*)^t \chi_0 = c(t) \frac{\hbar^{|t|/2}}{2^{|t|/2}} \prod_{j=1}^n H_{t_j} \left(\sqrt{\frac{f_j}{\hbar}} q_j \right) \chi_0, \end{aligned}$$

что дает указанную выше формулу для $\mathbf{p}^t(q)$.

Напомним, что множеству всех вершин $t \in \Delta[M]$ мы сопоставили в § 7 ортонормированный базис $\{U^t\}$ в пространстве $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$ голоморфных сечений пучка $\Pi(\Omega_{\hbar})$.

Обозначим через $\Pi(\Omega_{\hbar}, \mathcal{H}) = \Pi(\Omega_{\hbar}) \otimes \mathcal{H}$ пучок ростков голоморфных функций на $\Omega_{\hbar}$ со значениями в $\mathcal{H}$ с теми же, что и раньше, скалярными функциями склейки (7.2). Пространство его сечений $\Psi = \{\Psi_R\}$, снабженное естественной гильбертовой нормой

$$\|\Psi\| = \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_{\hbar}} \frac{\|\Psi_R\|_{\mathcal{H}}^2}{\mathcal{K}_R} dm_{\hbar} \right)^{1/2},$$

будем обозначать через $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar}, \mathcal{H})$.

Очевидно, для подпространства $\mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}$ мы имеем вложение $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar}, \mathcal{H}_M) \subset \mathcal{L}(\Omega_{\hbar}, \mathcal{H})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. *Когерентными состояниями* алгебры $\mathcal{A}$, отвечающими квантовому листу $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$, назовем семейство векторов

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t \in \Delta[M]} U^t \mathbf{p}^t. \quad (12.4)$$

Формула (12.4) задает элемент пространства $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar}, \mathcal{H}_M)$. В локальной карте с номером $R = (r, \{\rho\})$ векторы $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_R(w)$ являются голоморфными функциями от комплексных координат w согласно (7.1):

$$\mathfrak{P}_R(w) = \sum_{t \in \Delta[M]} U_R^t(w) \mathbf{p}^t = \sum_{t \in \Delta[M]} \sqrt{\frac{\hbar^{|r|} r!}{\hbar^{|t|} t!}} \prod_{k=1}^{n-1} w^{N_{t-r}^{(k)}} \mathbf{p}^t. \quad (12.5)$$

Здесь неотрицательные показатели степени $N_{t-r}^{(k)}$ определяются разложением (4.3) резонансного вектора $t - r$ по базису $\{\rho\}$ в вершине r .

ПРИМЕР 12.2. Пусть $n = 3$, $f_1 = 1$. Тогда для каждого $M \in \mathbb{Z}_+$ диофантов остов $\Delta[M]$ состоит из точек

$$(M - f_2j - f_3k, j, k), \quad \text{где } j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad f_2j + f_3k \leq M.$$

В качестве резонансного репера $R = (r, \{\rho\})$ выберем вершину $r = (M, 0, 0)$ и базис (4.8): $\rho^{(1)} = (-f_2, 1, 0)$, $\rho^{(2)} = (-f_3, 0, 1)$. Тогда в локальной карте с номером R для когерентных состояний (12.5) получим следующую формулу:

$$\mathfrak{P}_R(w) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}_+ \\ f_2j + f_3k \leq M}} \frac{1}{j!k!} \left(\frac{w_1 \mathbf{A}_{\rho^{(1)}}}{\hbar} \right)^j \left(\frac{w_2 \mathbf{A}_{\rho^{(2)}}}{\hbar} \right)^k \mathbf{p}^r. \quad (12.6)$$

Здесь $\mathbf{p}^r$ – вакуумный вектор, подчиненный уравнениям (11.1):

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{p}^r = \hbar M \mathbf{p}^r, \quad \mathbf{S}_2 \mathbf{p}^r = \mathbf{S}_3 \mathbf{p}^r = 0,$$

и условию нормировки $\|\mathbf{p}^r\| = 1$, а w_1, w_2 – комплексные координаты, связанные с резонансным базисом $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ по формулам (4.4). Отметим, что векторы $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ коммутируют между собой (в смысле (3.2)): $[\rho^{(1)}, \rho^{(2)}] = 0$, и потому операторы $\mathbf{A}_{\rho^{(1)}}$ и $\mathbf{A}_{\rho^{(2)}}$ также коммутируют, т. е.

