Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Бибииков, В. С. Жгун, О разбиениях, связанных с дискретными группами отражений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 6, 29–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:36:03

УДК 512.817.72

П. В. Бибилов, В. С. Жгун

О разбиениях, связанных с дискретными группами отражений

Получены более простые доказательства теорем Вальдшпургера и Мейнренкена о разбиениях, образованных множествами вида $(1-w)C^\circ$, $w \in W$, где W – соответственно линейная или аффинная группа Вейля, а C° – открытое ядро фундаментальной камеры C группы W , и обобщения этих результатов на кокомпактные гиперболические группы отражений.

Библиография: 5 наименований.

Ключевые слова: дискретные группы отражений, фундаментальная камера, сопряженный конус, теорема Брауэра о неподвижной точке.

§ 1. Введение

Пусть X – односвязное пространство постоянной кривизны и W – компактная дискретная группа отражений, действующая в этом пространстве. В сферическом случае пространство $X \simeq \mathbb{S}^n \subset V$ является n -мерной сферой, вложенной в $(n+1)$ -мерное евклидово пространство V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. В евклидовом случае X является n -мерным аффинным евклидовым пространством; ассоциированное с ним евклидово пространство мы обозначим через V . В гиперболическом случае пространство $X \simeq \mathbb{H}^n \subset V$ является полдой n -мерного двуполостного гиперboloида, вложенного в $(n+1)$ -мерное пространство Минковского со скалярным произведением $[x, y] = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ и заданного уравнением $[x, x] = -1$. В зависимости от X будем называть W *сферической*, *евклидовой* или *гиперболической дискретной группой отражений*.

Расстояние между точками $x, y \in X$ обозначим через $\rho(x, y)$. Через D обозначим компактную фундаментальную область для действия W на X , а через D° – ее внутренность. В сферическом и гиперболическом случаях пусть C – фундаментальная камера в пространстве V для группы W и C° – ее открытое ядро. (Можно считать, что $D = C \cap X$ и $D^\circ = C^\circ \cap X$.) Обозначим через X^W пространство неподвижных точек группы W (отметим, что X^W может быть непусто только в сферическом случае), а через W_x – стабилизатор точки x в группе W . Через W_{reg} обозначим множество элементов из W , пространство неподвижных точек которых совпадает с X^W . Для произвольной гиперплоскости H обозначим отражение относительно нее через s_H .

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00287 и 09-01-12169).

В § 2 доказывается фундаментальная лемма о неподвижной точке для компактных дискретных групп отражений. В § 3 с помощью этой леммы доказываются теоремы Вальдшпулгера [1] и Мейнренкена [2] о разбиениях, образованных множествами вида $(1 - w)C^\circ$, где $w \in W$, а также соответствующая теорема для гиперболических групп отражений. Наконец, в § 4 исследуются свойства полученных разбиений и устанавливается их связь с одной теоремой Костанта [3].

Авторы благодарят Э. Б. Винберга за полезные обсуждения и замечания к работе и В. Л. Попова, обратившего их внимание на статью [2].

§ 2. Лемма о неподвижной точке

ЛЕММА 1. Пусть $x_0 \in D^\circ$ и $x \in D$ – произвольные точки. Тогда $\rho(x_0, wx) \geq \rho(x_0, x)$, причем для любого $w \notin W_x$ это неравенство строгое.

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать неравенство $\rho(wx_0, x) \geq \rho(x_0, x)$. Проведем индукцию по длине $\ell(w)$ элемента w . Найдется стенка H камеры wD такая, что $\ell(s_H w) < \ell(w)$. Это означает (см. [4, гл. 5, § 3, теорема 1]), что D и wD лежат по разные стороны от гиперплоскости H . Обозначим через x_H точку пересечения гиперплоскости H и отрезка, соединяющего x и wx_0 (рис. 1). Тогда $\rho(x_H, wx_0) = \rho(x_H, s_H wx_0)$. В силу предположения индукции и неравенства треугольника последнее влечет

