Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, О задаче продолжения решений однородных уравнений свертки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 3, 65–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:35:42

УДК 517.444

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

О задаче продолжения решений однородных уравнений свертки

Построен ряд контрпримеров, показывающих точность условий в некоторых результатах теории уравнений свертки, связанных с проблемой продолжения.

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: уравнение свертки, периодичность в среднем, проблема продолжения, преобразование Фурье.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Обозначим $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно, $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$) пространство распределений (соответственно, распределений с компактным носителем) в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций, $\mathcal{E}(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O})$. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } T$ – носитель T ,

$$\mathcal{O}^T = \{x \in \mathbb{R}^n: x - y \in \mathcal{O} \quad \forall y \in \text{supp } T\}.$$

Предположим, что множество $\mathcal{O}^T$ является непустым. Тогда для всякого $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ свертка $f * T$ определяется равенством

$$\langle f * T, \varphi \rangle = \langle f_y, \langle T_x, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}^T),$$

как распределение в $\mathcal{D}'(\mathcal{O}^T)$ (индекс внизу у распределений f и T означает действие по указанной переменной). Распределения из класса

$$\mathcal{D}'_T(\mathcal{O}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}): f * T = 0 \text{ в } \mathcal{O}^T\}$$

называются *периодическими в среднем* в области $\mathcal{O}$ относительно T . Если $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$ – некоторое подмножество в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, то пересечение $\mathcal{D}'_T(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{W}(\mathcal{O})$ будем обозначать $\mathfrak{W}_T(\mathcal{O})$. Например, $C^\infty_T(\mathcal{O}) = \mathcal{D}'_T(\mathcal{O}) \cap C^\infty(\mathcal{O})$.

Одной из важных проблем в теории уравнений свертки является проблема продолжения, которая формулируется следующим образом.

ПРОБЛЕМА 1. (i) Пусть $f \in \mathfrak{W}_T(\mathcal{O})$ и область $\mathcal{O}_1$ содержит $\mathcal{O}$. При каких условиях существует $F \in \mathfrak{W}_T(\mathcal{O}_1)$, совпадающее с f на $\mathcal{O}$?

(ii) Если такое продолжение F существует, то будет ли оно единственным?

Даже одномерный случай проблемы 1 является весьма содержательным и имеет глубокие связи с различными разделами анализа. В этом случае ответ в проблеме 1, (ii) положителен для любого $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ в силу теоремы Титчмарша о носителях (см. [1, теорема 4.3.3], а также [2, ч. 3, гл. 1, теорема 1.1]). В проблеме 1, (i) ответ существенно зависит от свойств T , связанных с распределением нулей преобразования Фурье распределения T , т. е. целой функции

$$\widehat{T}(z) = \langle T, e^{-izt} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Наиболее сильные результаты в этом направлении для классов $\mathcal{D}'_T$ и $\mathcal{C}^\infty_T$ были получены первым автором в [2, ч. 3]. В частности, было показано, что для этих классов продолжение в проблеме 1, (i) существует, если выполнены следующие условия:

а) имеет место неравенство $\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{\ln(2+|\lambda|)} < +\infty$, где $\mathcal{Z}(\widehat{T}) = \{z \in \mathbb{C} : \widehat{T}(z) = 0\}$;

б) последовательность кратностей n_λ нулей $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$ является ограниченной;

в) для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$

$$\sum_{j=0}^{n_\lambda-1} \left| \frac{1}{j!} \left(\frac{(z-\lambda)^{n_\lambda}}{\widehat{T}(z)} \right)^{(j)} \right|_{z=\lambda} \leq (2+|\lambda|)^\gamma,$$

где константа $\gamma > 0$ не зависит от λ .

Отметим, что класс распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям а)–в), является достаточно широким и содержит многие интересные для приложений распределения [2, ч. 3]. Вместе с тем имеются примеры распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, для которых не выполняется каждое из условий а)–в) при выполнении двух остальных. В связи с этим возникает вопрос о необходимости и точности этих условий в теоремах о продолжении, который оставался открытым до настоящего времени.

Первая половина настоящей работы посвящена исследованию этой задачи для пространства $\mathcal{D}'_T$ и некоторых классов гладких функций. Во-первых, мы строим контрпримеры, показывающие точность условия а) и необходимость условия в) (см. теоремы 3, 5). Во-вторых, показано, что условие б) можно ослабить следующим образом:

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{n_\lambda}{\ln(2+|\lambda|)} < +\infty,$$

и что эта оценка уже является неувлучшаемой, даже если не требовать от продолжения свойства периодичности в среднем (см. теоремы 1, 2, 4). Наконец, мы завершаем исследование одномерного случая одним результатом о невозможности непрерывного продолжения непрерывной периодической в среднем функции, когда n_λ растет быстрее, чем $|\operatorname{Im} \lambda|$ (см. теорему 6).

Многомерный случай проблемы 1 является более сложным и специфичным. Например, единственность продолжения, вообще говоря, не имеет места. Это

видно уже на примере линейных гиперболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Кроме того, когда речь идет о возможности продолжения, требуются дополнительные условия, налагаемые на f (см. предложение 10).

Во второй половине настоящей работы получены полные аналоги теорем 1–5 для размерности $n \geq 2$ (см. теоремы 7–10). Этого удалось достичь за счет работанной недавно авторами техники трансмутационных операторов, связанных с разложениями по собственным функциям лапласиана (см. [3], а также теоремы 11, 12 ниже).

Точные формулировки и обсуждение основных результатов работы содержатся в § 2. В § 3 строится аппарат для исследования проблемы 1 и ее аналогов. Доказательства основных результатов приводятся в § 4.

В заключение отметим, что теоремы 1–6 настоящей работы принадлежат В. В. Волчкову, а теоремы 7–12 получены авторами совместно (по поводу других результатов, связанных с различными вариантами проблемы 1, см. [4, гл. 5], [5]).

§ 2. Формулировки основных результатов

Рассмотрим сначала одномерный случай. Нам потребуются некоторые обозначения. Как и выше, для целой функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ положим $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \mathbb{C}: f(z) = 0\}$. Если $f \neq 0$ и $\lambda \in \mathcal{Z}(f)$, обозначим через $n_\lambda(f)$ кратность нуля λ . Мы часто будем записывать n_λ вместо $n_\lambda(f)$, если это не вызовет недоразумения. Кроме того, положим

$$\sigma_\lambda(f) = \sum_{j=0}^{n_\lambda-1} |a_j^{\lambda,0}(f)|, \quad \text{где} \quad a_j^{\lambda,0}(f) = \frac{1}{j!} \left(\frac{(z-\lambda)^{n_\lambda}}{f(z)} \right)^{(j)} \Big|_{z=\lambda}$$

(обозначение $a_j^{\lambda,0}(f)$ связано с тем, что ниже будет введена более общая последовательность $a_j^{\lambda,\eta}(f)$, $\eta \in \{0, \dots, n_\lambda - 1\}$; см. формулу (23) в § 3).

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $\alpha > 1$. Обозначим через $G^\alpha[a, b]$ множество всех функций $f \in C^\infty[a, b]$ таких, что

$$\int_a^b |f^{(q)}(t)| dt \leq c^q (1+q)^{\alpha q}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где константа $c > 0$ не зависит от q . Если теперь (a, b) – конечный или бесконечный интервал, то определим $G^\alpha(a, b)$ как совокупность функций $f \in C^\infty(a, b)$, принадлежащих $G^\alpha[a', b']$ для любого конечного отрезка $[a', b']$ из (a, b) .

Введем класс $\mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ (соответственно, $\mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$) как множество всех ненулевых распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ таких, что выполнены следующие условия:

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty \quad \left(\text{соответственно,} \quad \inf_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} > -\infty \right), \quad (2)$$

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{n_\lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty, \quad (3)$$

$$\sigma_\lambda(\hat{T}) \leq (2 + |\lambda|)^{\gamma_1}, \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T}), \quad (4)$$

где $n_\lambda = n_\lambda(\widehat{T})$, а в оценке (4) константа γ_1 не зависит от λ . Положим

$$\mathfrak{M}(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}_-(\mathbb{R}).$$

Нетрудно проверить, что (4) является следствием (3) и следующего условия: для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$ существует $r_\lambda > 0$ такое, что

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} r_\lambda < +\infty, \quad r_\lambda < \min\{|\mu - \lambda| : \mu \in \mathcal{Z}(\widehat{T}), \mu \neq \lambda\},$$

$$|\widehat{T}(z)| > \frac{1}{(2 + |\lambda|)^{\gamma_2}} \quad \text{на окружности } |z - \lambda| = r_\lambda,$$

где константа $\gamma_2 > 0$ не зависит от λ . Это следует из интегральной формулы Коши для функции $(z - \lambda)^{n_\lambda} / \widehat{T}(z)$, где в качестве контура интегрирования рассматривается окружность $|z - \lambda| = r_\lambda$. Отметим также, что если выполнены оба неравенства в (2) и последовательность n_λ является ограниченной, то условие (2) эквивалентно оценке

$$|\widehat{T}^{(n_\lambda)}(\lambda)| > \frac{1}{(2 + |\lambda|)^{\gamma_3}},$$

где $\gamma_3 > 0$ не зависит от λ (см. [2, ч. 3, лемма 1.2]).

Как уже отмечалось, класс $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ является достаточно широким. Принадлежность классу $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ часто легко проверить с помощью асимптотических разложений $\widehat{T}$, которые известны при весьма общих условиях на T (см. [6, гл. 2, теорема 10.2]).

Далее, пусть $\alpha > 1$. Будем говорить, что ненулевое распределение T из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ принадлежит $\mathfrak{G}_+^\alpha(\mathbb{R})$ (соответственно, $\mathfrak{G}_-^\alpha(\mathbb{R})$), если множество $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ конечно или

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^{1/\alpha}} \leq 0 \quad \left(\text{соответственно, } \lim_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^{1/\alpha}} \geq 0 \right),$$

$$n_\lambda + \ln(1 + \sigma_\lambda(\widehat{T})) = o(|\lambda|^{1/\alpha}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}).$$

Положим

$$\mathfrak{G}^\alpha(\mathbb{R}) = \mathfrak{G}_+^\alpha(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{G}_-^\alpha(\mathbb{R}).$$

Для любого класса $\mathfrak{W}(-R, R)$ распределений на интервале $(-R, R)$ через $\mathfrak{W}_b(-R, R)$ обозначается множество всех четных распределений из $\mathfrak{W}(-R, R)$.

При исследовании проблемы 1 в одномерном случае будем считать, не ограничивая общности, что $\operatorname{supp} T \subset [-r(T), r(T)]$, где $r(T)$ – радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}$, содержащего $\operatorname{supp} T$. Это равносильно тому, что $r(T) = r_0(T)$, где

$$r_0(T) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} T \subset (-r, r)\}.$$

Следующий результат устанавливает возможность продолжения в проблеме 1 для случая $T \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ (соответственно, $T \in \mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ (соответственно, $T \in \mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$), $\text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]$, $R > r(T)$, $f \in \mathcal{D}'_T(-R, R)$. Тогда существует единственное распределение $F \in \mathcal{D}'_T(-\infty, R)$ (соответственно, $F \in \mathcal{D}'_T(-R, +\infty)$) такое, что $F = f$ на $(-R, R)$.

Далее, если $R > r(T) > 0$ и $f \in C_T^\infty(-R, R)$, то

$$\langle T, f^{(k)}(-\cdot) \rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Поэтому для гладких функций проблему 1, (i) можно сформулировать в более сильной форме: пусть $R > r(T) > 0$, $\text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]$, $f \in C^\infty[-r(T), r(T)]$ и выполнены равенства (5). При каких условиях существует функция $F \in C_T^\infty(-R, R)$, совпадающая с f на $[-r(T), r(T)]$?