$$[\mathbf{A}_{\rho^{(1)}}, \mathbf{A}_{\rho^{(2)}}] = 0.$$

Кроме того, отметим, что при всех $j, k \in \mathbb{Z}_+$, $f_2j + f_3k > M$, имеет место равенство $(\mathbf{A}_{\rho^{(1)}})^j (\mathbf{A}_{\rho^{(2)}})^k \mathbf{p}^r = 0$. Поэтому суммирование в формуле (12.6) по двум индексам j и k можно продолжить до $+\infty$. В результате для когерентных состояний получим следующее выражение:

$$\mathfrak{P}_R(w) = \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} (w_1 \mathbf{A}_{\rho^{(1)}} + w_2 \mathbf{A}_{\rho^{(2)}}) \right\} \mathbf{p}^r.$$

Упомянем общие свойства когерентных состояний [39], [40].

ЛЕММА 12.3. (а) Скалярное произведение $\mathcal{K} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P})_{\mathcal{H}}$ когерентных состояний совпадает с воспроизводящим ядром (7.7), (7.9) пространства $\mathcal{L}(\Omega_{\hbar})$.

(б) Проекторы $\pi_{\hbar}$ на одномерные подпространства в $\mathcal{H}_M$, порожденные когерентными состояниями, в сумме задают проектор $\Pi_{\hbar}[M]$ на все $\mathcal{H}_M$ (т. е. на всю неприводимую компоненту представления алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$):

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_{\hbar}[M]} \pi_{\hbar} dm_{\hbar} = \Pi_{\hbar}[M].$$

§ 13. Реализация неприводимых представлений над квантовыми листами

Покажем теперь, как универсально реализовать неприводимые представления квантовой резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в пространствах антиголоморфных сечений над квантовыми листами $\Omega_{\hbar}[M]$.

Фиксируем в $\Omega_{\hbar}[M]$ локальную карту с номером $R = (r, \{\rho\})$. Напомним, что здесь r – вершина диофантова остова Δ , а $\{\rho\}$ – резонансный базис. Через w обозначим комплексные координаты в данной карте.

Определим вектор-функцию:

$$s(m) \stackrel{\text{def}}{=} \hbar r + \hbar \sum_{k=1}^{n-1} m_k \rho^{(k)}, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

ТЕОРЕМА 13.1. *Дифференциальные операторы*

$$\begin{aligned} \mathring{S}_j &\stackrel{\text{def}}{=} s_j \left(\overline{w} \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \right), \quad j = 1, \dots, n, \\ \mathring{A}_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathring{S})_{\sigma-} \overline{W}_\sigma, \quad \sigma \in \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (13.1)$$

заданные в локальных картах на $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$, согласованы на пересечениях карт и задают неприводимое представление квантовой резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^*(\Omega_{\hbar})$ (антиголоморфных) сечений пучка $\Pi^*(\Omega_{\hbar})$. Для этого представления вакуумным вектором, отвечающим реперу R , служит сечение пучка $\Pi^*(\Omega_{\hbar})$, которое в карте с номером R задано единичной функцией.

Во второй формуле из (13.1) используются обозначения (10.1a) и (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 13.1. Проверка согласованности на пересечениях карт вполне рутинна. Выполнение уравнений связи и коммутационных соотношений (10.4)–(10.6) следует из перестановочных формул

$$\overline{w}_k \frac{\partial}{\partial \overline{w}_k} \circ \overline{W}_\sigma = \overline{W}_\sigma \circ \left(\overline{w}_k \frac{\partial}{\partial \overline{w}_k} + N_\sigma^{(k)} \right), \quad \mathring{S}_j \circ \overline{W}_\sigma = \overline{W}_\sigma \circ (\mathring{S}_j + \hbar \sigma_j),$$

где числа $N_\sigma^{(k)}$ определены согласно (4.3). Условия эрмитовости (10.3) для операторов (13.1) достаточно проверить на векторах $\overline{U}^t$ ортонормированного базиса (7.1), (7.5). Для операторов $\mathring{S}_j$ эти векторы собственные:

$$\mathring{S}_j \overline{U}^t = \hbar t_j \overline{U}^t. \quad (13.2)$$

Операторы $\mathring{A}_\sigma$ действуют следующим образом:

$$\mathring{A}_\sigma \overline{U}^t = \sqrt{(\hbar t)_\sigma} \overline{U}^{t+\sigma}. \quad (13.3)$$