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, s_H wx_0) \leq \rho(x, x_H) + \rho(x_H, s_H wx_0) = \rho(x, wx_0).$$

Неравенство треугольника нестрогое тогда и только тогда, когда x_H лежит на отрезке $[x, s_H wx_0]$. Это возможно, только если $x = x_H$, что влечет $s_H x = x$. Поэтому $\rho(x, x_0) = \rho(x, wx_0)$ лишь в случае, когда выполнены равенства $\rho(x, s_H wx_0) = \rho(x, x_0)$ и $s_H x = x$. Из первого равенства по предположению индукции получаем, что $s_H wx = x$, и, учитывая второе равенство, получаем $w \in W_x$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2 (о неподвижной точке). Пусть $g \in \text{Isom}(X)$. Тогда существует единственный элемент $w \in W$ такой, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в D° .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Будем вести доказательство индукцией по $\dim X$. Покажем, что существует такой элемент $w \in W$, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в замкнутой камере D . Поскольку группа W кокомпактна, с топологической точки зрения камера D является замкнутым шаром. Пусть $x \in D$ – произвольная точка. Тогда точка gx лежит в одной из камер вида wD , где $w \in W$. Положим $f(x) = w^{-1}gx \in D$. Тем самым мы построили отображение f шара D в себя. Легко видеть, что оно корректно определено (так как камера D компактна, камера gD может пересекать лишь конечное количество камер вида wD) и непрерывно (так как если $x_1, x_2 \in D$ и $w_1x_1 = w_2x_2$, то $x_1 = x_2$). По теореме Брауэра это отображение имеет неподвижную точку. Таким образом, существуют элемент $w \in W$ и точка $x \in D$ такие, что $w^{-1}gx = x$.

Если $x \in D^\circ$, то все доказано. Пусть $x \in D \setminus D^\circ$. Рассмотрим сферу $S(x)$ с центром в точке x , не пересекающую гиперплоскости граней камеры D , которые не содержат x , и подгруппу $W_x \subset W$, действующую на сфере $S(x)$. Группа W_x порождена отражениями, сохраняющими точку x . Камера $S(x) \cap D$ будет фундаментальной для группы W_x , так как она высекается гиперплоскостями камеры D , содержащими точку x . По предположению индукции, примененному к сфере $S(x)$, элементу $w^{-1}g$, группе W_x и камере $S(x) \cap D$, существуют элемент $w' \in W_x$ и точка $x' \in (S(x) \cap D)^\circ$ такие, что $(w')^{-1}w^{-1}gx' = x'$. Поскольку сфера $S(x)$ не пересекает гиперплоскости граней камеры D , не содержащие x , то на самом деле $x' \in D^\circ$.

2. Докажем единственность элемента w . Пусть существуют два элемента $w_1, w_2 \in W$ такие, что $w_1^{-1}gx_1 = x_1$ и $w_2^{-1}gx_2 = x_2$, где $x_1, x_2 \in D^\circ$. Положим $w = w_1^{-1}w_2$; тогда $\rho(gx_1, gx_2) = \rho(w_1x_1, w_1wx_2)$. Учитывая, что $W_{x_i} = 1$, при $w \neq 1$ из леммы 1 получаем

$$\rho(gx_1, gx_2) = \rho(x_1, x_2) < \rho(x_1, wx_2) = \rho(w_1x_1, w_1wx_2).$$

Отсюда имеем $w = 1$ и $w_1 = w_2$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае более общих групп с фундаментальной областью конечного объема (т.е. когда камера D может иметь бесконечно удаленные точки) лемма 2 неверна. А именно, X – гиперболическое пространство, и g – сдвиг вдоль прямой, проходящей через бесконечно удаленную точку o камеры D . Тогда не существуют такие $w \in W$ и $x \in D^\circ$, что $gx = wx$. В самом деле, в противном случае точка $gx = wx$ должна лежать на орисфере $\mathcal{O}$ с центром в o , проходящей через x , что неверно, так как $g\mathcal{O} \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Более того, можно показать, что равенство $gx = wx$ невозможно даже для $x \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $g: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Тогда существует такой элемент $w \in W$, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в D . Если при этом $\rho(gx_1, gx_2) \leq \rho(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и неподвижная точка лежит в D° , то элемент w единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из п.1 доказательства леммы 2 о неподвижной точке. Второе утверждение следует из леммы 1.

§ 3. Разбиения, связанные с дискретными группами отражений

В сферическом и гиперболическом случаях определим Π как множество единичных нормалей к граням коразмерности 1 камеры C , лежащих в одном полупространстве с C относительно этих граней. Для каждого $e \in \Pi$ обозначим грань коразмерности 1, ортогональную e , через H_e , а отражение относительно этой грани – через s_e . Через C^* обозначим конус, сопряженный к C относительно соответствующего скалярного произведения.

Пусть также в гиперболическом случае $\mathcal{K} = \{x \in V : [x, x] \leq 0\} = \mathcal{K}_+ \cup \mathcal{K}_-$ – конус, где $\mathcal{K}_+ = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{K} : x_0 \geq 0\}$. Напомним, что в этом случае $[e, e] > 0$ для всех $e \in \Pi$, а также $C \subseteq \mathcal{K}_+$ и $\mathcal{K}_- \subset C^*$ (см. [4, упражнения 12, 13 к § 4 гл. 5]).

ЛЕММА 3. *В случае сферической и гиперболической групп отражений W имеет место включение $C^* \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (1 - w)C^\circ$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 имеем $\rho(wx_0, x) \geq \rho(x_0, x)$, где $x_0 \in C^\circ$ и $x \in C$. В случае сферической группы отражений W имеем

$$\frac{(wx_0, x)}{\sqrt{(wx_0, wx_0)(x, x)}} = \cos \rho(wx_0, x) \leq \cos \rho(x_0, x) = \frac{(x_0, x)}{\sqrt{(x_0, x_0)(x, x)}},$$

откуда следует, что $(x, (1 - w)x_0) \geq 0$. В случае гиперболической группы отражений W рассуждения аналогичны (напомним, что формула расстояния в пространстве $\mathbb{H}^n$ имеет вид $\operatorname{ch} \rho(x_0, x) = -\frac{[x_0, x]}{\sqrt{[x_0, x_0][x, x]}}$). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Пусть W – сферическая группа отражений. Имеет место равенство $C^* = \bigsqcup_{w \in W} (1 - w)C^\circ$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 о неподвижной точке, примененной к преобразованию $g = s_u$, где $u \in C^*$, существуют точка $x \in C^\circ$ и единственный элемент $w \in W$ такие, что $w^{-1}s_u x = x$. Отсюда $(1 - w)x = \frac{2(u, x)}{(u, u)}u$. Полагая $v = \frac{(u, u)}{2(u, x)}x$, получаем равенство $(1 - w)v = u$, причем $v \in C^\circ$, так как $x \in C^\circ$ и $(u, x) > 0$. В силу леммы 3 это означает, что $\bigsqcup_{w \in W} (1 - w)C^\circ = C^*$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть W – евклидова группа отражений. Для каждого $h \in \operatorname{Isom}(X)$ имеет место равенство $V = \bigsqcup_{w \in W} (h - w)D^\circ$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1, примененному к преобразованию $g = t_{-u}h$, где t_{-u} – параллельный перенос на вектор $-u$, существуют точка $v \in D$ и единственный элемент $w \in W$ такие, что $w^{-1}t_{-u}hv = v$. Это равносильно тому, что $(h - w)v = u$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2 [2, теорема 2]. *Имеет место равенство $V = \bigsqcup_{w \in W} (1 - w)D^\circ$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для каждого $h \in GA(X)$ имеет место равенство $V = \bigcup_{w \in W} (h - w)D$, причем при $\rho(hx_1, hx_2) \leq \rho(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ камеры вида $(h - w)D$ имеют попарные пересечения коразмерности не меньше 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1, примененному к преобразованию $g = t_{-u}h$, существуют точка $v \in D$ и элемент $w \in W$ такие, что $w^{-1}t_{-u}hv = v$. Отсюда $(h - w)v = u$. Более того, элемент w единствен, если $v \in D^\circ$, откуда следует второе утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим сферическую подгруппу отражений $W_0 \subset W$, сохраняющую нуль. Из теоремы 2 следует, что множество $M = \bigsqcup_{w \in W_0} (1-w)D^\circ$ является фундаментальной областью для подгруппы W , порожденной параллельными переносами на простые корни. Однако $N = \bigcup_{w \in W_0} wD$ – замыкание другой фундаментальной области для рассматриваемой группы параллельных переносов. Поэтому

