Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Саватеев, Применение сетей доказательств
для исследования фрагментов исчисления Ламбека,
Изв. РАН. Сер. матем., 2011, том 75, выпуск 3, 189–
222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:01:00

УДК 510.662

Ю. В. Саватеев

Применение сетей доказательств для исследования фрагментов исчисления Ламбека

С помощью сетей доказательств исследуется алгоритмическая сложность проблемы выводимости в некоторых фрагментах исчисления Ламбека. Доказана NP-полнота этой задачи для одностороннего фрагмента и для фрагмента без умножения, а также для вариантов этих фрагментов, допускающих пустые антецеденты.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: исчисление Ламбека, алгоритмическая сложность, сети доказательств.

Введение

Исчисление Ламбека L было введено в [1]. Оно активно используется в качестве основы для создания категориальных грамматик, описывающих синтаксические структуры естественных языков (см., например, [2], [3]). М. Р. Пентус доказал, что порождающая способность категориальных грамматик, основанных на исчислении Ламбека, в точности совпадает с порождающей способностью контекстно-свободных грамматик (см. [4]).

Исчисление Ламбека связано с секвенциальными исчислениями высказываний. Если к секвенциальному исчислению Ламбека добавить определенные структурные правила, то получается интуиционистское или классическое исчисление высказываний. Во всех трех исчислениях аналогичным образом доказывается устранимость сечения и интерполяционное свойство Крейга. Исчисление Ламбека также тесно связано с линейной логикой Жиара (см. [5]), оно эквивалентно интуиционистскому некоммутативному фрагменту мультипликативной линейной логики.

В алгебре исчисление Ламбека связано с частично упорядоченными полугруппами с делением. *Частично упорядоченной полугруппой с делением* называется частично упорядоченная полугруппа, снабженная такими бинарными операциями $\backslash$ и $/$, что утверждения $a \leq c/b$, $a \cdot b \leq c$ и $b \leq a \backslash c$ равносильны. Для частично упорядоченных полугрупп с делением исчисление Ламбека дает эффективную аксиоматизацию множества тождественно истинных атомарных формул в сигнатуре $(\leq, \cdot, \backslash, /)$. Теорема о разрешимости проблемы выводимости для исчисления Ламбека по существу утверждает, что это множество атомарных формул разрешимо.

В исчислении Ламбека используются синтаксические типы, построенные из примитивных с помощью трех бинарных связок: умножения, левого деления

и правого деления. Естественно рассматривать фрагменты исчисления Ламбека с ограниченным набором связок. В настоящей работе будут рассмотрены так называемый левосторонний фрагмент $L(\cdot, \backslash)$ и фрагмент без умножения $L(\backslash, /)$, который является особенно важным для лингвистических приложений (большинство грамматик, описывающих естественные языки, основаны именно на этом фрагменте), а также их варианты – фрагменты исчисления Ламбека, в которых допускаются пустые antecedentes $L^*(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\backslash, /)$.

В категориальных грамматиках синтаксический разбор предложения сводится к поиску вывода в исчислении, лежащем в их основе. Вопрос об алгоритмической сложности проблемы выводимости особенно важен для лингвистических приложений, так как напрямую связан с эффективностью работы синтаксических анализаторов, основанных на категориальных грамматиках.

Для неассоциативного варианта исчисления Ламбека было показано, что проблема выводимости может быть решена за полиномиальное время (см. [6], для фрагмента неассоциативного исчисления без умножения это было доказано раньше в [7]). Для полного ассоциативного исчисления Ламбека, а также для его варианта L^* , в котором допускаются пустые antecedentes, была доказана NP-полнота проблемы выводимости (см. [8]). Данная проблема для фрагмента без умножения была доказана в работе [9], конструкция из которой используется и в настоящей работе. Для фрагмента с одним делением в [10] был предложен полиномиальный алгоритм, решающий более общую задачу о принадлежности данного слова данной грамматике, основанной на этом фрагменте.

Мы докажем, что классическая NP-полная проблема SAT (о выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме) за полиномиальное время может быть сведена к проблемам выводимости в $L(\cdot, \backslash)$, $L(\backslash, /)$, $L^*(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\backslash, /)$, и, тем самым, покажем, что проблема выводимости для этих фрагментов NP-полна. Все конструкции и доказательства, которые мы используем при рассмотрении $L(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\cdot, \backslash)$, могут быть явно переписаны для соответствующих фрагментов с правым делением, поэтому проблема выводимости для $L(\cdot, /)$ и $L^*(\cdot, /)$ также является NP-полной.

Таким образом, теперь для всех фрагментов исчисления Ламбека, заданных ограничениями набора связок, установлены оценки алгоритмической сложности проблемы выводимости: для $L(\cdot)$ проблема тривиальна и лежит в P, для $L(/)$ и $L(\backslash)$ проблема также лежит в P (см. [10]), для $L(\cdot, \backslash)$, $L(\cdot, /)$ и $L(\backslash, /)$ проблема выводимости NP-полна (см. [9] и далее в настоящей работе).

В качестве основной техники для исследования выводимости во фрагментах ассоциативного исчисления Ламбека мы используем так называемые сети доказательств – метод, позволяющий наглядно и компактно представлять вывод формулы в данном исчислении, полностью передавая его принципиальную структуру. Для исчисления Ламбека понятие сети доказательств, дающее удобный критерий выводимости, было предложено М. Р. Пентусом в [8]. Критерии такого же рода применялись также в [10] и [9]. В 2005 г. в работе [11] была сделана попытка применить данный метод для исследования выводимости во фрагменте исчисления Ламбека без умножения, однако в ней не было получено никаких результатов, связанных с алгоритмической сложностью. Еще один

критерий (близкий к критерию из [9], однако формально неправильный) для этого фрагмента был предложен в [12].

Структура настоящей работы следующая. В § 1 вводится ассоциативное исчисление Ламбека. В § 2 определяется отношение структурной эквивалентности на секвенциях и вводится понятие неупрощаемой секвенции, используемое в дальнейших доказательствах. В § 3 определяются и строятся сети доказательств для секвенций. В § 4 устанавливается критерий выводимости для исчисления Ламбека, основанный на сетях доказательств. В § 5 рассматривается левосторонний фрагмент исчисления Ламбека и доказывается, что проблема выводимости в нем NP-полна. В § 6 то же доказывается для фрагмента без умножения.

§ 1. Исчисление Ламбека L

Ассоциативное исчисление Ламбека можно построить следующим образом. Пусть задано счетное множество *примитивных типов* $\mathbf{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$. Определим множество Tr L-типов (также называемых L-термами):

- 1) $\mathbf{P} \subset \text{Tr}$;
- 2) если $A, B \in \text{Tr}$, то $(A/B), (A \setminus B), (A \cdot B) \in \text{Tr}$.

Примитивные типы будем обозначать строчными латинскими буквами $p, q, r, \dots$, L-типы – прописными латинскими буквами $A, B, C, \dots$. Прописными греческими буквами $\Pi, \Gamma, \Delta, \dots$ будем обозначать последовательности (возможно, пустые) L-типов. Выражения вида $\Pi \rightarrow A$, где Π непусто, называются L-формулами или секвенциями. Конечную последовательность L-типов $A_1, \dots, A_n$ условимся обозначать через $A_1 \dots A_n$.

Аксиомы и правила вывода в L следующие:

$$\begin{array}{ll}
 A \rightarrow A, & \frac{\Phi \rightarrow B \quad \Gamma B \Delta \rightarrow A}{\Gamma \Phi \Delta \rightarrow A} (\text{CUT}), \\
 \frac{\Pi A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (B/A)} (\rightarrow /), & \frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow C}{\Gamma (B/A) \Phi \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow), \\
 \frac{A \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (A \setminus B)} (\rightarrow \setminus), & \frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow C}{\Gamma \Phi (A \setminus B) \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow), \\
 \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Phi \rightarrow B}{\Pi \Phi \rightarrow (A \cdot B)} (\rightarrow \cdot), & \frac{\Gamma A B \Delta \rightarrow C}{\Gamma (A \cdot B) \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow).
 \end{array}$$

В посылках и заключениях правил стоят L-формулы, Γ и Δ могут быть пустыми.

Запись $L \vdash \Pi \rightarrow A$ означает, что секвенция $\Pi \rightarrow A$ выводима в исчислении L.

Исчисление L^* отличается от L тем, что в нем разрешены пустые антецеденты, т.е. выражения вида $\rightarrow A$, где A – некоторый тип, также считаются формулами. Правило сечения (CUT) является устранимым в обоих этих исчислениях.

§ 2. Структурно эквивалентные секвенции

Пусть A – некоторый L-тип. Назовем *упрощением* A результат применения к нему одной из следующих операций:

- 1) заменить подтип вида $B \cdot (C \cdot D)$ на $(B \cdot C) \cdot D$;
- 2) заменить подтип вида $(B \setminus C)/D$ на $B \setminus (C/D)$;
- 3) заменить подтип вида $(C \cdot B) \setminus D$ на $B \setminus (C \setminus D)$;
- 4) заменить подтип вида $B/(D \cdot C)$ на $(B/C)/D$.

Упрощением секвенции $\Pi \rightarrow A$ назовем результат применения к ней одной из следующих операций:

- 1) упрощение любого входящего в нее типа;
- 2) применение правила, обратного правилу $(\cdot \rightarrow)$, правилу $(\rightarrow /)$ или правилу $(\rightarrow \setminus)$.

Секвенции называются *структурно эквивалентными*, если из одной можно получить другую с помощью нескольких применений операций упрощения или операций, обратных к ним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Секвенция называется *неупрощаемой*, если к ней нельзя применить ни одну из упрощающих операций.

ЛЕММА 2.1. Структурно эквивалентные секвенции либо одновременно выводимы, либо одновременно невыводимы в исчислении L^* . Если секвенция выводима в L , то ее упрощение также выводимо в исчислении L .

ЛЕММА 2.2. Для любой секвенции существует структурно эквивалентная ей неупрощаемая секвенция.

§ 3. Построение сети доказательств

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ – множества всех натуральных и целых чисел соответственно.

Пусть $p \in \text{Tr}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$. Назовем $p_{[i]}^{[j]}$ *атомом*. Определим множество At как множество всех атомов.

Определим At^* как свободный моноид (множество всех конечных слов) со множеством порождающих At . Элементы множества At^* обозначим буквами $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ и т. д., через ε обозначим пустую строку.

Определим три отображения $t: \text{At}^* \rightarrow \mathbf{P}$, $d: \text{At}^* \rightarrow \mathbb{N}$ и $g: \text{At}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$t(\mathbb{A}p_{[i]}^{[j]}) = p, \quad d(\mathbb{A}p_{[i]}^{[j]}) = j, \quad g(\mathbb{A}p_{[i]}^{[j]}) = i.$$

На пустом слове значение этих функций не определено.

Пусть $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$ обозначает, что $\mathbb{A}$ является собственным началом $\mathbb{B}$, т. е. существует $\mathbb{C} \neq \varepsilon$ такое, что $\mathbb{B} = \mathbb{A}\mathbb{C}$. Обозначим такое $\mathbb{C}$ через $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$. Выражение $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ означает, что либо $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$, либо $\mathbb{A} = \mathbb{B}$.

Пусть $\mathcal{P}_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{B} \mid \varepsilon \sqsubset \mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{A}\}$ – множество всех непустых начал $\mathbb{A}$. На множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ отношение $\sqsubset$ является строгим линейным порядком. Тем самым, определены понятия $\min_{\sqsubset}$, $\max_{\sqsubset}$ и $[\mathbb{B}, \mathbb{C}]_{\sqsubset}$. Последнее означает множество $\{\mathbb{D} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}} \mid \mathbb{B} \sqsubseteq \mathbb{D} \sqsubseteq \mathbb{C}\}$. Полуинтервал $(\mathbb{B}, \mathbb{C}]_{\sqsubset}$ определяется аналогично.

Если γ – бинарное отношение на некотором множестве X , то γ^+ – его транзитивное замыкание, а γ^* – его транзитивно-рефлексивное замыкание.

Пусть $(\cdot)^{\langle n \rangle}$, $n \in \mathbb{Z}$, – семейство функций на At^* , заданное следующими соотношениями:

$$(p_{[i]}^{[0]})^{\langle n \rangle} = p_{[n]}^{[1]}, \quad (p_{[i]}^{[j]})^{\langle n \rangle} = p_{[-i]}^{[j+1]}, \quad j \neq 0, \\ (\mathbb{A}\mathbb{B})^{\langle n \rangle} = (\mathbb{B})^{\langle n \rangle}(\mathbb{A})^{\langle n \rangle}.$$

Определим функцию $h: \text{Tr} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом:

$$h(p) = 1, \quad h(A/B) = h(B \setminus A) = h(A), \quad h(A \cdot B) = h(A) + h(B).$$

Перевод L-типов в элементы At^* осуществляется с помощью отображения $[[\cdot]]$ следующим образом:

$$[[p]] = p_{[0]}^{[0]}, \quad [(A/B)] = [[B]]^{\langle h(A) \rangle} [[A]], \\ [[(A \setminus B)]] = [[B]][[A]]^{\langle -h(B) \rangle}, \quad [(A \cdot B)] = [[B]][[A]].$$

Например,

$$\begin{aligned} & [[(p/(((t \setminus u) \cdot s)/r) \setminus q))]] = [(((t \setminus u) \cdot s)/r) \setminus q]]^{(1)} p_{[0]}^{[0]} \\ & = (q_{[0]}^{[0]} [(((t \setminus u) \cdot s)/r)]^{\langle -1 \rangle})^{(1)} p_{[0]}^{[0]} = (q_{[0]}^{[0]} (r_{[0]}^{[0]})^{(2)} [((t \setminus u) \cdot s)]^{\langle -1 \rangle})^{(1)} p_{[0]}^{[0]} \\ & = (q_{[0]}^{[0]} (r_{[2]}^{[1]} s_{[0]}^{[0]} [t \setminus u]))^{\langle -1 \rangle} p_{[0]}^{[0]} = (q_{[0]}^{[0]} (r_{[2]}^{[1]} s_{[0]}^{[0]} u_{[0]}^{[0]} (t_{[0]}^{[0]})^{\langle -1 \rangle})^{\langle -1 \rangle})^{(1)} p_{[0]}^{[0]} \\ & = (q_{[0]}^{[0]} (r_{[2]}^{[1]} s_{[0]}^{[0]} u_{[0]}^{[0]} t_{[-1]}^{[1]})^{\langle -1 \rangle})^{(1)} p_{[0]}^{[0]} = (q_{[0]}^{[0]} t_{[1]}^{[2]} u_{[-1]}^{[1]} s_{[-1]}^{[1]} r_{[-2]}^{[2]})^{(1)} p_{[0]}^{[0]} \\ & = r_{[2]}^{[3]} s_{[1]}^{[2]} u_{[1]}^{[2]} t_{[-1]}^{[3]} q_{[1]}^{[1]} p_{[0]}^{[0]}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{N}_{\mathbb{A}} = \{\mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}} \mid d(\mathbb{B}) \text{ нечетно}\}$.