Отсюда в силу свойства $(s - \hbar \sigma)_\sigma = (s)_{-\sigma}$ символов (10.1a) получаем

$$\begin{aligned} (\mathring{A}_\sigma \overline{U}^k, \overline{U}^t) &= \sqrt{(\hbar k)_\sigma} (\overline{U}^{k+\sigma}, \overline{U}^t) = \sqrt{(\hbar k)_\sigma} \delta_{k+\sigma, t} \\ &= \sqrt{(\hbar t)_{-\sigma}} \delta_{k, t-\sigma} = (\overline{U}^k, \mathring{A}_{-\sigma} \overline{U}^t), \end{aligned}$$

т. е. $\mathring{A}_\sigma^* = \mathring{A}_{-\sigma}$.

При $t = r$, поскольку $(\hbar r)_\sigma = 0$ для любого $\sigma \in \mathcal{R}_R^-$, из (13.2), (13.3) получаем

$$\mathring{S}_j \overline{U}^r = \hbar r_j \overline{U}^r, \quad \mathring{A}_\sigma \overline{U}^r = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sigma \in \mathcal{R}_R^-,$$

т. е. сечение $\overline{U}^r$ является вакуумным вектором для операторов (13.1). Это сечение в карте с номером R тождественно равно единице: $\overline{U}_R^r = 1$ (см. (7.1)).

ЗАМЕЧАНИЕ 13.1. Поскольку скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}^*(\Omega_{\hbar})$ представимо также в виде интеграла (8.1), то условие эрмитовости представления (13.1) можно записать в виде некоторых уравнений для плотности $\mathcal{J}$, а также и для воспроизводящего ядра $\mathcal{K}$ (это известная процедура; см. [25]). Система уравнений на $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ будет следующей:

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{S}_i)^T \mathcal{J} &= (\overline{\overset{\circ}{S}_i})^T \mathcal{J}, & (\overset{\circ}{A}_\sigma)^T \mathcal{J} &= (\overline{\overset{\circ}{A}_{-\sigma}})^T \mathcal{J}, \\ \overset{\circ}{S}_i \mathcal{K} &= \overline{\overset{\circ}{S}_i} \mathcal{K}, & \overset{\circ}{A}_\sigma \mathcal{K} &= \overline{\overset{\circ}{A}_{-\sigma}} \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Здесь через $(\dots)^T$ обозначена операция транспонирования дифференциального оператора относительно стандартной меры dw (или $d\bar{w}$) в локальных комплексных координатах, а чертой обозначено комплексное сопряжение оператора.

В выписанной системе левая колонка уравнений (в которой $i = 1, \dots, n$) обеспечивает тот факт, что плотность $\mathcal{J}$ и ядро $\mathcal{K}$ зависят лишь от модулей комплексных координат w , т. е. от вещественных переменных $X_j = |w_j|^2$. Правую колонку уравнений (в которой $\sigma \in \mathcal{M}$) достаточно записать только для векторов базиса $\rho^{(j)}$; она будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} [X_j(\hbar\tilde{r} - \hbar D)_{\rho_-^{(j)}} - (\hbar\tilde{r} - \hbar D)_{\rho_+^{(j)}}] \mathcal{J}_R &= 0, \\ [X_j(\hbar r + \hbar D)_{-\rho_-^{(j)}} - (\hbar r + \hbar D)_{-\rho_+^{(j)}}] \mathcal{K}_R &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Здесь репер R нумерует карту на квантовом листе, r – вершина, а $\{\rho^{(j)}\}$ – резонансный базис этого репера, $\tilde{r} = r - \rho^{(1)} - \dots - \rho^{(n-1)}$ и $D = \sum_{j=1}^{n-1} \rho^{(j)} X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$. Данная система уравнений для $\mathcal{J}_R, \mathcal{K}_R$ использовалась в лемме 8.1 для вычисления асимптотик при $\hbar \rightarrow 0$.

В заключение мы покажем, как абстрактное представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обладающее вакуумным вектором, и, в частности, представление (10.11), (10.12) сплетаются с универсальными неприводимыми представлениями (13.1).