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $r(T) > 0$, $\text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]$, $f \in C^\infty[-r(T), r(T)]$ и выполнено условие (5). Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) если $T \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ (соответственно, $T \in \mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$), то существует единственная функция $F \in C_T^\infty(-\infty, r(T))$ (соответственно, $F \in C_T^\infty(r(T), +\infty)$) такая, что $F = f$ на $(-r(T), r(T))$;

(ii) если $\alpha > 1$, $T \in \mathfrak{G}_+^\alpha(\mathbb{R})$ (соответственно, $T \in \mathfrak{G}_-^\alpha(\mathbb{R})$) и $f \in G^\alpha[-r(T), r(T)]$, то существует единственная функция $F \in G_T^\alpha(-\infty, r(T))$ (соответственно, $F \in G_T^\alpha(r(T), +\infty)$) такая, что $F = f$ на $(-r(T), r(T))$.

Дальнейшие результаты показывают, в частности, что условия (2) и (3) из определений $\mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$ в теоремах 1, 2 ослабить нельзя, даже если не требовать от продолжения свойства периодичности в среднем.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $T \neq 0$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{\text{Im } \lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty. \quad (6)$$

Тогда существует функция $f \in C_T^\infty(a, +\infty)$ такая, что $f \neq F|_{(a, +\infty)}$, если $F \in \mathcal{D}'(a - \varepsilon, +\infty)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Если вместо (6) выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{\text{Im } \lambda}{(1 + |\lambda|)^{1/\alpha}} = +\infty \quad (7)$$

при некотором $\alpha > 1$, то существует $f \in G_T^\alpha(a, +\infty)$ с тем же свойством.

Отметим, что если T удовлетворяет условию вида (6) (соответственно, вида (7)) с $\inf$ и $-\infty$ вместо $\sup$ и $+\infty$, то из теоремы 3 следует невозможность продолжения некоторой функции класса $C_T^\infty(-\infty, a)$ (соответственно, $G_T^\alpha(-\infty, a)$) до распределения, заданного в большем интервале.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $R > r(T)$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{n_\lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty. \quad (8)$$

Тогда существует функция $f \in C_T^\infty(-R, R)$ такая, что $f \neq F_1|_{(-R, R)}$ и $f \neq F_2|_{(-R, R)}$, если $F_1 \in \mathcal{D}'(-R - \varepsilon, R)$ и $F_2 \in \mathcal{D}'(-R, R + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Из теорем 3, 4 получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_q(\mathbb{R})$, $R > r(T)$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{n_\lambda + |\operatorname{Im} \lambda|}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty. \quad (9)$$

Тогда существует четная функция $g \in C_T^\infty(-R, R)$ такая, что $g \neq G|_{(-R, R)}$, если $G \in \mathcal{D}'(-R, R + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Если вместо (9) выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{(1 + |\lambda|)^{1/\alpha}} = +\infty \quad (10)$$

при некотором $\alpha > 1$, то существует четная функция $g \in G_T^\alpha(-R, R)$ с тем же свойством.

Вопрос о точности условия (4) из определений $\mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$ в теоремах 1, 2 остается открытым. Тем не менее, следующая теорема показывает, что без этого условия теоремы 1, 2 неверны.

ТЕОРЕМА 5. Существует ненулевая функция $T \in \mathcal{D}'_q(\mathbb{R})$ такая, что выполнены следующие утверждения:

- (i) все нули $\hat{T}$ являются вещественными и простыми;
- (ii) для любого $R > r(T)$ существует четная функция $g \in C_T^\infty(-R, R)$ такая, что $g \neq G|_{(-R, R)}$, если $G \in \mathcal{D}'(-R, R + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Мы завершим обсуждение одномерного случая следующим результатом.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $T \neq 0$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{n_\lambda}{1 + |\operatorname{Im} \lambda|} = +\infty.$$

Тогда для любого $R > r(T)$ существует функция $f \in C_T(-R, R)$ такая, что $f|_{(0, R)} \notin L^1(0, R)$ и $f|_{(-R, 0)} \notin L^1(-R, 0)$. В частности, функция f не допускает непрерывное продолжение на $[-R, R]$.

Перейдем теперь к случаю $n \geq 2$. Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ и $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ – полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $\sigma = x/\rho$). Обозначим через $\mathcal{H}^{n,k}$ пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [7, гл. 4]), $d(n, k)$ – размерность $\mathcal{H}^{n,k}$ и $\{Y_j^k\}$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,k}$. Положим $Y_1^0(\sigma) = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$ для любого $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$, где $\omega_{n-1} = \pi n^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$.

Пусть $0 < R \leq \infty$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $L^{1,\text{loc}}(B_R)$ – класс локально суммируемых в B_R функций. Ряд Фурье функции $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ по сферическим гармоникам имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma), \quad x \in B_R, \quad (11)$$

где

$$f_{k,j}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_j^k(\sigma)} d\omega(\sigma)$$

и $d\omega$ – элемент площади на $\mathbb{S}^{n-1}$. По теореме Фубини функции $f_{k,j}$ корректно определены для почти всех $\rho \in (0, R)$. Более того, функции $f^{k,j}(x) = f_{k,j}(\rho)Y_j^k(\sigma)$ принадлежат $L^{1,\text{loc}}(B_R)$. Отображение $f \rightarrow f^{k,j}$ и разложение (11) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ следующим образом:

$$\langle f^{k,j}, \psi \rangle = \langle f, \overline{(\psi)_{k,j}(\rho)} \overline{Y_j^k(\sigma)} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(B_R), \quad (12)$$

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j}. \quad (13)$$

Для любого $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ (соответственно, $f \in C^\infty(B_R)$) ряд в правой части (13) сходится к f в $\mathcal{D}'(B_R)$ (соответственно, $C^\infty(B_R)$) (см. [2, ч. 1, разд. 5.2], [8, гл. 1, предложение 2.7]).

Для всякого множества $\mathfrak{W}(B_R) \subset \mathcal{D}'(B_R)$ положим $\mathfrak{W}_{k,j}(B_R) = \{f \in \mathfrak{W}(B_R) : f = f^{k,j}\}$. Отметим, что $\mathfrak{W}_{0,1}(B_R)$ совпадает с множеством радиальных распределений из $\mathfrak{W}(B_R)$. В дальнейшем мы записываем $\mathfrak{W}_{\natural}(B_R)$ вместо $\mathfrak{W}_{0,1}(B_R)$. Нетрудно видеть, что класс $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ инвариантен относительно оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in C_{k,j}^\infty(B_R)$,

$$A_j^k(f) = \begin{cases} f, & \text{если } k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\omega_{n-1}}} D(1-n) \cdots D(2-k-n)(f_{k,j}), & \text{если } k \geq 1, \end{cases} \quad (14)$$

где дифференциальный оператор $D(\alpha)$ определяется равенством $D(\alpha) = \frac{d}{d\varrho} - \frac{\alpha}{\varrho} \text{Id}$; здесь Id – тождественный оператор. Ниже будет показано (см. §3, п. 3.5), что $A_j^k(f) \in C_{\natural}^\infty(B_R)$ и A_j^k продолжается до отображения из $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(B_R)$.

Пусть $\alpha > 1$, $0 < r < \infty$, $\overline{B_r} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$. Обозначим $G^\alpha(\overline{B_r})$ множество функций $f \in C^\infty(\overline{B_r})$, для которых

$$\int_{\overline{B_r}} |\Delta^q f(x)| dx \leq c^q (1+q)^{2\alpha q}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от q . Через $G^\alpha(B_R)$ обозначим множество функций из $C^\infty(B_R)$, принадлежащих $G^\alpha(\overline{B_r})$ для любого $0 < r < R$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{T}$ – сферическое преобразование распределения T , т. е.

$$\tilde{T}(z) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left\langle T_x, \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(z|x|)}{(z|x|)^{\frac{n}{2}-1}} \right\rangle, \quad z \in \mathbb{C}$$

(Γ – гамма-функция, $J_{\frac{n}{2}-1}$ – функция Бесселя первого рода). Определим класс $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ (соответственно, $\mathfrak{G}_\alpha(\mathbb{R}^n)$) при $n \geq 2$ как совокупность всех радиальных распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})} \frac{|\text{Im } \lambda| + n_\lambda(\tilde{T}) + \ln(1 + \sigma_\lambda(\tilde{T}))}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty$$

(соответственно, таких, что $\mathcal{Z}(\tilde{T})$ конечно или $|\operatorname{Im} \lambda| + n_\lambda(\tilde{T}) + \ln(1 + \sigma_\lambda(\tilde{T})) = o(|\lambda|^{1/\alpha})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})$).

Как и в одномерном случае, для $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ через $r(T)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$, содержащего $\operatorname{supp} T$, $r_0(T) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} T \subset B_r\}$.

Аналогом теоремы 1 при $n \geq 2$ является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $T \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, $R > r(T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. Тогда для любой функции $f \in (\mathcal{D}'_T \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$ существует единственное $F \in (\mathcal{D}'_T \cap \mathcal{D}'_{k,j})(\mathbb{R}^n)$, совпадающее с f в B_R .

Нетрудно показать (см. предложение 10 в п. 3.4), что для любых $T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует вещественно-аналитическая функция $f \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$, которая не допускает продолжения до распределения класса $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$. Это означает (см. [2, ч. 3, гл. 2, теорема 2.1]), что условие принадлежности f классу $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ в теореме 7 необходимо, даже если не требовать, чтобы $F \in \mathcal{D}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$.

Переходя к многомерному аналогу теоремы 2, прежде всего отметим, что если $T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$, $R > r(T)$ и $f \in (C^\infty_T \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$, то

$$\langle T, A_j^k(\Delta^\nu f) \rangle = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}_+ \quad (16)$$

(см. соотношения (82), (84), лемму 3 и теорему 11, (iii), (iv) в §3). Равенство (16) является аналогом условия (5).

ТЕОРЕМА 8. Пусть $T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$, $r(T) > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. Предположим, что $f \in C^\infty_{k,j}(\overline{B_{r(T)}})$ и выполнено условие (16). Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) если $T \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, то существует единственная функция $F \in (C^\infty_T \cap C^\infty_{k,j})(\mathbb{R}^n)$, равная f в $\overline{B_{r(T)}}$;
- (ii) если $\alpha > 1$, $T \in \mathfrak{G}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и $f \in G^\alpha(\overline{B_{r(T)}})$, то существует единственная функция $F \in (G^\alpha_T \cap C^\infty_{k,j})(\mathbb{R}^n)$, равная f в $\overline{B_{r(T)}}$.

Приведем в заключение многомерные аналоги следствия 1 и теоремы 5.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. Предположим, что $T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$, $R > r(T)$ и

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})} \frac{n_\lambda(\tilde{T}) + |\operatorname{Im} \lambda|}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty. \quad (17)$$

Тогда существует функция $f \in (C^\infty_T \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$ такая, что $f \neq F|_{B_R}$, если $F \in \mathcal{D}'(B_{R+\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$. Далее, если вместо (17) выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{(1 + |\lambda|)^{1/\alpha}} = +\infty$$

при некотором $\alpha > 1$, то существует $f \in (G^\alpha_T \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$ с тем же свойством.

ТЕОРЕМА 10. *Существует ненулевая функция $T \in \mathcal{D}_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что выполнены следующие утверждения:*

- (i) *все нули $\tilde{T}$ являются вещественными и простыми;*
- (ii) *для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$, $R > r(T)$ существует $f \in (C_T^\infty \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$ такая, что $f \neq F|_{B_R}$, если $F \in \mathcal{D}'(B_{R+\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$.*

§ 3. Вспомогательные конструкции

3.1. Некоторые результаты, связанные с целыми функциями.

Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – целая функция. На протяжении этого пункта будем считать, что f является ненулевой и $\mathcal{Z}(f) \neq \emptyset$. Если $\lambda \in \mathcal{Z}(f)$ и $\eta \in \{0, \dots, n_\lambda - 1\}$, определим последовательность $\{a_j^{\lambda, \eta}(f)\}$, $j = 0, \dots, n_\lambda - 1$, рекуррентными соотношениями

$$a_0^{\lambda, \eta}(f) = \frac{n_\lambda! \delta_{0, \eta}}{f^{(n_\lambda)}(\lambda)}, \quad (18)$$

$$a_j^{\lambda, \eta}(f) = \frac{n_\lambda!}{f^{(n_\lambda)}(\lambda)} \left(\frac{\delta_{j, \eta}}{j!} - \sum_{s=0}^{j-1} a_s^{\lambda, \eta}(f) \frac{f^{(n_\lambda - s + j)}(\lambda)}{(n_\lambda - s + j)!} \right), \quad j \geq 1, \quad (19)$$

где $\delta_{j, \eta}$ – символ Кронекера. Отметим, что

$$a_j^{\lambda, \eta}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } j < \eta, \\ \frac{n_\lambda!}{\eta! f^{(n_\lambda)}(\lambda)}, & \text{если } j = \eta. \end{cases} \quad (20)$$

Для изучения основных свойств последовательности $a_j^{\lambda, \eta}(f)$ рассмотрим целую функцию

$$a^{\lambda, \eta}(f, z) = \sum_{j=0}^{n_\lambda - 1} a_j^{\lambda, \eta}(f) \frac{f(z)}{(z - \lambda)^{n_\lambda - j}}. \quad (21)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (i) *Если $\lambda, \mu \in \mathcal{Z}(f)$, $\eta \in \{0, \dots, n_\lambda - 1\}$, $\nu \in \{0, \dots, n_\mu - 1\}$, то*

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^\nu a^{\lambda, \eta}(f, z) \Big|_{z=\mu} = \delta_{\lambda, \mu} \delta_{\eta, \nu}. \quad (22)$$

(ii) *Если $j \geq \eta$, то*

$$a_j^{\lambda, \eta}(f) = \frac{1}{\eta! (j - \eta)!} \left(\frac{(z - \lambda)^{n_\lambda}}{f(z)} \right)^{(j - \eta)} \Big|_{z=\lambda}. \quad (23)$$

В частности,

$$a_j^{\lambda, \eta}(f) = \frac{1}{\eta!} a_{j - \eta}^{\lambda, 0}(f). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Запишем функцию f в виде степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{k=n_\mu}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\mu)}{k!} (z - \mu)^k, \quad (25)$$

и подставим (25) в (21). Тогда, используя соотношения (18) и (19), получим (22).

(ii) Из (21) видно, что

$$a^{\lambda,\eta}(f, z) \frac{(z - \lambda)^{n_\lambda}}{f(z)} = \sum_{j=0}^{n_\lambda-1} a_j^{\lambda,\eta}(f) (z - \lambda)^j.$$

Отсюда имеем

$$a_j^{\lambda,\eta}(f) = \frac{1}{j!} \left(a^{\lambda,\eta}(f, z) \frac{(z - \lambda)^{n_\lambda}}{f(z)} \right)^{(j)} \Big|_{z=\lambda}.$$

Это равенство и соотношение (22) влекут выполнение (23) и (24).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $g(z) = i(z - c)f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $j \in \{0, \dots, n_\lambda - 1\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) если $c \neq \lambda$, то $a_j^{\lambda,0}(f) = i(\lambda - c)a_j^{\lambda,0}(g) + ia_{j-1}^{\lambda,0}(g)$, где число $a_{j-1}^{\lambda,0}(g)$ считается равным нулю при $j = 0$;
- (ii) если $c = \lambda$, то $a_j^{\lambda,0}(f) = ia_j^{\lambda,0}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из предложения 1, (ii).

Положим

$$\sigma^{\lambda,\eta}(f) = \sum_{j=0}^{n_\lambda-1} |a_j^{\lambda,\eta}(f)|, \quad \sigma_\lambda(f) = \sigma^{\lambda,0}(f). \quad (26)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для $\sigma^{\lambda,\eta}(f)$ имеют место следующие оценки:

- (i) $\sigma^{\lambda,\eta}(f) \leq \frac{1}{\eta!} \sigma_\lambda(f)$;
- (ii) $|a^{\lambda,\eta}(f, z)| \leq \sigma^{\lambda,\eta}(f) \max_{|\zeta - z|=2} |f(\zeta)|$;
- (iii) если p является многочленом степени d и $p(\lambda) \neq 0$, то $c_1(1 + |\lambda|)^{-d} \leq \sigma_\lambda(fp) \leq c_2(1 + |\lambda|)^{-d}$, где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (i) легко следует из (26), (24) и (20). Далее, пусть $z \in \mathbb{C}$. По принципу максимума модуля имеем

$$\left| \frac{f(z)}{(z - \lambda)^{n_\lambda - j}} \right| \leq \begin{cases} |f(z)|, & \text{если } |z - \lambda| > 1, \\ \max_{|\zeta - \lambda|=1} |f(\zeta)|, & \text{если } |z - \lambda| \leq 1, \end{cases}$$

для любого $j \in \{0, \dots, n_\lambda - 1\}$. Поэтому

$$\left| \frac{f(z)}{(z - \lambda)^{n_\lambda - j}} \right| \leq \max_{|\zeta - z| \leq 2} |f(\zeta)|$$

и справедливость (ii) очевидна из (21) и (26). Наконец, для $d = 1$ оценка в (iii) вытекает из предложения 2. В общем случае утверждение (iii) следует отсюда с помощью процесса итераций.

3.2. Биортогональные системы. В этом пункте предполагается, что

$$T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}), \quad T \neq 0, \quad \mathcal{Z}(\widehat{T}) \neq \emptyset, \quad \text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]. \quad (27)$$

Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, мы записываем для краткости $m(\lambda, T)$ вместо $n_\lambda(\widehat{T}) - 1$.

Отметим, что если $T \in (\mathcal{E}' \cap L^1)(\mathbb{R})$, то из (27) следует неравенство $r(T) > 0$. В дальнейшем мы используем этот факт без явного упоминания.

По теореме Винера–Пэли [1, теорема 7.3.1] имеем

$$|\widehat{T}(z)| \leq \gamma_1(1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(T)|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (28)$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ не зависят от z .

Пусть многочлен p таков, что функция $\widehat{T}/p$ является целой. Тогда уравнение

$$p\left(-i\frac{d}{dt}\right)U = T$$

имеет решение $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, причем $r(U) = r(T)$ (см. [1, теорема 7.3.1]). Если $r(T) > 0$, то из (28) и теоремы Адамара о факторизации следует, что множество $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ бесконечно. Согласно сказанному выше в этом случае можно выбрать многочлен p так, что $U \in (L^1 \cap \mathcal{E}')(\mathbb{R})$. Обозначим через d_T наименьшую из степеней таких многочленов p . Отметим также, что если $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ является бесконечным, то

$$m(\lambda, T) = o(|\lambda|) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad (29)$$

(см. (28) и [9, лекция 17, теорема 1]). Кроме того, из оценки (28) и [9, лекция 3, теорема 2] следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{m(\lambda, T)}{(1 + |\lambda|)^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (30)$$

Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$. Из (21), предложения 3, (ii) и теоремы Винера–Пэли видно, что существует $T_{\lambda, \eta} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ такое, что

$$\begin{aligned} r_0(T_{\lambda, \eta}) &= r(T_{\lambda, \eta}) = r(T), \\ \widehat{T}_{\lambda, \eta}(z) &= a^{\lambda, \eta}(\widehat{T}, z), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично, существует $T^{\lambda, \eta} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ такое, что

$$\begin{aligned} r_0(T^{\lambda, \eta}) &= r(T^{\lambda, \eta}) = r(T), \\ \widehat{T^{\lambda, \eta}}(z) &= (\widehat{T}(z - \lambda))^{\eta+1} = \widehat{T}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь мы изучим основные свойства распределений $T_{\lambda, \eta}$ и $T^{\lambda, \eta}$. Далее через $\operatorname{ord} V$ обозначен порядок распределения $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Выполнены следующие утверждения:*

(i) *если $\mu \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\nu \in \{0, \dots, m(\mu, T)\}$, то*

$$\langle T_{\lambda, \eta}, (-it)^\nu e^{-i\mu t} \rangle = \widehat{T}_{\lambda, \eta}^{(\nu)}(\mu) = \delta_{\lambda, \mu} \delta_{\eta, \nu}; \quad (33)$$

(ii) $\operatorname{ord} T^{\lambda, \eta} = \max\{0, \operatorname{ord} T - \eta - 1\}$;

(iii) $T_{\lambda, \eta} = \sum_{j=0}^{m(\lambda, T)} a_{j, \eta}^{\lambda, \eta}(\widehat{T}) T^{\lambda, m(\lambda, T)-j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) получается непосредственно из предложения 1, (i). Далее, формула (32) влечет

$$\left(-i\frac{d}{dt}\right)^{\eta+1}(e^{-i\lambda t}T^{\lambda,\eta}) = e^{-i\lambda t}T.$$

Поскольку $\text{ord}(e^{-i\lambda t}\Psi) = \text{ord}\Psi$ для $\Psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, это доказывает (ii) (см. [10, разд. 4.7]). Утверждение (iii) является прямым следствием соотношений (31), (32) и (21).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$. Тогда $(T * \psi)^{\lambda,\eta} = T^{\lambda,\eta} * \psi$ для всех $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$. В частности,

$$\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)T\right)^{\lambda,\eta} = p\left(\frac{d}{dt}\right)(T^{\lambda,\eta})$$

для любого ненулевого многочлена p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать (32) и формулу $\widehat{T * \psi} = \widehat{T} \cdot \widehat{\psi}$.

Для $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ определим функции $e^{z,m}$, $e_+^{z,m} \in L^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ с помощью равенств

$$e^{z,m}(t) = (it)^m e^{izt}, \quad e_+^{z,m}(t) = \begin{cases} e^{z,m}(t), & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases} \quad (34)$$

Через $L_k^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначен класс функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, для которых $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Имеет место соотношение

$$T^{\lambda,\eta} = \frac{i}{\eta!} e_+^{\lambda,\eta} * T. \quad (35)$$

В частности, если $k \in \mathbb{Z}_+$ и $T \in (\mathcal{E}' \cap L_k^1)(\mathbb{R})$, то

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j T^{\lambda,\eta}(t) = \frac{i^{\eta+1}}{\eta!} \int_{-r(T)}^t T^{(j)}(\xi)(t-\xi)^\eta e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi \quad (36)$$

для всех $j \in \{0, \dots, k\}$, $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $T \in (\mathcal{E}' \cap L_k^1)(\mathbb{R})$, то (36) следует из (32). В случае общего распределения T для любой функции $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi \neq 0$, получаем $T * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и

$$T^{\lambda,\eta} * \psi = (T * \psi)^{\lambda,\eta} = \frac{i}{\eta!} e_+^{\lambda,\eta} * T * \psi$$

(см. (34), (36) и предложение 5). Поскольку функцию $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ можно выбрать произвольной, получаем соотношение (35).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $k \in \mathbb{Z}_+$ и $T \in (\mathcal{E}' \cap L_k^1)(\mathbb{R})$, то $T^{\lambda, \eta}, T_{\lambda, \eta} \in C^k(\mathbb{R})$. Более того,

$$\left\| \left(\frac{d}{dt} \right)^j T^{\lambda, \eta} \right\|_{C[-r(T), r(T)]} \leq \frac{(2r(T))^\eta}{\eta!} \|T^{(j)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]}, \quad (37)$$

$$\left\| \left(\frac{d}{dt} \right)^j T_{\lambda, \eta} \right\|_{C[-r(T), r(T)]} \leq e^{2r(T)} \sigma^{\lambda, \eta}(\widehat{T}) \|T^{(j)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]} \quad (38)$$

для любого $j \in \{0, \dots, k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, то (37) является следствием (36). Далее, перепишем (36) в виде

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^j T^{\lambda, \eta}(t) = -\frac{i^{\eta+1}}{\eta!} \int_t^{r(T)} T^{(j)}(\xi)(t-\xi)^\eta e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi.$$

