Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Долгополов, И. Н. Родионова, Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 21–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 03:08:47

УДК 517.95

М. В. Долгополов, И. Н. Родионова

Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике

Для уравнения гиперболического типа на плоскости и одного из его аналогов третьего порядка в трехмерном пространстве во введенных авторами специальных классах решаются краевые задачи в областях, содержащих две линии (плоскости) сингулярности коэффициентов рассматриваемых уравнений, с условиями сопряжения на характеристической линии (плоскости).

Библиография: 3 наименования.

Ключевые слова: интегральные уравнения, краевые задачи, уравнения гиперболического типа.

Введение

Настоящая работа является продолжением исследований по теме “Специальные представления решений уравнений гиперболического типа и их приложений” [1]. В работах [1]–[3] для уравнения

$$U_{\xi\eta} + \frac{p}{\eta - \xi} U_{\xi} - \frac{p}{\eta - \xi} U_{\eta} - \lambda U = 0 \quad (0.1)$$

и одного из его пространственных аналогов

$$U_{xyz} - \frac{p}{x - y - z} U_{xz} + \frac{p}{x - y - z} U_{yz} - \lambda U_z = 0 \quad (0.2)$$

методом Римана были получены решения соответственно задачи Коши и видоизмененной задачи Коши (задачи С) для случая $0 < p < 1/2$. Посредством интегрального задания одного из условий задачи Коши (задачи С) получено специальное представление решений этих задач, что позволило распространить формулу решения поставленных задач на случай отрицательных и равных нулю значений параметра p , а также значительно упростить саму формулу. В случае отрицательных значений p формула решения задачи Коши имеет более сложную структуру.

В настоящей работе решаются краевые задачи в областях, ограниченных двумя линиями (плоскостями) сингулярности коэффициентов рассматриваемых уравнений и условиями сопряжения на характеристической линии (плоскости) для случая отрицательных значений параметра p .

В § 1 рассмотрено уравнение, полученное объединением уравнения (0.1) с уравнением, симметричным ему относительно оси $\eta = 0$. Условия сопряжения для характеристики $\eta = 0$ содержат производные, взятые по направлению нормалей к линиям сингулярности коэффициентов уравнения (задача S). В § 2 рассматривается один из пространственных аналогов задачи S.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом АВИП 3341 и 10854 Министерства образования и науки РФ.

§ 1. Постановка задачи

Уравнение

$$U_{\xi\eta} - \frac{pU_{\xi}}{\eta - \xi \operatorname{sign} \eta} + \frac{pU_{\eta}}{\eta \operatorname{sign} \eta - \xi} - \lambda U \operatorname{sign} \eta = 0, \quad (1.1)$$

где $0 < p < 1/2$, $p, \lambda - \text{const}$, рассмотрим на множестве $D = D_1 \cup D_2$; здесь $D_1 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \eta < \xi < h\}$, $h - \text{const}$, $h > 0$, $D_2 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < -\eta < \xi < h\}$. В областях D_1 и D_2 уравнение (1.1) имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} U_{\xi\eta} - \frac{p}{\eta - \xi} U_{\xi} + \frac{p}{\eta - \xi} U_{\eta} - \lambda U &= 0, \\ U_{\xi\eta} - \frac{p}{\eta + \xi} U_{\xi} - \frac{p}{\eta + \xi} U_{\eta} + \lambda U &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично [1] получим специальные представления решений задачи Коши для уравнения (1.1) в областях D_1 и D_2 .

Решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_1 с данными

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \xi+0} U(\xi, \eta) &= \tau_1(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h, \\ \lim_{\eta \rightarrow \xi+0} (\xi - \eta)^{-2p} (U_{\xi} - U_{\eta}) &= \nu_1(\xi), \quad 0 < \xi < h, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\tau_1'(\xi) \in C[0, h]$, $\nu_1(\xi) \in C(0, h)$ и $\nu_1(\xi)$ интегрируема на $[0, h]$, имеет вид

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) &= \int_{\xi}^h T_1(s)(s - \xi)^p (s - \eta)^p {}_0F_1(1 + p, \lambda(s - \eta)(s - \xi)) ds \\ &+ \int_{\eta}^{\xi} N_1(s)(\xi - s)^p (s - \eta)^p {}_0F_1(1 + p, -\lambda(s - \eta)(\xi - s)) ds; \end{aligned} \quad (1.3)$$

здесь

$${}_0F_1(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\alpha)_n n!}, \quad (1.4)$$

$$N_1(s) = \frac{1}{2 \cos(\pi p)} T_1(s) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 + 2p)}{\Gamma^2(1 + p)} \nu_1(s), \quad (1.5)$$

если заданная функция $\tau_1(\xi)$ имеет интегральное представление

$$\tau_1(\xi) = \int_{\xi}^h T_1(s)(s - \xi)^{2p} {}_0F_1(1 + p, \lambda(s - \xi)^2) ds.$$

Аналогично, в области D_2 решение задачи Коши с данными

$$\begin{aligned} \lim_{-\eta \rightarrow \xi+0} U(\xi, \eta) &= \tau_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h, \\ \lim_{-\eta \rightarrow \xi+0} (\xi + \eta)^{-2p} (U_{\eta} + U_{\xi}) &= \nu_2(\xi), \quad 0 < \xi < h, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\tau_2'(\xi) \in C[0, h]$, $\nu_2(\xi) \in C(0, h)$ и $\nu_2(\xi)$ интегрируема на $[0, h]$, приводится к виду

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) &= \int_{\xi}^h T_2(s)(s - \xi)^p (s + \eta)^p {}_0F_1(1 + p, \lambda(s + \eta)(s - \xi)) ds \\ &+ \int_{-\eta}^{\xi} N_2(s)(\xi - s)^p (s + \eta)^p {}_0F_1(1 + p, -\lambda(s + \eta)(\xi - s)) ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$N_2(s) = \frac{1}{\cos(\pi p)} T_2(s) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 + 2p)}{\Gamma^2(1 + p)} \nu_2(s), \quad (1.8)$$

если функция $\tau_2(\xi)$ задается интегралом:

$$\tau_2(\xi) = \int_{\xi}^h T_2(s)(s - \xi)^{2p} {}_0F_1(1 + p, \lambda(s - \xi)^2) ds,$$

где $T_i(s)$, $i = 1, 2$, непрерывны в $(0, h)$ и интегрируемы на $[0, h]$.

Функции (1.3), (1.7) являются классическими решениями задачи Коши соответственно в областях D_1 и D_2 , что доказывается непосредственной проверкой.

Задача S. На множестве D найти решение уравнения (1.1), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$U(h, \eta) = \varphi_1(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq h, \quad (1.9)$$

$$U(h, \eta) = \varphi_2(\eta), \quad 0 \leq -\eta \leq h, \quad (1.10)$$

с сопряжением на характеристике $\eta = 0$:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0-0} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \right). \quad (1.11)$$

На заданные функции $\varphi_i(\eta)$ налагаются следующие условия:

$$\varphi_1(\eta) \in C^2[0, h], \quad \varphi_2(\eta) \in C^2[-h, 0], \quad (1.12)$$

$$\varphi_1(h) = \varphi_1'(h) = \varphi_2(-h) = \varphi_2'(-h) = 0,$$

$$\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.13)$$

Для решения поставленной задачи положим $\xi = h$ в формулах (1.3), (1.7) и подчиним функции условиям (1.9), (1.10). Получим следующие интегральные уравнения относительно $N_i(s)$, $i = 1, 2$:

$$\int_{\eta}^h N_1(s)(h - s)^p (s - \eta)^p {}_0F_1(1 + p, -\lambda(s - \eta)(h - s)) ds = \varphi_1(\eta), \quad (1.14)$$

$$\int_{-\eta}^h N_2(s)(h - s)^p (s + \eta)^p {}_0F_1(1 + p, -\lambda(s + \eta)(h - s)) ds = \varphi_2(\eta). \quad (1.15)$$