Зададим в $\mathcal{H}$ когерентные состояния $\mathfrak{P}$, (12.4), и для каждого сечения ψ пучка $\Pi^*(\Omega_{\hbar})$ определим вектор $\mathcal{P}[\psi] \in \mathcal{H}$ по формуле

$$\mathcal{P}[\psi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_{\hbar}} \frac{\psi \mathfrak{P}}{\mathcal{K}} dm_{\hbar}.$$

Отображение

$$\psi \rightarrow \mathcal{P}[\psi] \tag{13.4}$$

назовем *когерентным преобразованием*.

ТЕОРЕМА 13.2. *Когерентное преобразование (13.4) сплетает представление резонансной алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с неприводимым представлением в пространстве $\mathcal{L}^*(\Omega_{\hbar})$ антиголоморфных сечений над квантовым листом $\Omega_{\hbar} = \Omega_{\hbar}[M]$:*

$$\mathbf{A}_\sigma \mathcal{P}[\psi] = \mathcal{P}[\overset{\circ}{A}_\sigma \psi], \quad \mathbf{S}_j \mathcal{P}[\psi] = \mathcal{P}[\overset{\circ}{S}_j \psi].$$

Здесь дифференциальные операторы $\overset{\circ}{A}_\sigma, \overset{\circ}{S}_j$ заданы формулами (13.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (12.4), (8.1), (8.2), (7.5) когерентное преобразование $\mathcal{P}$ переводит векторы $\overline{U}^t$, (7.1), ортонормированного базиса в $\mathcal{L}^*(\Omega_h)$ в векторы $\mathbf{p}^t \in \mathcal{H}$, (13.1):

$$\mathcal{P}[\overline{U}^t] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n-1}} \int_{\Omega_h} \frac{\overline{U}^t}{\mathcal{K}} \sum_{t' \in \Delta[M]} \overline{U}^{t'} \mathbf{p}^{t'} dm_h = \sum_{t' \in \Delta[M]} (\overline{U}^{t'}, \overline{U}^t) \mathbf{p}^{t'} = \mathbf{p}^t.$$

Поэтому достаточно доказать равенства

$$\mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}^t = \mathcal{P}[A_\sigma \overline{U}^t], \quad \mathbf{S}_j \mathbf{p}^t = \mathcal{P}[S_j \overline{U}^t]. \quad (13.5)$$

Используя (12.3), получим

$$\mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}^t = \sqrt{(\hbar t)_\sigma} \mathbf{p}^{t+\sigma}.$$

Сравнивая эту формулу с (13.3) и учитывая, что $P[\overline{U}^t] = \mathbf{p}^t$, получим первое равенство (13.5).

Аналогично, используя формулу (13.2), а также формулу (12.2), получим второе равенство (13.5).

Приложение. Доказательство теоремы 9.2

Как и при доказательстве теоремы 9.1, мы используем “полярные” координаты X , Φ и представим квантовую кэлерову форму (8.8) в виде

$$\omega_h = \hbar \left(\frac{\partial g_1}{\partial X_1} dX_1 \wedge d\Phi_1 + \frac{\partial g_2}{\partial X_1} dX_1 \wedge d\Phi_2 + \frac{\partial g_1}{\partial X_2} dX_2 \wedge d\Phi_1 + \frac{\partial g_2}{\partial X_2} dX_2 \wedge d\Phi_2 \right),$$

где

$$g_j \stackrel{\text{def}}{=} X_j \frac{\partial}{\partial X_j} \ln \mathcal{K}_R.$$

Вычисление интеграла от квантовой формы объема по листу Ω сводится к вычислению интеграла от первообразной этой 4-формы по границе $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \partial\mathcal{N}_0^+$:

$$\int_{\Omega} \frac{\omega_h \wedge \omega_h}{2} = \hbar^2 \int_{\partial\Omega} \theta \wedge d\Phi_1 \wedge d\Phi_2, \quad \theta \stackrel{\text{def}}{=} G_1 dX_1 + G_2 dX_2.$$

Здесь

$$G_1(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} g_2 \frac{\partial g_1}{\partial X_1} - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial X_1}, \quad G_2(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} g_2 \frac{\partial g_1}{\partial X_2} - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial X_2}.$$