Определим бинарное отношение φ на множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ следующим образом:

$$\mathbb{B} \varphi \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbb{B} \sqsubset \mathbb{C}) \wedge (d(\mathbb{C}) = d(\mathbb{B}) - 1) \\ \quad \wedge (|\{\mathbb{D} \mid \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{C}, d(\mathbb{D}) = d(\mathbb{C})\}| < |g(\mathbb{B})|), & \text{если } g(\mathbb{B}) \geq 0, \\ (\mathbb{C} \sqsubset \mathbb{B}) \wedge (d(\mathbb{C}) = d(\mathbb{B}) - 1) \\ \quad \wedge (|\{\mathbb{D} \mid \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{B}, d(\mathbb{D}) = d(\mathbb{C})\}| < |g(\mathbb{B})|), & \text{если } g(\mathbb{B}) < 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим $A = (p/(((t \setminus u) \cdot s)/r) \setminus q)$. Тогда отношение φ для $\mathcal{P}_{[A]}$ имеет вид

Элементам $\mathcal{P}_{[A]}$ соответствуют различные вхождения элементов множества At . Два вхождения соединены стрелкой, если соответствующие элементы состоят в отношении φ . Стрелка пунктирная, если первый элемент пары лежит в $\mathcal{N}_{[A]}$.

Пусть $\Phi(\mathbb{B}) = \{\mathbb{C} \mid \mathbb{B} \varphi \mathbb{C}\}$. В частности, $\Phi(r_{[2]}^{[3]}) = \{r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}, r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}u_{[1]}^{[2]}\}$ в примере 3.1. Теперь определим сети доказательств. Рассмотрим секвенцию $A_1 \dots A_n \rightarrow B$. Пусть

$$\mathbb{W} = \llbracket A_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket A_n \rrbracket^{(0)} \llbracket B \rrbracket.$$

На множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ определены отношение φ , функция Φ , а также множество $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

ЛЕММА 3.1. *Для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ выполняются следующие утверждения:*

- 1) $|\Phi(\mathbb{A})| = |g(\mathbb{A})|$;
- 2) если $\mathbb{A} \varphi \mathbb{B}$ и $\mathbb{A} \varphi \mathbb{C}$, то $d(\mathbb{B}) = d(\mathbb{C})$, $g(\mathbb{B}) = g(\mathbb{C})$ и $\Phi(\mathbb{B}) = \Phi(\mathbb{C})$;
- 3) отношение φ^+ является строгим частичным порядком на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$;
- 4) для каждого i , $0 < i < d(\mathbb{A})$, найдется $\mathbb{B}$, для которого $d(\mathbb{B}) = i$ и $\mathbb{A} \varphi^+ \mathbb{B}$;
- 5) если $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{C}$ (или $\mathbb{C} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}$), $\mathbb{A} \varphi \mathbb{C}$, то $d(\mathbb{C}) \leq d(\mathbb{B})$;
- 6) если $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{C}$ (или $\mathbb{C} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}$), $\mathbb{A} \varphi \mathbb{C}$ и $\mathbb{B} \varphi \mathbb{C}$, то $|g(\mathbb{B})| \leq |g(\mathbb{A})|$.

Множество $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ называется φ -замкнутым, если из $\mathbb{A} \in \mathcal{G}$ и $\mathbb{B} \varphi \mathbb{A}$ следует, что $\mathbb{B} \in \mathcal{G}$.

Определим отношения $\beta, \beta' \subset \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \beta \mathbb{B} &\Leftrightarrow (\mathbb{A} = \mathbb{B}) \vee \exists \mathbb{C} (\mathbb{C} \varphi \mathbb{A} \wedge \mathbb{C} \varphi \mathbb{B}), \\ \mathbb{A} \beta' \mathbb{B} &\Leftrightarrow (\mathbb{A} \beta \mathbb{B}) \wedge \forall \mathbb{C} (\mathbb{C} \varphi \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C} \varphi \mathbb{B}). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что β – отношение эквивалентности. В примере 3.1 верно, что

$$\begin{aligned} r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}\beta r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}u_{[1]}^{[2]}, \quad r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}\beta' r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}u_{[1]}^{[2]}, \\ \neg r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}\beta' r_{[2]}^{[3]}s_{[1]}^{[2]}u_{[1]}^{[2]}. \end{aligned}$$

Для $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ определим множество

$$\mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{B} \mid \exists \mathbb{C} (\mathbb{B} \varphi^* \mathbb{C} \wedge \mathbb{A} \beta' \mathbb{C}) \wedge \forall \mathbb{D} ((\mathbb{B} \varphi^* \mathbb{D} \wedge \mathbb{A} \beta \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{A} \beta' \mathbb{D})\}.$$

Пусть π – функция из $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ в $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Пусть ψ – бинарное отношение на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbb{A} \psi \mathbb{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{B} = \pi(\mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}, \\ \mathbb{A} \varphi \mathbb{B}, & \text{если } \mathbb{A} \notin \mathcal{N}_{\mathbb{W}} \text{ и } d(\mathbb{A}) \neq 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Тройку (π, φ, ψ) будем называть *сетью доказательств* для слова $\mathbb{W}$.

Определим

$$\mu_{\pi}^{-}(\mathbb{A}) = \min_{\mathbb{C}} \{\mathbb{A}; \pi(\mathbb{A})\}, \quad \mu_{\pi}^{+}(\mathbb{A}) = \max_{\mathbb{C}} \{\mathbb{A}; \pi(\mathbb{A})\}.$$

Назовем *доказательными условиями* следующие ограничения, налагаемые на сеть доказательств (мы будем использовать их для характеристики выводимости секвенции $A_1 \dots A_n \rightarrow B$):

- (i) функция π является биекцией между $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$;
- (ii) для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $t(\pi(\mathbb{A})) = t(\mathbb{A})$;
- (iii) $\mu_{\pi}^{-}(\mathbb{A}) \subset \mu_{\pi}^{-}(\mathbb{B}) \Rightarrow \mu_{\pi}^{+}(\mathbb{A}) \subset \mu_{\pi}^{-}(\mathbb{B}) \vee \mu_{\pi}^{+}(\mathbb{B}) \subset \mu_{\pi}^{+}(\mathbb{A})$;
- (iv) отношение $(\varphi \cup \psi)^{+}$ иррефлексивно;
- (v) для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ такого, что $g(\mathbb{A}) \neq 0$, и для любого $\mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ такого, что $\mathbb{A}\psi^{+}\mathbb{B}$, верно $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B} \vee \forall \mathbb{C}(\mathbb{A}\varphi\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\psi^{+}\mathbb{B}) \vee \forall \mathbb{B}'(\mathbb{B}\varphi\mathbb{B}' \rightarrow \exists \mathbb{C}(\mathbb{A}\varphi\mathbb{C} \wedge \mathbb{B}'\psi^{+}\mathbb{C}))$;
- (vi) для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ существуют $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{A})$ и $\mathbb{C} \notin \mathcal{F}_{\varphi}(\mathbb{A})$ такие, что $\mathbb{C}\psi^{*}\mathbb{B}$.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим секвенцию $(t \setminus u)(s/r)((((t \setminus u) \cdot s)/r) \setminus q) \rightarrow q$. Для этой секвенции

$$\mathbb{W} = t_{[1]}^{[2]} u_{[0]}^{[1]} s_{[0]}^{[1]} r_{[-1]}^{[2]} r_{[2]}^{[3]} s_{[1]}^{[2]} u_{[1]}^{[2]} t_{[-1]}^{[3]} q_{[0]}^{[1]} q_{[0]}^{[0]}.$$

Рассмотрим следующую схему:

Стрелки в нижней полуплоскости описывают отношение φ , как в примере 3.1. Стрелки в верхней полуплоскости описывают функцию π . Сплошные стрелки (и верхние, и нижние) описывают отношение ψ . Нетрудно убедиться в том, что эта сеть доказательств удовлетворяет всем доказательным условиям. Например, проверим, что для элемента $\mathbb{A} = t_{[1]}^{[2]} u_{[0]}^{[1]} s_{[0]}^{[1]} r_{[-1]}^{[2]} r_{[2]}^{[3]}$ выполнено доказательное условие (v). Действительно, для $t_{[1]}^{[2]} u_{[0]}^{[1]} s_{[0]}^{[1]} r_{[-1]}^{[2]}$ верен третий дизъюнкт формулы из описания, для $t_{[1]}^{[2]} u_{[0]}^{[1]} s_{[0]}^{[1]} r_{[-1]}^{[2]} r_{[2]}^{[3]}$ – первый, а для $\mathbb{W}$ – второй.

Подобные схемы позволяют наглядно изучать сети доказательств. Например, выполнение доказательного условия (iii) соответствует утверждению “стрелки, описывающие π , можно нарисовать в верхней полуплоскости без пересечений”. Доказательное условие (v) соответствует утверждению “для любого элемента $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, если начиная с него произвольно передвигаться по сплошным стрелкам, мы рано или поздно обязательно окажемся в конце одной из выходящих из него пунктирных стрелок”. Более строго последнее утверждение сформулировано в лемме 3.3 далее.

ЛЕММА 3.2. Пусть сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательному условию (iv). Тогда для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существует такое $\mathbb{B}$, что $d(\mathbb{B}) = 0$ и $\mathbb{A}\psi^{*}\mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: существует такое $\mathbb{A}$, что для любого $\mathbb{B}$ такого, что $\mathbb{A}\psi^{*}\mathbb{B}$, верно $d(\mathbb{B}) \neq 0$. Так как для любого $\mathbb{C}$, $d(\mathbb{C}) \neq 0$, существует $\mathbb{D}$ такое, что $\mathbb{C}\psi\mathbb{D}$, то можно рассмотреть последовательность

$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \dots$ такую, что $\mathbb{A}_j \psi \mathbb{A}_{j+1}$. Так как множество $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ конечно, существуют i и j такие, что $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_j$. Тогда получается, что $\mathbb{A}_i \psi^+ \mathbb{A}_i$. Противоречие.

Пусть дано некоторое $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Назовем *полным ψ -путем с началом в $\mathbb{A}$* такую последовательность $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k$, что $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}$, $d(\mathbb{A}_k) = 0$ и $\mathbb{A}_{i-1} \psi \mathbb{A}_i$ для всех $1 < i \leq k$. Из леммы 3.2 следует, что для любого элемента $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существует полный ψ -путь с началом в нем.

ЛЕММА 3.3. Пусть сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (i) и (iv). Тогда доказательное условие (v) эквивалентно следующему утверждению: для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, $g(\mathbb{A}) \neq 0$, для любого полного ψ -пути $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{A}$ и для всех $l < d(\mathbb{A})$, если существует $\mathbb{B}$, $d(\mathbb{B}) = l$, такое, что $\mathbb{A} \varphi^+ \mathbb{B}$, найдется $j \leq k$ такое, что $\mathbb{A} \varphi^+ \mathbb{A}_j$ и $d(\mathbb{A}_j) = l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение леммы для $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ и $l = d(\mathbb{A}) - 1$. Пусть сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательному условию (v). Рассмотрим полный ψ -путь $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{A}$. Наша цель – найти j такое, что $\mathbb{A} \varphi \mathbb{A}_j$. Такое j должно быть четным. Рассмотрим $j = 2$. Поскольку $(\varphi \cup \psi)^+$ иррефлексивно, для любого $\mathbb{B}$ такого, что $\mathbb{A} \varphi \mathbb{B}$, имеем $\neg(\mathbb{B} \psi^+ \mathbb{A})$, а значит, и $\neg(\mathbb{B} \psi^+ \mathbb{A}_2)$. Таким образом, из выполнения доказательного условия (v) для $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}_2$ следует, что либо $\mathbb{A} \varphi \mathbb{A}_2$, и мы нашли требуемое j , либо $\mathbb{A}_3 \psi^+ \mathbb{B}$ для некоторого $\mathbb{B}$ такого, что $\mathbb{A} \varphi \mathbb{B}$. В данном случае для этого же $\mathbb{B}$ верно, что $\mathbb{A}_4 \psi^+ \mathbb{B}$, а значит, либо $\mathbb{A}_4 = \mathbb{B}$, либо $\neg(\mathbb{B} \psi^+ \mathbb{A}_4)$. Таким образом двигаясь по последовательности, мы раньше встретим $\mathbb{A}_{2i}$ такое, что $\mathbb{A} \varphi \mathbb{A}_{2i}$, чем дойдем до $\mathbb{A}_k$, для которого верно, что если $\mathbb{A} \varphi \mathbb{B}$, то $\mathbb{B} \psi^+ \mathbb{A}_k$. В обратную сторону доказательство очевидно.

ЛЕММА 3.4. Если выполняются доказательные условия (i), (iv) и (v), $\mathbb{A} \varphi^+ \mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, то $\mathbb{A} \psi^+ \mathbb{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.3 существует $\mathbb{C}$ такое, что $\mathbb{A} \varphi^* \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \varphi \mathbb{B}$ и $\mathbb{A} \psi^* \mathbb{C}$. Поскольку $\mathbb{B} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, имеем $\mathbb{C} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, откуда $\mathbb{C} \psi \mathbb{B}$, а значит, и $\mathbb{A} \psi^+ \mathbb{B}$.

ЛЕММА 3.5. Рассмотрим секвенцию $\Gamma(A \setminus B)\Delta \rightarrow C$. Предположим, что для

$$\mathbb{W} = [\Gamma]^{(0)}[(A \setminus B)]^{(0)}[\Delta]^{(0)}[C]$$

существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i), (iv) и (v). Рассмотрим слово $\mathbb{A} \in ([\Gamma]^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}([A]^{(-h(B))})^{(0)})_{\square}$. Тогда если $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, то

$$\pi(\mathbb{A}) \notin ([\Gamma]^{(0)}([A]^{(-h(B))})^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}[(A \setminus B)]^{(0)})_{\square},$$

а если $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, то $\pi^{-1}(\mathbb{A}) \notin ([\Gamma]^{(0)}([A]^{(-h(B))})^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}[(A \setminus B)]^{(0)})_{\square}$.

Аналогично, для секвенции $\Gamma(B/A)\Delta \rightarrow C$ и $\mathbb{A} \in ([\Gamma]^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}[B]^{(0)})_{\square}$, если $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, имеем $\pi(\mathbb{A}) \notin ([\Gamma]^{(0)}[B]^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}[(B/A)]^{(0)})_{\square}$, а если $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, то $\pi^{-1}(\mathbb{A}) \notin ([\Gamma]^{(0)}[B]^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}[(B/A)]^{(0)})_{\square}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана секвенция $\Gamma(A \setminus B)\Delta \rightarrow C$. Рассмотрим

$$\mathbb{A} \in ([\Gamma]^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}([A]^{(-h(B))})^{(0)})_{\square}.$$

Предположим, что $\pi(\mathbb{A}) = \mathbb{B} \in ([\Gamma]^{(0)}([A]^{(-h(B))})^{(0)}, [\Gamma]^{(0)}[(A \setminus B)]^{(0)})_{\square}$. В этом случае для любых $\mathbb{A}', \mathbb{B}'$ таких, что $d(\mathbb{A}') = d(\mathbb{B}') = 2$, $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{A}'$, $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{B}'$, верно $\neg(\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{B}')$, $\neg(\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{A}')$ и существует $\mathbb{C}_1$ такое, что $\mathbb{A}'\varphi\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{B}'\varphi\mathbb{C}_1$.

Рассмотрим полный ψ -путь $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{A}$. Согласно лемме 3.3 существуют наименьшие i и j такие, что $d(\mathbb{A}_i) = d(\mathbb{A}_j) = 2$, $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{A}_i$, $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{A}_j$. Также из сказанного выше следует, что $i \neq j$.