Отсюда получаем (37) при $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Используя теперь предложение 4, (iii), а также соотношения (26) и (37), приходим к (38).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ – распределение порядка q , $r(T) > 0$ и функция f принадлежит $C^{q+s}[-r(T), r(T)]$ при некотором $s \in \mathbb{N}$. Предположим, что

$$\langle T, f^{(\nu)} \rangle = 0 \quad \forall \nu \in \{0, \dots, s-1\}. \quad (39)$$

Тогда

$$\langle T^{\lambda, \eta}, f \rangle = \left(\frac{i}{\lambda} \right)^s \sum_{k=0}^{\eta} \binom{s+k-1}{k} \frac{\langle T^{\lambda, \eta-k}, f^{(s)} \rangle}{(-\lambda)^k} \quad (40)$$

для всех $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}) \setminus \{0\}$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\lambda \neq 0$. Из соотношений (39) и (32) следует, что

$$\langle T^{\lambda, 0}, f^{(\nu)} \rangle = \frac{i}{\lambda} \langle T^{\lambda, 0}, f^{(\nu+1)} \rangle, \quad \nu \in \{0, \dots, s-1\}.$$

Отсюда имеем

$$\langle T^{\lambda, 0}, f \rangle = \left(\frac{i}{\lambda} \right)^s \langle T^{\lambda, 0}, f^{(s)} \rangle, \quad (41)$$

что доказывает (40) при $\eta = 0$. Предположим теперь, что $m(\lambda, T) \geq 1$ и $\eta \in \{1, \dots, m(\lambda, T)\}$. Индукцией по η из (32) находим

$$\langle T^{\lambda, \eta}, f \rangle = \left(\frac{i}{\lambda} \right)^s \langle T^{\lambda, \eta}, f^{(s)} \rangle - \frac{1}{\lambda} \sum_{l=0}^{s-1} \left(\frac{i}{\lambda} \right)^l \langle T^{\lambda, \eta-1}, f^{(l)} \rangle. \quad (42)$$

Далее, с помощью индукции по $s = 1, 2, \dots$ получаем, что при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{s-1} \binom{j+k-1}{k-1} = \binom{s+k-1}{k}.$$

Используя теперь индукцию по $\eta = 0, 1, \dots$, из соотношений (41) и (42) получаем равенство (40).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $T \in (\mathcal{E}' \cap L^1)(\mathbb{R})$. Предположим, что $f \in C^s[-r(T), r(T)]$ при некотором $s \in \mathbb{N}$ и выполнено (39). Тогда для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $|\lambda| > 1$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$ имеет место неравенство

$$|\langle T^{\lambda, \eta}, f \rangle| \leq \frac{e^{2r(T)}}{(|\lambda| - 1)^s} \|T\|_{L^1[-r(T), r(T)]} \|f^{(s)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя предложение 7 при $q = 0$, получаем

$$|\langle T^{\lambda, \eta}, f \rangle| \leq \sum_{k=0}^{\eta} \binom{s+k-1}{k} \frac{|\langle T^{\lambda, \eta-k}, f^{(s)} \rangle|}{|\lambda|^{k+s}}. \quad (43)$$

Теперь требуемое неравенство следует из соотношений (43) и (37).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $r(T) > 0$, $f \in C^{s+d_T}[-r(T), r(T)]$ при некотором $s \in \mathbb{N}$ и выполнено (39). Тогда для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $|\lambda| > 1$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$ справедливы оценки

$$|\langle T^{\lambda, \eta}, f \rangle| \leq \frac{\gamma_1}{(|\lambda| - 1)^s} \sum_{j=s}^{s+d_T} \|f^{(j)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]}, \quad (44)$$

$$|\langle T_{\lambda, \eta}, f \rangle| \leq \frac{\gamma_2 \sigma^{\lambda, \eta}(\widehat{T})}{(|\lambda| - 1)^s} \sum_{j=s}^{s+d_T} \|f^{(j)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]}, \quad (45)$$

где константы $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ не зависят от λ, η, s, f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению d_T существует $U \in (\mathcal{E}' \cap L^1)(\mathbb{R})$ такое, что $\text{supp } U \subset [-r(T), r(T)]$ и $p(-i \frac{d}{dt})U = T$ для некоторого многочлена p степени d_T . Без ограничения общности можно считать, что $p(\lambda) \neq 0$. Тогда $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}) \cap \mathcal{Z}(\widehat{U})$ и $m(\lambda, T) = m(\lambda, U)$. Равенство (39) можно переписать в виде

$$\langle T, f^{(\nu)} \rangle = \langle U, g^{(\nu)} \rangle = 0, \quad \nu \in \{0, \dots, s-1\},$$

где $g = p(i \frac{d}{dt})f$. По следствию 3 имеем

$$|\langle T^{\lambda, \eta}, f \rangle| \leq \gamma_3 (|\lambda| - 1)^{-s} \|g^{(s)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]},$$

где $\gamma_3 > 0$ не зависит от λ, η, s, f . Это влечет (44). Из оценки (44) и предложения 4, (iii) следует (45).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $r(T) > 0$, $\alpha > 1$, $f \in G^\alpha[-r(T), r(T)]$ и выполнено (39). Тогда для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $|\lambda| > 1$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$ имеет место оценка

$$|\langle T_{\lambda, \eta}, f \rangle| \leq \gamma_1 \sigma^{\lambda, \eta}(\widehat{T}) \exp(-\gamma_2 |\lambda|^{1/\alpha}),$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ не зависят от λ, η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mu(\lambda, f) = \inf_{s \in \mathbb{N}} (|\lambda| - 1)^{-s} \sum_{j=s}^{s+d_T} \|f^{(j)}\|_{L^1[-r(T), r(T)]}.$$

Из этого равенства видно, что

$$|\mu(\lambda, f)| \leq \gamma_3^\nu \nu^{\alpha\nu} (1 + |\lambda|)^{-\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

где $\gamma_3 > 0$ не зависит от λ, ν . Считая $|\lambda|$ достаточно большим и полагая $\nu = [e^{-1}\gamma_3^{-1/\alpha}(1 + |\lambda|)^{1/\alpha}]$, из неравенства (46) получаем

$$|\mu(\lambda, f)| \leq \gamma_4 \exp(-\gamma_5 |\lambda|^{1/\alpha}),$$

где $\gamma_4, \gamma_5 > 0$ не зависят от λ . Отсюда и из (45) следует требуемое утверждение.

3.3. Экспоненциальные разложения. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $T \neq 0$. Ниже будут рассматриваться ряды вида

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda, T)} c_{\lambda, \eta} e^{\lambda, \eta}(t), \quad (47)$$

где $c_{\lambda, \eta} \in \mathbb{C}$, $e^{\lambda, \eta}(t) = (it)^\eta e^{i\lambda t}$, $t \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Сходимость ряда (47) в пространстве $\mathcal{D}'(\alpha, \beta)$ понимается как сходимость в $\mathcal{D}'(\alpha, \beta)$ последовательности частных сумм

$$S_N(t) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T}) \\ |\lambda| \leq N}} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda, T)} c_{\lambda, \eta} e^{\lambda, \eta}(t) \quad (48)$$

при $N \rightarrow +\infty$. Сходимость ряда (47) в других пространствах определяется аналогично.

ЛЕММА 1. Пусть $R > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta, q \in \mathbb{Z}_+$ и

$$A(R, \eta, q) = \begin{cases} R^\eta, & \text{если } R \geq 1, \\ R^{\max\{0, \eta - q\}}, & \text{если } R < 1. \end{cases}$$

Тогда для любого $t \in [-R, R]$ выполнена оценка

$$|(e^{\lambda, \eta}(t))^{(q)}| \leq A(R, \eta, q)(|\lambda| + \eta)^q e^{-t \operatorname{Im} \lambda}. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение является следствием тождества

$$(e^{\lambda, \eta}(t))^{(q)} = \sum_{j=0}^{\min\{q, \eta\}} \binom{q}{j} \frac{\eta! i^{\eta+q-j}}{(\eta-j)!} \lambda^{q-j} t^{\eta-j} e^{i\lambda t},$$

поскольку $\eta! / (\eta-j)! \leq \eta^j$ при $\eta \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $R > 0$, $t \in [-R, R]$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\sum_{\eta=0}^{m(\lambda, T)} |(e^{\lambda, \eta}(t))^{(q)}| \leq \gamma_1 \gamma_2^q B(R, \lambda, q) (1 + |\lambda|)^q e^{-t \operatorname{Im} \lambda}, \quad (50)$$

где

$$B(R, \lambda, q) = \begin{cases} R^{m(\lambda, T)}, & \text{если } R > 1, \\ m(\lambda, T) + 1, & \text{если } R = 1, \\ \min\{q + 1, m(\lambda, T) + 1\}, & \text{если } R < 1, \end{cases}$$

и константы $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ зависят только от R, T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (29), имеем

$$|\lambda| + \eta \leq (1 + |\lambda|) \left(1 + \frac{m(\lambda, T)}{1 + |\lambda|} \right) \leq \gamma_3 (1 + |\lambda|),$$

где $\gamma_3 > 0$ зависит только от T . Эта оценка и (49) приводят к требуемому результату.

В следующем утверждении содержатся достаточные условия для сходимости (47) в пространствах $\mathcal{D}'(\alpha, \beta)$ и $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. (i) Пусть

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty, \quad \sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{m(\lambda, T)}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty, \quad (51)$$

$$|c_{\lambda, \eta}| \leq (2 + |\lambda|)^\gamma \quad \forall \lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T}), \quad \eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T)\}, \quad (52)$$

где $\gamma > 0$ не зависит от λ, η . Тогда ряд (47) сходится в $\mathcal{D}'(-\infty, 0)$.

(ii) Если выполнено (51) и

$$\max_{0 \leq \eta \leq m(\lambda, T)} |c_{\lambda, \eta}| = O(|\lambda|^{-\gamma}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного $\gamma > 0$, то ряд (47) сходится в $C^\infty(-\infty, 0)$.

(iii) Пусть $\alpha > 1$,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^{1/\alpha}} \leq 0, \quad m(\lambda, T) = o(|\lambda|^{1/\alpha}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (53)$$

$$|c_{\lambda, \eta}| \leq \gamma_1 \exp(-\gamma_2 |\lambda|^{1/\alpha}), \quad (54)$$

где константы $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ не зависят от λ, η . Тогда ряд (47) сходится в $C^\infty(-\infty, 0)$ к функции $f \in G^\alpha(-\infty, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (i) сначала заметим, что

$$\langle S_N, \varphi \rangle = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T}) \\ |\lambda| \leq N}} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda, T)} c_{\lambda, \eta} \hat{\varphi}^{(\eta)}(\lambda), \quad (55)$$

где φ – произвольная функция из $\mathcal{D}(-\infty, 0)$ (см. (48)). По теореме Винера–Пэли для любого $\alpha > 1$ существуют $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ такие, что

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq \gamma_1 (2 + |\zeta|)^{-\alpha} e^{\gamma_2 |\operatorname{Im} \zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}.$$

Используя формулу Коши, в которой контуром интегрирования является окружность $\{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta - \lambda| = \ln(2 + |\lambda|)\}$, согласно (51) имеем

$$\max_{0 \leq \eta \leq m(\lambda, T)} |\widehat{\varphi}^{(\eta)}(\lambda)| = O(|\lambda|^{-\beta}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного $\beta > 0$. Используя теперь (52), (55) и (30), получаем утверждение (i).

Утверждение (ii) легко получается из следствия 5.