На границе $\partial\Omega$ угловые переменные Φ_j меняются от 0 до 2π , а радиальные переменные X_j меняются вдоль границы классического симплекса (треугольника) $\blacktriangle[\hbar M]$, которая состоит из трех его ребер. Эта граница может попадать на границу координатной карты, поэтому мы разрешим радиальным переменным принимать нулевое и бесконечное значения. В силу (5.13) на ребре, соединяющем первую и вторую вершины, имеем $X_2 = 0$ и, следовательно, $\theta|_{\Sigma_{12}} = 0$. На ребре, соединяющем вторую и третью вершины, имеем

$$X_2 = \infty, \quad X_1 = \tau X_2^{f_2/\mu}$$

и, следовательно,

$$\theta|_{\Sigma_{23}} = (X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2))|_{X_2=\infty} d\tau,$$

где τ – параметр, который при движении от второй вершины к третьей, меняется от 0 до ∞ . На ребре, соединяющем третью и первую вершины, имеем

$$X_1 = \infty, \quad X_2 = tX_1^{-\nu/f_1}$$

и, следовательно,

$$\theta|_{\Sigma_{31}} = (X_1^{-\nu/f_1} G_2(X_1, tX_1^{-\nu/f_1}))|_{X_1=\infty} dt,$$

где t – параметр, который при движении от третьей вершины к первой меняется от ∞ до 0. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\Omega} \frac{\omega_{\hbar} \wedge \omega_{\hbar}}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} (X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2))|_{X_2=\infty} d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} (X_1^{-\nu/f_1} G_2(X_1, tX_1^{-\nu/f_1}))|_{X_1=\infty} dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Вычислим первый интеграл в правой части этого равенства. Используя, как и в доказательстве теоремы 9.1, явную формулу для полинома $\mathcal{K}_R(X_1, X_2)$, мы имеем

$$\mathcal{K}_R(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}_r} c_{\sigma}^r X_2^{f_2 N_{\sigma}^{(1)}/\mu + N_{\sigma}^{(2)}} \tau^{N_{\sigma}^{(1)}}.$$

При $X_2 \rightarrow \infty$ отсюда получаем

$$\mathcal{K}_R(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{R}_r^{\lambda}} c_{\sigma}^r \tau^{N_{\sigma}^{(1)}} \right) X_2^{\lambda} + O(X_2^{\lambda-1}). \quad (\text{П.2})$$

Здесь обозначено

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\sigma \in \mathcal{R}_r} \left(\frac{f_2}{\mu} N_{\sigma}^{(1)} + N_{\sigma}^{(2)} \right), \quad \mathcal{R}_r^{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sigma \in \mathcal{R}_r \mid \frac{f_2}{\mu} N_{\sigma}^{(1)} + N_{\sigma}^{(2)} = \lambda \right\}. \quad (\text{П.3})$$

Дополнительно мы введем краткое обозначение для сумм по множеству $\mathcal{R}_r^{\lambda}$ с различными коэффициентами, а именно обозначим

$$\Sigma[\gamma(N_{\sigma}^{(1)})] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}_r^{\lambda}} \gamma(N_{\sigma}^{(1)}) c_{\sigma}^r \tau^{N_{\sigma}^{(1)}}.$$

В частности, формула (П.2) в этих обозначениях имеет вид

$$\mathcal{K}_R(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) = \Sigma[1] X_2^{\lambda} + O(X_2^{\lambda-1}).$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} (D_1 \mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma[N_{\sigma}^{(1)}] X_2^{\lambda} + O(X_2^{\lambda-1}), \\ (D_2 \mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma \left[\lambda - \frac{f_2}{\mu} N_{\sigma}^{(1)} \right] X_2^{\lambda} + O(X_2^{\lambda-1}), \\ (D_1^2 \mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma[(N_{\sigma}^{(1)})^2] X_2^{\lambda} + O(X_2^{\lambda-1}), \\ (D_1 D_2 \mathcal{K}_R)(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) &= \Sigma \left[N_{\sigma}^{(1)} \left(\lambda - \frac{f_2}{\mu} N_{\sigma}^{(1)} \right) \right] X_2^{\lambda} + O(X_2^{\lambda-1}), \end{aligned}$$

где $D_j = X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$. Подставляя эти асимптотики в формулу для G_1 :

$$G_1(X_1, X_2) = \frac{D_2 \mathcal{K}_R \cdot D_1^2 \mathcal{K}_R - D_1 D_2 \mathcal{K}_R \cdot D_1 \mathcal{K}_R}{X_1 (\mathcal{K}_R)^2},$$