Пусть $i < j$. Тогда рассмотрим полный ψ -путь $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_i, \mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_l$, где $\mathbb{A}_i\varphi\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{C}_1$. Согласно лемме 3.3 существует m такое, что $d(\mathbb{C}_m) = 2$ и $\mathbb{B}\varphi^*\mathbb{C}_m$, но в этом случае получается $\mathbb{C}_1\psi^+\mathbb{C}_1$, что противоречит доказательному условию (iv). Если $j < i$, то рассмотрим полный ψ -путь $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_j, \mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_l$, где $\mathbb{A}_j\varphi\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{C}_1$. Согласно лемме 3.3 существует m такое, что $d(\mathbb{C}_m) = 2$ и $\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{C}_m$, но в этом случае также получается $\mathbb{C}_1\psi^+\mathbb{C}_1$, что противоречит доказательному условию (iv).

Остальные случаи разбираются аналогично. Лемма доказана.

§ 4. Критерий выводимости

Пусть дана секвенция $A_1 \dots A_n \rightarrow B$. Пусть $\mathbb{W} = [\mathbb{A}_1]^{(0)} \dots [\mathbb{A}_n]^{(0)} [\mathbb{B}]$.

ЛЕММА 4.1. *Если $L^* \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$, то для соответствующего слова $\mathbb{W}$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v). Если $L \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$, то для $\mathbb{W}$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(vi).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $L^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$. Докажем утверждение леммы индукцией по длине вывода.

Если секвенция имеет вид $p \rightarrow p$, то $\mathbb{W} = p_{[0]}^{[1]}p_{[0]}^{[0]}$, $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} = \{p_{[0]}^{[1]}, p_{[0]}^{[1]}p_{[0]}^{[0]}\}$, $\mathcal{N}_{\mathbb{W}} = \{p_{[0]}^{[1]}\}$, отношение φ пусто и сеть доказательств с таким π , что $\pi(p_{[0]}^{[1]}) = p_{[0]}^{[1]}p_{[0]}^{[0]}$, удовлетворяет всем необходимым доказательным условиям.

Применение правила $(\cdot \rightarrow)$ не меняет $\mathbb{W}$. Следовательно, если последним шагом доказательства было применение этого правила, в качестве сети доказательств, удовлетворяющей всем необходимым доказательным условиям, можно взять существующую по предположению индукции сеть доказательств для секвенции, стоящей в посылке этого правила.

Рассмотрим остальные случаи.

1. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ было применение правила $(\rightarrow /)$. Тогда $B = (C/D)$, $\mathbb{W} = [\mathbb{A}_1]^{(0)} \dots [\mathbb{A}_n]^{(0)} [\mathbb{D}]^{(h(C))} [\mathbb{C}]$, $L^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n D \rightarrow C$ и по предположению индукции для

$$\mathbb{W}' = [\mathbb{A}_1]^{(0)} \dots [\mathbb{A}_n]^{(0)} [\mathbb{D}]^{(0)} [\mathbb{C}]$$

существует сеть доказательств (π', φ', ψ') , удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. Пусть $\mathbb{B} = [\mathbb{A}_1]^{(0)} \dots [\mathbb{A}_n]^{(0)}$, $\mathbb{C} = \mathbb{B}[\mathbb{D}]^{(0)}$. Рассмотрим

$$\alpha: \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, \quad \alpha(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}, \\ \mathbb{B}([\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}]^{(0)})^{-1} \langle h(C) \rangle, & \text{если } \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}, \\ \mathbb{B}[\mathbb{D}]^{(h(C))} (\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим $\pi(\mathbb{A}) = \alpha(\pi'(\alpha^{-1}(\mathbb{A})))$.

2. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ было применение правила $(\rightarrow \setminus)$. В этом случае $B = (C \setminus D)$, $\mathbb{W} = \llbracket A_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket A_n \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket \llbracket C \rrbracket^{(-h(D))}$, $L^{(*)} \vdash CA_1 \dots A_n \rightarrow D$ и по предположению индукции для

$$\mathbb{W}' = \llbracket C \rrbracket^{(0)} \llbracket A_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket A_n \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$$

существует сеть доказательств (π', φ', ψ') , удовлетворяющая всем необходимым доказательным условиям. Рассмотрим

$$\alpha: \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}},$$

$$\alpha(\mathbb{A}) = \begin{cases} \llbracket A_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket A_n \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket (\mathbb{A}^{(\langle 0 \rangle)^{-1}})^{(-h(D))}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \llbracket C \rrbracket^{(0)}, \\ \llbracket C \rrbracket^{(0)} \setminus \mathbb{A}, & \text{если } \llbracket C \rrbracket^{(0)} \subset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим $\pi(\mathbb{A}) = \alpha(\pi'(\alpha^{-1}(\mathbb{A})))$.

3. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ было применение правила $(/ \rightarrow)$. Тогда $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ имеет вид

$$C_1 \dots C_{i-1} (C_i / D) D_1 \dots D_k C_{i+1} \dots C_l \rightarrow C,$$

причем $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_l \rightarrow C$ и $L^{(*)} \vdash D_1 \dots D_k \rightarrow D$. Рассмотрим $\mathbb{W}' = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_l \rrbracket^{(0)} \llbracket C \rrbracket$ и $\mathbb{W}'' = \llbracket D_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket D_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$. По предположению индукции существуют сети доказательств (π', φ', ψ') и $(\pi'', \varphi'', \psi'')$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Пусть $\mathbb{C} = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_i \rrbracket^{(0)}$ и $\mathbb{D} = \llbracket D_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket D_k \rrbracket^{(0)}$. Рассмотрим

$$\alpha': \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, \quad \alpha'(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}, \\ \mathbb{C}(\llbracket D \rrbracket^{(h(C_i))})^{(0)} \mathbb{D}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \subset \mathbb{A}; \end{cases}$$

$$\alpha'': \mathcal{P}_{\mathbb{W}''} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, \quad \alpha''(\mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{C}(\llbracket D \rrbracket^{(h(C_i))})^{(0)} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{D}, \\ \mathbb{C}((\mathbb{D} \setminus \mathbb{A})^{(h(C_i))})^{(0)}, & \text{если } \mathbb{D} \subset \mathbb{A}. \end{cases}$$

Положим

$$\pi(\mathbb{A}) = \begin{cases} \alpha'(\pi'((\alpha')^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{C}(\llbracket D \rrbracket^{(h(C_i))})^{(0)} \mathbb{D} \subset \mathbb{A}, \\ \alpha''(\pi''((\alpha'')^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{C} \subset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}(\llbracket D \rrbracket^{(h(C_i))})^{(0)} \mathbb{D}. \end{cases}$$

4. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ было применение правила $(\setminus \rightarrow)$. Тогда $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ имеет вид

$$C_1 \dots C_{i-1} D_1 \dots D_k (D \setminus C_i) \dots C_l \rightarrow C,$$

причем $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_l \rightarrow C$ и $L^{(*)} \vdash D_1 \dots D_k \rightarrow D$. Рассмотрим $\mathbb{W}' = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_l \rrbracket^{(0)} \llbracket C \rrbracket$ и $\mathbb{W}'' = \llbracket D_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket D_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$. По предположению индукции существуют сети доказательств (π', φ', ψ') и $(\pi'', \varphi'', \psi'')$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Пусть $\mathbb{C} = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_{i-1} \rrbracket^{(0)}$ и

$\mathbb{D} = \llbracket D_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket D_k \rrbracket^{(0)}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \alpha' : \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} &\rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, & \alpha'(\mathbb{A}) &= \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}, \\ \mathbb{CD}(\llbracket D \rrbracket^{(-h(C_i))})^{(0)}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}; \end{cases} \\ \alpha'' : \mathcal{P}_{\mathbb{W}''} &\rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, & \alpha''(\mathbb{A}) &= \begin{cases} \mathbb{CA}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{D}, \\ \mathbb{CD}((\mathbb{D} \setminus \mathbb{A})^{(-h(C_i))})^{(0)}, & \text{если } \mathbb{D} \sqsubset \mathbb{A}. \end{cases} \end{aligned}$$

Положим

$$\pi(\mathbb{A}) = \begin{cases} \alpha'(\pi'((\alpha')^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{CD}(\llbracket D \rrbracket^{(-h(C_i))})^{(0)} \sqsubset \mathbb{A}, \\ \alpha''(\pi''((\alpha'')^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{CD}(\llbracket D \rrbracket^{(-h(C_i))})^{(0)}. \end{cases}$$

5. Пусть последним шагом доказательства $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ было применение правила $(\rightarrow \cdot)$. Тогда $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ имеет вид

$$C_1 \dots C_l D_1 \dots D_k \rightarrow C \cdot D,$$

причем $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_l \rightarrow C$ и $L^{(*)} \vdash D_1 \dots D_k \rightarrow D$. Рассмотрим $\mathbb{W}' = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_l \rrbracket^{(0)} \llbracket C \rrbracket$ и $\mathbb{W}'' = \llbracket D_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket D_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$. По предположению индукции существуют сети доказательств (π', φ', ψ') и $(\pi'', \varphi'', \psi'')$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Пусть $\mathbb{C} = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_l \rrbracket^{(0)}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \alpha' : \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} &\rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, & \alpha'(\mathbb{A}) &= \begin{cases} \mathbb{A}, & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}, \\ \mathbb{CW}''(\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A}; \end{cases} \\ \alpha'' : \mathcal{P}_{\mathbb{W}''} &\rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}, & \alpha''(\mathbb{A}) &= \mathbb{CA}. \end{aligned}$$

Положим

$$\pi(\mathbb{A}) = \begin{cases} \alpha'(\pi'((\alpha')^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{CW}'' \sqsubset \mathbb{A}, \\ \alpha''(\pi''((\alpha'')^{-1}(\mathbb{A}))), & \text{если } \mathbb{C} \sqsubset \mathbb{A} \subseteq \mathbb{CW}'' . \end{cases}$$

Сеть доказательств с такой функцией π удовлетворяет всем необходимым доказательным условиям. Лемма доказана.

Нетрудно убедиться в том, что верна следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. *Если секвенции $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ и $C_1 \dots C_k \rightarrow D$ структурно эквивалентны и для $\mathbb{W} = \llbracket A_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket A_n \rrbracket^{(0)} \llbracket B \rrbracket$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v), то для $\mathbb{W}' = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$ существует сеть (π', φ', ψ') , также удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v).*

Пусть (π, φ, ψ) – некоторая сеть доказательств для $\mathbb{W}$.

Будем называть β -кластерами классы эквивалентности по отношению β . Элементы одного β -кластера имеют одинаковые значения функции d , поэтому можно говорить о *четных* и *нечетных* β -кластерах. Также у элементов одного β -кластера совпадают значения функций g и Φ , поэтому для произвольного β -кластера $\mathcal{E}$ можно ввести обозначения $g(\mathcal{E})$ и $\Phi(\mathcal{E})$.

Рассмотрим сеть доказательств (π, φ, ψ) . Пусть $\mathcal{B}$ – множество четных β -кластеров. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = \{\mathbb{A} \mid \exists \mathbb{B} \in \mathcal{E}(\mathbb{A}\psi^*\mathbb{B})\}$ и $\mathcal{F}_\varphi(\mathcal{E}) = \{\mathbb{A} \mid \exists \mathbb{B} \in \mathcal{E}(\mathbb{A}\varphi^*\mathbb{B})\}$.

Введем на $\mathcal{B}$ следующие отношения:

$$\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists \mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}) \cup \Phi(\mathcal{E}_1)\exists \mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)(\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}),$$

$$\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists \mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E}_2)(\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)) \wedge \exists \mathbb{B} \in \Phi(\mathcal{E}_2)(\mathbb{B} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)),$$

$$\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_2 \Leftrightarrow (\Phi(\mathcal{E}_1) \subset \Phi(\mathcal{E}_2) \wedge d(\mathcal{E}_1) > 0) \vee (\Phi(\mathcal{E}_1) = \Phi(\mathcal{E}_2)$$

$$\wedge \forall \mathbb{A} \in \mathcal{E}_1 \forall \mathbb{B} \in \mathcal{E}_2 ((g(\mathcal{E}_2) \geq 0 \wedge \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}) \vee (g(\mathcal{E}_1) < 0 \wedge \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}))).$$

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим секвенцию $((t \cdot (r \cdot (q/s)))/p)p \rightarrow (t \cdot ((r \cdot q)/s))$. Для этой секвенции $\mathbb{W} = t_{[0]}^{[1]}r_{[0]}^{[1]}q_{[0]}^{[1]}s_{[-1]}^{[2]}p_{[-3]}^{[2]}p_{[0]}^{[1]}s_{[2]}^{[1]}q_{[0]}^{[0]}r_{[0]}^{[0]}t_{[0]}^{[0]}$. Схема, аналогичная схеме из примера 3.2, будет иметь следующий вид:

Введем следующие обозначения для элементов множества $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{E}_s = \{t_{[0]}^{[1]}r_{[0]}^{[1]}q_{[0]}^{[1]}s_{[-1]}^{[2]}\}, \quad \mathcal{E}_p = \{t_{[0]}^{[1]}r_{[0]}^{[1]}q_{[0]}^{[1]}s_{[-1]}^{[2]}p_{[-3]}^{[2]}\},$$

$$\mathcal{E}_{qr} = \{t_{[0]}^{[1]}r_{[0]}^{[1]}q_{[0]}^{[1]}s_{[-1]}^{[2]}p_{[-3]}^{[2]}p_{[0]}^{[1]}s_{[2]}^{[1]}q_{[0]}^{[0]}, t_{[0]}^{[1]}r_{[0]}^{[1]}q_{[0]}^{[1]}s_{[-1]}^{[2]}p_{[-3]}^{[2]}p_{[0]}^{[1]}s_{[2]}^{[1]}q_{[0]}^{[0]}r_{[0]}^{[0]}\},$$

$$\mathcal{E}_t = \{t_{[0]}^{[1]}r_{[0]}^{[1]}q_{[0]}^{[1]}s_{[-1]}^{[2]}p_{[-3]}^{[2]}p_{[0]}^{[1]}s_{[2]}^{[1]}q_{[0]}^{[0]}r_{[0]}^{[0]}t_{[0]}^{[0]}\}.$$

Тогда отношения ω_1 , ω_2 и ω_3 будут такими, как представлено на следующей схеме:

ЛЕММА 4.3. Если сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (i), (iv) и (v), то выполняются следующие утверждения:

- 1) $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$;
- 2) $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$;
- 3) $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2\omega_1\mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$;
- 4) $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2\omega_1\mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$;
- 5) $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2\omega_3\mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_3$;
- 6) $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{E}_2\omega_3\mathcal{E}_3 \Rightarrow \mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_2$, по определению существуют такие $\mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}) \cup \Phi(\mathcal{E}_1)$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Существует $\mathbb{A}' \in \Phi(\mathcal{E}_1)$ такое, что $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{A}'$. Полный ψ -путь с началом в $\mathbb{A}$, проходящий через $\mathbb{A}'$,

согласно лемме 3.3 содержит некоторое $\mathbb{B}'$ такое, что $\mathbb{B}'\beta\mathbb{B}$. Поскольку для любого $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ верно, что $\mathbb{C}\psi^*\mathbb{A}'$, а $\mathbb{B}' \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, имеем $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$.

2) Поскольку $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_2$, имеем $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, а значит, и $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$.