Докажем (iii). Пусть $R > 0$, $t \in [-R, R]$, $q \in \mathbb{N}$. Из оценок (50), (53) и (54) следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda, T)} |c_{\lambda, \eta}(e^{\lambda, \eta}(t))^{(q)}| \leq \gamma_3^q \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} (1 + |\lambda|)^{-2+q} \exp(-\gamma_4 |\lambda|^{1/\alpha}), \quad (56)$$

где $\gamma_3, \gamma_4 > 0$ зависят только от $R, T, \alpha, \gamma_1, \gamma_2$. Легко видеть, что

$$(1 + |\lambda|)^q \exp(-\gamma_4 |\lambda|^{1/\alpha}) \leq \gamma_5^q q^{\alpha q}$$

при некотором $\gamma_5 > 0$, которое не зависит от λ, q . Учитывая теперь (56) и (30), получаем доказательство предложения.

3.4. Обобщенные сферические функции. Ниже будем использовать обозначения из § 2. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ определим

$$\Phi_{\lambda, \eta, k, j}(x) = \Phi_{\lambda, \eta, k}(\varrho) Y_j^k(\sigma), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (57)$$

где

$$\Phi_{\lambda, \eta, k}(\varrho) = \tau_n \varrho^k \left(\frac{d}{dz} \right)^{\varkappa} \left(\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}(z\varrho)}{(z\varrho)^{\frac{n}{2}+k-1}} \right) \Big|_{z=\lambda}, \quad (58)$$

$$\tau_n = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}}, \quad \varkappa = \begin{cases} \eta, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 2\eta, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases} \quad (59)$$

Используя (57), (58) и формулы дифференцирования для бесселевых функций [11, гл. 7, разд. 7.2, формулы (50), (51)], докажем соотношения

$$D(k)\Phi_{\lambda, 0, k} = -\lambda^2 \Phi_{\lambda, 0, k+1}, \quad D(1-k-n)\Phi_{\lambda, 0, k+1} = \Phi_{\lambda, 0, k}, \quad (60)$$

$$(\Delta + \lambda^2)\Phi_{\lambda, 0, k, j} = 0. \quad (61)$$

Далее, если $N \in \mathbb{Z}_+$ и $r \in (0, +\infty)$, то из разложения $\Phi_{\lambda, 0, k, j}$ по плоским волнам [12, введение, лемма 3.6] имеем оценку

$$\|\Phi_{\lambda, 0, k, j}\|_{C^N(\overline{B_r})} \leq c(1 + |\lambda|)^{N-k} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad (62)$$

где константа $c > 0$ не зависит от λ, r .

Преобразование Фурье–Бесселя распределения $f \in \mathcal{E}'_{k, j}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \langle f, \overline{\Phi_{\bar{z}, 0, k, j}} \rangle, \quad z \in \mathbb{C} \quad (63)$$

(см. [2, ч. 1, разд. 6.2], [7, гл. 4, п. 3]). Если $f \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$, то функция $\mathcal{F}_1^0(f)(z)$ совпадает со сферическим преобразованием $\tilde{f}(z)$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\Phi_{\lambda,0,k,j} * T = \tilde{T}(\lambda) \Phi_{\lambda,0,k,j}$$

по теореме о среднем для собственных функций оператора Δ (см. (61) и [12, гл. 4, § 2, предложение 2.4]). Отсюда имеем

$$\mathcal{F}_j^k(f * T) = \mathcal{F}_j^k(f) \tilde{T} \quad \forall f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n), \quad T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n).$$

В частности,

$$\mathcal{F}_j^k(P(\Delta)f)(z) = P(-z^2) \mathcal{F}_j^k(f)(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (64)$$

для любого многочлена P .

ЛЕММА 2. Пусть E – бесконечное ограниченное подмножество в пространстве $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E, k, j)$ – множество всех линейных комбинаций функций $\Phi_{\lambda,0,k,j}$, $\lambda \in E$. Тогда для любого $R > 0$ множество $\mathcal{L}(E, k, j)$ плотно в $C_{k,j}^\infty(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \mathcal{E}'(B_R)$ и $\langle u, \Phi_{\lambda,0,k,j} \rangle = 0$ для любого $\lambda \in E$. Согласно (63) и (12) имеем $\mathcal{F}_j^k((\bar{u})^{k,j})(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, поскольку $\mathcal{F}_j^k((\bar{u})^{k,j})$ является целой функцией. Отсюда $(\bar{u})^{k,j} = 0$. Следовательно, $\langle u, f \rangle = 0$ для любой функции $f \in C_{k,j}^\infty(B_R)$ (см. (12)). Применяя теорему Хана–Банаха, получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{Z}(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует вещественно-аналитическая функция $f \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$ такая, что $f \neq F|_{\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}}$, если $F \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $T \neq 0$ и $x_0 = 0$. Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})$. Тогда существует фундаментальное решение w оператора $\Delta + \lambda^2$, локально интегрируемое в $\mathbb{R}^n$ и вещественно-аналитическое в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (см. [13, § 5.3], [14, гл. 1, § 2, формулы (2.2), (2.3)]). Положим $f = w|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$. Из радиальности T и теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца [12, гл. 4, § 2, предложение 2.4] следует, что $f \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Предположим, что $f = F|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ для некоторого $F \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\psi = F - w$; тогда $\psi = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и

$$((\Delta + \lambda^2)\psi + \delta) * T = (\Delta + \lambda^2)F * T = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n$$

(здесь δ – мера Дирака, сосредоточенная в нуле). Отсюда вытекает, что преобразование Фурье распределения $(\Delta + \lambda^2)\psi + \delta$ равно нулю тождественно. Этого, однако, не может быть ни для какого $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (см. [7, гл. 1, § 1, формула (1.9)]). Таким образом, f удовлетворяет всем требованиям утверждения. Предложение доказано.

Далее, положим

$$\text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)) = \{f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) : \bar{f} \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Пусть $T \in \text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$. Из теоремы Винера–Пэли следует, что существует единственное распределение $\Lambda^{k,j}(T) \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ такое, что

$$\widehat{\Lambda^{k,j}(T)}(z) = \overline{\mathcal{F}_j^k(\overline{T})(\overline{z})} = \langle T, \Phi_{z,0,k,j} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (65)$$

Преобразование $\Lambda^{k,j}: T \rightarrow \Lambda^{k,j}(T)$ осуществляет биекцию между $\text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$ и $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$. Кроме того, выполнено

$$\text{ord } \Lambda^{k,j}(T) \leq \max\{0, \text{ord } T - k + 1\}, \quad r(\Lambda^{k,j}(T)) = r(T). \quad (66)$$

В дальнейшем отображение $\Lambda^{0,1}: \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ будем обозначать через Λ .

3.5. Трансмутационные операторы, связанные с разложениями по собственным функциям лапласиана. Пусть $R \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $F \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$. Для $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$, $w \in \mathcal{D}(B_R)$ положим

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f\eta_1)(\lambda) \int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda t) dt d\lambda, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}_{k,j}(F), w \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F\eta_2}(\lambda) \mathcal{F}_j^k(\overline{(\overline{w})_{k,j}(\varrho)}) Y_j^k(\sigma)(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F\eta_2}(\lambda) \langle w, \Phi_{\lambda,0,k,j} \rangle d\lambda, \end{aligned} \quad (68)$$

где $\eta_1 \in \mathcal{D}_{\natural}(B_R)$ и $\eta_2 \in \mathcal{D}_{\natural}(-R, R)$ равны единице в некоторых окрестностях $B_{r_0(\psi)}$ и $(-r_0(w), r_0(w))$ соответственно. Правые части в (67), (68) не зависят от выбора η_1, η_2 и определяют отображения $\mathfrak{A}_{k,j}: \mathcal{D}'_{k,j}(B_R) \rightarrow \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, $\mathfrak{B}_{k,j}: \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R) \rightarrow \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ (см. [3, § 2]). Основные свойства этих отображений описаны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $R \in (0, +\infty]$, $s \in \{2, 3, \dots\}$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = N + n + k + 2$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ является непрерывным из $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, из $C_{k,j}^\nu(B_R)$ в $C_{\natural}^N(-R, R)$ и $\text{ord } \mathfrak{A}_{k,j}(f) \leq \text{ord } f + n + k + 2$ для $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$; аналогично, отображение $\mathfrak{B}_{k,j}$ непрерывно из $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ в $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, из $C_{\natural}^s(-R, R)$ в $C_{k,j}^{s+k-2}(B_R)$ и $\text{ord } \mathfrak{B}_{k,j}(F) \leq \max\{0, \text{ord } F - k + 3\}$ для $F \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$;
- (ii) отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ осуществляет гомеоморфизм между $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ и $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, а также между $C_{k,j}^\infty(B_R)$ и $C_{\natural}^\infty(-R, R)$, при этом $\mathfrak{A}_{k,j}^{-1} = \mathfrak{B}_{k,j}$;
- (iii) если $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $r \in (0, R]$, то $f = 0$ в B_r в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$;
- (iv) если $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ и $r(T) < R$, то

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f * T) = \mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T) \quad \text{на } (r(T) - R, R - r(T)),$$

в частности справедливо трансмутационное свойство $\mathfrak{A}_{k,j}(\Delta f) = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))''$;

- (v) при $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+$ выполнены равенства

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,\mu,k,j})(t) = \begin{cases} \frac{(it)^\mu e^{i\lambda t} + (-it)^\mu e^{-i\lambda t}}{2}, & \lambda \neq 0, \\ (-1)^\mu t^{2\mu}, & \lambda = 0; \end{cases} \quad (69)$$

(vi) если $T \in \text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$, $r(T) < R$, $f \in C_{k,j}^m(B_R)$ и $F \in C_{\natural}^M(-R, R)$, где $m = \max\{n + k + 2, \text{ord } T + n + 3\}$, $M = \max\{2, \text{ord } T - k + 2\}$, то

$$\langle T, f \rangle = \langle \Lambda^{k,j}(T), \mathfrak{A}_{k,j}(f) \rangle, \quad \langle T, \mathfrak{B}_{k,j}(F) \rangle = \langle \Lambda^{k,j}(T), F \rangle. \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (i)–(v) отображений $\mathfrak{A}_{k,j}$, $\mathfrak{B}_{k,j}$ известны (см. [3, доказательства теорем 1, 2]). Установим (vi). При $\mu = 0$ формула (69) приобретает вид $\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,0,k,j})(t) = \cos(\lambda t)$. На основании этого равенства и (65) имеем $\langle T, \Phi_{\lambda,0,k,j} \rangle = \langle \Lambda^{k,j}(T), \mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,0,k,j}) \rangle$. Теперь, учитывая произвольность λ , оценку в (66), утверждение (i) и лемму 2, приходим к первому соотношению в (70). Второе соотношение в (70) доказывается аналогично.