получим

$$\begin{aligned} & \left(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) \right) \Big|_{X_2=\infty} \\ &= \frac{\Sigma[\lambda - \frac{f_2}{\mu} N_\sigma^{(1)}] \Sigma[(N_\sigma^{(1)})^2] - \Sigma[N_\sigma^{(1)}(\lambda - \frac{f_2}{\mu} N_\sigma^{(1)})] \Sigma[N_\sigma^{(1)}]}{\tau (\Sigma[1])^2} \\ &= \lambda \frac{\Sigma[1] \Sigma[(N_\sigma^{(1)})^2] - (\Sigma[N_\sigma^{(1)}])^2}{\tau (\Sigma[1])^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\Sigma[N_\sigma^{(1)}]}{\Sigma[1]} \right). \end{aligned}$$

Поэтому искомым интеграл примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) \right) \Big|_{X_2=\infty} d\tau &= \lambda \frac{\Sigma[N_\sigma^{(1)}]}{\Sigma[1]} \Big|_{\tau=0}^\infty \\ &= \lambda \left(\max_{\sigma \in \mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} - \min_{\sigma \in \mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Обозначим $l = r^{(2)} + \sigma$. Тогда в силу (7.11) имеем

$$\sigma \in \mathcal{R}_r \iff l \in \mathbb{Z}_+^3.$$

Учтем явные формулы (5.9) для базиса $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ и представление (4.3):

$$\begin{aligned} l_1 &= r_1^{(2)} + N_\sigma^{(1)} f_2 + N_\sigma^{(2)} \mu, \\ l_2 &= r_2^{(2)} - N_\sigma^{(1)} f_1 + N_\sigma^{(2)} \nu, \\ l_3 &= r_3^{(2)} + N_\sigma^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Первое равенство (II.5) и определение (II.3) дают

$$\lambda = \frac{1}{|\mu|} (r_1^{(2)} - \min_{l \in \Delta[M]} l_1) = \frac{r_1^{(2)} - r_1^{(3)}}{|\mu|}, \quad (\text{II.6})$$

где мы учли формулы (6.6a): $\min_{l \in \Delta[M]} l_1 = r_1^{(3)}$.

Далее, первое и третье равенства (II.5) дают

$$N_\sigma^{(1)} = \frac{|\mu|}{f_2} (l_3 - r_3^{(2)}) + \frac{1}{f_2} (l_1 - r_1^{(2)}).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \max_{\sigma \in \mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} &= \frac{|\mu|}{f_2} \max_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_1 = r_1^{(3)}}} l_3 + \frac{1}{f_2} (r_1^{(3)} - r_1^{(2)} - |\mu| r_3^{(2)}), \\ \min_{\sigma \in \mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} &= \frac{|\mu|}{f_2} \min_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_1 = r_1^{(3)}}} l_3 + \frac{1}{f_2} (r_1^{(3)} - r_1^{(2)} - |\mu| r_3^{(2)}). \end{aligned}$$

Теперь нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА П.1. Пусть (j, k, s) – какая-то циклическая перестановка чисел $(1, 2, 3)$. Обозначим через l^* точку, на которой достигается $\min_{l \in \Delta[M]} l_s$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\frac{1}{f_k} \left(\max_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_s = l_s^*}} l_j - \min_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_s = l_s^*}} l_j \right) = \left[\frac{l_j^*}{f_k} \right] + \left[\frac{l_k^*}{f_j} \right] = \left[\frac{r_k^{(k)}}{f_j} \right],$$

где $r^{(k)}$ – вершина (6.6a) диофантова остова $\Delta[M]$.

В силу леммы П.1 имеем

$$\max_{\sigma \in \mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} - \min_{\sigma \in \mathcal{R}_r^\lambda} N_\sigma^{(1)} = \frac{|\mu|}{f_2} \left(\max_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_1 = r_1^{(3)}}} l_3 - \min_{\substack{l \in \Delta[M] \\ l_1 = r_1^{(3)}}} l_3 \right) = |\mu| \left[\frac{r_3^{(3)}}{f_2} \right].$$

Учитывая последнюю формулу, а также (П.6), мы получаем из (П.4), что

$$\int_0^\infty \left(X_2^{f_2/\mu} G_1(\tau X_2^{f_2/\mu}, X_2) \right) \Big|_{X_2=\infty} d\tau = (r_1^{(2)} - r_1^{(3)}) \left[\frac{r_3^{(3)}}{f_2} \right].$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$- \int_0^\infty \left(X_1^{-\nu/f_1} G_2(X_1, t X_1^{-\nu/f_1}) \right) \Big|_{X_1=\infty} dt = (r_2^{(2)} - r_2^{(1)}) \left[\frac{r_1^{(1)}}{f_3} \right].$$

Складывая эти два интеграла в (П.1), приходим к (9.4).