Рассуждениями, подобными тем, которые были проведены в работе [1], получаем единственное решение уравнений (1.14) и (1.15) соответственно:

$$N_1(x) = \frac{(h - x)^{-p}}{\Gamma(1 + p)\Gamma(1 - p)} \left[\int_x^h \varphi_1''(s)(s - x)^{-p} {}_0F_1(1 - p, \lambda(s - x)(h - x)) ds + \frac{\lambda}{1 - p} \int_x^h \varphi_1'(s)(s - x)^{1-p} {}_0F_1(2 - p, \lambda(s - x)(h - x)) ds \right], \quad (1.16)$$

$$N_2(x) = \frac{(h - x)^{-p}}{\Gamma(1 + p)\Gamma(1 - p)} \left[\int_x^h \varphi_2''(-s)(s - x)^{-p} {}_0F_1(1 - p, \lambda(s - x)(h - x)) ds - \frac{\lambda}{1 - p} \int_x^h \varphi_2'(-s)(s - x)^{1-p} {}_0F_1(2 - p, \lambda(s - x)(h - x)) ds \right]. \quad (1.17)$$

Делая в интегралах из формул (1.16), (1.17) замену $s = x + (h - x)\mu$ и учитывая непрерывность на $[0, h]$ функций $\varphi_i''(s)$ и ${}_0F_1(\alpha, z)$, приходим к выводу, что при выполнении условий (1.12) функции $N_i(s)$ принадлежат $C[0, h]$.

Для нахождения функций T_1 и T_2 воспользуемся непрерывностью решения задачи **S** на линии $\eta = 0$ и условиями сопряжения (1.11), согласно которым получаем

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} [T_1(s) - T_2(s)] s^p (s - \xi)^p {}_0F_1(1 + p, \lambda s(s - \xi)) ds \\ = \int_0^{\xi} [N_2(s) - N_1(s)] s^p (\xi - s)^p {}_0F_1(1 + p, \lambda s(s - \xi)) ds, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^{\eta} [T_1(s) + T_2(s)] s^p (s - \xi)^{p-1} {}_0F_1(p, \lambda s(s - \xi)) ds \\ = \int_0^{\xi} [N_2(s) + N_1(s)] s^{p-1} (\xi - s)^{p-1} {}_0F_1(p, \lambda s(s - \xi)) ds. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Правые части уравнений (1.18), (1.19) – известные функции, N_1 и N_2 в них определяются соответственно формулами (1.16), (1.17). Обозначим

$$\Phi_1(\xi) \equiv \int_0^{\xi} [N_2(s) - N_1(s)] s^p (\xi - s)^p {}_0F_1(1 + p, \lambda s(s - \xi)) ds, \quad (1.20)$$

$$\Phi_2(\xi) \equiv \int_0^{\xi} [N_2(s) + N_1(s)] s^{p-1} (\xi - s)^{p-1} {}_0F_1(p, \lambda s(s - \xi)) ds. \quad (1.21)$$

Для разрешимости уравнений (1.18), (1.19) в классе функций, непрерывных в $(0, h)$ и интегрируемых на $[0, h]$, необходимо, чтобы функции $\Phi_i(\xi)$ удовлетворяли условиям

$$\Phi_1(h) = \Phi_2(h) = \Phi_1'(h) = 0, \quad \Phi_1 \in C^2(0, h), \quad \Phi_2 \in C^1(0, h), \quad (1.22)$$

где Φ_1'' и Φ_2' интегрируемы на $[0, h]$.

Непосредственной проверкой показываем, что условия (1.22) будут выполняться, если к условиям (1.12), (1.13) добавить условие ортогональности

$$\int_0^h \varphi_i(t) t dt = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Простейшим примером функции, удовлетворяющей условиям (1.12), (1.13), (1.23), служит

$$\varphi(t) = t^{\alpha-1} (h - t)^{\beta} - t^{\beta-1} (h - t)^{\alpha}, \quad \alpha > 2, \quad \beta > 2.$$

Проводя вычисления, покажем, что если $\varphi_i(\eta) \in C_{[0, h]}^{(2)}$, то функции $\Phi_1''(\xi)$ и $\Phi_2'(\xi)$ непрерывны на $(0, h]$, а в точке $\xi = 0$ имеют особенность порядка $1 - p$.