Пусть $r \in (0, +\infty)$ и $f \in C_{k,j}^\nu(\overline{B_r})$, где ν задано в теореме 11. Ясно, что существует функция $f_1 \in C_{k,j}^\nu(\mathbb{R}^n)$, для которой $f_1|_{\overline{B_r}} = f$. Кроме того, если $f_2 \in C_{k,j}^\nu(\mathbb{R}^n)$ и $f_2|_{\overline{B_r}} = f$, то $\mathfrak{A}_{k,j}(f_1) = \mathfrak{A}_{k,j}(f_2)$ на $[-r, r]$ в силу теоремы 11, (i), (iii). Следовательно, $\mathfrak{A}_{k,j}$ корректно задано как отображение из $C_{k,j}^\nu(\overline{B_r})$ в $C_{\natural}^N[-r, r]$ по формуле

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f) = \mathfrak{A}_{k,j}(f_1)|_{[-r, r]}.$$

Подобным образом равенство $\mathfrak{B}_{k,j}(F) = \mathfrak{B}_{k,j}(F_1)|_{\overline{B_r}}$, где $F \in C_{\natural}^s[-r, r]$, F_1 – продолжение F на $\mathbb{R}$ класса $C_{\natural}^s(\mathbb{R})$, определяет $\mathfrak{B}_{k,j}$ как отображение из $C_{\natural}^s[-r, r]$ в $C_{k,j}^{s+k-2}(\overline{B_r})$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $r \in (0, +\infty)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. Тогда существует константа $c > 0$ такая, что

$$\int_{-r}^r |(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(M)}(t)| dt \leq c \sum_{i=0}^{\left[\frac{n+k}{2}\right]+1} \int_{B_r} |\Delta^{\left[\frac{M+1}{2}\right]+i} f(x)| dx, \quad (71)$$

$$\int_{B_r} |\Delta^M \mathfrak{B}_{k,j}(F)(x)| dx \leq c \int_{-r}^r (|F^{(2M)}(t)| + |F^{(2M+2)}(t)|) dt \quad (72)$$

для всех $M \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C_{k,j}^s(\overline{B_r})$ и $F \in C_{\natural}^{2M+2}[-r, r]$, где $s = 2 + \max\{M + k + n, 2\left[\frac{M+1}{2}\right] + 2\left[\frac{n+k}{2}\right]\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим неравенство (71). Поскольку $C_{k,j}^\infty$ плотно в $C_{k,j}^s$, достаточно рассмотреть случай, когда $f \in C_{k,j}^\infty$. Пусть $M = 2N$, $N \in \mathbb{Z}_+$. Для краткости положим $h = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}$. Определим

$$g(t) = \begin{cases} e^{-i \arg h(t)}, & \text{если } t \in [-r, r], \ h(t) \neq 0, \\ 1, & \text{если } t \in [-r, r], \ h(t) = 0, \\ 0, & \text{если } |t| > r. \end{cases}$$

Тогда

$$|\widehat{g}(\lambda)| \leq 2re^{r|\text{Im } \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (73)$$

$$\int_{-r}^r |h(t)| dt = \int_{-r}^r h(t)g(t) dt. \quad (74)$$

Далее,

$$g = \Lambda^{k,j}(T) \quad (75)$$

для некоторого $T \in \text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$, $r(T) = r$. Из соотношений (73), (75) и (65) заключаем, что $\text{ord } T \leq 2\left[\frac{n+k}{2}\right] + 2$. Поэтому согласно (74) и теореме 11, (iv), (vi) имеем

$$\int_{-r}^r |h(t)| dt = \langle T, \Delta^N f \rangle. \quad (76)$$

Пусть

$$\alpha_i = \frac{\omega_{n-1} \lambda_i^{n+2k-2} \widehat{g}(\lambda_i)}{2^{n-1} \pi^n r^2 J_{\frac{n}{2}+k}^2(\lambda_i r)}, \quad i = 1, \dots, \left[\frac{n+k}{2}\right] + 1,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — последовательность всех положительных нулей $J_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda r)$, занумерованных в порядке возрастания. Ввиду (73) и [11, гл. 7, разд. 10, формула (48)] функция

$$w(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+k}{2}\right]+1} \alpha_i \overline{\Phi_{\lambda_i, 0, k, j}(x)}, & \text{если } x \in B_r, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_r, \end{cases}$$

обладает следующими свойствами:

1) имеет место неравенство

$$|w(x)| \leq c_1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (77)$$

где константа c_1 зависит только от n, k и r ;

2) $\mathcal{F}_j^k(\overline{T})(\lambda_i) = \mathcal{F}_j^k(\overline{w})(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, \left[\frac{n+k}{2}\right] + 1$.

Введем четную целую функцию

$$u(\lambda) = \frac{\mathcal{F}_j^k(\overline{T})(\lambda) - \mathcal{F}_j^k(\overline{w})(\lambda)}{P(-\lambda^2)},$$

где

$$P(-\lambda^2) = \prod_{i=1}^{\left[\frac{n+k}{2}\right]+1} (\lambda_i^2 - \lambda^2).$$

Учитывая (73), (65), (77), (62) и применяя принцип максимума для голоморфных функций, получаем

$$|u(\lambda)| \leq c_2 \frac{e^{r|\text{Im } \lambda|}}{(1 + |\lambda|)^{2\left[\frac{n+k}{2}\right]+1}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (78)$$

где константа c_2 зависит только от n, k, r . Из (78), (62), (64), формулы обращения для преобразования Фурье и теоремы Винера–Пэли следует, что существует $T_1 \in C_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\text{supp } T_1 \subset \overline{B_r}$, $T - w = \overline{P(\Delta)T_1}$ и

$$|T_1(x)| \leq c_3, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (79)$$

где константа c_3 зависит только от n, k, r . В терминах T_1 мы можем переписать (76) в виде

$$\int_{-r}^r |h(t)| dt = \overline{\langle T_1, P(\Delta) \Delta^N f \rangle} + \langle w, \Delta^N f \rangle.$$

Последнее равенство и оценки (77), (79) влекут (71) при $M = 2N$. Предположим теперь, что $M = 2N - 1$, $N \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N-1)}(t) = \int_0^t (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}(u) du,$$

имеем

$$\int_{-r}^r |(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N-1)}(t)| dt \leq r \int_{-r}^r |(\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2N)}(t)| dt.$$

По доказанному выше отсюда получаем (71) в рассматриваемом случае.

Докажем (72). Обозначим через H функцию $\Delta^M \mathfrak{B}_{k,j}(F)$. Положим

$$T(x) = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} G(\varrho\xi) Y_j^k(\xi) d\omega(\xi) \right) \overline{Y_j^k(\sigma)},$$

где $G(x) = e^{-i \arg H(x)}$, если $x \in \overline{B_r}$ и $H(x) \neq 0$, $G(x) = 1$, если $x \in \overline{B_r}$ и $H(x) = 0$, $G(x) = 0$, если $|x| > r$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\int_{B_r} |H(x)| dx = \int_{B_r} H(x) G(x) dx = \int_{B_r} H(x) T(x) dx. \quad (80)$$

На основании (80), а также утверждений (ii)–(iv) и (vi) теоремы 11 получаем

$$\int_{B_r} |H(x)| dx = \langle \Lambda^{k,j}(T) - W, F^{(2M)} \rangle + \langle W, F^{(2M)} \rangle, \quad (81)$$

где

$$W(t) = r^{-1} \overline{\mathcal{F}_j^k(\overline{T})} (\pi r^{-1}) \cos(\pi r^{-1} t) \chi_{[-r,r]}(t),$$

$\chi_{[-r,r]}$ – индикатор отрезка $[-r, r]$. Учитывая, что $(\widehat{\Lambda^{k,j}(T)} - \widehat{W})(\pm \pi r^{-1}) = 0$, из равенства (81) получаем (72) (см. доказательство (71)).

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $R \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $\alpha > 1$. Тогда $f \in (\mathcal{D}'_{k,j} \cap G^\alpha)(B_R)$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in (\mathcal{D}'_{\natural} \cap G^\alpha)(-R, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать определение классов G^α (см. (1), (15)) и теорему 12.

Введем теперь отображение $\mathcal{A}_j^k: \mathcal{D}'_{k,j}(B_R) \rightarrow \mathcal{D}'_{\natural}(B_R)$, $R \in (0, +\infty]$, по формуле

$$\mathcal{A}_j^k = \mathfrak{A}_{0,1}^{-1} \mathfrak{A}_{k,j}. \quad (82)$$

Из соотношения (69) имеем

$$\mathcal{A}_j^k(\Phi_{\lambda,\mu,k,j}) = \Phi_{\lambda,\mu,0,1}. \quad (83)$$

Далее, при условиях теоремы 11, (iv) в $B_{R-r(T)}$ справедливо соотношение

$$\mathcal{A}_j^k(f * T) = \mathcal{A}_j^k(f) * T. \quad (84)$$

ЛЕММА 3. Сужение $\mathcal{A}_j^k$ на $C_{k,j}^\infty(B_R)$ совпадает с A_j^k (см. (14)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C_{k,j}^\infty(B_R)$. Мы можем считать без ограничения общности, что $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^\infty)(B_R)$ (см. теорему 11, (ii), (iii)). По формуле обращения (см. [7, гл. 4, теорема 3.10] и (59)) имеем

$$f(x) = \frac{1}{\tau_n^2} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \Phi_{\lambda,0,k,j}(x) \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) d\lambda. \quad (85)$$

Применим к (85) оператор A_j^k . Учитывая (83) и (60), получаем $A_j^k(f) = \mathcal{A}_j^k(f)$. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство основных результатов

Сразу отметим, что однозначность продолжения в теоремах 1, 2, 7, 8 следует из теорем единственности для периодических в среднем функций (см. [4, гл. 5, § 1], [2, ч. 3, теоремы 1.1, 2.1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим случай $T \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ (для $T \in \mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$ рассуждения аналогичны). Если $r(T) = 0$, то уравнение $f * T = 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и утверждение теоремы очевидно. Пусть $r(T) > 0$. Тогда из (28) и теоремы Адамара о факторизации следует, что множество $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ бесконечно. Поэтому существует функция $T_1 \in (C \cap \mathcal{E}')(\mathbb{R})$ такая, что $p_1(-i\frac{d}{dt})T_1 = T$ для некоторого многочлена p_1 и $\mathcal{Z}(p_1) \cap \mathcal{Z}(\widehat{T}_1) = \emptyset$ (см. [1, теорема 7.3.2]). Пусть $\varepsilon \in (0, R - r(T))$, $\eta \in \mathcal{D}(-R, R)$ и $\eta = 1$ на интервале $(-R + \varepsilon, R - \varepsilon)$. Положим $f_1 = f\eta$. Тогда $f_1 * T = 0$ на $(-R + r(T) + \varepsilon, R - r(T) - \varepsilon)$. Кроме того, существует такое число $b > R$, что целая функция $\widehat{f}\eta(z) + 2\cos(bz)$ имеет бесконечное множество нулей, отличных от нулей $\widehat{T}$. Поэтому найдется многочлен p_2 , удовлетворяющий условиям:

1) $p_2(-i\frac{d}{dt})u = f_1 + \delta_{-b} + \delta_b$ для некоторого $u \in (\mathcal{E}' \cap C)(\mathbb{R})$, где $\delta_{\pm b}$ – дельта-функции в соответствующих точках;

2) $\mathcal{Z}(p_2) \cap \mathcal{Z}(\widehat{T}) = \emptyset$.

В частности, $p_2(-i\frac{d}{dt})u = f$ на $(-R + \varepsilon, R - \varepsilon)$. Пусть $\psi = u * T_1$; тогда $p(-i\frac{d}{dt})\psi = 0$ на $(-R + r(T) + \varepsilon, R - r(T) - \varepsilon)$, где $p = p_1p_2$. Это означает, что

$$\psi = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(p)} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda(p)-1} a_{\lambda,\eta} e^{\lambda,\eta}$$

для некоторых $a_{\lambda,\eta} \in \mathbb{C}$. Поскольку $\mathcal{Z}(p) \cap \mathcal{Z}(\widehat{T}_1) = \emptyset$, существуют $b_{\lambda,\eta} \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathcal{Z}(p)$, $\eta \in \{0, \dots, n_\lambda(p) - 1\}$, такие, что $\psi = v * T_1$, где

$$v = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(p)} \sum_{\eta=0}^{n_\lambda(p)-1} b_{\lambda,\eta} e^{\lambda,\eta}. \quad (86)$$

Полагая $w = u - v$, имеем $w * T_1 = 0$ на $(-R + r(T) + \varepsilon, R - r(T) - \varepsilon)$. Поскольку $T \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$, из (38), предложения 3, (iii) и предложения 9, (i) следует, что ряд

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}_1)} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda, T_1)} \langle (T_1)_{\lambda, \eta}, w(-\cdot) \rangle e^{\lambda, \eta} \quad (87)$$