Если в представлении (6.5) все три числа M_{12} , M_{23} и M_{31} неотрицательны, то координаты вершин $r^{(s)}$ в (9.4) задаются формулами (6.6b). Подставляя их в (9.4), получим (9.4a).

Список литературы

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972; англ. пер.: V. M. Babic, V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory. Asymptotic methods*, Springer Ser. Wave Phenomena, 4, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
2. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. N. Bogolubov, N. N. Bogolubov, jr., *An introduction to quantum statistical mechanics*, Gordon and Breach, Yverdon, 1994.
3. Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
4. Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Гостехиздат, М.–Л., 1941; пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc., New York, 1927.
5. F. G. Gustavson, “Oil constructing formal integrals of a Hamiltonian system near ail equilibrium point”, *Astron. J.*, **71** (1966), 670–686.
6. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **3**, ВИНТИ, М., 1985, 5–290; англ. пер.: V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, “Mathematical aspects of

- classical and celestial mechanics”, *Dynamical systems*, III, Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 1–291.
7. Á. S. Egilsson, “On embedding the $1 : 1 : 2$ resonance space in a Poisson manifold”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **1**:2 (1995), 48–56.
 8. B. L. Davis, “Embedding dimensions of Poisson spaces”, *Int. Math. Res. Not.*, 2002, № 34, 1805–1839.
 9. A. S. Egilsson, *Newton polyhedra and Poisson structures from certain linear Hamiltonian circle actions*, arXiv: [abs/math/0411398](https://arxiv.org/abs/math/0411398).
 10. M. Karasev, “Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. II”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **11**:1 (2005), 33–56.
 11. М. В. Карасев, “Резонансы и квантовый метод характеристик”, *Международ. конф. “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”* (Москва, 2004), МГУ, М., 2004, 99–100; М. V. Karasev, “Birkhoff resonances and quantum ray method”, *Proceeding of International Seminar “Day on Diffraction”*, St. Petersburg University and Steklov Mathematical Institute, St. Petersburg, 2004, 114–126.
 12. M. Karasev, “Noncommutative algebras, nanostructures, and quantum dynamics generated by resonances”, *Quantum algebras and Poisson geometry in mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **216**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 1–17.
 13. M. Karasev, “Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. III”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 131–150.
 14. M. Karasev, “Resonance gyrons and quantum geometry”, *From geometry to quantum mechanics*, Progr. Math., **252**, Birkhäuser, Boston, 2007, 253–275.
 15. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
 16. В. П. Маслов, “Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений”, *ТМФ*, **33**:2 (1977), 185–209; англ. пер.: V. P. Maslov, “Application of the method of ordered operators to obtain exact solutions”, *Theoret. and Math. Phys.*, **33**:2 (1977), 960–976.
 17. М. В. Карасев, “Асимптотический спектр и фронт осцилляций для операторов с нелинейными коммутационными соотношениями”, *Докл. АН СССР*, **243**:1 (1978), 15–18; англ. пер.: M. V. Karasev, “The asymptotic spectrum and oscillation front for operators with nonlinear commutation relations”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1300–1304.
 18. Л. Д. Фаддеев, “Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля”, *Проблемы квантовой теории поля*, Дубна, 1979, 249–299.
 19. В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I. Псевдодифференциальные уравнения с растущими коэффициентами”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **13**, ВИНТИ, М., 1979, 5–144; англ. пер.: V. P. Maslov, V. E. Nazaikinskii, “Algebras with general commutation relations and their applications. I. Pseudodifferential equations with increasing coefficients”, *J. Soviet Math.*, **15**:3 (1981), 167–273.
 20. М. В. Карасев, В. П. Маслов, “Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **13**, ВИНТИ, М., 1979, 145–267; англ. пер.: M. V. Karasev, V. P. Maslov, “Algebras with general commutation relations and their applications. II. Unitary-nonlinear operator equations”, *J. Soviet Math.*, **15**:3 (1981), 167–273.
 21. Е. К. Склинин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. Представления квантовой алгебры”, *Функц. анализ и его*