Основываясь на результатах работы [1], складывая и вычитая единственные решения уравнений (1.18), (1.19), приходим к выражениям

$$\begin{aligned} T_1(x) = \frac{x^{-p}}{2\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \left[\int_x^h \left(\frac{1}{p} \Phi_1''(s) - x \Phi_2'(s) \right) (s - x)^{-p} {}_0F_1(1 - p, -\lambda(s - x)x) ds \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{1 - p} \int_x^h \left(\frac{1}{p} \Phi_1'(s) - x \Phi_2(s) \right) (s - x)^{1-p} {}_0F_1(2 - p, -\lambda(s - x)x) ds \right], \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$T_2(x) = -\frac{x^{-p}}{2\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \left[\int_x^h \left(\frac{1}{p} \Phi_1''(s) + x \Phi_2'(s) \right) (s-x)^{-p} {}_0F_1(1-p, -\lambda(s-x)x) ds \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{1-p} \int_x^h \left(\frac{1}{p} \Phi_1'(s) + x \Phi_2(s) \right) (s-x)^{1-p} {}_0F_1(2-p, -\lambda(s-x)x) ds \right]. \quad (1.25)$$

Проверкой устанавливаем, что функции (1.24), (1.25) при выполнении условий (1.22) непрерывны на $(0, h)$ и интегрируемы на $[0, h]$.

Из изложенного выше следует

ТЕОРЕМА 1.1. *Задача S для уравнения (1.1) имеет единственное решение. При выполнении условий (1.12), (1.13), (1.23) решение задачи определяется формулами (1.3), (1.7), (1.16), (1.17), (1.24), (1.25).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Единственность решения задачи S следует из единственности решения задачи Коши, взятого за основу, а также из однозначной разрешимости всех интегральных уравнений, участвующих в процессе решения.

§ 2. Пространственная задача MS

Уравнение

$$U_{xyz} + \frac{2py}{(x-z)^2 - y^2} U_{xz} - \frac{2p(x-z)}{(x-z)^2 - y^2} U_{yz} - 4\lambda y(x-z) U_z \operatorname{sign} y = 0, \quad 0 < p < \frac{1}{2}, \quad (2.1)$$

рассмотрим на множестве $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, где

$$\mathcal{G}_1 = \{(x, y, z) \mid 0 < z < x - y, 0 < y < x < h\}, \\ \mathcal{G}_2 = \{(x, y, z) \mid 0 < z < x + y, 0 < -y < x < h\}, \quad h > 0.$$

Части $z = x - y$ и $z = x + y$ границы $\mathcal{G}$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения (2.1).

Решение видоизмененной задачи Коши (задачи C) для уравнения (2.1) с данными

$$U(x, y, x - y) = \tau_1(x, y), \quad 0 \leq x \leq y \leq h, \\ \lim_{z \rightarrow x-y-0} (x - y - z)^{-2p} (2y)^{-2p} (U_{xz} - U_{yz}) = \mu_1(x, y), \quad 0 < x < y < h, \quad (2.2) \\ \lim_{z \rightarrow x-y-0} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu_1(x, y), \quad 0 < x < y < h,$$

где $\mu_1(x, y)$, $\nu_1(x, y)$ непрерывны в области $\Delta_1 = \{x, y \mid 0 < x < y < h\}$ и интегрируемы в $\bar{\Delta}_1$, $(\tau_1)_{xy} \in C(\bar{\Delta}_1)$, получено в работе [3] и в силу интегрального представления функции ν_1 :

$$\nu_1(x, x - y) = \int_x^h T_1(\xi, x - y) [(\xi - x + y)^2 - y^2]^{2p} {}_0F_1(1 + p, -\lambda[(\xi - x + y)^2 - y^2]^2) d\xi,$$