сходится в $\mathcal{D}'(-\infty, 0)$ к распределению класса $\mathcal{D}'_{T_1}(-\infty, 0)$. Более того, некоторая подпоследовательность частичных сумм этого ряда суммируется методом Абеля на $(-r(T), r(T))$ к функции w (см. [15]). Следовательно, w продолжается на $(-\infty, R - \varepsilon)$ до распределения класса $\mathcal{D}'_{T_1}(-\infty, R - \varepsilon)$. Обозначим это продолжение через W и положим $F = p_2(-i \frac{d}{dt})(W + v)$. Тогда $F \in \mathcal{D}'_T(-\infty, R - \varepsilon)$ и $F = f$ на $(-R + \varepsilon, R - \varepsilon)$, поскольку $p(-i \frac{d}{dt})(v) = 0$ (см. (86)). По теореме единственности [2, ч. 3, гл. 1, теорема 1.1] получаем, что $F = f$ на $(-R, R - \varepsilon)$. Таким образом, необходимое продолжение построено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала докажем утверждение (i) для $T \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ (случай $T \in \mathfrak{M}_-(\mathbb{R})$ рассматривается аналогично). Определим $T_1 \in (C \cap \mathcal{E}')(\mathbb{R})$, как в доказательстве теоремы 1, и положим $w = p_1(-i \frac{d}{dt})f$. Из условия теоремы имеем $\langle (T_1)_{\lambda, \eta}, w^{(\nu)}(-\cdot) \rangle = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда ряд (87) сходится в $C^\infty(-\infty, 0)$ к функции класса $C^\infty_{T_1}(-\infty, 0)$ (см. (45) и предложение 9, (ii)). Как и в доказательстве теоремы 1, заключаем, что существует функция $W \in C^\infty_{T_1}(-\infty, r(T))$, совпадающая с w на $(-r(T), r(T))$. Определим теперь $F \in C^\infty(-\infty, r(T))$ из равенства $p_1(-i \frac{d}{dt})F = W$ и условия $F|_{(-r(T), r(T))} = f$ (это возможно в силу определения w). Тогда $F \in C^\infty_T(-\infty, r(T))$ и утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) доказывается аналогично, следует лишь использовать следствие 4 и предложение 3, (iii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По условию существует последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ нулей $\widehat{T}$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены следующие оценки:

- 1) $\operatorname{Im} \zeta_k > 1$ и $|\zeta_{k+1}|/|\zeta_k| \geq 2$;
- 2) $\operatorname{Im} \zeta_{k+1} > (2k + \operatorname{Im} \zeta_k) \ln(3 + |\zeta_{k+1}|)$.

Полагая

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^k e^{i\zeta_k(t-a)}, \quad t > a, \quad (88)$$

из оценок 1) и 2) легко видеть, что ряд из (88) сходится в $C^\infty(a, +\infty)$. Таким образом, $f \in C^\infty_T(a, +\infty)$. Предположим теперь, что при некотором $\varepsilon > 0$ существует $F \in \mathcal{D}'(a - \varepsilon, +\infty)$ такое, что $F = f$ на $(a, +\infty)$. Нетрудно убедиться в том, что на $(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$ распределение F представимо в виде

$$F = \left(\frac{d}{dt} \right)^\nu u,$$

где $u \in C(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$ и $\nu \in \mathbb{N}$. Используя соотношение (88), находим

$$u(t) = p(t) + \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^k (i\zeta_k)^{-\nu} e^{i\zeta_k(t-a)}, \quad t > a,$$

для некоторого многочлена p . Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s > \nu$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s-1} |\zeta_k|^{k-\nu} \leq c |\zeta_{s-1}|^{s-1-\nu},$$

где $c > 0$ не зависит от s . Кроме того, оценки 1) и 2) влекут оценку

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} |\zeta_k|^{k-\nu} \exp\left(-\frac{\operatorname{Im} \zeta_k}{\operatorname{Im} \zeta_s}\right) = O(1) \quad \text{при } s \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, если s является достаточно большим, то $u(a + 1/\operatorname{Im} \zeta_s) > |\zeta_s|^{s-\nu}/2$. Получаем противоречие, так как $u \in C(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$. Тем самым, первое утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что при некотором $\alpha > 1$ выполнено (10). Тогда существует последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ нулей $\widehat{T}$ такая, что $\operatorname{Im} \zeta_k > 1$,

$$\frac{|\zeta_{k+1}|}{|\zeta_k|} \geq 2, \quad \operatorname{Im} \zeta_{k+1} > ((\alpha + 1)k + 3 + \operatorname{Im} \zeta_k)(3 + |\zeta_{k+1}|)^{1/\alpha}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Определим f с помощью (88) для данной последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Легко проверить, что $f \in G_T^\alpha(a, +\infty)$ (см. доказательство предложения 9, (iii)). Кроме того, из доказательства первого утверждения теоремы видно, что $f \neq F|_{(a, +\infty)}$, если $F \in \mathcal{D}'(a - \varepsilon, +\infty)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Для доказательства теоремы 4 потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $\nu, l \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq 1$ и

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\nu \left(\sum_{\eta=0}^l \alpha_\eta e^{\lambda, \eta}(t)\right) = e^{\lambda, l}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

при некотором $\alpha_\eta \in \mathbb{C}$. Тогда $\alpha_l = (i\lambda)^{-\nu}$ и для всех $t \geq 3l/|\lambda|$ выполнено

$$\sum_{\eta=0}^{l-1} |\alpha_\eta| t^\eta \leq 2(\nu^2 + 2\nu)^\nu l t^{l-1} |\lambda|^{-\nu-1}. \quad (89)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\eta=0}^l \beta_\eta e^{\lambda, \eta}(t)\right) = \sum_{\eta=0}^l \gamma_\eta e^{\lambda, \eta}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

при некоторых $\beta_\eta, \gamma_\eta \in \mathbb{C}$, то $\beta_l = \gamma_l/(i\lambda)$ и

$$\lambda \beta_\eta + (\eta + 1) \beta_{\eta+1} = -i \gamma_\eta \quad \forall \eta \in \{0, \dots, l-1\}.$$

Отсюда имеем $\alpha_l = (i\lambda)^{-\nu}$, и оценка

$$|\alpha_\eta| \leq (l - \eta + \nu + 1)^\nu l^{l-\eta} |\lambda|^{\eta-l-\nu}, \quad \eta \in \{0, \dots, l-1\}, \quad (90)$$

легко проверяется индукцией по ν . Используя оценку (90), получаем

$$\sum_{\eta=0}^{l-1} |\alpha_{\eta}| t^{\eta} \leq \frac{t^l}{|\lambda|^{\nu}} \sum_{k=1}^l \psi(k), \quad (91)$$

где функция $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ определяется равенством $\psi(x) = (x + \nu + 1)^{\nu} \left(\frac{l}{t|\lambda|}\right)^x$. Если $t \geq \frac{3l}{|\lambda|}$, получаем $\psi'(x) < 0$ для всех $x \geq 0$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^l \psi(k) \leq \psi(1) + \int_1^l \psi(x) dx \leq \psi(1) + (\nu + 2)^{\nu} \int_0^{\infty} x^{\nu} \left(\frac{l}{t|\lambda|}\right)^x dx.$$

Это неравенство и оценка (91) влекут (89).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Сначала докажем, что существует функция $f_1 \in C_T^{\infty}(-R, R)$ такая, что $f_1 \neq F|_{(-R, R)}$, если $F \in \mathcal{D}'(-R, R + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\inf_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\ln(2 + |\lambda|)} > -\infty \quad (92)$$

(см. обсуждения после формулировки теоремы 3). Из (29) и предположений теоремы следует, что существует последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ нулей $\widehat{T}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = +\infty$, где $q_k = \frac{l_k}{\ln(2 + |\zeta_k|)}$ и $l_k = m(\zeta_k, T)$;
- 2) $|\zeta_k| > 1$ и $R|\zeta_k| > 6l_k$ для любого k ;
- 3) $q_k^2 < q_{k+1}$ и $1 \leq l_k \leq l_{k+1}/q_{k+1}$ для всех k .

Рассмотрим функцию

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{it}{R}\right)^{l_k} e^{i\zeta_k t}, \quad t \in (-R, R), \quad (93)$$

где $\gamma_k = \exp(l_k q_k^{-1/3})$. Согласно условиям 1), 3) ряд из (93) сходится в $C^{\infty}(-R, R)$, откуда $f_1 \in C_T^{\infty}(-R, R)$. Допустим, что при некотором $\varepsilon > 0$ существует $F \in \mathcal{D}'(-R, R + \varepsilon)$ такое, что $F = f_1$ на $(-R, R)$. Тогда существует функция $u \in C(0, R + \frac{\varepsilon}{2})$ такая, что $F = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu} u$ на $(0, R + \frac{\varepsilon}{2})$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Согласно (93) имеем

$$u(t) = p(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{R^{l_k}} u_k(t), \quad t \in (0, R), \quad (94)$$

где p является многочленом,

$$u_k(t) = e^{i\zeta_k t} \sum_{\eta=0}^{l_k} \alpha_{\eta, k} (it)^{\eta}$$

и $\alpha_{\eta, k} \in \mathbb{C}$ определяются равенством

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu} \sum_{\eta=0}^{l_k} \alpha_{\eta, k} (it)^{\eta} e^{i\zeta_k t} = (it)^{l_k} e^{i\zeta_k t}. \quad (95)$$

Используя 2), из (95) и леммы 4 находим

$$\left| u_k(t) - \frac{(it)^{l_k}}{(i\zeta_k)^\nu} e^{i\zeta_k t} \right| \leq 2(\nu^2 + 2\nu)^\nu l_k t^{l_k-1} |\zeta_k|^{-\nu-1} e^{-(\operatorname{Im} \zeta_k)t} \quad (96)$$

для всех $t \in (0, R)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Из условий 1)–3) и неравенств (92), (96) следует оценка

$$\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\gamma_k}{R^{l_k}} |u_k(t)| \leq e^{c_1 l_{s-1}}, \quad t \in (0, R), \quad (97)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от s, t . Далее, если $q_s^{-1/2} < R$, аналогично получаем

$$\frac{\gamma_k}{R^{l_k}} |u_k(R - q_s^{-1/2})| \leq \exp(l_k(q_k^{-1/3} - q_s^{-1/2} + c_2 q_k^{-1})),$$

где $c_2 > 0$ не зависит от s . Теперь условие 3) влечет

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{R^{l_k}} |u_k(R - q_s^{-1/2})| = O(1) \quad \text{при } s \rightarrow +\infty. \quad (98)$$

Кроме того, для достаточно больших s из соотношений (96) и (29) имеем

$$|u_s(R - q_s^{-1/2})| > R^{l_s} \exp(-2l_s q_s^{-1/2}). \quad (99)$$

Тогда из оценок (97)–(99) следует, что

$$|u(R - q_s^{-1/2})| \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty$$

(см. условия 1), 3) и (94)). Однако это невозможно, поскольку $u \in C(0, R + \varepsilon/2)$. Таким образом, функция f_1 удовлетворяет указанному выше свойству непродолжимости на $(-R, R + \varepsilon)$. Если при этом f_1 нельзя продолжить до распределения, заданного на интервале вида $(-R - \varepsilon, R)$, $\varepsilon > 0$, то утверждение теоремы доказано. В противном случае повторим приведенное выше рассуждение для распределения $T_1 = T(-\cdot)$ и получим функцию $f_2 \in C_{T_1}^\infty(-R, R)$, которую нельзя продолжить до распределения, заданного на $(-R, R + \varepsilon)$. Тогда функция $f(t) = f_1(t) + f_2(-t)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Если выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{\ln(2 + |\lambda|)} = +\infty,$$

достаточно положить $g(t) = f(t) + f(-t)$, где f – функция, определенная в (88) при $a = -R$ (см. доказательство теоремы 3). Поэтому остается рассмотреть случай, когда имеет место (8). По теореме 4 существует функция $f \in C_T^\infty(-2R, 2R)$ такая, что $F \neq f$ на $(2R - \varepsilon, 2R)$ для всех $\varepsilon \in (0, R)$, $F \in \mathcal{D}'(2R - \varepsilon, 2R + \varepsilon)$. Тогда функция $g(t) = f(R + t) + f(R - t)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Сначала докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$ и $w(z) = (e^{i\varepsilon z} - 1)^n$. Тогда имеют место следующие оценки:

- (i) $|w(z)| \leq (\varepsilon|z|(1 + \varepsilon e^{|z|}))^n$;
- (ii) если $\varepsilon < e^{-|z|}$, то $|w(z)| \geq (\varepsilon|z|(1 - \varepsilon e^{|z|}))^n$;
- (iii) $|w^{(p)}(z)| \leq (n\varepsilon)^p(1 + e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|})^n$;
- (iv) $|w^{(p)}(z)| \leq (np)^p \varepsilon^n (|z| + \frac{1}{n})^n (1 + \varepsilon e^{|z|+1})^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценок (i) и (ii) достаточно рассмотреть разложение Тейлора $e^{i\varepsilon z} - 1$ в нуле. Утверждение (iii) легко получается из соотношения

$$w^{(p)}(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (ik\varepsilon)^p e^{i\varepsilon kz}.$$

Наконец, оценка (iv) является следствием (i) и формулы Коши

$$w^{(p)}(z) = \int_{|\zeta-z|=1/n} w(\zeta)(\zeta-z)^{-1-p} d\zeta.$$

Лемма доказана.