$$\sum_{w \in W_0} \det(1-w) \operatorname{vol}(D) = \operatorname{vol}(M) = \operatorname{vol}(N) = |W_0| \operatorname{vol}(D),$$

откуда получаем формулу

$$\sum_{w \in W_0} \det(1-w) = |W_0|$$

(см. [4, упражнение 3 к § 2 гл. 5]). Аналогично получаем формулу

$$\sum_{w \in W_0} \det(1-hw^{-1}) = |W_0|,$$

где $\rho(hx_1, hx_2) \leq \rho(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть W – гиперболическая группа отражений. Имеют место следующие равенства:

- (i) $C^* \setminus \mathcal{K}_- = \bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ$;
- (ii) $\mathcal{K}_-^\circ = \bigsqcup_{w \in W} (-1-w)C^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Сначала докажем включение $\supseteq$. В лемме 3 доказано, что $C^* \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ$. Докажем, что $\bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ \not\subset \mathcal{K}_-$. Проведем доказательство индукцией по длине ℓ приведенного разложения w . При $\ell(w) = 0$ утверждение очевидно. При $\ell(w) > 0$ имеем равенство $w = s_e w'$, где $\ell(w') = \ell(w) - 1$. Последнее означает, что конусы C и $w'C$ лежат в одном полупространстве относительно H_e и, в частности, $[w'x, e] > 0$. Отсюда имеем

$$[(1-w)x, (1-w)x] = [(1-w')x, (1-w')x] + 4 \frac{[w'x, e][x, e]}{[e, e]} > 0$$

для любого $x \in C^\circ$. Это означает, что $C^* \setminus \mathcal{K}_- \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in C^* \setminus \mathcal{K}_-$. Применим лемму 2 о неподвижной точке к преобразованию $g = s_u$. Имеем $wx = s_u x = x - 2 \frac{[u, x]}{[u, u]} u$, откуда $(1-w)x = 2 \frac{[u, x]}{[u, u]} u$. Полагая $v = \frac{[u, u]}{2[u, u]} x$, получаем $(1-w)v = u$. Очевидно, что $[u, x] > 0$, и так как $u \notin \mathcal{K}_-$, то $[u, u] > 0$, поэтому $v \in C^\circ$, и мы получаем первое равенство.

(ii) Сначала докажем включение $\supseteq$. Проведем доказательство индукцией по длине ℓ приведенного разложения w . При $\ell(w) = 0$ утверждение очевидно. При $\ell(w) > 0$ имеем $w = s_e w'$, где для w' и w выполнено $\ell(w') = \ell(w) - 1$ и

$$[(-1-w)x, (-1-w)x] = [(-1-w')x, (-1-w')x] - 4 \frac{[w'x, e][x, e]}{[e, e]} < 0$$

для любого $x \in C^\circ$. Кроме того, очевидно, что если $x \in C^\circ$, то $(-1-w)x \notin \mathcal{K}_+$. Это означает, что $\mathcal{K}_-^\circ \supseteq \bigsqcup_{w \in W} (-1-w)C^\circ$.

Докажем обратное включение. Пусть $u \in \mathcal{K}_-^\circ$. Применим лемму 2 о неподвижной точке к преобразованию $g = -s_u$. Имеем $wx = -s_u x = -x + \frac{2[u,x]}{[u,u]}u$, откуда $(-1-w)x = -\frac{2[u,x]}{[u,u]}u$. Полагая $v = -\frac{[u,u]}{2[u,x]}x$, получаем $(-1-w)v = u$. Очевидно, что $[u,x] > 0$, и так как $u \in \mathcal{K}_-^\circ$, то $[u,u] < 0$, поэтому $v \in C^\circ$ и мы получаем второе равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае более общих гиперболических групп отражений с фундаментальной областью конечного объема теорема 3 неверна. Мы построим такую точку $u \in C^* \setminus \mathcal{K}_-$, что равенство $u = (1-w)v$ невозможно для любого $v \in C^\circ$ (и даже для $v \in C$). А именно, пусть $u \in (C^* \setminus \mathcal{K}_-) \cap \langle s_e o, o \rangle$, где $e \in w''\Pi$, $w'' \in W$ и $o \in C$ – бесконечно удаленная точка, причем $H_u \cap C = \emptyset$. Докажем, что равенство $u = (1-w)v$ невозможно для любого $v \in C^\circ$.

Действительно, найдется $\lambda > 0$ такое, что $\lambda s_e s_u o = o$. Заметим, что $\lambda < 1$, так как $H_u \cap C = \emptyset$, поэтому если $\mathcal{O}$ – орисфера с центром в o , то $s_e s_u \mathcal{O}$ лежит внутри $\mathcal{O}$. Отсюда получаем, что $u = (\lambda - w')p$, где $w' = s_e$ и $p = \frac{[u,u]}{2[u,o]}o \in C$. Предположим, что существуют такие $w \in W$ и $v \in C^\circ$, что $u = (1-w)v$. Тогда $(\lambda - w')p = (1-w)v$, откуда получаем $\lambda p - v = w'p - wv$. Скалярно возводя это равенство в квадрат, получаем $(v, (\lambda - \tilde{w})p) = 0$, где $\tilde{w} = w^{-1}w'$. Однако $(\lambda - \tilde{w})p = (1 - \tilde{w})p - (1 - \lambda)p \in C^*$, поэтому равенство $2(v, (\lambda - \tilde{w})p) = 0$ возможно, только если $(\lambda - \tilde{w})p = 0$. Но это невозможно из соображений непрерывности. В самом деле, рассмотрим последовательность $\{p_n\} \subset C^\circ$ такую, что $p_n \rightarrow p$. Тогда если $x \in C^\circ$, то $0 > [p_n, x] \geq [\tilde{w}p_n, x]$ и $\lambda|[p_n, x]| < |[p_n, x]| \leq |[\tilde{w}p_n, x]|$, откуда $|\lambda p_n, x| < |[p_n, x]| \leq |[\tilde{w}p_n, x]|$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $|\lambda p, x| < |[p, x]| \leq |[\tilde{w}p, x]|$. Противоречие.

Таким образом, существует подмножество в $C^* \setminus \mathcal{K}_-$, которое не покрывается конусами вида $(1-w)C^\circ$. Аналогичные рассуждения можно привести и для разбиения $\mathcal{K}_-$.

§ 4. Свойства разбиений

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением конечных групп отражений, действующих в евклидовом пространстве V . В предыдущих параграфах нами получены теоремы о различных разбиениях, образованных множествами вида $(1-w)C^\circ$, где $w \in W$. Одним из главных вопросов, связанных с этими разбиениями, является вопрос о том, какие конусы вида $C_w = (1-w)C$ являются смежными.

Для случая, когда $w, w' \in W_{\text{reg}}$, ответ был дан в [5] (на рис. 2 и рис. 3 изображены сечения соответствующих конусов в случаях $W = A_3$ и $W = B_3$ соответственно). В случае линейных групп Вейля этот вопрос тесно связан с доказательством теоремы 1, данным в [1]. Основная идея этого доказательства заключается в построении по данному элементу $w \in W_{\text{reg}}$ и вектору $e \in \Pi$ такого элемента $w' \in W_{\text{reg}}$, что конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными и пересекаются по части стенки $(1-w)H_e$, имеющей коразмерность 1.

Рис. 2

Рис. 3

Прежде чем напомнить ответ на этот вопрос, отметим два несложных факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $g \in O(V)$ – произвольное преобразование и $s \in O(V)$ – отражение. Тогда размерности пространств неподвижных точек преобразований g и gs отличаются на 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные значения оператора g по модулю равны 1, а все комплексные собственные значения имеют сопряженные (с учетом кратностей). Поэтому $\det g = (-1)^{n-k}$, где $k = \dim \ker(1-g)$. Поскольку $\det s = -1$, то $\det g = -\det(gs)$. Отсюда следует, что $\dim \ker(1-g) \neq \dim \ker(1-gs)$.

Пусть для определенности $\dim \ker(1-g) > \dim \ker(1-gs)$. С другой стороны, $\ker(1-g) \cap H \subset \ker(1-gs)$ (где H – гиперплоскость отражения), откуда имеем $\ker(1-g) - 1 \leq \ker(1-gs) < \ker(1-g)$ и $\ker(1-gs) = \ker(1-g) - 1$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $wC \cap w'C \neq \{0\}$, то $C_w \cap C_{w'} \neq \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $wx = w'x'$, где $x, x' \in C \setminus \{0\}$, то $x = x'$ и $(1-w)x = (1-w')x'$. Предложение доказано.

Для каждого $e \in \Pi$ через π_e обозначим вектор, ортогональный V^W и такой, что его скалярное произведение с f равно δ_{ef} для всех $f \in \Pi$. Зафиксируем элемент $w \in W_{\text{reg}}$ и для каждого вектора $u \in V$ рассмотрим вектор v_u , ортогональный V^W и такой, что $(w^{-1} - 1)v_u = u$.

ЛЕММА 4 [5, лемма 3]. Пусть $u, r \in V$, $e \in \Pi$. Для векторов v_u , v_r и v_e имеют место следующие свойства:

1) $(v_u, r) + (v_r, u) = -(u, r)$;	4) $v_u \perp (1-w)H_u$;
2) $(v_u, u) = -\frac{1}{2}(u, u)$;	5) $\ker(1-ws_u) = \langle v_u \rangle$;
3) $v_u = ws_u v_u$;	6) $(v_e, (1-w)\pi_e) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Скалярно перемножая равенства $w^{-1}v_u = v_u + u$ и $w^{-1}v_r = v_r + r$, получаем

$$(v_u, v_r) = (w^{-1}v_u, w^{-1}v_r) = (v_u, v_r) + (v_u, r) + (v_r, u) + (u, r),$$

откуда следует требуемое.

3) Из п. 2) следует, что $w^{-1}v_u = v_u + u = v_u - \frac{2(v_u, u)}{(u, u)}u = s_u v_u$.

Доказательства остальных пунктов не являются трудными.

ТЕОРЕМА 4 [5, теорема 2]. Пусть $w \in W_{\text{reg}}$. Элемент $w' \in W$ регулярен и конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными тогда и только тогда, когда существуют такие векторы $e, f \in \Pi$, что $w' = ws_es_f$ и $(v_e, f) > 0$, и в этом случае $\text{codim}(1-w)H_e \cap (1-w')H_f = 1$.

На рис. 4 и рис. 5 изображены сечения трансверсальной гиперплоскостью конусов, рассматриваемых в теореме 4.

Рис. 4

Рис. 5

Теперь выясним, когда конус неполной размерности смежен с конусом полной размерности. Пусть $\dim C_{w'} < \dim C_w = n$. Будем говорить, что конус $C_{w'}$ смежен с конусом C_w , если $\dim C_{w'} = \dim(C_{w'} \cap C_w)$.

ЛЕММА 5. Если $w = w'\tilde{w} \in W_{\text{reg}}$ и конус $C_{w'}$ смежен с конусом C_w , то $\text{rk}(1-w') + \text{rk}(1-\tilde{w}) = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такой минимальный набор $\{\pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k}\}$, что $C_w \cap C_{w'} \subseteq (1-w)\langle \pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k} \rangle_+ = (1-w)\tilde{C}$. Отсюда следует, что $\dim \ker(1-w') \geq n - \dim(1-w)\tilde{C} = n - k$.

Существуют $v \in \tilde{C}^\circ$ и $v' \in C^\circ$ такие, что $(1-w)v = (1-w')v' \in C_{w'}$. Отсюда $v - v' = w'(\tilde{w}v - v')$. Скалярно возводя это равенство в квадрат и упрощая, получаем $((1-\tilde{w})v, v') = 0$. Поскольку $v' \in C^\circ$ и $(1-\tilde{w})v \in C^*$, то $v \in \ker(1-\tilde{w})$. По теореме Стейнберга о неподвижной точке имеем $\langle \pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k} \rangle \subseteq \ker(1-\tilde{w})$, откуда $\dim \ker(1-\tilde{w}) \geq k$ и $\dim \ker(1-w) + \dim \ker(1-\tilde{w}) \geq (n-k) + k = n$.

Для доказательства обратного (к последнему) неравенства достаточно заметить, что $\ker(1-w') \cap \ker(1-\tilde{w}) = \{0\}$. В самом деле, если $x \in \ker(1-w') \cap \ker(1-\tilde{w})$, то $wx = w'(\tilde{w}x) = x$ и $x \in \ker(1-w) = \{0\}$. Поэтому $\dim \ker(1-w') + \dim \ker(1-\tilde{w}) \leq n$. Лемма доказана.

Пусть R – множество единичных нормалей к зеркалам группы W . Нам будет удобно представлять элементы из W в виде композиции не только простых отражений s_e , где $e \in \Pi$, но и отражений s_u , где $u \in R$. Следующая теорема (см. [3, п. 5.1]) описывает свойства такого разложения.

ТЕОРЕМА 5 (Б. Костант). Пусть $w = s_{u_1}s_{u_2} \cdots s_{u_k}$, где $u_1, u_2, \dots, u_k \in R$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\text{rk}(1-w) = k$;
- (ii) $w = s_{u_1}s_{u_2} \cdots s_{u_k}$ – разложение минимальной длины;
- (iii) $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii) и (i) $\Rightarrow$ (iii). Поскольку $\ker(1 - w) \supseteq H_{u_1} \cap H_{u_2} \cap \dots \cap H_{u_k}$, то $k \geq \text{rk}(1 - w)$. При этом в случае линейной зависимости между $u_1, u_2, \dots, u_k$ неравенство строгое.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Используя индукцию по $\dim V$, покажем, что существует разложение длины не более $\text{rk}(1 - w)$. Можно считать, что теорема доказана для всех $w \notin W_{\text{reg}}$. Действительно, пусть $V^w \neq 0$ – подпространство неподвижных векторов для w ; тогда применим шаг индукции к подпространству $(V^w)^\perp$ и подгруппе $W_{V^w} \subset W$, поточечно сохраняющей подпространство V^w .

Пусть $w \in W_{\text{reg}}$. Выберем произвольный вектор $u \in R$. Поскольку $w \in W_{\text{reg}}$, из предложения 1 получаем $\dim \ker(1 - ws_u) > 0$ (это также следует из леммы 4, 3)). Отсюда имеем $ws_u \notin W_{\text{reg}}$, и для этого элемента наше утверждение доказано.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы. Выберем $x_1 \in (H_{u_2} \cap \dots \cap H_{u_k}) \setminus H_{u_1}$. Поскольку $(1 - w)x_1 = \frac{2(x_1, u_1)}{(u_1, u_1)}u_1$, то $u_1 \in (1 - w)V$. Далее, выбирая $x_2 \in (H_{u_3} \cap \dots \cap H_{u_k}) \setminus H_{u_2}$, получаем, что $(1 - w)x_2 = c_{21}u_1 + \frac{2(x_2, u_2)}{(u_2, u_2)}u_2$, откуда $u_1, u_2 \in (1 - w)V$. Выбирая $x_i \in (H_{u_{i+1}} \cap \dots \cap H_{u_k}) \setminus H_{u_i}$, получаем

$$(1 - w)x_i = (1 - s_{u_1} \dots s_{u_i})x_i = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \dots + c_{i,i-1}u_{i-1} + \frac{2(x_i, u_i)}{(u_i, u_i)}u_i,$$

откуда имеем $u_i \in (1 - w)V$. Теперь получаем $\dim(1 - w)V \geq k$, что и требовалось доказать.

Разложение элемента w , удовлетворяющее условиям теоремы 5, будем называть *минимальным*.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $w = w'\tilde{w} \in W_{\text{reg}}$ и $\text{rk}(1 - w') = k$, причем $w' = s_{u_1} \dots s_{u_k}$ – минимальное разложение. Конусы $C_{w'}$ и C_w смежны тогда и только тогда, когда $\tilde{w} = s_{u_{k+1}} \dots s_{u_n}$, где $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы и $u_{k+1}, \dots, u_n \in \tilde{R} = R \cap \text{Im}(1 - \tilde{w})$. В частности, если конусы C_w и $C_{w'}$ смежны, то $\tilde{w} \in \tilde{W}_{\text{reg}}$, где $\tilde{W}$ – группа, порожденная отражениями вида s_u , $u \in \tilde{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 имеем $\text{rk}(1 - \tilde{w}) = n - \text{rk}(1 - w') = n - k$, откуда согласно теореме 5 существуют такие $u_{k+1}, \dots, u_n$, что $\tilde{w} = s_{u_{k+1}} \dots s_{u_n}$, причем $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы.

Пусть $v \in C$ и $v' \in C^\circ$ таковы, что $(1 - w)v = (1 - w')v'$. Из теоремы 5, (iii) следует, что $v \in \ker(1 - \tilde{w}) = H_{u_{k+1}} \cap \dots \cap H_{u_n}$. Из условия $\dim C_{w'} = \dim(C_w \cap C_{w'})$ и доказательства леммы 5 следует, что $\tilde{C} \subset H_{u_i}$ для всех $i = k + 1, \dots, n$. Это означает, что $u_{k+1}, \dots, u_n \in \tilde{R}$.

Обратно, если $\tilde{w} = s_{u_{k+1}} \dots s_{u_n}$, где $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы, то по теореме Костанта $\text{rk}(1 - w) = n$. Поскольку $u_{k+1}, \dots, u_n \in \tilde{R}$, то $\tilde{C} \subset H_{u_{k+1}} \cap \dots \cap H_{u_n}$ и $\dim(H_{u_{k+1}} \cap \dots \cap H_{u_n} \cap C) = k$. Далее, для каждого $x \in H_{u_{k+1}} \cap \dots \cap H_{u_n} \cap C$ имеем $(1 - w)x = x - w'(s_{u_{k+1}} \dots s_{u_n}x) = (1 - w')x$, откуда $\dim C_{w'} = \dim(C_{w'} \cap C_w)$.

Список литературы

1. J.-L. Waldspurger, “Une remarque sur les systèmes de racines”, *J. Lie Theory*, **17**:3 (2007), 597–603.
2. E. Meinrenken, *Tilings defined by affine Weyl groups*, [arXiv: 0811.3880v2](#).
3. S. Pasiencier, H.-Ch. Wang, “Commutators in a semi-simple Lie group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**:6 (1962), 907–913.
4. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Гл. 4: Группы Кокстера и системы Титса. Гл. 5: Группы, порожденные отражениями. Гл. 6: Системы корней*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, **1337**, Hermann, Paris, 1968.
5. П. В. Биби́ков, В. С. Жгун, “О теореме Вальдшпургера”, *УМН*, **65**:5 (2009).

П. В. Биби́ков (P. V. Bivikov)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Поступило в редакцию
 18.05.2009

В. С. Жгун (V. S. Zhgoon)
 Научно-исследовательский институт
 системных исследований РАН, г. Москва
E-mail: zhgoon@mail.ru