3) Так как $\mathcal{E}_2\omega_1\mathcal{E}_3$, значит, по определению существуют такие $\mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}) \cup \Phi(\mathcal{E}_2)$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Существует $\mathbb{A}' \in \Phi(\mathcal{E}_2)$ такое, что $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{A}'$. Выберем такое $\mathbb{A}'$, что $\mathbb{A}' \in \Phi(\mathcal{E}_1)$. Полный ψ -путь с началом в $\mathbb{A}$, проходящий через $\mathbb{A}'$, согласно лемме 3.3 содержит некоторое $\mathbb{B}'$ такое, что $\mathbb{B}'\beta\mathbb{B}$. Поскольку для любого $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ верно, что $\mathbb{C}\psi^*\mathbb{A}'$, а $\mathbb{B}' \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$, имеем $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$. Если такое $\mathbb{A}'$ выбрать невозможно, значит, $\mathbb{A}' = \mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E}_2) \setminus \Phi(\mathcal{E}_1)$. В этом случае для любого $\mathbb{C} \in \Phi(\mathcal{E}_1)$ верно, что $\mathbb{C}\varphi\mathbb{B}$, а значит, $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3)$.

4) Поскольку $\mathcal{E}_2\omega_1\mathcal{E}_3$, то по определению существуют такие $\mathbb{A} \in (\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}) \cup \Phi(\mathcal{E}_2)$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_3) \setminus \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Если $\mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, то, так как существует такое $\mathbb{C} \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, имеем $\mathbb{C}\varphi\mathbb{B}$ и, значит, $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$. Пусть $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_2) \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$. Существует такое $\mathbb{C} \in \Phi(\mathcal{E}_2)$, что $\mathbb{C} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$. Полный ψ -путь с началом в $\mathbb{A}$, проходящий через $\mathbb{C}$, согласно лемме 3.3 содержит некоторое $\mathbb{B}'$ такое, что $\mathbb{B}'\beta\mathbb{B}$. Если $\mathbb{B}' \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, имеем $\mathbb{C} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$. Противоречие. Значит, $\mathbb{B}' \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ и $\mathcal{E}_1\omega_1\mathcal{E}_3$.

5) Поскольку $\Phi(\mathcal{E}_2) \subseteq \Phi(\mathcal{E}_3)$, существуют $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \Phi(\mathcal{E}_3)$ такие, что $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$ и $\mathbb{B} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}_1)$, а значит, $\mathcal{E}_1\omega_2\mathcal{E}_3$.

6) Если $d(\mathcal{E}_1) > 0$ и верно, что или $\Phi(\mathcal{E}_1) \subset \Phi(\mathcal{E}_2)$, или $\Phi(\mathcal{E}_2) \subset \Phi(\mathcal{E}_3)$, то $\Phi(\mathcal{E}_1) \subset \Phi(\mathcal{E}_3)$ и $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$. Если $\Phi(\mathcal{E}_1) = \Phi(\mathcal{E}_2) = \Phi(\mathcal{E}_3)$ и $g(\mathcal{E}_2) > 0$, то для любых $\mathbb{A}_1 \in \mathcal{E}_1, \mathbb{A}_2 \in \mathcal{E}_2, \mathbb{A}_3 \in \mathcal{E}_3$ верно $\mathbb{A}_3 \sqsubset \mathbb{A}_2 \sqsubset \mathbb{A}_1$ и, значит, $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$. Если же $g(\mathcal{E}_2) < 0$, то $g(\mathcal{E}_1) < 0$ и либо $g(\mathcal{E}_3) < 0$ и $\mathbb{A}_1 \sqsubset \mathbb{A}_2 \sqsubset \mathbb{A}_3$, либо $g(\mathcal{E}_3) \geq 0$ и $\mathbb{A}_3 \sqsubset \mathbb{A}_1 \sqsubset \mathbb{A}_2$. В любом случае имеем $\mathcal{E}_1\omega_3\mathcal{E}_3$.

Положим отношение ω равным $(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3)^+$.

ЛЕММА 4.4. *Если сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (i), (iv) и (v), то отношение ω – строгий частичный порядок на $\mathcal{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф с вершинами из $\mathcal{B}$ и ребрами, помеченными цифрами от 1 до 3 ($\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соединены ребром, помеченным цифрой i , если и только если $\mathcal{E}_1\omega_i\mathcal{E}_2$). Утверждение леммы эквивалентно тому, что в этом графе нет циклов.

Предположим, что цикл есть. Он не может состоять только из ребер, помеченных цифрой 3. Ввиду утверждения 2) леммы 4.3 он также не может состоять только из ребер, помеченных цифрой 2. Значит, ввиду утверждений 4), 5) той же леммы существует другой цикл, не содержащий ребер, помеченных цифрой 2. Ввиду утверждения 6) существует цикл, в котором также после ребра, помеченного цифрой 3, всегда идет ребро, помеченное цифрой 1. Ввиду утверждений 1) и 3) это невозможно. Противоречие.

ЛЕММА 4.5. *Пусть сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (i), (iv) и (v). Тогда для любого $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$ верно $\mathcal{F}_\varphi(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения следует из леммы 3.3.

ЛЕММА 4.6. Пусть сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (i), (iv) и (v). Рассмотрим $\mathcal{E}$ – максимальный по ω четный β -кластер. Тогда

$$d(\mathcal{E}) \in \{0, 2\}, \quad \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_\varphi(\mathcal{E}) \cup \bigsqcup_i (\mathcal{F}_\varphi(\mathbb{E}_i)),$$

где $d(\mathbb{E}_i) = 1$ и $g(\mathbb{E}_i) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ такое, что $d(\mathbb{A}) = d(\mathcal{E}) - 2$ и $\mathcal{E}\varphi^+\mathbb{A}$, и если $\mathbb{A} \in \mathcal{E}_1 \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{E}\omega_1\mathcal{E}_1$, а значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным. Следовательно, $d(\mathcal{E}) \in \{0, 2\}$.

Докажем, что не существует таких $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$ и $\mathbb{B} \notin \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$, что $\mathbb{A}\varphi\mathbb{B}$. Действительно, если $\mathbb{B} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ и $\mathbb{A} \in \mathcal{E}_1 \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{E}\omega_2\mathcal{E}_1$. Если же $\mathbb{B} \notin \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ и $\mathbb{B} \in \mathcal{E}_2 \in \mathcal{B}$, то $\mathcal{E}\omega_1\mathcal{E}_2$.

Теперь утверждение леммы следует из леммы 4.5 и того факта, что если $\mathbb{A} \in \mathcal{F}_\psi(\mathcal{E})$ и $d(\mathbb{A}) = 0$, то $\mathbb{A} \in \mathcal{E}$.

ЛЕММА 4.7. Если существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v), то $L^* \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$. Если сеть удовлетворяет еще и доказательному условию (vi), то $L \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для данной секвенции $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ и для $\mathbb{W}$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v).

Пусть $C_1 \dots C_k \rightarrow D$ – неупрощаемая секвенция, структурно эквивалентная данной. Согласно лемме 4.2 для $\mathbb{W}' = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$ существует сеть доказательств (π', φ', ψ') , также удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v) (в случае L – также и условию (vi)).

Доказательство проведем индукцией по длине $\mathbb{W}'$.

Если $|\mathbb{W}'| = 2$, то секвенция $C_1 \dots C_k \rightarrow D$ имеет вид $p \rightarrow q$ и $\mathbb{W}' = p_{[0]}^{[1]} q_{[0]}^{[0]}$. Таким образом, $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'} = \{p_{[0]}^{[1]}, p_{[0]}^{[1]} q_{[0]}^{[0]}\}$ и $\mathcal{N}_{\mathbb{W}'} = \{p_{[0]}^{[1]}\}$. Сеть доказательств удовлетворяет доказательному условию (ii), значит, $p = q$, секвенция $C_1 \dots C_l \rightarrow D$ есть аксиома, а $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ имеет вид либо $p \rightarrow p$, либо $\rightarrow p/p$, либо $\rightarrow p \setminus p$, а значит, выводится в L^* . Если выполнено еще и доказательное условие (vi), то единственный возможный вариант – это $p \rightarrow p$, что выводится и в L .

Пусть $|\mathbb{W}'| > 2$. Секвенция $C_1 \dots C_k \rightarrow D$ неупрощаема. Значит, D имеет вид либо p , либо $D' \cdot D''$, а все C_i имеют вид либо p , либо C'_i/C''_i , либо $C''_i \setminus C'_i$.

Введем следующие обозначения:

- a) $\mathbb{C}_i = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_i \rrbracket^{(0)}$;
- b) если $C_i = C'_i/C''_i$, то $\mathbb{C}'_i = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_{i-1} \rrbracket^{(0)} \llbracket C'_i \rrbracket^{(0)}$;
- c) если $C_i = C''_i \setminus C'_i$, то $\mathbb{C}'_i = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_{i-1} \rrbracket^{(0)} (\llbracket C''_i \rrbracket^{(-h(C'_i))})^{(0)}$;
- d) если $D = (D' \cdot D'')$, то $\mathbb{D} = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D'' \rrbracket$.

Рассмотрим $\mathcal{E}$ – максимальный по ω четный β -кластер. Если D имеет вид p , то потребуем дополнительно $\mathcal{E} \neq \{\mathbb{W}'\}$.

Пусть $d(\mathcal{E}) = 0$. Поскольку D – неупрощаемый тип, то $D = (D' \cdot D'')$ и $\mathcal{E} = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{C}_k \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{D}, d(\mathbb{A}) = 0\}$. Докажем, что $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_i; \mathbb{D}]$ для некоторого

$i \leq k$ ($i < k$ и $i > 0$ в случае с L). Согласно лемме 4.6 имеем

$$\mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_k; \mathbb{D}] \cup \bigsqcup_{j \in \mathcal{I}} (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]_{\sqsubset}$$

для некоторого $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, k\}$. Положим i равным наименьшему элементу из $\mathcal{I}$. Предположим, что существует такое $j > i$, что $j \notin \mathcal{I}$. Рассмотрим $\mathbb{A} \in (\mathbb{C}_{i-1}; \mathbb{C}_i]_{\sqsubset}$ и $\mathbb{B} \in (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]$ такие, что $d(\mathbb{A}) = d(\mathbb{B}) = 1$. Рассмотрим $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_l$ и $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_{l'}$ – полные ψ' -пути с началами в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Имеем $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}_l \sqsubset \mathbb{B}_{l'}$. Значит, существует такое четное h , что либо $\mathbb{A}_h \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}_{h+1}$ (но в этом случае если $\mathbb{A}_h \in \mathcal{E}_1$, то $\mathcal{E}\omega_2\mathcal{E}_1$, а значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным), либо $\mathbb{B}_{h+1} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}_h$ (но в этом случае $\mathbb{B}_h\varphi'\mathbb{A}$, а значит, $\mathbb{B}\psi'^*\mathbb{A}$ и, следовательно, $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E})$). Значит, существует такое $i \leq k$ (в случае L выполнение доказательного условия (vi) дополнительно гарантирует $0 < i < k$), что $\mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_i; \mathbb{D}]$. Тогда из сети доказательств (π', φ', ψ') можно получить сети доказательств для $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_i}[\mathbb{D}']$ и $\mathcal{P}_{[\mathbb{C}_{i+1}]^{(0)} \dots [\mathbb{C}_k]^{(0)}}[\mathbb{D}'']$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_i \rightarrow D'$ и $L^{(*)} \vdash C_{i+1} \dots C_k \rightarrow D''$, и, применяя правило $(\rightarrow \cdot)$, получаем $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_k \rightarrow D$, откуда следует, что $L^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$.

Пусть $d(\mathcal{E}) = 2$. Существует такое $i \leq k$, что $\mathbb{C}_{i-1} \sqsubset \mathcal{E} \sqsubseteq \mathbb{C}_i$. Поскольку C_i – неупрощаемый тип, то $C_i = (C'_i/C''_i)$ или $C_i = (C''_i \setminus C'_i)$.

Если $C_i = (C'_i/C''_i)$, то $\mathcal{E} = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{C}'_i \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}_i, d(\mathbb{A}) = 2\}$. Согласно лемме 4.6 имеем

$$\mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}'_i; \mathbb{C}_i] \cup \bigsqcup_{j \in \mathcal{I}} (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]_{\sqsubset}$$

для некоторого $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, k\}$. Во-первых, $\mathcal{I}$ не содержит элементов, меньших i , так как в противном случае для любого $\mathbb{A} \in \Phi(\mathcal{E})$, если рассмотреть полный ψ -путь с началом в $\mathbb{A}$, получится, что $\mathbb{A}\psi^*\mathbb{A}$. Тогда рассмотрим j – максимальный элемент из $\mathcal{I}$. Предположим, что существует такое $j' \notin \mathcal{I}$, что $i < j' < j$. Рассмотрим $\mathbb{A} \in (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}_j]_{\sqsubset}$ и $\mathbb{B} \in (\mathbb{C}_{j'-1}; \mathbb{C}_{j'})$ такие, что $d(\mathbb{A}) = d(\mathbb{B}) = 1$. Рассмотрим $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_l$ и $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_{l'}$ – полные ψ' -пути с началами в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно. Существует h такое, что $\mathbb{A}_h \in \mathcal{E}$. Имеем $\mathbb{A}_h \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}_{l'}$. Получаем, что существует такое четное h' , что либо $\mathbb{A}_{h'+1} \sqsubset \mathbb{B} \sqsubset \mathbb{A}_{h'}$ (но в этом случае если $\mathbb{A}_{h'} \in \mathcal{E}_1$, то $\mathcal{E}\omega_2\mathcal{E}_1$, а значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным), либо $\mathbb{B}_{h'} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}_{h'+1}$ (но в этом случае $\mathbb{B}_{h'}\varphi'\mathbb{A}$, а значит, $\mathbb{B}\psi'^*\mathbb{A}$ и, следовательно, $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\psi'}(\mathcal{E})$), либо $\mathbb{B}_{h'} \sqsubset \mathbb{A}_h \sqsubset \mathbb{B}_{h'+1}$ (но тогда или $\mathbb{B}_{h'} \in \mathcal{E}$ и, значит, $\mathbb{B} \in \mathcal{F}_{\psi}(\mathcal{E})$, или если $\mathbb{B}_{h'} \in \mathcal{E}$, то $\mathcal{E}\omega_3\mathcal{E}$ и, значит, $\mathcal{E}$ не может быть максимальным). Таким образом, существует такое $j \geq i$ ($j > i$ в случае L), что $\mathcal{F}_{\psi}(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}'_i; \mathbb{C}_j]$. Тогда из сети доказательств (π', φ', ψ') можно получить сети доказательств для $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_1}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_2}$, где $\mathbb{W}_1 = \mathbb{C}'_i[\mathbb{C}_{j+1}]^{(0)} \dots [\mathbb{C}_k]^{(0)}[\mathbb{D}]$, а $\mathbb{W}_2 = [\mathbb{C}_{i+1}]^{(0)} \dots [\mathbb{C}_j]^{(0)}[\mathbb{C}''_i]$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_{i-1}C'_iC_{j+1} \dots C_k \rightarrow D$ и $L^{(*)} \vdash C_{i+1} \dots C_j \rightarrow C''_i$, и, применяя правило $(/\rightarrow)$, получаем $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_k \rightarrow D$, откуда следует, что $L^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$.

Если $C_i = (C''_i \setminus C'_i)$, то $\mathcal{E} = \{\mathbb{A} \mid \mathbb{C}_{i-1} \sqsubset \mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{C}'_i, d(\mathbb{A}) = 2\}$. Тогда аналогичным предыдущему случаю образом можно доказать, что существует такое $j \leq i$ ($j < i$ в случае L), что $\mathcal{F}_\psi(\mathcal{E}) = (\mathbb{C}_{j-1}; \mathbb{C}'_i]$. Тогда из сети доказательств (π', φ', ψ') можно получить сети доказательств для $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_1}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{W}_2}$, где $\mathbb{W}_1 = \mathbb{C}_{j-1} \llbracket C''_i \rrbracket^{(0)} \llbracket C_{i+1} \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_k \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$, а $\mathbb{W}_2 = \llbracket C_j \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_{i-1} \rrbracket^{(0)} \llbracket C''_i \rrbracket$, удовлетворяющие всем необходимым доказательным условиям. Значит, по предположению индукции $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_{j-1} C'_i C_{i+1} \dots C_k \rightarrow D$ и $L^{(*)} \vdash C_j \dots C_{i-1} \rightarrow C''_i$, и, применяя правило $(\setminus \rightarrow)$, получаем $L^{(*)} \vdash C_1 \dots C_k \rightarrow D$, откуда следует, что $L^{(*)} \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$.

Леммы 4.1 и 4.7 вместе дают следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Секвенция $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ выводима в L^* , если и только если существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v).*

Секвенция $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ выводима в L, если и только если существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(vi).

Рассмотрим $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$. Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ является π -замкнутым, если для любого $\mathbb{B} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\pi(\mathbb{B}) \in \mathcal{A}$, а для любого $\mathbb{B} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\pi^{-1}(\mathbb{B}) \in \mathcal{A}$.

ЛЕММА 4.8. *Пусть $A_1 \dots A_n \rightarrow B$ и $C_1 \dots C_m \rightarrow D$ – две секвенции, причем $L^* \vdash A_1 \dots A_n \rightarrow B$. Пусть $\mathbb{W} = \llbracket A_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket A_n \rrbracket^{(0)} \llbracket B \rrbracket$ и $\mathbb{W}' = \llbracket C_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket C_m \rrbracket^{(0)} \llbracket D \rrbracket$. Предположим, что существует такое отображение $\alpha: \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, что выполняется следующее:*

- 1) α инъективно;
- 2) для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ верно, что $t(\alpha(\mathbb{A})) = t(\mathbb{A})$, $d(\alpha(\mathbb{A})) = d(\mathbb{A})$ и $g(\alpha(\mathbb{A})) = g(\mathbb{A})$;
- 3) для всех $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ верно $\mathbb{A} \sqsubset \mathbb{B}$, если и только если $\alpha(\mathbb{A}) \sqsubset \alpha(\mathbb{B})$.

Пусть $\mathcal{G} = \{\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}} \mid \neg \exists \mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'} (\alpha(\mathbb{B}) = \mathbb{A})\}$. Если $\mathcal{G}$ π -замкнуто и φ -замкнуто, то $L^ \vdash C_1 \dots C_m \rightarrow D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ' – это φ для $\mathbb{W}'$. Поскольку $\mathcal{G}$ φ -замкнуто, для всех $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ будет верно, что $\mathbb{A} \varphi' \mathbb{B} \Leftrightarrow \alpha(\mathbb{A}) \varphi \alpha(\mathbb{B})$. Так как $\mathcal{G}$ π -замкнуто, то отображение π' , заданное как $\alpha^{-1} \pi \alpha$, будет определено на $\mathcal{N}_{\mathbb{W}'}$ и сеть доказательств (π', φ', ψ') будет удовлетворять доказательным условиям (i)–(v). Поэтому по теореме 4.1 имеем

$$L^* \vdash C_1 \dots C_m \rightarrow D.$$

Лемма доказана.

§ 5. Левосторонний фрагмент исчисления Ламбека

В левостороннем фрагменте исчисления Ламбека $L(\cdot, \setminus)$ для создания сложных типов используются только две операции: $\setminus$ и $\cdot$. Соответственно из правил остаются $(\rightarrow \setminus)$, $(\setminus \rightarrow)$, $(\rightarrow \cdot)$ и $(\cdot \rightarrow)$. Полное исчисление Ламбека является

консервативным расширением левостороннего фрагмента (секвенция, не содержащая операцию $/$, выводима в L тогда и только тогда, когда она выводима в $L(\cdot, \backslash)$). Аналогично можно рассматривать исчисление $L^*(\cdot, \backslash)$. Как и в полном исчислении, правило сечения является устранимым.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Можно рассматривать также и правосторонний фрагмент. Все конструкции и доказательства, представленные ниже, можно явно переписать для правостороннего фрагмента.

Мы докажем, что проблемы выводимости в $L(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\cdot, \backslash)$ являются NP-полными. Для этого мы сведем к ним известную NP-полную задачу выполнимости булевых формул в конъюнктивной нормальной форме SAT.

Сведем задачу SAT к задаче выводимости для $L(\cdot, \backslash)$. Пусть $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ – булева формула от переменных $x_1, \dots, x_n$ в конъюнктивной нормальной форме. По этой формуле мы построим такую секвенцию, что она выводима в $L(\cdot, \backslash)$ (и в $L^*(\cdot, \backslash)$) тогда и только тогда, когда формула выполнима.

Для каждой булевой переменной x_i пусть $\neg_0 x_i$ обозначает литерал $\neg x_i$, а $\neg_1 x_i$ обозначает литерал x_i .

Заметим, что $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in \{0, 1\}^n$ является выполняющей оценкой для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$, если и только если для каждого $j \leq m$ найдется такое $i \leq n$, что $\neg_{t_i} x_i$ присутствует в элементарной дизъюнкции c_j (как обычно, 1 означает “истина”, а 0 – “ложь”).

Пусть p_i^j , r_i , где $0 \leq i \leq n+1$, $0 \leq j \leq m$, – различные примитивные типы из $\mathbf{P}$. Определим следующие семейства типов:

$$\begin{aligned} G^0 &= (p_0^0 \setminus p_{n+1}^0); & G^j &= ((p_0^j \setminus G^{j-1}) \cdot p_{n+1}^j); & G &= G^m; \\ H_i^0 &= (p_{i-1}^0 \setminus p_i^0); & H_i^j &= (p_{i-1}^j \setminus (H^{j-1} \cdot p_i^j)); & H_i &= H_i^m; \\ E_i^0(t) &= (p_{i-1}^0 \setminus p_i^0); \\ E_i^j(t) &= \begin{cases} ((p_{i-1}^j \setminus E_i^{j-1}(t)) \cdot p_i^j), & \text{если литерал } \neg_t x_i \text{ присутствует в } c_j, \\ (p_{i-1}^j \setminus (E_i^{j-1}(t) \cdot p_i^j)), & \text{если литерал } \neg_t x_i \text{ не присутствует в } c_j; \end{cases} \\ E_i(t) &= E_i^m(t); \\ F_1 &= (E_1(0) \cdot ((E_1(0) \setminus E_1(1)) \cdot (H_1 \setminus r_1))); \\ F_i &= (((E_{i-1}(0) \setminus r_{i-1}) \setminus E_i(0)) \cdot ((E_i(0) \setminus E_i(1)) \cdot (H_i \setminus r_i))), \quad 1 < i < n+1; \\ F_{n+1} &= ((E_n(0) \setminus r_n) \setminus H_{n+1}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ выполнима;
- 2) $L(\cdot, \backslash) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$;
- 3) $L^*(\cdot, \backslash) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале опишем, каким именно образом выполнимость формулы кодируется внутри построенной секвенции, и докажем теорему в одну сторону: если формула выполнима, то построенная секвенция выводится в исчислениях $L(\cdot, \backslash)$ и $L^*(\cdot, \backslash)$.

Согласно определению отображения $\llbracket \cdot \rrbracket$ имеем

$$\llbracket G^0 \rrbracket = p_{n+1}^{0[0]} p_0^{0[1]}; \quad \llbracket G^j \rrbracket = p_{n+1}^{j[0]} \llbracket G^{j-1} \rrbracket p_0^{j[1]}; \quad \llbracket G \rrbracket = \llbracket G^m \rrbracket;$$

$$\begin{aligned}
\llbracket H_i^0 \rrbracket^{(0)} &= p_{i-1[1]}^{0[2]} p_{1[0]}^{0[1]}; \\
\llbracket H_i^j \rrbracket^{(0)} &= p_{i-1[j+1]}^{j[2]} \llbracket H_i^{j-1} \rrbracket^{(0)} p_{i[0]}^{j[1]}; \quad \llbracket H_i \rrbracket^{(0)} = \llbracket H_i^m \rrbracket^{(0)}; \\
\llbracket E_i^0(t) \rrbracket^{(0)} &= p_{i-1[1]}^{0[2]} p_{1[0]}^{0[1]}; \\
\llbracket E_i^j(t) \rrbracket^{(0)} &= \begin{cases} p_{i-1[j]}^{j[2]} \llbracket E_i^{j-1}(t) \rrbracket^{(0)} p_{i[0]}^{j[1]}, & \text{если литерал } \neg_t x_i \\ & \text{присутствует в } c_j, \\ p_{i-1[j+1]}^{j[2]} \llbracket E_i^{j-1}(t) \rrbracket^{(0)} p_{i[0]}^{j[1]}, & \text{если литерал } \neg_t x_i \\ & \text{не присутствует в } c_j. \end{cases}
\end{aligned}$$

Пусть дана некоторая оценка $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$. Рассмотрим

$$\mathbb{W} = \llbracket E_1(t_1) \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket E_n(t_n) \rrbracket^{(0)} \llbracket H_{n+1} \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket.$$

Если примитивный тип p_i^j входит в секвенцию $E_1(t_1) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G$, он встречается в ней только дважды. Соответственно в множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ есть ровно два элемента таких, что значение функции t на них равно p_i^j . Пусть $\mathbb{P}_i^{j+}$ обозначает элемент множества $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, для которого $t(\mathbb{P}_i^{j+}) = p_i^j$, а $\mathbb{P}_i^{j-}$ – элемент множества $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, для которого $t(\mathbb{P}_i^{j-}) = p_i^j$. Выполняются следующие утверждения:

- 1) если $0 \leq i \leq n$, то $\Phi(\mathbb{P}_{i+1}^{0-}) = \{\mathbb{P}_{i+1}^{0+}\}$;
- 2) если $0 < i \leq n$, $j > 0$ и литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j , то $\Phi(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \{\mathbb{P}_{i-1}^{j'+} \mid j' < j\}$;
- 3) если $0 < i \leq n$, $j > 0$ и литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j , то $\Phi(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \{\mathbb{P}_{i-1}^{j'+} \mid j' \leq j\}$;
- 4) $\Phi(\mathbb{P}_n^{j-}) = \{\mathbb{P}_{n+1}^{j'+} \mid j' \leq j\}$;
- 5) $\Phi(\mathbb{P}_0^{j+}) = \{\mathbb{P}_{n+1}^{j'-} \mid j' < j\}$.

Функция π может удовлетворять доказательным условиям (i) и (ii) только в том случае, если для всех i и j верно равенство $\pi(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_i^{j-}$. Если это так, то функция π также удовлетворяет доказательным условиям (iii) и (vi).

Здесь удобно использовать несколько иную визуализацию сетей доказательств. Запишем $\mathbb{W}$ в матрицу с $m+1$ строками и $2n+4$ столбцами в следующем порядке:

Начиная с левого нижнего угла, заполняем сначала первый столбец атомами из $\mathbb{W}$ снизу вверх, затем второй столбец – сверху вниз и т. д.

Вхождение, соответствующее $\mathbb{P}_i^{j+}$, находится в этой матрице в строке $j+1$ и столбце $2i$, если $i > 0$, или в столбце $2n+4$, если $i = 0$. Вхождение, соответствующее $\mathbb{P}_i^{j-}$, находится в строке $j+1$ и столбце $2i+1$.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим булеву формулу $x_1 \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$ от двух переменных. Сеть доказательств для $E_1(1)E_2(1)H_3 \rightarrow G$ будет иметь вид

Нетрудно видеть, что если здесь верно, что $\mathbb{P}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i'}^{j'+}$, то $i < i'$ и $j' \leq j$. Поэтому для сети доказательств (π, φ, ψ) выполняется доказательное условие (iv).

ЛЕММА 5.1. Секвенция $E_1(t_1) \dots E_n(t_n)H_{n+1} \rightarrow G$ выводится в $L(\cdot, \setminus)$ (u в $L^*(\cdot, \setminus)$), если и только если $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ – выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Ввиду изложенного выше нам осталось проверить только выполнение доказательного условия (v). Для этого мы покажем, что для $\mathbb{P}_0^{j+}$ выполняется утверждение из леммы 3.3. Для $\mathbb{P}_0^{0+}$ существует единственный полный ψ -путь с началом в нем – последовательность $\mathbb{P}_0^{0+}, \mathbb{P}_0^{0-}, \mathbb{P}_1^{0+}, \dots, \mathbb{P}_{n+1}^{0+}, \mathbb{P}_{n+1}^{0-}$, причем $\mathbb{P}_0^{0+} \varphi \mathbb{P}_{n+1}^{0-}$, а значит, утверждение из леммы выполнено. Рассмотрим теперь $\mathbb{P}_0^{j+}$, где $j > 0$. Рассмотрим наименьшее $i \leq n$ такое, что литерал $\neg t_i x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j . Нетрудно видеть, что $\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j-}$, а значит, $\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i'}^{j'+}$ для всех $j' < j$ и $\neg(\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i+1}^{j+})$. Таким образом, имеем $\neg(\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{n+1}^{j-})$. Следовательно, для любого полного ψ -пути $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k$ с началом в $\mathbb{P}_0^{j+}$ имеем $\mathbb{A}_k = \mathbb{P}_{n+1}^{j'-}$, где $j' < j$. Поскольку $\mathbb{P}_0^{j+} \varphi \mathbb{P}_{n+1}^{j'-}$, утверждение из леммы 3.3 выполняется. Таким образом, сеть доказательств удовлетворяет доказательному условию (v), и по теореме 4.1 получаем $L(\cdot, \setminus) \vdash E_1 \dots E_n H_{n+1} \rightarrow G$.

Пусть $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ не является выполняющей оценкой для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Тогда существует такое $j \leq m$, что ни один литерал $\neg t_i x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j . В этом случае для всех $i \leq n$ верно, что $\mathbb{P}_i^{j-} \psi \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$, а значит, для последовательности $\mathbb{P}_0^{j+}, \mathbb{P}_0^{j-}, \mathbb{P}_1^{j+}, \dots, \mathbb{P}_{n-1}^{j+}, \mathbb{P}_{n+1}^{j-}$ не выполняется утверждение из леммы 3.3. Следовательно, для единственно возможной сети доказательств не выполняется доказательное условие (v), и, значит, по теореме 4.1 имеем $L(\cdot, \setminus) \not\vdash E_1 \dots E_n H_{n+1} \rightarrow G$.

ЛЕММА 5.2. Верны следующие утверждения:

$$L(\cdot, \setminus) \vdash E_i(0) \rightarrow H_i,$$

$$L(\cdot, \setminus) \vdash E_i(1) \rightarrow H_i,$$

$$L(\cdot, \setminus) \vdash (H_i \setminus r_i) \rightarrow (E_{i-1}(0) \setminus r_{i-1}),$$

$$L(\cdot, \setminus) \vdash (E_i(0) \setminus E_i(1))(H_i \setminus r_i) \rightarrow (E_{i-1}(0) \setminus r_{i-1}).$$

ЛЕММА 5.3. Если формула $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ выполнима, то

$$L(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем за основу секвенцию $E_1(t_1) \dots E_n(t_n) \rightarrow G$, где $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ – выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. С помощью правила $(\setminus \rightarrow)$, секвенций из леммы 5.2 и правила $(\cdot \rightarrow)$ можно получить секвенцию $F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$.

Теперь докажем теорему о сведении в обратную сторону: если секвенция $F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$ выводима в $L^*(\cdot, \setminus)$, то любая сеть доказательств, удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v), которая существует для строки $\llbracket F_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket F_{n+1} \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket$, обязательно соответствует какой-нибудь выполняющей оценке для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$.

Предположим, что $L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$. Рассмотрим

$$\mathbb{W} = \llbracket F_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket F_{n+1} \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket.$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i &= \llbracket F_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket F_i \rrbracket^{(0)} r_{i[m+1]}^{[2]} ((\llbracket E_i(0) \rrbracket^{(-1)})^{(-m+1)})^{(0)}, \\ \mathbb{E}_i^0 &= \mathbb{F}_{i-1} \llbracket E_i(0) \rrbracket^{(0)}, \quad (\mathbb{E}_i^0)' = \llbracket E_i(0) \rrbracket^{(0)}, \quad (\mathbb{E}_i^0)'' = \mathbb{E}_i^0 (\llbracket E_i(0) \rrbracket^{(-m+1)})^{(0)}, \\ \mathbb{E}_i^1 &= \mathbb{E}_i^0 (\llbracket E_i(0) \setminus E_i(1) \rrbracket)^{(0)}, \quad (\mathbb{E}_i^1)' = \llbracket E_i(1) \rrbracket^{(0)}, \\ \mathbb{H}_i &= \mathbb{E}_i^1 (\llbracket (H_i \setminus r_i) \rrbracket)^{(0)}, \quad \mathbb{H}_i' = (\llbracket H_i \rrbracket^{(-1)})^{(0)}, \\ K_i(0) &= E_i(0), \quad K_i(1) = (E_i(0) \cdot (E_i(0) \setminus E_i(1))), \\ M_i(0) &= ((E_{i-1}(0) \setminus r_{i-1}) \setminus E_i(0)), \\ M_i(1) &= (((E_{i-1}(0) \setminus r_{i-1}) \setminus E_i(0)) \cdot (E_i(0) \setminus E_i(1))). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.4. Если $L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$, то существуют такие $t_i \in \{0, 1\}$, что

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash K_1(t_1) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что существует такое $t_n \in \{0, 1\}$, что

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n-1} M_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G.$$

По теореме 4.1 для $\mathbb{W}$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , для которой выполнены доказательные условия (i)–(v).

Поскольку $\mathbb{F}_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, рассмотрим $\mathbb{A} = \pi(\mathbb{F}_n)$. Так как $t(\mathbb{F}_n) = p_n^m$, существует три возможных варианта для $\mathbb{A}$: $\mathbb{E}_n^0 p_n^{m[2]}$, $\mathbb{E}_n^1 p_n^{m[2]}$ и $\mathbb{F}_n p_n^{m[2]}$. Последний вариант невозможен согласно лемме 3.5. Пусть тогда $\mathbb{A} = \mathbb{E}_n^0 p_n^{m[2]}$. В этом случае множество $(\mathbb{E}_n^0, \mathbb{F}_n]$ является π -замкнутым. Значит, для

$$\llbracket F_1 \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket F_{n-1} \rrbracket^{(0)} \llbracket M_n(0) \rrbracket^{(0)} \llbracket H_{n+1} \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket$$

можно применить лемму 4.8, откуда $L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n-1} M_n(0) H_{n+1} \rightarrow G$. Если же $\mathbb{A} = \mathbb{E}_n^1 p_n^{m[2]}$, то множество $(\mathbb{E}_n^1, \mathbb{F}_n]$ является π -замкнутым, и аналогично получаем, что

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n-1} M_n(1) H_{n+1} \rightarrow G.$$

Продолжая рассуждать так же, мы будем последовательно получать утверждения вида

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{i-1} M_i(t_i) K_{i+1}(t_{i+1}) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G$$

для $i = n-1, n-2, \dots, 2$. Единственным отличием будет то, что при переходе от $i+1$ к i , если $t_{i+1} = 1$, для $\pi(\mathbb{F}_i)$ будет существовать дополнительный вариант $(\mathbb{E}_{i+1}^0)'' p_{i[m+1]}^{m[2]}$. Данный вариант невозможен, так как тогда из выполнения доказательного условия (v) следовало бы, что $\mathbb{E}_{i+1}^1 \psi^* \mathbb{H}_i r_{i[m+1]}^{[2]}$ (поэтому единственный возможный случай – третий). Но тогда $\pi(\mathbb{E}_{i+1}^0) = \mathbb{E}_{i+1}^0 p_{i+1}^{m[2]}$, и поэтому $\mathbb{H}_i r_{i[m+1]}^{[2]} \psi^+ \mathbb{E}_{i+1}^1$ и $\mathbb{E}_{i+1}^1 \psi^+ \mathbb{E}_{i+1}^1$, что противоречит доказательному условию (iv).

Применив к секвенции $F_1 M_2(t_2) K_3(t_3) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G$ это же рассуждение, мы получим

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash K_1(t_1) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. Если $L^*(\cdot, \setminus) \vdash F_1 \dots F_{n+1} \rightarrow G$, то формула $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ выполнима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.4 существуют $t_i \in \{0, 1\}$ такие, что

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash K_1(t_1) \dots K_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G.$$

Докажем, что

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash E_1(t_1) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G.$$

Будем последовательно доказывать, что

$$L^*(\cdot, \setminus) \vdash K_1(t_1) \dots K_{i-1}(t_{i-1}) E_i(t_i) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G$$

для $i = n, n-1, \dots, 1$. Если $t_i = 0$, то $K_i(t_i) = E_i(t_i)$ и доказательство очевидно. Пусть $t_i = 1$. Тогда рассмотрим

$$\mathbb{W} = \llbracket K_1(t_1) \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket K_i(t_i) \rrbracket^{(0)} \llbracket E_{i+1}(t_{i+1}) \rrbracket^{(0)} \llbracket H_{n+1} \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket.$$

По теореме 4.1 для $\mathbb{W}$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v).

Обозначим $\mathbb{K}_l = \llbracket K_1(t_1) \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket K_l(t_l) \rrbracket^{(0)}$.

Рассмотрим

$$\mathbb{A} = \mathbb{K}_{i-1} \llbracket E_i(0) \rrbracket^{(0)} (\llbracket E_i(0) \rrbracket^{(-(m+1))})^{(0)} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}.$$

Заметим, что $t(\mathbb{A}) = p_{i-1}^m$. Для $\pi(\mathbb{A})$ возможны три варианта. Первый вариант $\pi(\mathbb{A}) = \mathbb{A} p_{i-1}^{m[2]}$ невозможен по лемме 3.5. Второй вариант – это $\pi(\mathbb{A}) = \mathbb{K}_{i-1} p_{i[m+1]}^{m[2]}$, но в этом случае множество $(\mathbb{K}_{i-1}, \mathbb{A})_{\sqsubseteq}$ является π -замкнутым и по лемме 4.8 получаем

$$L(\cdot, \setminus) \vdash K_1(t_1) \dots K_{i-1}(t_{i-1}) E_i(1) E_{i+1}(t_{i+1}) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G.$$

Третий вариант $\pi(\mathbb{A}) = \mathbb{K}_{i-2}[[E_{i-1}(0)]]^{(0)} p_{i[m+1]}^{m[2]}$ возникает только в том случае, если $t_{i-1} = 1$. Однако тогда единственным вариантом для $\pi(\mathbb{B})$, где

$$\mathbb{B} = \mathbb{K}_{i-2}[[E_{i-1}(0)]]^{(0)} ([[E_{i-1}(0)]]^{(- (m+1))})^{(0)},$$

будет $\mathbb{B} p_{i-1[m+1]}^{m[2]}$, что невозможно по лемме 3.5.

Таким образом, мы доказали, что $L(\cdot, \setminus) \vdash E_1(t_1) \dots E_n(t_n) H_{n+1} \rightarrow G$. Отсюда по лемме 5.1 получаем, что $\langle t_i, \dots, t_n \rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Лемма доказана.

Поскольку для всех секвенций имеем

$$L(\cdot, \setminus) \vdash \Pi \rightarrow A \Rightarrow L^*(\cdot, \setminus) \vdash \Pi \rightarrow A,$$

из лемм 5.3, 5.5 следует, что теорема доказана.

§ 6. Фрагмент исчисления Ламбека без умножения

Во фрагменте исчисления Ламбека без умножения $L(\setminus, /)$ для создания сложных типов используются только две операции: $\setminus$ и $/$. Соответственно из правил остаются $(\rightarrow \setminus)$, $(\setminus \rightarrow)$, $(\rightarrow /)$ и $(/ \rightarrow)$. Полное исчисление Ламбека является консервативным расширением фрагмента без умножения. Аналогично можно рассматривать исчисление $L^*(\setminus, /)$. Как и в полном исчислении, правило сечения является устранимым.

Нетрудно видеть, что для любого $A \in \text{Tr}(\setminus, /)$ верно, что $h(A) = 1$, и, значит, для всех $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ верно, что либо $g(\mathbb{A}) = \pm 1$, либо $g(\mathbb{A}) = 0$. Таким образом, для каждого $\mathbb{A}$ существует не более чем одно $\mathbb{B}$ такое, что $\mathbb{A} \varphi \mathbb{B}$. Значит, Φ теперь можно понимать как частичную однозначную функцию на $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ (ее значения теперь будут элементами множества $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$, а не подмножествами). Также отношение ψ является графиком частичной однозначной функции Ψ .

ЛЕММА 6.1. *Существует ровно одно $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ такое, что $d(\mathbb{A}) = 0$. Будем обозначать его через $\mathbb{A}_0$. Пусть сеть доказательств (π, φ, ψ) для $\mathbb{W}$ удовлетворяет доказательному условию (i). Тогда выполнение доказательных условий (iv) и (v) эквивалентно следующему утверждению: для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ верно, что $\mathbb{A} \psi^+ \Phi(\mathbb{A})$, а для любого $\mathbb{A} \in \mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ такого, что $d(\mathbb{A}) = 1$, верно, что $\mathbb{A} \psi^+ \mathbb{A}_0$.*

Сведем задачу SAT к задаче выводимости для $L(\setminus, /)$. Пусть $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ – булева формула от переменных $x_1, \dots, x_n$ в конъюнктивной нормальной форме. По этой формуле мы построим такую секвенцию, что она будет выводиться в $L(\setminus, /)$ (и в $L^*(\setminus, /)$) тогда и только тогда, когда формула будет выполнима.

Пусть p_i^j , q_i^j , a_i^j , b_i^j , $0 \leq i \leq n$, $0 < j \leq m$, – различные примитивные типы из $\mathbf{P}$. Определим следующие семейства типов:

$$\begin{aligned} G^0 &= (p_0^0 \setminus p_n^0), & G^j &= (q_n^j / ((q_0^j \setminus p_0^j) \setminus G^{j-1})) \setminus p_n^j, & G &= G^m, \\ A_i^0 &= (a_i^0 \setminus p_i^0), & A_i^j &= (q_i^j / ((b_i^j \setminus a_i^j) \setminus A_i^{j-1})) \setminus p_i^j, & A_i &= A_i^m, \end{aligned}$$

$$E_i^0(t) = p_{i-1}^0,$$

$$E_i^j(t) = \begin{cases} q_i^j / (((q_{i-1}^j / E_i^{j-1}(t)) \setminus p_{i-1}^j) \setminus p_i^{j-1}), & \text{если литерал } \neg_t x_i \\ & \text{присутствует в } c_j, \\ (q_{i-1}^j / (q_i^j / (E_i^{j-1}(t) \setminus p_i^{j-1}))) \setminus p_{i-1}^j, & \text{если литерал } \neg_t x_i \\ & \text{не присутствует в } c_j, \end{cases}$$

$$F_i^j(t) = (E_i^j(t) \setminus p_i^j), \quad F_i(t) = F_i^m(t),$$

$$B_i^0 = a_i^0, \quad B_i^j = q_{i-1}^j / (((b_i^j / B_i^{j-1}) \setminus a_i^j) \setminus p_{i-1}^{j-1}), \quad B_i = B_i^m \setminus p_{i-1}^m.$$

Обозначим через Π_i следующие последовательности типов:

$$(F_i(0)/(B_i \setminus A_i))F_i(0)(F_i(0) \setminus F_i(1)).$$

ТЕОРЕМА 6.1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ *выполнима*;
- 2) $L(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_n \rightarrow G$;
- 3) $L^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_n \rightarrow G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае с левосторонним фрагментом, сначала мы рассмотрим, каким образом выполнимость формулы кодируется в построенной секвенции.

Согласно определению отображения $\llbracket \cdot \rrbracket$ имеем

$$\begin{aligned} \llbracket G^0 \rrbracket &= p_{n[0]}^{0[0]} p_{0[-1]}^{0[1]}, \quad \llbracket G^j \rrbracket = p_{n[0]}^{j[0]} q_{n[-1]}^{j[1]} (\llbracket G^{j-1} \rrbracket^{\langle 1 \rangle})^{\langle -1 \rangle} q_{0[1]}^{j[4]} p_{0[-1]}^{j[3]}, \\ \llbracket G \rrbracket &= \llbracket G^m \rrbracket, \quad \llbracket E_i^0(t) \rrbracket = p_{i-1[0]}^{0[0]}, \\ \llbracket E_i^j(t) \rrbracket &= \begin{cases} p_{i-1[1]}^{j[2]} q_{i-1[-1]}^{j[3]} (((\llbracket E_i^{j-1}(t) \rrbracket^{\langle 1 \rangle})^{\langle -1 \rangle})^{\langle -1 \rangle})^{\langle 1 \rangle} p_{i[1]}^{j-1[1]} p_{i[0]}^{j[0]}, & \text{если } \neg_t x_i \text{ входит в } C_j, \\ p_{i-1[0]}^{j[0]} q_{i-1[-1]}^{j[1]} (((\llbracket E_i^{j-1}(t) \rrbracket^{\langle -1 \rangle})^{\langle 1 \rangle})^{\langle 1 \rangle})^{\langle -1 \rangle} p_{i[1]}^{j-1[3]} q_{i[-1]}^{j[2]}, & \text{если } \neg_t x_i \text{ не входит в } C_j, \end{cases} \\ \llbracket F_i(t) \rrbracket^{\langle 0 \rangle} &= (\llbracket E_i^m(t) \rrbracket^{\langle -1 \rangle})^{\langle 1 \rangle} p_{i[0]}^{m[1]}. \end{aligned}$$

Пусть дана некоторая оценка $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$. Рассмотрим

$$\mathbb{W} = \llbracket F_1(t_1) \rrbracket^{\langle 0 \rangle} \dots \llbracket F_n(t_n) \rrbracket^{\langle 0 \rangle} \llbracket G \rrbracket.$$

Запишем $\mathbb{W}$ в виде матрицы с $m + 1$ строками и $2n + 2$ столбцами, как и в случае с левосторонним фрагментом, в следующем порядке:

т. е. начиная с левого нижнего угла, заполняем сначала первый столбец атомами из $\mathbb{W}$ снизу вверх, затем второй столбец – сверху вниз и т. д.

ПРИМЕР 6.1. Рассмотрим булеву формулу от двух переменных $x_1 \vee x_2$. Сеть доказательств для $F_1(1)F_2(0) \rightarrow G$ будет иметь вид

Далее мы будем ссылаться на эту схему и иллюстрировать наши утверждения о структуре сети доказательств (π, φ, ψ) изображением релевантной части этой матрицы.

Если примитивный тип входит в секвенцию $F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$, он встречается в ней ровно дважды. Соответственно в множестве $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ существуют ровно два элемента таких, что значение функции t на них равно p_i^j . Пусть $\mathbb{P}_i^{j+}$ – элемент множества $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ такой, что $t(\mathbb{P}_i^{j+}) = p_i^j$ (соответствующее вхождение будет находиться в матрице в строке $2j + 1$ и столбце $2i$ для $i > 0$ и в столбце $2n + 2$ для $i = 0$), а $\mathbb{P}_i^{j-}$ – элемент множества $\mathcal{P}_{\mathbb{W}} \setminus \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$ такой, что $t(\mathbb{P}_i^{j-}) = p_i^j$ (строка $2j + 1$, столбец $2i + 1$). Аналогично определим $\mathbb{Q}_i^{j+}$ (строка $2j$, столбец $2j + 1$) и $\mathbb{Q}_i^{j-}$ (строка $2j$, столбец $2i$ для $i > 0$ и столбец $2n + 2$ для $i = 0$).

Выполняются следующие утверждения:

- 1) $d(\mathbb{P}_n^{m-}) = 0$;
- 2) если литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j , то имеем

$$\Phi^3(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \Phi^2(\mathbb{Q}_i^{j-}) = \Phi(\mathbb{Q}_{i-1}^{j+}) = \mathbb{P}_{i-1}^{j-},$$

и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & & p_{i[1]}^{j-1[4l+5]} \\ & & \vdots \\ & & q_i^{j[4l+4]}[-1] \\ q_{i-1}^{j[4l+3]}[-1] & \longleftarrow & q_i^{j[4l+4]}[-1] \\ & & \vdots \\ & & p_{i-1}^{j[4l+2]}[\pm 1] \end{array}$$

- 3) если литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j , то имеем

$$\Phi^3(\mathbb{Q}_{i-1}^{j+}) = \Phi^2(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \Phi(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{Q}_i^{j-},$$

и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 & & p_{i[1]}^{j-1[4l+3]} \\
 & \nearrow & \vdots \\
 q_{i-1[-1]}^{j[4l+5]} & & q_{i[\pm 1]}^{j[4l+2]} \\
 \vdots & & \downarrow \\
 p_{i-1[1]}^{j[4l+4]} & &
 \end{array}$$

4) $\Phi^4(\mathbb{Q}_0^{j-}) = \Phi^3(\mathbb{P}_0^{j+}) = \Phi^2(\mathbb{P}_n^{j-1-}) = \Phi(\mathbb{Q}_n^{j+}) = \mathbb{P}_n^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 p_{n[-1]}^{j-1[2l+2]} & & \\
 \downarrow & \nwarrow & \\
 q_{n[-1]}^{j[2l+1]} & & q_0^{j[2l+4]} \\
 \vdots & & \downarrow \\
 p_{n[-\text{sgn}(l)]}^{j[2l]} & & p_0^{j[2l+3]} p_0^{j[2l+3]}
 \end{array}$$

здесь $l = m - j$.

Сеть доказательств (π, φ, ψ) удовлетворяет доказательным условиям (i) и (ii), только если для всех i и j верно, что $\pi(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_i^{j-}$ и $\pi(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_i^{j-}$. В этом случае она также удовлетворяет доказательным условиям (iii) и (vi).

Теперь для доказательства выводимости секвенции $F_1 \dots F_n \rightarrow G$ надо проверить выполнение условия из леммы 6.1 для всех элементов $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

ЛЕММА 6.2. Для всех $0 < i \leq n$ и $0 < j \leq m$ выполняется $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_i^{j-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = n$ утверждение верно, так как выполняется

$$\Psi^3(\mathbb{P}_n^{j-1+}) = \pi \Phi \pi(\mathbb{P}_n^{j-1+}) = \pi \Phi(\mathbb{P}_n^{j-1-}) = \pi(\mathbb{Q}_n^{j+}) = \mathbb{Q}_n^{j-},$$

и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
 p_{n[1]}^{j-1[4l+4\pm 1]} & \longrightarrow & p_{n[-1]}^{j-1[2l+2]} \\
 \vdots & & \downarrow \\
 q_{n[\pm 1]}^{j[4l+3\pm 1]} & \longleftarrow & q_{n[-1]}^{j[2l+1]}
 \end{array}$$

Пусть $i < n$. Предположим, что для $i' = i + 1$ утверждение уже доказано. Считаем, что в элементарную дизъюнкцию c_0 не входит ни один литерал. Тогда возможны четыре случая:

1) если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ не входит в элементарные дизъюнкции c_{j-1} и c_j , то

$$\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}, \quad \Psi^2(\mathbb{Q}_{i+1}^{j-}) = \mathbb{Q}_i^{j-}, \quad \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-};$$

отсюда получаем, что $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_i^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} p_{i[1]}^{j-1[4l+4\pm 1]} & \longrightarrow & p_{i[1]}^{j-1[4l+6]} & \longrightarrow & p_{i+1[1]}^{j-1[4l+5]} \\ \vdots & & & & \vdots \\ q_{i[\pm 1]}^{j[4l+3\pm 1]} & \longleftarrow & p_{i[-1]}^{j[4l+3]} & \longleftarrow & p_{i+1[-1]}^{j[4l+4]} \end{array}$$

2) если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_{j-1} , но входит в c_j , то

$$\Psi^3(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \pi \Phi \pi(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \pi \Phi(\mathbb{P}_i^{j-1-}) = \pi(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_i^{j-},$$

и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc} p_{i[1]}^{j-1[4l+4\pm 1]} & \longrightarrow & p_{i[-1]}^{j-1[4l+6]} \\ \vdots & & \downarrow \\ q_{i[\pm 1]}^{j[4l+3\pm 1]} & \longleftarrow & q_{i[-1]}^{j[4l+5]} \end{array}$$

3) если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ входит в элементарную дизъюнкцию c_{j-1} , но не входит в c_j , то

$$\begin{aligned} \Psi^2(\mathbb{P}_i^{j-1+}) &= \mathbb{P}_{i+1}^{j-2+}, & \Psi^2(\mathbb{Q}_{i+1}^j) &= \mathbb{Q}_i^{j-}, & \Phi(\mathbb{Q}_{i+1}^{j-1+}) &= \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}, \\ \mathbb{P}_{i+1}^{j-2+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-1-}, & & \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-} & & \end{aligned}$$

отсюда получаем, что $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_i^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} & & & & p_{i+1[1]}^{j-2[4l+7]} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & q_{i+1[1]}^{j-1[4l+6]} \\ & & & & \downarrow \\ p_{i[1]}^{j-1[4l+4\pm 1]} & \longrightarrow & p_{i[1]}^{j-1[4l+8]} & \nearrow & p_{i+1[1]}^{j-1[4l+5]} \\ \vdots & & & & \downarrow \\ q_{i[\pm 1]}^{j[4l+3\pm 1]} & \longleftarrow & q_{i[-1]}^{j[4l+3]} & \longleftarrow & q_{i+1[-1]}^{j[4l+4]} \end{array}$$

4) если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ входит в обе элементарные дизъюнкции c_{j-1} и c_j , то

$$\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j-1+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-2+}, \quad \Psi^2(\mathbb{Q}_{i+1}^{j-1-}) = \mathbb{Q}_i^{j-}, \quad \mathbb{P}_{i+1}^{j-2+} \psi^* \mathbb{Q}_{i+1}^{j-1-};$$

отсюда получаем, что $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{Q}_i^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Для всех $0 \leq i \leq n$ и $0 < j \leq t$ выполняется $\mathbb{Q}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_i^{j-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = 0$ утверждение верно, так как

$$\Psi^3(\mathbb{Q}_0^{j+}) = \pi \Phi \pi(\mathbb{Q}_0^{j+}) = \pi \Phi(\mathbb{Q}_0^{j-}) = \pi(\mathbb{P}_0^{j+}) = \mathbb{P}_0^{j-}.$$

Соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

Пусть $i > 0$. Предположим, что для $i' = i - 1$ утверждение уже доказано. Считаем, что в элементарную дизъюнкцию c_{m+1} не входит ни один литерал. Тогда возможны четыре случая:

1) если литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарные дизъюнкции c_{j+1} и c_j , то $\Psi^2(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \mathbb{Q}_{i-1}^{j+}$, $\Psi^2(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \mathbb{P}_i^{j-}$ и $\mathbb{Q}_{i-1}^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j-}$; отсюда получаем, что $\mathbb{Q}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_i^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

2) если литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_{j+1} , но входит в c_j , то $\Psi^3(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \pi \Phi \pi(\mathbb{Q}_i^{j+}) = \pi \Phi(\mathbb{Q}_i^{j-}) = \pi(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_i^{j-}$, и соответствующий

фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc} q_i^{j[4l+2]} & \longleftarrow & q_i^{j[4l+4\pm 1]} \\ \downarrow & & \vdots \\ p_i^{j[4l+1]} & \longrightarrow & p_i^{j[4l+3\pm 1]} \end{array}$$

3) если литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_{j+1} , но не входит в c_j , то $\Psi^2(Q_i^{j+}) = Q_{i-1}^{j+}$, $\Psi^2(P_{i-1}^{j+1-}) = P_i^{j-}$, $\Phi(P_{i-1}^{j+}) = Q_{i-1}^{j+1+}$, $Q_{i-1}^{j+} \psi^* P_{i-1}^{j-}$ и $Q_{i-1}^{j+1+} \psi^* P_{i-1}^{j+1-}$; отсюда получаем, что $Q_i^{j+} \psi^* P_i^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} q_{i-1}^{j[4l+3]} & \longleftarrow & q_i^{j[4l+4]} & \longleftarrow & q_i^{j[4l+4\pm 1]} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_{i-1}^{j[4l+2]} & & p_i^{j[4l-1]} & \longrightarrow & p_i^{j[4l+3\pm 1]} \\ \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \\ q_{i-1}^{j+1[4l+1]} & & & & \\ \vdots & & & & \\ p_{i-1}^{j+1[4l]} & & & & \end{array}$$

4) если литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в обе элементарные дизъюнкции c_{j+1} и c_j , то $\Psi^2(Q_i^{j+}) = Q_{i-1}^{j+1+}$, $\Psi^2(P_{i-1}^{j+1-}) = P_i^{j-}$ и $Q_{i-1}^{j+1+} \psi^* P_{i-1}^{j+1-}$; отсюда получаем, что $Q_i^{j+} \psi^* P_i^{j-}$, и соответствующий фрагмент матрицы имеет вид

$$\begin{array}{ccc} q_i^{j[4l+2]} & \longleftarrow & q_i^{j[4l+4\pm 1]} \\ \downarrow & & \vdots \\ p_i^{j[4l-1]} & \longrightarrow & p_i^{j[4l+3\pm 1]} \\ \nearrow & & \downarrow \\ q_{i-1}^{j+1[4l+1]} & & \\ \vdots & & \\ p_{i-1}^{j+1[4l]} & & \end{array}$$

Лемма доказана.

Из лемм 6.2, 6.3 мы можем заключить, что если $i > 0$ и $j \leq j'$, то $P_i^{j+} \psi^* P_i^{j'+}$ и $P_i^{j-} <_\psi P_i^{j'-}$.

ЛЕММА 6.4. Если $0 \leq i < i' \leq n$, то $P_i^{j+} \psi^* P_{i'}^{j'+}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j , то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j-1+}$ и $\mathbb{P}_{i+1}^{j-1+} \psi^* \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$. Если литерал $\neg_{t_{i+1}} x_{i+1}$ входит в элементарную дизъюнкцию c_{j+1} , то $\Psi(\mathbb{P}_i^{j+1-}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$ и $\mathbb{P}_i^{j-} \psi^* \mathbb{P}_{i+1}^{j+1-}$. Если ни то, ни другое не верно, то $\Psi^2(\mathbb{P}_i^{j+}) = \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$. Это значит, что $\mathbb{P}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i+1}^{j+}$, и поэтому $\mathbb{P}_i^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i'}^{j+}$. Лемма доказана.

Из леммы 6.4 следует, что для всех $i > 0$ верно, что $\mathbb{P}_i^{m+} \psi^* \mathbb{P}_n^{m-}$.

ЛЕММА 6.5. Секвенция $F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$ выводится в $L(\setminus, /)$ (и в $L^*(\setminus, /)$), если и только если $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ есть выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ – выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Согласно леммам 6.2–6.4 единственными элементами $\mathcal{N}_{\mathbb{W}}$, для которых мы не проверили выполнимость условия из леммы 6.1, являются $\mathbb{P}_0^{j+}$.

Поскольку $\Phi(\mathbb{P}_0^{0+}) = \mathbb{P}_n^{0-}$, для $\mathbb{P}_0^{0+}$ условие из леммы 6.1 выполнено в связи с леммой 6.4. Пусть $j > 0$. Тогда $\Phi(\mathbb{P}_0^{j+}) = \mathbb{P}_n^{j-1-}$ и необходимо доказать, что $\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_n^{j-1-}$. Существует i такое, что литерал $\neg_{t_i} x_i$ входит в элементарную дизъюнкцию c_j . Это значит, что $\psi(\mathbb{P}_{i-1}^{j-}) = \mathbb{P}_i^{j-1+}$, и по лемме 6.4 имеем $\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_{i-1}^{j+}$ и $\mathbb{P}_i^{j-1+} \psi^* \mathbb{P}_n^{j-1+}$. Отсюда $\mathbb{P}_0^{j+} \psi^* \mathbb{P}_n^{j-1-}$ и по лемме 6.1 получаем, что для сети доказательств (π, φ, ψ) выполнены доказательные условия (iv) и (v). Значит,

$$L^*(\setminus, /) \vdash F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G.$$

На диаграмме

проиллюстрировано выполнение условия из леммы 6.1 для $\mathbb{P}_0^{j+}$.

Пусть $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ не является выполняющей оценкой для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Существует j такое, что никакой литерал $\neg_{t_i} x_i$ не входит в элементарную дизъюнкцию c_j . Это значит, что для $0 < i \leq n$ выполняются соотношения

$$\Psi^{2i}(\mathbb{Q}_n^{j+}) = \mathbb{Q}_{n-i}^{j+}, \quad \Psi(\mathbb{P}_n^{j-1-}) = \mathbb{Q}_n^{j+}, \quad \Psi(\mathbb{Q}_0^{j-}) = \mathbb{P}_0^{j+}.$$

Отсюда $\mathbb{P}_n^{j-1-} \psi^* \mathbb{P}_0^{j+}$. Это значит, что единственно возможная сеть доказательств не может удовлетворять доказательному условию (iv). Значит, по теореме 4.1

$$L^*(\setminus, /) \not\vdash F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G.$$

На следующей диаграмме проиллюстрирован цикл, возникающий в рассматриваемом случае:

Поскольку сеть доказательств удовлетворяет доказательному условию (vi), получаем

$$L(\setminus, /) \vdash F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G \Leftrightarrow L^* \vdash F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$$

и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 6.6. Если $L(\setminus, /) \vdash \Pi \rightarrow A$, а секвенция $\Pi' \rightarrow A'$ есть результат замены всех вхождений примитивного типа p примитивным типом q в секвенции $\Pi \rightarrow A$, то $L(\setminus, /) \vdash \Pi' \rightarrow A'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поменяв p на q везде в выводе секвенции $\Pi \rightarrow A$, мы получим вывод секвенции $\Pi' \rightarrow A'$.

ЛЕММА 6.7. Верно, что

$$L(\setminus, /) \vdash F_i(1) \rightarrow (B_i \setminus A_i), \quad L(\setminus, /) \vdash F_i(0) \rightarrow (B_i \setminus A_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим булеву формулу $c'_1 \wedge \dots \wedge c'_m$ от двух переменных, где

$$c'_j = \begin{cases} (x_1 \vee x_2), & \text{если литерал } \neg_1 x_i \text{ входит в } c_j, \\ x_1, & \text{если литерал } \neg_1 x_i \text{ не входит в } c_j. \end{cases}$$

Пусть $F'_1(1)F'_2(1) \rightarrow G'$ – секвенция, построенная для этой формулы. Согласно лемме 6.5 можно утверждать, что $L(\setminus, /) \vdash F'_1(1)F'_2(1) \rightarrow G'$.

Поменяв p_0^j на a_i^j , q_0^j на b_i^j , p_1^j на p_{i-1}^j , q_1^j на q_{i-1}^j , p_2^j на p_i^j и q_2^j на q_i^j , получим секвенцию $B_i F_i(1) \rightarrow A_i$. По лемме 6.6 получаем $L(\setminus, /) \vdash B_i F_i(1) \rightarrow A_i$. Отсюда $L(\setminus, /) \vdash F_i(1) \rightarrow (B_i \setminus A_i)$.

Сделаем то же самое для формулы $c'_1 \wedge \dots \wedge c'_m$ от двух переменных, где

$$c'_j = \begin{cases} (x_1 \vee x_2), & \text{если литерал } \neg_0 x_i \text{ входит в } c_j, \\ x_1, & \text{если литерал } \neg_0 x_i \text{ не входит в } c_j, \end{cases}$$

мы получим $L(\setminus, /) \vdash B_i F_i(0) \rightarrow A_i$. Отсюда $L(\setminus, /) \vdash F_i(0) \rightarrow (B_i \setminus A_i)$.

ЛЕММА 6.8. Верно, что $L(\setminus, /) \vdash \Pi_i \rightarrow F_i(t_i)$, где $t_i \in \{0, 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6.7 имеем $L(\setminus, /) \vdash F_i(1) \rightarrow (B_i \setminus A_i)$ и $L(\setminus, /) \vdash F_i(1) \rightarrow (B_i \setminus A_i)$. Тогда мы можем вывести $\Pi_i \rightarrow F_i(t_i)$, где $t_i \in \{0, 1\}$, следующим образом:

$$\frac{\frac{F_i(0) \rightarrow F_i(0) \quad F_i(1) \rightarrow (B_i \setminus A_i)}{F_i(0)(F_i(0) \setminus F_i(1)) \rightarrow (B_i \setminus A_i)} (\setminus \rightarrow) \quad F_i(0) \rightarrow F_i(0)}{(F_i(0)/(B_i \setminus A_i))F_i(0)(F_i(0) \setminus F_i(1)) \rightarrow F_i(0)} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\frac{F_i(0) \rightarrow (B_i \setminus A_i) \quad F_i(0) \rightarrow F_i(0)}{F_i(0)/(B_i \setminus A_i)F_i(0) \rightarrow F_i(0)} (/ \rightarrow) \quad F_i(1) \rightarrow F_i(1)}{(F_i(0)/(B_i \setminus A_i))F_i(0)(F_i(0) \setminus F_i(1)) \rightarrow F_i(1)} (\setminus \rightarrow)$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.9. Если формула $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ выполнима, то

$$L(\setminus, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_n \rightarrow G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ – выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$. Согласно лемме 6.5 имеем $L(\setminus, /) \vdash F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$. Применяем лемму 6.8 и правило сечения n раз, получаем секвенцию $\Pi_1 \dots \Pi_n \rightarrow G$. Лемма доказана.

Теперь будем доказывать другую часть теоремы о сведениях.

Пусть $L^*(\setminus, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_n \rightarrow G$. Рассмотрим

$$\mathbb{W} = \llbracket (F_1(0)/(B_1 \setminus A_1)) \rrbracket^{(0)} \llbracket F_1(0) \rrbracket^{(0)} \llbracket (F_1(0) \setminus F_1(1)) \rrbracket^{(0)} \dots$$

$$\dots \llbracket (F_n(0)/(B_n \setminus A_n)) \rrbracket^{(0)} \llbracket F_n(0) \rrbracket^{(0)} \llbracket (F_n(0) \setminus F_n(1)) \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket.$$

Введем следующие обозначения для некоторых элементов множества $\mathcal{P}_{\mathbb{W}}$ и подстрок строки $\mathbb{W}$:

$$\mathbb{F}_i^0 = \llbracket (F_1(0)/(B_1 \setminus A_1)) \rrbracket^{(0)} \llbracket F_1(0) \rrbracket^{(0)} \llbracket (F_1(0) \setminus F_1(1)) \rrbracket^{(0)} \dots$$

$$\dots \llbracket (F_{i-1}(0)/(B_{i-1} \setminus A_{i-1})) \rrbracket^{(0)} \llbracket F_{i-1}(0) \rrbracket^{(0)} \llbracket (F_{i-1}(0) \setminus F_{i-1}(1)) \rrbracket^{(0)} \llbracket F_i(0) \rrbracket^{(0)},$$

$$(\mathbb{F}_i^0)' = \llbracket F_i(0) \rrbracket^{(0)},$$

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{F}_i^0(\llbracket A_i \rrbracket^{(1)})^{(0)}, \quad \mathbb{A}_i' = (\llbracket A_i \rrbracket^{(1)})^{(0)},$$

$$\mathbb{B}_i = \mathbb{A}_i((\llbracket B_i \rrbracket^{(-1)})^{(1)})^{(0)}, \quad \mathbb{B}_i' = ((\llbracket B_i \rrbracket^{(-1)})^{(1)})^{(0)},$$

$$\mathbb{H}_i = \mathbb{B}_i \llbracket F_i(0) \rrbracket^{(0)},$$

$$\mathbb{C}_i = \mathbb{H}_i(\llbracket F_i(0) \rrbracket^{(-1)})^{(1)}, \quad (\mathbb{F}_i^0)'' = (\llbracket F_i(0) \rrbracket^{(-1)})^{(1)},$$

$$\mathbb{F}_i^1 = \mathbb{C}_i \llbracket F_i(1) \rrbracket^{(0)}, \quad (\mathbb{F}_i^1)' = \llbracket F_i(1) \rrbracket^{(0)}.$$

ЛЕММА 6.10. Если $L^*(\setminus, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_i F_{i+1}(t_{i+1}) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$, то существует такое $t_i \in \{0, 1\}$, что $L^*(\setminus, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_{i-1} F_i(t_i) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathbb{W}' = \mathbb{F}_i^1 \mathbb{W}''$, где $\mathbb{W}'' = \llbracket F_{i+1}(t_{i+1}) \rrbracket^{(0)} \dots \llbracket F_n(t_n) \rrbracket^{(0)} \llbracket G \rrbracket$. По теореме 6.1 для $\mathbb{W}'$ существует сеть доказательств (π, φ, ψ) , удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v). Условие из леммы 6.1 также выполнено.

Пусть $\mathbb{W}'_0 = \mathbb{F}_{i-1}^1[F_i(0)]^{(0)}\mathbb{W}''$ и $\mathbb{W}'_1 = \mathbb{F}_{i-1}^1[F_i(1)]^{(0)}\mathbb{W}''$.

Для каждого j существуют ровно два элемента из $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ таких, что $t(\mathbb{A}) = a_i^j$, и ровно два элемента таких, что $t(\mathbb{A}) = b_i^j$. Это значит, что эти пары элементов π -замкнуты.

Существуют шесть элементов из $\mathcal{P}_{\mathbb{W}'}$ таких, что $t(\mathbb{A}) = p_i^0$. Обозначим их $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_6$, так что $\mathbb{P}_1 \subset \dots \subset \mathbb{P}_6$. Верно следующее:

$$\mathbb{F}_{i-1}^1 \subset \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{F}_i^0 \subset \mathbb{P}_2 \subset \mathbb{A}_i \subset \mathbb{B}_i \subset \mathbb{P}_3 \subset \mathbb{H}_i \subset \mathbb{P}_4 \subset \mathbb{C}_i \subset \mathbb{P}_5 \subset \mathbb{F}_i^1 \subset \mathbb{P}_6.$$

Множество $\{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_6\}$ является π -замкнутым, $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_5 \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$. Множества $[\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2]_{\subset}$ и $[\mathbb{P}_4, \mathbb{P}_5]_{\subset}$ не могут быть π -замкнуты, следовательно, существуют только две возможности: либо $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_4$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_2$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_6$, и часть сети доказательства имеет вид

либо $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_6$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_4$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_2$, и часть сети доказательства имеет вид

Пусть $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_4$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_2$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_6$. Заметим, что $t(\mathbb{C}_i) = p_{i-1}^m$ и $\mathbb{C}_i \in \mathcal{N}_{\mathbb{W}}$.

Если $i = 1$, то существуют только два варианта для $\pi(\mathbb{C}_i)$: один – это $p_{0[1]}^{m[l]}$, а другой – это $\mathbb{C}_1 p_{0[1]}^{m[l]}$, где $l = 2$ или $l = 4$. Первый вариант невозможен по лемме 3.5. Следовательно, $\pi(\mathbb{C}_1) = p_{0[1]}^{m[l]}$ и $[p_{0[1]}^{m[l]}, \mathbb{C}_1]_{\subset}$ является π -замкнутым, и часть сети доказательства имеет вид

Если $i > 1$, то существуют четыре варианта для $\pi(\mathbb{C}_i)$: $\mathbb{F}_{i-1}^1 p_{i-1[1]}^{m[l]}$, $\mathbb{C}_i p_{i-1[1]}^{m[l]}$, где $l = 2$ или $l = 4$, $\mathbb{H}_{i-1} p_{i-1[1]}^{m[2]}$ и $\mathbb{F}_{i-1}^0 p_{i-1[-1]}^{m[2]}$. Второй вариант невозможен. Если $\pi(\mathbb{C}_i) = \mathbb{H}_{i-1} p_{i-1[1]}^{m[2]}$, то $\pi(\mathbb{C}_{i-1}) = \mathbb{C}_{i-1} p_{i-2[1]}^{m[l]}$, где $l = 2$ или $l = 4$, что невозможно по лемме 3.5. Если же $\pi(\mathbb{C}_i) = \mathbb{F}_{i-1}^0 p_{i-1[-1]}^{m[2]}$, то так как полуинтервал $(\mathbb{F}_{i-1}^0, \mathbb{C}_i]_{\subset}$ является φ -замкнутым и π -замкнутым, имеем $\neg(\mathbb{G}\psi^* \mathbb{F}_{i-1}^0 p_{i-1[-1]}^{m[2]})$ для всех $\mathbb{G} \notin (\mathbb{F}_{i-1}^0, \mathbb{C}_i]_{\subset}$. Однако $\Psi^2(\mathbb{C}_i) = \Phi(\pi(\mathbb{C}_i)) = \Phi(\mathbb{F}_{i-1}^0 p_{i-1[-1]}^{m[2]}) = \mathbb{F}_{i-1}^0 \notin (\mathbb{F}_{i-1}^0, \mathbb{C}_i]_{\subset}$. Следовательно, $\neg(\mathbb{C}_i \psi^* \mathbb{H}_i p_{i[1]}^{m[2]})$, но $\mathbb{C}_i \varphi^* \mathbb{H}_i p_{i[1]}^{m[2]}$ и условие

из леммы 6.1 не выполнено. Значит, $\pi(\mathbb{C}_i) = \mathbb{F}_{i-1}^1 p_{i-1}^{m[l]}[1]$ и $(\mathbb{F}_{i-1}^1, \mathbb{C}_i]_{\subseteq}$ является π -замкнутым, и часть сети доказательства имеет вид

Поскольку $(\mathbb{F}_{i-1}^1, \mathbb{C}_i]_{\subseteq}$ является π -замкнутым и φ -замкнутым, по лемме 4.8 для $\mathbb{W}'_1$ существует сеть доказательств, удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v), и

$$L^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_{i-1} F_i(1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G.$$

Пусть теперь $\pi(\mathbb{P}_1) = \mathbb{P}_6$, $\pi(\mathbb{P}_3) = \mathbb{P}_4$ и $\pi(\mathbb{P}_5) = \mathbb{P}_2$. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{F}_i^0 p_{i-1}^{m[2]}[1]$.

Возможны только два варианта для $\pi^{-1}(\mathbb{E})$: один – это $\mathbb{F}_i^0$, а другой – это $\mathbb{F}_i^1$. Первый вариант невозможен по лемме 3.5. Значит, $\pi(\mathbb{E}) = \mathbb{F}_i^1$ и $(\mathbb{F}_i^0, \mathbb{F}_i^1]_{\subseteq}$ является π -замкнутым, и часть сети доказательства имеет вид

Поскольку $(\mathbb{F}_i^0, \mathbb{F}_i^1]_{\subseteq}$ является π -замкнутым и φ -замкнутым, по лемме 4.8 для $\mathbb{W}'_0$ существует сеть доказательств, удовлетворяющая доказательным условиям (i)–(v), и

$$L^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_{i-1} F_i(0) \dots F_n(t_n) \rightarrow G.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.11. Если $L^*(\backslash, /) \vdash \Pi_1 \dots \Pi_n \rightarrow G$, то формула $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ выполнима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив n раз лемму 6.10, получим в результате, что существует такая оценка $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in \{0, 1\}^n$, что $L^*(\backslash, /) \vdash F_1(t_1) \dots F_n(t_n) \rightarrow G$. Согласно лемме 6.5 это значит, что $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ – выполняющая оценка для формулы $c_1 \wedge \dots \wedge c_m$.

Поскольку для всех секвенций $L(\backslash, /) \vdash \Pi \rightarrow A \Rightarrow L^*(\backslash, /) \vdash \Pi \rightarrow A$, леммы 6.9 и 6.11 дают теорему 6.1.

Список литературы

1. J. Lambek, “The mathematics of sentence structure”, *Amer. Math. Monthly*, **65**:3 (1958), 154–170.
2. M. Moortgat, “Categorical type logics”, *Handbook of logic and language*, North-Holland, Amsterdam; MIT Press, Cambridge, MA, 1997, 93–177.
3. G. V. Morrill, *Type logical grammar. Categorical logic of signs*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

4. M. Pentus, “Lambek grammars are context free”, *Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (Montreal, PQ, 1993), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1993, 429–433.
5. J.-Y. Girard, “Linear logic”, *Theoret. Comput. Sci.*, **50**:1 (1987), 1–101.
6. Ph. de Groote, “The non-associative Lambek calculus with product in polynomial time”, *Automated reasoning with analytic tableaux and related methods* (Saratoga Springs, NY, USA, 1999), Lecture Notes in Comput. Sci., **1617**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, 128–139.
7. E. Aarts, K. Trautwein, “Non-associative Lambek categorial grammar in polynomial time”, *Math. Logic Quart.*, **41**:4 (1995), 476–484.
8. M. Pentus, “Lambek calculus is NP-complete”, *Theoret. Comput. Sci.*, **357**:1–3 (2006), 186–201.
9. Yu. Savateev, “Product-free Lambek calculus is NP-complete”, *Logical foundations of computer science. International symposium* (Deerfield Beach, FL, USA, 2009), Lecture Notes in Comput. Sci., **5407**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, 380–394.
10. Yu. Savateev, “Lambek grammars with one division are decidable in polynomial time”, *Computer science – theory and applications* (Moscow, Russia, 2008), Lecture Notes in Comput. Sci., **5010**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 273–282.
11. G. Penn, “A graph-theoretic approach to sequent derivability in the Lambek calculus”, *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, **53** (2004), 274–295.
12. A. Lecomte, “Towards efficient parsing with proof-nets”, *Proceedings of 6th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*, 1993, 269–276.

Ю. В. САВАТЕЕВ (YU. V. SAVATEEV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: estlladon@gmail.com

Поступило в редакцию
01.06.2009
10.11.2010