- прил., **17:4** (1983), 34–48; англ. пер.: Е. К. Sklyanin, “Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation. Representations of quantum algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **17:4** (1983), 273–284.
22. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986; англ. пер.: L. D. Faddeev, L. A. Takhtadzhyan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
 23. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантование групп Ли и алгебр Ли”, *Алгебра и анализ*, **1:1** (1989), 178–206; англ. пер.: N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, “Quantization of Lie groups and Lie algebras”, *Leningrad Math. J.*, **1:1** (1990), 193–225.
 24. М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991; англ. пер.: M. V. Karasev, V. P. Maslov, *Nonlinear Poisson brackets. Geometry and quantization*, Transl. Math. Monogr., **119**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
 25. M. Karasev, E. Novikova, “Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding”, *Coherent transform, quantization, and Poisson geometry*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 1–202.
 26. М. В. Карасев, Е. М. Новикова, “Квадратичные скобки Пуассона в эффекте Зеемана. Неприводимые представления и когерентные состояния”, *УМН*, **49:5** (1994), 169–170; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Quadratic Poisson brackets in the Zeeman effect. Irreducible representations and coherent states”, *Russian Math. Surveys*, **49:5** (1994), 179–180.
 27. М. В. Карасев, Е. М. Новикова, “Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле”, *ТМФ*, **108:3** (1996), 339–387; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Representation of exact and semiclassical eigenfunctions via coherent states. Hydrogen atom in a magnetic field”, *Theoret. and Math. Phys.*, **108:3** (1996), 1119–1159.
 28. М. В. Карасев, Е. М. Новикова, “Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана–Штарка в атоме водорода”, *ТМФ*, **142:3** (2005), 530–555; англ. пер.: M. V. Karasev, E. M. Novikova, “Algebra with polynomial commutation relations for the Zeeman–Stark effect in the hydrogen atom”, *Theoret. and Math. Phys.*, **142:3** (2005), 447–469; M. Karasev, E. Novikova, “Algebras with polynomial commutation relations for a quantum particle in electric and magnetic fields”, *Quantum algebras and Poisson geometry in mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **216**, Providence, RI, 2005, 19–135.
 29. В. В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995; англ. пер.: V. V. Kozlov, *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **31**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
 30. G. W. Schwartz, “Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group”, *Topology*, **14:1** (1975), 63–68.
 31. M. Karasev, “Advances in quantization: quantum tensors, explicit star-products, and restriction to irreducible leaves”, *Differential Geom. Appl.*, **9:1–2** (1998), 89–134.
 32. M. V. Karasev, “Quantum surfaces, special functions, and the tunneling effect”, *Lett. Math. Phys.*, **56:3** (2001), 229–269.
 33. В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1998; англ. пер.: V. V. Kozlov, *Dynamical systems X. General theory of vortices*, Encyclopaedia Math. Sci., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
 34. Б. Костант, “Квантование и унитарные представления”, *УМН*, **28:1** (1973), 163–225; пер. с англ.: B. Kostant, “Quantization and unitary representations. I. Prequantization”, *Lectures in modern analysis and applications*. III, Lecture Notes in Math., **170**, Springer, Berlin, 1970, 87–208.

35. E. M. Novikova, “Minimal basis of the symmetry algebra for three-frequency resonance”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:4 (2009), 518–528.
36. В. А. Фок, *Работы по квантовой теории поля*, Изд-во ЛГУ, Л., 1957.
37. S. Bergman, *The Kernel function and conformal mapping*, Math. Surveys, **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1950.
38. Sh. Chern, “Scientific report on the second summer institute, several complex variables. Part II. Complex manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62**:2 (1956), 101–117.
39. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, 2-е изд., Наука, М., 1986; англ. пер. 1-го изд.: F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, New York–London, 1966.
40. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1986.

М. В. КАРАСЕВ (M. V. KARASEV)
Московский государственный институт
электроники и математики
E-mail: karasev@amath.msk.ru

Поступило в редакцию
22.04.2009
28.08.2009

Е. М. НОВИКОВА (E. M. NOVIKOVA)
Московский государственный институт
электроники и математики
E-mail: novikova@miem.edu.ru