где T_1 – непрерывная в Δ_1 и интегрируемая в $\bar{\Delta}_1$ функция, приводится к виду

$$U(x, y, z) = \tau_1(x, y) - \int_z^{x-y} ds \int_{y+s}^x N_1(\xi, s) [(\xi - s)^2 - y^2]^p [(x - s)^2 - (\xi - s)^2]^p \\ \times {}_0F_1(1 + p, \lambda[(\xi - s)^2 - y^2][(x - s)^2 - (\xi - s)^2]) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& - \int_z^{x-y} ds \int_x^h T_1(\xi, s) [(\xi - s)^2 - y^2]^p [(\xi - s)^2 - (x - s)^2]^p \\
& \quad \times {}_0F_1(1 + p, \lambda[(\xi - s)^2 - y^2][(x - s)^2 - (\xi - s)^2]) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Аналогично получаем решение задачи С специального представления в области $\mathcal{G}_2$. Это функция

$$\begin{aligned}
U(x, y, z) = & \tau_2(x, y) - \int_z^{x+y} ds \int_{s-y}^x N_2(\xi, s) [(\xi - s)^2 - y^2]^p [(x - s)^2 - (\xi - s)^2]^p \\
& \times {}_0F_1(1 + p, \lambda[(\xi - s)^2 - y^2][(x - s)^2 - (\xi - s)^2]) d\xi \\
& - \int_z^{x+y} ds \int_x^h T_2(\xi, s) [(\xi - s)^2 - y^2]^p [(\xi - s)^2 - (x - s)^2]^p \\
& \times {}_0F_1(1 + p, \lambda[(\xi - s)^2 - y^2][(x - s)^2 - (\xi - s)^2]) d\xi,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

удовлетворяющая в области $\mathcal{G}_2$ уравнению (2.1) и граничным условиям

$$\begin{aligned}
U(x, y, x + y) &= \tau_2(x, y), \quad 0 \leq x \leq -y \leq h, \\
\lim_{z \rightarrow x+y-0} \frac{\partial U}{\partial z} &= \nu_2(x, y), \quad 0 < x < -y < h, \\
\lim_{z \rightarrow x+y-0} (x + y - z)^{-2p} (-2y)^{-2p} (U_{xz} + U_{yz}) &= \mu_2(x, y), \quad 0 < x < -y < h,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где τ_2 , μ_2 , ν_2 – заданные функции, μ_2 , ν_2 непрерывны в $\Delta_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < -y < h\}$ и интегрируемы в $\bar{\Delta}_2$, $(\tau_2)_{xy} \in C(\bar{\Delta}_2)$.

При этом функция ν_2 имеет следующее представление:

$$\nu_2(x, x + y) = \int_x^h T_2(\xi, x + y) [(\xi - x - y)^2 - y^2]^{2p} {}_0F_1(1 + p, -\lambda[(\xi - x - y)^2 - y^2]^2) d\xi,$$

в котором $T_2(x, y)$ – функция, непрерывная в Δ_2 и интегрируемая в $\bar{\Delta}_2$.

В выражении (2.4) функция $N_2(\xi, s)$ определяется формулой

$$N_2(\xi, s) = \frac{1}{2 \cos(\pi p)} T_2(\xi, s) + \frac{\Gamma(1 + 2p)}{2\Gamma^2(1 + p)} \mu_2(\xi + s, s).$$

Непосредственными вычислениями доказываем, что функции (2.3), (2.4) при выполнении условий, налагаемых на функции T_i , N_i , τ_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют уравнению (2.1) в областях $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ соответственно и условиям задачи С, а также являются непрерывными в замкнутых областях.

Задача MS. На множестве $\mathcal{G}$ найти решение уравнения (2.1), непрерывное в $\bar{\mathcal{G}}$ и удовлетворяющее граничным условиям (2.2), (2.5) и условию

$$U(h, y, z) = \begin{cases} \varphi_1(y, z), & (y, z) \in \bar{\Delta}_3 = \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq h - z, 0 \leq z \leq h\}, \\ \varphi_2(y, z), & (y, z) \in \bar{\Delta}_3^* = \{(y, z) \mid 0 \leq -y \leq h - z, 0 \leq z \leq h\}, \end{cases} \tag{2.6}$$

с сопряжением на плоскости $y = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0-0} (U_y - U_x) = \lim_{y \rightarrow 0+0} (U_y + U_x). \tag{2.7}$$

На заданные функции налагаются следующие условия:

$$(\tau_1)_{xy} \in C(\bar{\Delta}_1), \quad (\tau_2)_{xy} \in C(\bar{\Delta}_2), \quad (2.8)$$

$$\tau_1(h, y) = \tau_2(h, y) = 0, \quad \tau_1(x, 0) = \tau_2(x, 0), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_1(x, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \tau_1(x, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \tau_2(x, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \tau_2(x, 0), \quad (2.10)$$

$$\varphi_1(h - z, z) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_1(h - z, z) = \frac{\partial^2 \varphi_1(h - z, z)}{\partial z \partial y} = 0, \quad (2.11)$$

$$\varphi_2(z - h, z) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi_2(z - h, z) = \frac{\partial^2 \varphi_2(z - h, z)}{\partial z \partial y} = 0. \quad (2.12)$$

Обозначим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \varphi_1(y, z)}{\partial z \partial y} \frac{1}{y} \right] = \Phi_1(y, z), \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \varphi_2(-y, z)}{\partial z \partial y} \frac{1}{y} \right] = \Phi_2(y, z), \quad (2.14)$$

$$\Phi_1(y, z) \in C(\bar{\Delta}_3), \quad \Phi_2(y, z) \in C(\bar{\Delta}_3^*). \quad (2.15)$$

Решение задачи MS технически не отличается от решения ее плоского аналога, поэтому сформулируем основные результаты. Условия (2.6) приводят к интегральным уравнениям относительно N_1 , N_2 , единственное решение которых при выполнении условий (2.9)–(2.15) имеет представление

$$\begin{aligned} N_1(\xi, s) = & \frac{[(h-s)^2 - (\xi-s)^2]^{-p}}{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)} \left[(\xi-s) \int_{\xi-s}^{h-s} \left(\frac{(\varphi_1)''_{zt}(t, z)}{t} \right)'_t [t^2 - (\xi-s)^2]^{-p} \right. \\ & \times {}_0F_1(1-p, -\lambda[t^2 - (\xi-s)^2][(h-s)^2 - (\xi-s)^2]) dt \\ & + \frac{2\lambda}{1-p} \int_{\xi-s}^{h-s} (\varphi_1)''_{st}(t, s) [t^2 - (\xi-s)^2]^{1-p} \\ & \left. \times {}_0F_1(2-p, -\lambda[t^2 - (\xi-s)^2][(h-s)^2 - (\xi-s)^2]) dt \right], \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2(\xi, s) = & -\frac{[(h-s)^2 - (\xi-s)^2]^{-p}}{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)} \left[(\xi-s) \int_{\xi-s}^{h-s} \left(\frac{(\varphi_2)''_{st}(-t, s)}{t} \right)'_t [t^2 - (\xi-s)^2]^{-p} \right. \\ & \times {}_0F_1(1-p, -\lambda[t^2 - (\xi-s)^2][(h-s)^2 - (\xi-s)^2]) dt \\ & + \frac{2\lambda}{1-p} \int_{\xi-s}^{h-s} (\varphi_2)''_{st}(-t, s) [t^2 - (\xi-s)^2]^{1-p} \\ & \left. \times {}_0F_1(2-p, -\lambda[t^2 - (\xi-s)^2][(h-s)^2 - (\xi-s)^2]) dt \right]. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Функции (2.16), (2.17) при выполнении условий (2.11)–(2.15) непрерывны в $\bar{\Delta}_1$. Непрерывность решения задачи MS на $y = 0$ и условия сопряжения (2.7) приводит нас к интегральным уравнениям относительно $T_1 \pm T_2$, решая которые, получаем

$$\begin{aligned} T_1(\xi, z) = & \frac{(\xi-z)^{1-2p}}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \left[\frac{\lambda}{1-p} \int_{\xi-z}^{h-z} [\Psi_1(t, z) + \Psi_2(t, z)] (t^2 - (\xi-z)^2)^{1-p} \right. \\ & \times {}_0F_1(2-p, \lambda[\xi-z]^2[t^2 - (\xi-z)^2]) d(t^2) \\ & \left. - \int_{\xi-z}^{h-z} [\Psi_1(t, z) + \Psi_2(t, z)]'_t (t^2 - (\xi-z)^2)^{-p} \right] \end{aligned}$$

$$\times {}_0F_1(1-p, \lambda[\xi-z]^2[t^2-(\xi-z)^2]) dt \Big], \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} T_2(\xi, z) = & \frac{(\xi-z)^{1-2p}}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \left[\frac{\lambda}{1-p} \int_{\xi-z}^{h-z} [\Psi_1(t, z) - \Psi_2(t, z)] (t^2 - (\xi-z)^2)^{1-p} \right. \\ & \times {}_0F_1(2-p, \lambda[\xi-z]^2[t^2-(\xi-z)^2]) d(t^2) \\ & - \int_{\xi-z}^{h-z} [\Psi_1(t, z) - \Psi_2(t, z)]'_t (t^2 - (\xi-z)^2)^{-p} \\ & \left. \times {}_0F_1(1-p, \lambda[\xi-z]^2[t^2-(\xi-z)^2]) dt \right]. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Функции Ψ_i , $i = 1, 2$, определены формулами

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, z) \equiv \int_z^{t+z} [N_1(\xi, z) + N_2(\xi, z)] (\xi-z)^{2p} [t^2 - (\xi-z)^2]^{p-1} \\ \times {}_0F_1(p, \lambda[\xi-z]^2[t^2 - (\xi-z)^2]) d\xi, \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(t, z) \equiv - \int_z^{t+z} [N_1(\xi, z) - N_2(\xi, z)] (\xi-z)^{2p} [t^2 - (\xi-z)^2]^{p-1} \\ \times {}_0F_1(p, \lambda[\xi-z]^2[t^2 - (\xi-z)^2]) d\xi. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Проведя вычисления, покажем, что при выполнении условий (2.8)–(2.15) функции $T_i(x, y)$ непрерывны в соответствующих областях Δ_i и интегрируемы в $\bar{\Delta}_i$, $i = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 2.1. При выполнении условий (2.8)–(2.15) задача MS для уравнения (2.1) имеет единственное решение, определяемое формулами (2.3), (2.4), (2.16)–(2.21).

Отметим, что единственность решения задачи следует из единственности решения видоизмененной задачи Коши, полученного методом Римана и взятого за основу, а также из однозначной разрешимости всех интегральных уравнений, участвующих в процессе решения.

Список литературы

1. В. М. Долгополов, М. В. Долгополов, И. Н. Родионова, “Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа”, *Докл. РАН*, **429**:5 (2009), 583–589; англ. пер.: V. M. Dolgoplov, M. V. Dolgoplov, I. N. Rodionova, “Construction of special classes of solutions for some differential equations of hyperbolic type”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 860–866.
2. В. М. Долгополов, И. Н. Родионова Видоизмененная задача Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерном пространстве, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. наук*, **1**:18 (2009), 41–46.
3. В. М. Долгополов, М. В. Долгополов, И. Н. Родионова, “Две задачи для гиперболического уравнения в трехмерном пространстве”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. естеств.*, **67**:8 (2008), 95–107.

М. В. Долгополов (M. V. Dolgoplov)
Самарский государственный университет
E-mail: mvdolg@ssu.samara.ru,
mikhaildolgoplov@rambler.ru

Поступило в редакцию
25.05.2009
19.04.2010

И. Н. Родионова (I. N. Rodionova)
Самарский государственный университет