Для $k \in \mathbb{N}$ теперь положим

$$m_k = 2^{2^k}, \quad \zeta_k = \exp(m_k^{2/3}), \quad \gamma_k = \exp(m_k^{4/5}), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{4m_k},$$

$$w_k(z) = (e^{i\varepsilon_k z} - 1)^{m_k} \varepsilon_k^{-m_k}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $a_1, a_2, \dots$ – множество всех чисел вида $\zeta_k + l\varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \dots, m_k\}$, занумерованных в порядке возрастания. Определим $T \in \mathcal{D}_{\mathfrak{H}}(\mathbb{R})$ из равенства

$$\widehat{T}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(z/a_n)}{z/a_n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

(см. [1, теорема 7.3.1]). По теореме Линдемана (см., например, [16, гл. 2, разд. 7]) число a_i/a_j является иррациональным, если $i \neq j$. Вследствие этого имеет место утверждение (i) теоремы.

Пусть $R > r(T)$ и

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{e^{i\zeta_k t}}{(2R)^{m_k}} w_k(t), \quad t \in (-2R, 2R). \quad (100)$$

Из леммы 5, (iv) следует, что $f \in C_T^{\infty}(-2R, 2R)$. Предположим, что при некотором $\varepsilon \in (0, R)$ существует $F \in \mathcal{D}'(-2R, 2R + \varepsilon)$ такое, что $f = F|_{(-2R, 2R)}$. Тогда

$$F = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu} u \quad \text{на} \quad \left(2R - \frac{\varepsilon}{2}, 2R + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

при некоторых $u \in C(2R - \varepsilon/2, 2R + \varepsilon/2)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Учитывая (100), получаем

$$u(t) = q(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{e^{i\zeta_k t}}{(2R)^{m_k}} u_k(t), \quad t \in \left(2R - \frac{\varepsilon}{2}, 2R\right), \quad (101)$$

где q является многочленом и

$$u_k(t) = \frac{1}{\varepsilon_k^{m_k}} \sum_{l=1}^{m_k} (-1)^{m_k-l} \binom{m_k}{l} \frac{e^{il\varepsilon_k t}}{(i(\zeta_k + l\varepsilon_k))^\nu}. \quad (102)$$

Разлагая функцию $(1+z)^{-\nu}$ в степенной ряд, имеем

$$(i(\zeta_k + l\varepsilon_k))^{-\nu} = \frac{1}{(i\zeta_k)^\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \xi_{p,\nu} \left(\frac{l\varepsilon_k}{\zeta_k} \right)^p,$$

где $\xi_{p,\nu} = (-1)^p \binom{\nu+p-1}{p}$. Отметим, что

$$|\xi_{p,\nu}| \leq 2^{\nu+p-1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+. \quad (103)$$

Соотношение (102) можно записать в виде

$$u_k(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \xi_{p,\nu} \frac{w_k^{(p)}(t)}{(i\zeta_k)^{p+\nu}}, \quad t \in \left(2R - \frac{\varepsilon}{2}, 2R \right). \quad (104)$$

Для $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, положим $\theta_s = m_s^{-1/4}$. Пусть s является достаточно большим, $\theta_s < \varepsilon/2$. Используя лемму 5, (iii), имеем

$$|w_k^{(p)}(2R - \theta_s)| \leq 4^{-p} \exp(c_1 m_k \ln m_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad (105)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от k, p, s . Учитывая (103) и (104), заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\gamma_k}{(2R)^{m_k}} |u_k(2R - \theta_s)| \leq \exp(c_2 m_{s-1} \ln m_{s-1}), \quad (106)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от s . Далее, пусть

$$N_k = m_k^{1/2}, \quad \tau_{p,k,s} = |w_k^{(p)}(2R - \theta_s) \xi_{p,\nu} \zeta_k^{-p}|.$$

Неравенства (105) и (103) влекут оценку

$$\sum_{p=N_k+1}^{\infty} \tau_{p,k,s} \leq \zeta_k^{-N_k} \exp(c_1 m_k \ln m_k). \quad (107)$$

Предположим, что $k \geq s$. По лемме 5, (iv) получаем

$$|w_k^{(p)}(2R - \theta_s)| \leq c_3 (2R)^{m_k} (pm_k)^p \exp\left(-\frac{m_k \theta_s}{2R}\right),$$

где $c_3 > 0$ не зависит от p, k, s . Для $k > s$ отсюда и из (103) получаем

$$\sum_{p=0}^{N_k} \tau_{p,k,s} \leq \exp\left(c_4 m_k^{1/2} \ln m_k - \frac{m_k \theta_s}{2R}\right), \quad (108)$$

где $c_4 > 0$ не зависит от s, k . Из оценок (107) и (108) следует, что

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(2R)^{m_k}} |u_k(2R - \theta_s)| = O(1), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (109)$$

Используя теперь (102) и (107), имеем

$$\begin{aligned} \left| u_s(2R - \theta_s) - \xi_{0,\nu} \frac{w_s(2R - \theta_s)}{(i\zeta_s)^\nu} \right| &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \tau_{p,s,s} \zeta_s^{-\nu} \\ &\leq \frac{\exp(c_1 m_s \ln m_s)}{\zeta_s^{N_s}} + \sum_{p=1}^{N_s} |\xi_{p,\nu} w_s^{(p)}(2R - \theta_s)| \zeta_s^{-\nu-1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$|u_s(2R - \theta_s)| \geq \frac{(2R)^{m_s}}{\zeta_s^\nu} \exp\left(-\frac{m_s \theta_s}{4R}\right),$$

если s является достаточно большим (см. лемму 5, (ii)). Тогда, учитывая соотношения (101), (106) и (109), делаем вывод, что

$$|u(2R - \theta_s)| \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty.$$

Это противоречит условию $u \in C(2R - \varepsilon/2, 2R + \varepsilon/2)$. Тем самым, функция $g(t) = f(R+t) + f(R-t)$ удовлетворяет (ii) и теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. По условию для T существует последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ нулей $\widehat{T}$ со следующими свойствами:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = +\infty$, где $q_k = l_k(1 + |\operatorname{Im} \zeta_k|)^{-1}$ и $l_k = m(\zeta_k, T)$;
- 2) $q_{k+1} > q_k^3 > 1$ и $q_{k+1} > l_k^3/q_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Для $R > r(T)$ определим f равенством (93), в котором $\gamma_k = \exp(l_k q_k^{-1/3})$ для данных q_k и l_k . Из свойства 1) и соотношения (93) следует, что $f \in C_T(-R, R)$. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $q_s^{-1/2} + q_s^{-1} < R$ и $\theta \in (q_s^{-1/2} - q_s^{-1}, q_s^{-1/2} + q_s^{-1})$. Нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$\sum_{k=1}^{s-1} \gamma_k e^{R|\operatorname{Im} \zeta_k|} \leq \exp(c_1 l_{s-1} q_{s-1}^{-1/3}), \quad (110)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от s . Кроме того, согласно свойству 2) имеем

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \gamma_k \left(1 - \frac{\theta}{R}\right)^{l_k} e^{R|\operatorname{Im} \zeta_k|} \leq c_2, \quad (111)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от s и θ . Используя теперь (93), (110) и (111), ввиду свойств 1) и 2) заключаем, что

$$|f(R - \theta)| > \frac{1}{2} \gamma_s \left(1 - \frac{\theta}{R}\right)^{l_s} \exp((\theta - R) \operatorname{Im} \zeta_s),$$

если s является достаточно большим. Полагая $E_s = (R - q_s^{-1/2} - q_s^{-1}, R - q_s^{-1/2} + q_s^{-1})$, из предыдущей оценки получаем

$$\int_{E_s} |f(t)| dt \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty.$$

Отсюда $f|_{(0,R)} \notin L^1(0,R)$. Тем же способом можно показать, что $f|_{(-R,0)} \notin L^1(-R,0)$. Таким образом, теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть $f \in (\mathcal{D}'_T \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$. Тогда распределение $\mathfrak{A}_{k,j}(f)$ принадлежит $(\mathcal{D}'_{\Lambda(T)} \cap \mathcal{D}'_b)(-R, R)$ по теореме 11, (iv). Поскольку $T \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, из соотношения (65) при $k = 0, j = 1$ следует, что $\Lambda(T) \in \mathfrak{M}_b(\mathbb{R})$. Применяя теорему 1, видим, что существует четное распределение $f_1 \in \mathcal{D}'_{\Lambda(T)}(\mathbb{R})$ такое, что $f_1 = \mathfrak{A}_{k,j}(f)$ на $(-R, R)$. Полагая $F = \mathfrak{B}_{k,j}f_1$, из теоремы 11, (ii)–(iv) заключаем, что F является требуемым продолжением f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. В силу (16), (82), леммы 3 и теоремы 11, (iv), (vi) имеем

$$\langle \Lambda(T), (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(p)} \rangle = 0 \quad (112)$$

для любого четного $p \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, так как $\Lambda(T)$ и $\mathfrak{A}_{k,j}(f)$ являются четными, равенство (112) остается справедливым для любого $p \in \mathbb{Z}_+$. Теперь, используя теорему 2, следствие 6 и рассуждение из доказательства теоремы 7, получаем требуемый результат.

Наконец, тем же способом, что и в теореме 7, но с использованием теоремы 5 и следствия 1, мы получаем утверждения теорем 9 и 10.

Список литературы

1. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
2. V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
3. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, “Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга”, *Матем. сб.*, **199**:8 (2008), 29–60; англ. пер.: V. V. Volchkov, V. V. Volchkov, “Convolution equations in many-dimensional domains and on the Heisenberg reduced group”, *Sb. Math.*, **199**:8 (2008), 1139–1168.
4. А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.
5. К. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Комплексный анализ. Многие переменные* – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **54**, ВИНТИ, М., 1989, 5–111; англ. пер.: С. А. Berenstein, D. C. Struppa, “Complex analysis and convolution equations”, *Several complex variables. V. Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Encyclopaedia Math. Sci., **54**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–108.
6. Э. Я. Риекстыньш, *Асимптотические разложения интегралов*, т. I, Зинатне, Рига, 1974.

7. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
8. S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
9. В. Я. Левин, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
10. Г. Бремерман, *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: H. Bremermann, *Distributions, complex variables, and Fourier transforms*, Addison-Wesley, Reading, MA–London, 1965.
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
12. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
13. Ф. Трев, *Лекции по теории дифференциальных уравнений в частных производных*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: J. F. Treves, *Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients*, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1961.
14. Б. Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Наука, М., 1971.
15. А. Ф. Леонтьев, “О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:2 (1965), 269–328.
16. А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. B. Shidlovskii, *Transcendental numbers*, de Gruyter Stud. Math., **12**, de Gruyter, Berlin, 1989.

В. В. Волчков (V. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Поступило в редакцию
30.04.2009

Вит. В. Волчков (Vit. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет
E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua