Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Мирзоян, Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 47–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 02:59:10

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах

Дано геометрическое описание некоторых классов нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий в евклидовых пространствах.

Библиография: 28 наименований.

Ключевые слова: Ric-полусимметрические многообразия, эйнштейновы подмногообразия, полуэйнштейновы подмногообразия.

§ 1. Введение

Римановы Ric-полусимметрические многообразия характеризуются условием полупараллельности тензора Риччи R_1 (т. е. условием $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$) и являются естественными обобщениями полусимметрических, эйнштейновых и симметрических пространств. В этой связи теория данных пространств, а также их изометрических погружений была предметом исследований многих авторов (см. библиографию в [1]–[3]). В 1992 г. автором [4] было доказано, что римановы Ric-полусимметрические многообразия локально являются прямыми произведениями двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых пространств. Если геометрия эйнштейновых пространств изучается, как известно (см. [5], [6]), на протяжении уже многих лет, то геометрия полуэйнштейновых пространств и их изометрических погружений, вообще говоря, мало исследована. В статье [7], посвященной классификации Ric-полусимметрических гиперповерхностей в евклидовых пространствах, дано геометрическое описание полуэйнштейновой гиперповерхности, которая представляет собой конус над прямым произведением двух сфер. В [8] такой же конус уже выступает в качестве полуэйнштейнова подмногообразия коразмерности ≥ 2 . В [9] и [10] даны геометрическое описание и классификация некоторых классов нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий в евклидовых пространствах, которые не удовлетворяют более сильным условиям, таким как параллельность тензора кривизны или тензора Риччи, полупараллельность тензора кривизны или второй фундаментальной формы и т. д.

Настоящая работа продолжает исследования автора [8]–[10]. Основная задача – геометрическое описание новых классов нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий, не удовлетворяющих более сильным условиям. В то же время статья является многоплановой. Здесь приводятся наиболее важные необходимые результаты о пространствах дефектности римановых многообразий и их подмногообразий, дается общее геометрическое описание локальной структуры нормально плоских подмногообразий в евклидовых пространствах и изучаются свойства их главных векторов кривизны, исследуются полуэйнштейновы подмногообразия с равными модулями главных векторов кривизны. В качестве примеров рассмотрены также полуэйнштейновы подмногообразия

с одним и двумя главными векторами кривизны при произвольной коразмерности.

На протяжении всей статьи используется ряд стандартных понятий, формул и фактов римановой геометрии, которые можно найти в монографиях [11]–[15].

§ 2. Пространства дефектности римановых многообразий и их подмногообразий

В настоящем параграфе приводятся основные определения и излагаются некоторые известные результаты по пространствам дефектности римановых многообразий и подмногообразий евклидовых пространств. Изложенные здесь факты важны для понимания результатов, полученных в остальных параграфах.

Пусть $\widetilde{M}$ – n -мерное риманово многообразие с римановой связностью $\widetilde{\nabla}$ и тензором кривизны $\widetilde{R}$, и пусть $O(\widetilde{M})$ – главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ на $\widetilde{M}$. Равенства

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_A e_B &= \Gamma_{AB}^C e_C, \\ \widetilde{R}(e_A, e_B)e_C &= \widetilde{\nabla}_A \widetilde{\nabla}_B e_C - \widetilde{\nabla}_B \widetilde{\nabla}_A e_C - \widetilde{\nabla}_{[e_A, e_B]} e_C = \widetilde{R}_{CAB}^D e_D, \\ \widetilde{R}_{CB} &= \widetilde{R}_{CAB}^A, \quad \widetilde{R}_{CB} = \widetilde{R}_{BC},\end{aligned}$$

где $\widetilde{\nabla}_A = \widetilde{\nabla} e_A$, определяют коэффициенты Γ_{AB}^C связности $\widetilde{\nabla}$, компоненты $\widetilde{R}_{CAB}^D$, $\widetilde{R}_{CB}$ тензора кривизны $\widetilde{R}$ и тензора Риччи $\widetilde{R}_1$ соответственно ($A, B, C, D = 1, \dots, n$).

Пусть $\{x, \omega^1, \dots, \omega^n\}$ – элемент главного расслоения $O^*(\widetilde{M})$ двойственных реперов на $\widetilde{M}$, и пусть 1-формы ω_A^B определяются равенством $\omega_A^B = \Gamma_{AC}^B \omega^C$. Справедливы следующие структурные уравнения Картана (см. [3], [11], [14], [15]):

$$d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B + \Omega_A^B. \quad (2.1)$$

Формы ω_A^B определяют связность $\widetilde{\nabla}$ и удовлетворяют условию $\omega_A^B + \omega_B^A = 0$, а 2-формы $\widetilde{\Omega}_A^B$ определяются равенством $\widetilde{\Omega}_A^B = \frac{1}{2} \widetilde{R}_{ACD}^B \omega^C \wedge \omega^D$, удовлетворяют условию $\widetilde{\Omega}_A^B + \widetilde{\Omega}_B^A = 0$ и называются *формами кривизны* связности $\widetilde{\nabla}$. Они удовлетворяют также следующему уравнению:

$$d\widetilde{\Omega}_A^B = \omega_A^C \wedge \widetilde{\Omega}_C^B - \widetilde{\Omega}_A^C \wedge \omega_C^B. \quad (2.2)$$

Пусть M является m -мерным подмногообразием в $\widetilde{M}$. Тогда расслоение $O(\widetilde{M})$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, \widetilde{M})$ адаптированных ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризующихся тем, что

$$e_i \in T_x(M), \quad i, j, k, l = 1, \dots, m, \quad e_\alpha \in T_x^\perp(M), \quad \alpha, \beta, \gamma = m+1, \dots, n,$$

где $T_x(M)$ и $T_x^\perp(M)$ – соответственно касательное и нормальное к M пространства в точке $x \in M$ (см. [11] или [15]). В дальнейшем через $T(M)$ и $T^\perp(M)$ будем обозначать касательное и нормальное расслоения на M . В силу такого выбора репера имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \quad (2.3)$$

Функции h_{ij}^α являются компонентами второй фундаментальной формы α_2 , действующей следующим образом: если $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, то $\alpha_2(X, Y) = h_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha$. Из (2.3) следует, что в выбранном выше адаптированном ортонормированном репере вторая фундаментальная форма подмногообразия M определяется 1-формами ω_i^α .

Приведем несколько определений, необходимых в дальнейшем. Если $\alpha_2 = 0$, т. е. $h_{ij}^\alpha = 0$, то подмногообразие M называется *вполне геодезическим*. Известно, что в евклидовом пространстве E_n вполне геодезическое подмногообразие является плоскостью соответствующей размерности. Пусть $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ – некоторое нормальное векторное поле на M . Если матрица $\|\xi_\alpha h_{ij}^\alpha\|$, где $\xi_\alpha = \xi^\alpha$, имеет вид $\|\lambda^\xi \delta_{ij}\|$, то подмногообразие M называется *омбилическим относительно ξ* . Омбилическое относительно каждого нормального векторного поля подмногообразия называется *вполне омбилическим*. В E_n вполне омбилическое подмногообразие является сферой или плоскостью соответствующей размерности. Инвариантно определенный нормальный вектор $H = \frac{1}{m} h_{ij}^\alpha \delta^{ij} e_\alpha$ называется *вектором средней кривизны* подмногообразия M (в дальнейшем коэффициент $\frac{1}{m}$ выписывать не будем). Если $H = 0$, то подмногообразие M называется *минимальным*.

Из структурных уравнений Картана (2.1) получаем следующую систему соотношений:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, & d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j, & d\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta, \\ \Omega_i^j &= \tilde{\Omega}_i^j - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l, & \Omega_\alpha^\beta &= \tilde{\Omega}_\alpha^\beta - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В этих уравнениях 1-формы ω_i^j и ω_α^β определяют соответственно риманову связность ∇ на M и нормальную связность $\nabla^\perp$ в расслоении $T^\perp(M)$; 2-формы Ω_i^j и Ω_α^β являются их формами кривизны. Компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ этих связностей определяются равенствами $\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ike}^j \omega^k \wedge \omega^l$, $\Omega_\alpha^\beta = \frac{1}{2} R_{\alpha ke}^\beta \omega^k \wedge \omega^l$. Из уравнений (2.4) следует, что

$$R_{ike}^j = \tilde{R}_{ike}^j - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha ke}^\beta = \tilde{R}_{\alpha ke}^\beta - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) называются *уравнениями Гаусса* и *Риччи* соответственно (см. [12], [15]). Если $R^\perp = 0$, т. е. $R_{\alpha kl}^\beta = 0$, то нормальная связность $\nabla^\perp$ называется *плоской*, а подмногообразие M называется *нормально плоским*. При $R = 0$, т. е. $R_{ikl}^j = 0$, подмногообразие M называется *локально евклидовым*.

Понятие пространства дефектности риманова многообразия было введено и изучено С. Чженем и Н. Кюйпером в [16]. Оно определяется следующим образом. Пусть $\tilde{M}$ – риманово многообразие, а x – его произвольная точка. Подпространство $\tilde{T}_x^{(0)}$ касательного пространства $\tilde{T}_x(\tilde{M})$, определяемое равенством $\tilde{T}_x^{(0)} = \{X \in \tilde{T}_x(\tilde{M}) : \tilde{R}(X, Y) = 0 \ \forall Y \in \tilde{T}_x(\tilde{M})\}$, называется *пространством дефектности* многообразия $\tilde{M}$ в точке x . Размерность $\tilde{\mu}_x = \dim \tilde{T}_x^{(0)}$ называется *индексом дефектности* многообразия $\tilde{M}$ в этой точке. Предполагая, что локально $\tilde{\mu}_x$ является постоянным, т. е. $\tilde{\mu}_x = \tilde{\mu}$, будем обозначать через $\tilde{T}^{(0)}$ соответствующее распределение, которое называется *распределением дефектности*. Ортогональное дополнение $\tilde{T}_x^{(1)}$ пространства $\tilde{T}_x^{(0)}$ в касательном пространстве $\tilde{T}_x(\tilde{M})$ относительно римановой метрики на $\tilde{M}$ называется

пространством кодефектности в точке x , а его размерность – индексом кодефектности (или просто кодефектностью) многообразия $\widetilde{M}$ в этой точке. Отметим, что $\dim \widetilde{T}_x^{(1)} \geq 2$. Пространство $\widetilde{T}_x^{(1)}$ инвариантно относительно операторов $\widetilde{R}(X, Y)$, а также относительно тензора Риччи $\widetilde{R}_1$. Поскольку пространство $\widetilde{T}_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора Риччи $\widetilde{R}_1$, отвечающих нулевому собственному значению, в каждой точке $x \in \widetilde{M}$ тензор $\widetilde{R}_1$ имеет два инвариантных подпространства, $\widetilde{T}_x^{(0)}$ и $\widetilde{T}_x^{(1)}$, и справедливо следующее разложение в прямую сумму:

$$\widetilde{T}_x(\widetilde{M}) = \widetilde{T}_x^{(0)} + \widetilde{T}_x^{(1)}.$$

Пусть репер $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ выбран так, что $e_i \in \widetilde{T}_x^{(0)}$, $e_\alpha \in \widetilde{T}_x^{(1)}$, $i, j, k = 1, \dots, \mu$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta = \mu + 1, \dots, n$. Тогда $\widetilde{R}(e_B, e_i)e_A = \widetilde{R}_{ABi}^C e_C = 0$, т. е. $\widetilde{R}_{ABi}^C = 0$. Отсюда с учетом свойств тензора $\widetilde{R}$ следует, что среди его компонент отличными от нуля могут быть только компоненты вида $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^\delta$. Таким образом, $\widetilde{\Omega}_\alpha^i = 0$, $\widetilde{\Omega}_i^j = 0$. (Следующие далее рассуждения, вплоть до формулы (2.6), принадлежат авторам статьи [16].) На основании (2.2) имеем $\omega_\beta^i = \widetilde{\Omega}_\alpha^\beta = 0$ или $\widetilde{R}_{\alpha\gamma\delta}^\beta \omega_\beta^i \wedge \omega^\gamma \wedge \omega^\delta = 0$. Фиксируя значения γ и δ и умножая последнее равенство на произведение форм ω^η , $\eta \neq \gamma$, $\eta \neq \delta$, получим $\widetilde{R}_{\alpha\gamma\delta}^\beta \omega_\beta^i \wedge \omega^{\mu+1} \wedge \dots \wedge \omega^n = 0$. Следовательно, $\widetilde{R}_{\alpha\gamma\delta}^\beta \omega_\beta^i = 0 \pmod{\omega^\eta}$. Для каждого значения i число линейно независимых уравнений в этой системе равно $n - \mu$. Таким образом,

$$\omega_i^\beta \equiv 0 \pmod{\omega^\eta}. \quad (2.6)$$

С использованием равенства (2.6) было доказано, что система $\omega^\alpha = 0$, задающая распределение $\widetilde{T}^{(0)}$, вполне интегрируема и что $\widetilde{\Omega}_i^j = 0$. Таким образом, была установлена следующая фундаментальная

ТЕОРЕМА 2.1 [16]. *Пусть индекс дефектности риманова многообразия $\widetilde{M}$ принимает в некоторой окрестности на $\widetilde{M}$ постоянное значение μ . Тогда в этой окрестности распределение $\widetilde{T}^{(0)}$ является интегрируемым, а его интегральное многообразие $\widetilde{M}^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике.*

Отметим, что, в отличие от $\widetilde{T}^{(0)}$, распределение $\widetilde{T}^{(1)}$, вообще говоря, может не быть интегрируемым.

Специально отметим то, что формула (2.6), фигурирующая в [16] под номером (45), при доказательстве теоремы 2.1 играет ключевую роль. Однако наиболее важное следствие формулы (2.6) осталось вне поля зрения авторов статьи [16]. Действительно, поскольку распределение $\widetilde{T}^{(0)}$ задается пфаффовым системой $\omega^\alpha = 0$, то из (2.6) следует, что $\omega_i^\beta = 0$. Сравнивая последнее равенство со вторым из равенств (2.3), приходим к заключению, что вторая фундаментальная форма подмногообразия $\widetilde{M}^{(0)}$ является нулевой. Следовательно, $\widetilde{M}^{(0)}$ является вполне геодезическим в $\widetilde{M}$. Это, однако, не было отмечено в [16]. В дальнейшем вполне геодезичность подмногообразия $\widetilde{M}^{(0)}$ была установлена в [17] с использованием формализма ковариантного дифференцирования.

А. Грей [18] и Р. Мальц [19] исследовали пространство дефектности $\tilde{T}_x^{(0)}$ произвольного кривизненноподобного тензорного поля L на римановом многообразии $\tilde{M}$ (так называется тензорное поле типа $(1, 3)$, которое имеет те же формальные свойства, что и тензорное поле кривизны $\tilde{R}$).

Пусть M является m -мерным подмногообразием евклидова пространства E_n , и пусть α_2 – его вторая фундаментальная форма. Индексом относительной дефектности ν_x подмногообразия M в точке $x \in M$ называется размерность подпространства T'_x касательного пространства $T_x(M)$, определяемого равенством $T'_x = \{X \in T_x(M) : \alpha_2(X, Y) = 0 \ \forall Y \in T_x(M)\}$. Имеет место вложение $T'_x \subset T_x^{(0)}$, где $T_x^{(0)}$ – пространство дефектности подмногообразия M в точке x . Это понятие также было введено в [16]. Известно, что распределение T' интегрируемо (в той области на M , где индекс ν_x является постоянным), а его интегральное многообразие представляет собой плоскость соответствующей размерности в E_n (см., например, [7]). Приведенное выше вложение не является, вообще говоря, строгим. Например, в [7] автором доказано, что в E_n индекс дефектности нормально плоского минимального подмногообразия M в каждой точке равен индексу относительной дефектности, т. е. подпространства T'_x и $T_x^{(0)}$ совпадают.

С. Чженем и Н. Кюйпером [16] доказано, что индексы ν и μ удовлетворяют неравенству $\nu \leq \mu \leq \nu + n - m$. Это неравенство С. Александер и Р. Мальц [20] усилили следующим образом:

$$0 \leq \mu - \nu \leq n - m - k, \quad (2.7)$$

где k – максимальное число взаимно ортогональных подпространств в $T_x^{(1)}(M)$, инвариантных относительно операторов кривизны $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$; здесь ∇ – риманова связность на подмногообразии M .

Риманово многообразие $\tilde{M}$ с ненулевым индексом дефектности в каждой точке x называется *полуэйнштейновым*, если тензор Риччи $\tilde{R}_1$ на каждом инвариантном подпространстве $\tilde{T}_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение. Полуэйнштейновы многообразия были определены автором в [4]. Из приведенного определения следует, что на полуэйнштейновом многообразии $\tilde{M}$ пространство $\tilde{T}_x^{(0)}$ является фактически собственным подпространством тензора Риччи $\tilde{R}_1$, отвечающим нулевому собственному значению.

Выясним геометрический смысл условия полуэйнштейновости.

Пусть риманово многообразие $\tilde{M}$ является полуэйнштейновым, и пусть ортонормированный репер $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ выбран так, что $e_i \in \tilde{T}_x^{(0)}$, $e_\alpha \in \tilde{T}_x^{(1)}$. В этом репере матрица $\|R_{CB}\|$ тензора Риччи имеет диагональный вид с диагональными элементами 0 и ρ , а среди компонент тензора кривизны $\tilde{R}$ отличными от нуля могут быть только компоненты вида $\tilde{R}_{\alpha\delta\gamma}^\beta$. Тогда секционная кривизна $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$ равна $\tilde{R}_{\alpha\beta\alpha}^\beta$ (нет суммирования) и, следовательно,

$$\sum_{\substack{\beta \\ \beta \neq \alpha}} k(e_\alpha \wedge e_\beta) = \tilde{R}_{\alpha\beta\alpha}^\beta = \tilde{R}_{\alpha\alpha} = \rho.$$

Итак, если многообразие $\tilde{M}$ является полуэйнштейновым, то в каждой точке при каждом фиксированном значении индекса α сумма всех секционных

кривизн $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$ принимает одно и то же ненулевое значение (зависящее, вообще говоря, от точки на $\widetilde{M}$). Легко видеть, что верно и обратное: если на $\widetilde{T}_x^{(1)}$ сумма всех секционных кривизн $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$, определяемых произвольными единичными взаимно ортогональными векторами e_α , одна и та же при каждом фиксированном значении α и отлична от нуля, то многообразие $\widetilde{M}$ является полуэйнштейновым. Если $\dim \widetilde{T}_x^{(1)} = 3$, то условие полуэйнштейновости равносильно равенству всех секционных кривизн $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$ между собой. Если $\dim T_x^{(1)} = 2$, то $\widetilde{M}$ является полуэйнштейновым. Римановы многообразия кодефектности два исследованы в [2].

Для того чтобы привести примеры полуэйнштейновых многообразий кодефектности > 2 , необходимо напомнить два определения.

Пусть $\widetilde{M}$ – риманово многообразие с метрикой $\widetilde{ds}^2$, а E_m – евклидово пространство размерности m . Многообразие $E_m \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой прямого произведения, называется *цилиндром над $\widetilde{M}$* . Если $\mathbb{R}^+$ – положительная полуось, то произведение $\mathbb{R}^+ \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой $ds^2 = dt^2 + t^2 \widetilde{ds}^2$, называется *конусом над $\widetilde{M}$* [6]. Следующая теорема дает метод построения полуэйнштейновых многообразий.

ТЕОРЕМА 2.2 [21]. Пусть $\widetilde{M}$ – эйнштейново многообразие с эйнштейновой константой λ . Если $\lambda \leq 0$, то всякий конус над $\widetilde{M}$ является полуэйнштейновым многообразием индекса дефектности 1. Если $\lambda > 0$, то всякий конус над $\widetilde{M}$ является или риччи-плоским или полуэйнштейновым многообразием с таким же индексом дефектности.

В этой теореме $\widetilde{M}$ является вполне омбилическим подмногообразием конуса. В [8] доказано, что в произвольном римановом многообразии условия вполне омбиличности и эйнштейновости интегрального многообразия распределения кодефектности приводят только к классу цилиндров или конусов.

Наконец отметим, что для подмногообразия M в римановом многообразии $\widetilde{M}$ индексом нормальной дефектности в точке $x \in M$ называется размерность $\mu_1(x)$ подпространства $N_x^{(0)}$ в $T_x(M)$, определяемого равенством

$$N_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R^\perp(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\}.$$

Подпространство $N_x^{(0)}$ называется *пространством нормальной дефектности* подмногообразия M в точке x . Оно было введено автором в [22], [23]. Доказано, что $T'_x \subset N_x^{(0)}$. Следующая теорема выявляет важное свойство распределения $N^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 2.3 [23]. Для того чтобы распределение $N^{(0)}$ было интегрируемым (в той области на M , где $\mu_1(x)$ постоянно), необходимо и достаточно, чтобы для любых $X, Y \in N^{(0)}$ и произвольного касательного к M векторного поля Z выполнялось следующее условие:

$$(\overline{\nabla}_X R^\perp)(Y, Z) + (\overline{\nabla}_Y R^\perp)(Z, X) + (\overline{\nabla}_Z R^\perp)(X, Y) = 0,$$

где $\overline{\nabla}$ – связность Ван дер Вардена–Бортолотти. Каждое из следующих условий достаточно для интегрируемости распределения $N^{(0)}$:

(а) охватывающее многообразие $\widetilde{M}$ является пространством постоянной кривизны;

(б) подмногообразие M является омбилическим относительно $(n - m - 1)$ -мерного подрасслоения нормального расслоения, где $n = \dim \widetilde{M}$, $m = \dim M$;

(в) вторая фундаментальная форма α_2 подмногообразия M является кодацциевой, т.е. $(\bar{\nabla}_X \alpha_2)(Y, Z) = (\bar{\nabla}_Y \alpha_2)(X, Z)$ для любых касательных к M векторных полей X, Y, Z ;

(г) тензор кривизны $R^\perp$ является параллельным в связности $\bar{\nabla}$.

§ 3. Нормально плоские подмногообразия в евклидовых пространствах

Поскольку настоящая статья посвящена изучению нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий, то в этом параграфе мы изучим локальную структуру нормально плоских подмногообразий в евклидовых пространствах без каких-либо дополнительных предположений и приведем их общее геометрическое описание. Представленные здесь результаты в дальнейшем будут играть важную роль.

Пусть объемлющее риманово многообразие $\widetilde{M}$ является евклидовым пространством E_n . Тогда некоторые формулы из § 2 видоизменяются. Действительно, поскольку в случае евклидова пространства $\tilde{\Omega}_A^B = \tilde{R}_{ACD}^B = 0$, уравнения (2.5) принимают соответственно следующий вид:

$$R_{ikl}^j = - \sum_{\alpha} h_{i[k}^{\alpha} h_{l]j}^{\alpha}, \quad R_{\alpha kl}^{\beta} = - \sum_i h_{i[k}^{\alpha} h_{l]}^{\beta}.$$

Компоненты R_{ik} тензора Риччи R_1 подмногообразия M определяются по формуле

$$R_{ik} = \sum_{\alpha} (h_{ij}^{\alpha} h_i^{\alpha j} - H^{\alpha} h_{ik}^{\alpha}), \quad (3.1)$$

где $H^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} \delta^{ij}$ – компоненты вектора средней кривизны H , а $h_k^{\alpha j} = h_{kj}^{\alpha}$.

Дифференциальное продолжение второго из уравнений (2.3) по известной схеме (см., например, [3], [9], [10]) приводит к следующей системе соотношений:

$$\bar{\nabla} h_{ij}^{\alpha} = h_{ijk}^{\alpha} \omega^k, \quad h_{ijk}^{\alpha} = h_{ikj}^{\alpha} (= \bar{\nabla}_k h_{ij}^{\alpha}), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} h_{ijk}^{\alpha} \wedge \omega^k &= h_{ij}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} - h_{kj}^{\alpha} \Omega_i^k - h_{ik}^{\alpha} \Omega_j^k, \\ \bar{\nabla} h_{ij}^{\alpha} &= dh_{ij}^{\alpha} + h_{ij}^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha} - h_{kj}^{\alpha} \omega_i^k - h_{ik}^{\alpha} \omega_j^k. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В этих формулах $\bar{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти, т.е. $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$, где ∇ – риманова связность на M , а $\nabla^{\perp}$ – нормальная связность.

Перейдем к изучению локальной структуры нормально плоского подмногообразия в E_n . Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^{\beta} = 0$. Тогда

$$\sum_k h_{ik}^{\alpha} h_{kj}^{\beta} = \sum_k h_{ik}^{\beta} h_{kj}^{\alpha},$$

что равносильно коммутативности всех матриц $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ между собой. Отсюда следует, что в некотором ортонормированном репере они могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij}\|$. Обратное, если все матрицы

$\|h_{ij}^\alpha\|$ в некотором ортонормированном репере одновременно имеют диагональный вид, то они будут коммутировать между собой. Тогда $R_{\alpha ij}^\beta = 0$ и нормальная связность является плоской. Это хорошо известный критерий Картана условия плоской нормальной связности подмногообразия в случае объемлющего пространства постоянной кривизны. Другой, также хорошо известный, критерий плоской нормальной связности подмногообразия можно выразить следующим образом: нормальная связность подмногообразия M в произвольном римановом многообразии является плоской тогда и только тогда, когда нормальные векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельны в нормальном расслоении (см. [12]). Последнее равносильно условию $\omega_\beta^\alpha = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что e_α именно так и выбраны.

Итак, пусть нормальная связность подмногообразия M является плоской, и пусть в некотором адаптированном к M ортонормированном репере все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются *главными векторами кривизны*. Легко видеть, что $H = n_1 + \dots + n_m$.

В настоящем и следующих параграфах с векторами n_i мы будем связывать некоторые распределения. Опишем их конструкцию. Пусть в каждой точке x подмногообразия M имеет всего q различных главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ соответственно, $p_1 + \dots + p_q = m$. Через $F_x^{(\varphi)}$, $\varphi = 1, \dots, q$, обозначим p_φ -мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеет только одно собственное значение кратности p_φ . Это собственное значение мы будем обозначать через $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$. Именно в указанном выше смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим главному вектору кривизны n_φ . Через $F^{(\varphi)}$ будем обозначать соответствующее распределение. Справедливо следующее разложение в прямую сумму: $T_x(M) = F_x^{(1)} + \dots + F_x^{(q)}$. Далее будем предполагать, что в некоторой области на подмногообразии M подпространства $F_x^{(\varphi)}$ имеют постоянные размерности.

Следующая лемма описывает важное свойство распределений $F^{(\varphi)}$.

ЛЕММА 3.1. *Если $\dim F_x^{(\varphi)} = p_\varphi \geq 2$, то распределение $F^{(\varphi)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие представляет собой либо p_φ -мерную плоскость, либо p_φ -мерную сферу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, можем предположить, что $\varphi = 1$. Пусть адаптированный к подмногообразию M ортонормированный репер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так, что первые p_1 векторов принадлежат $F_x^{(1)}$, векторы $e_{p_1+1}, \dots, e_m$ принадлежат ортогональному дополнению $F_x^{(1)}$ в $T_x(M)$, а векторы e_α параллельны в нормальном расслоении, т. е. $\omega_\beta^\alpha = 0$. Индексы будут пробегать следующие значения: $i_1, j_1, k_1 = 1, \dots, p_1$, $a, b, c = p_1 + 1, \dots, m$. Согласно равенству $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$ из соотношения (3.2) получим

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + (\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha) \omega_i^j = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad (3.4)$$

где в левой части нет суммирования по j . Полагая $i = i_1$, $j = a$ в (3.4), будем иметь

$$(\lambda_{i_1}^\alpha - \lambda_a^\alpha) \omega_{i_1}^a = h_{i_1 j_1 a}^\alpha \omega^{j_1} + h_{i_1 a b}^\alpha \omega^b.$$

Поскольку $\lambda_{i_1}^\alpha \neq \lambda_a^\alpha$ при некотором значении α , то $\omega_{i_1}^a = (\lambda_{i_1}^\alpha - \lambda_a^\alpha)^{-1} h_{i_1 j_1 a}^\alpha \omega^{j_1}$ при $\omega^b = 0$. Далее, если в (3.4) положить $i = i_1$, $j = j_1$, $i_1 \neq j_1$ и учесть, что $\lambda_{i_1}^\alpha = \lambda_{j_1}^\alpha$ (это следует из того, что $p_1 \geq 2$), то получим $h_{i_1 j_1 k}^\alpha = 0$. Если же в (3.4) положить $i = j = i_1$, а затем $i = j = j_1$, $i_1 \neq j_1$, то будем иметь

$$d\lambda_{i_1}^\alpha = h_{i_1 i_1 i_1}^\alpha \omega^{i_1} + h_{i_1 i_1 a}^\alpha \omega^a, \quad d\lambda_{j_1}^\alpha = h_{j_1 j_1 j_1}^\alpha \omega^{j_1} + h_{j_1 j_1 a}^\alpha \omega^a.$$

Поскольку в этих равенствах левые части равны, то $h_{i_1 i_1 i_1}^\alpha = h_{j_1 j_1 j_1}^\alpha = 0$, $h_{i_1 i_1 a}^\alpha = h_{j_1 j_1 a}^\alpha = h_{(1)a}^\alpha$, $i_1 \neq j_1$. Таким образом, доказано, что

$$\omega_{i_1}^a = (\lambda_{i_1}^\alpha - \lambda_a^\alpha)^{-1} h_{(1)a}^\alpha \omega^{i_1} \quad (3.5)$$

при $\omega^b = 0$. Теперь с учетом того, что $\omega_{i_1}^\alpha = \lambda_{i_1}^\alpha \omega^{i_1}$ (нет суммирования), легко показать, что пфафова система $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, задающая распределение $F^{(1)}$, вполне интегрируема. Из равенства (3.5) следует, что интегральное многообразие $M^{(1)}$ распределения $F^{(1)}$ является омбилическим относительно направлений e_a . Так как каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет на $F_x^{(1)}$ только одно собственное значение, многообразие $M^{(1)}$ является омбилическим также относительно направлений e_α . Следовательно, $M^{(1)}$ является вполне омбилическим подмногообразием в E_n и представляет собой или p_φ -мерную плоскость, или p_φ -мерную сферу. Лемма доказана.

Не умаляя общности, можем считать, что только на одном из подпространств $F_x^{(\varphi)}$ все матрицы $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеют только нулевые собственные значения, ибо в противном случае на прямой сумме таких подпространств матрицы $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ также будут иметь только нулевые собственные значения. Именно для этого распределения $F^{(\varphi)}$ интегральное многообразие представляет собой p_φ -мерную плоскость, причем, как легко показать, в этом случае условие $p_\varphi \geq 2$ в лемме 3.1 можно заменить на условие $p_\varphi \geq 1$. Также легко показать, что подпространство $F_x^{(\varphi)}$, на котором все матрицы $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеют только нулевые собственные значения, совпадает с пространством относительной дефектности T'_x , определенным в § 2.

Подпространства $F_x^{(\varphi)}$ и $F_x^{(\psi)}$ при $\varphi \neq \psi$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 , т. е. $\alpha_2(X, Y) = 0$ для любого $X \in F_x^{(\varphi)}$ и любого $Y \in F_x^{(\psi)}$. Это следует из того, что все матрицы $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеют диагональный вид. Далее, замечая, что при $p_\varphi = 1$ распределение $F^{(\varphi)}$ также интегрируемо (что легко можно проверить) и его интегральное многообразие представляет собой линию кривизны, можем сформулировать следующую общую лемму.

ЛЕММА 3.2. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M локально несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из плоскости (или прямой), сфер и линий кривизны (отличных от прямых).*

В этой лемме некоторые из компонент ортогональной сопряженной системы могут отсутствовать. Утверждения более общего характера, из которых, в частности, можно извлечь утверждения леммы 3.2, содержатся в работах [24]–[26], где условие плоской нормальной связности заменено более слабыми условиями.

Сохраняя обозначения из § 2, через $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ обозначим пространства дефектности и кодефектности подмногообразия M в точке x . Наша цель – установить связь между пространствами $T_x^{(0)}$, $T_x^{(1)}$ и подпространствами $F_x^{(\varphi)}$, определенными выше. Изучим структуру пространства $T_x^{(0)}$. Как известно (см. § 2),

$T_x^{(0)}$ содержит пространство T'_x , которое по определению фактически совпадает с тем подпространством $F_x^{(\varphi)}$, которое отвечает нулевому главному вектору кривизны. Пусть $T_x^{(0)}$ содержит какое-либо подпространство $F_x^{(\varphi)}$, отличное от T'_x . Если $\dim F_x^{(\varphi)} = p_\varphi \geq 2$, то согласно лемме 3.1 интегральное многообразие распределения $F^{(\varphi)}$ представляет собой p_φ -мерную сферу (напомним, что p_φ – кратность вектора n_φ). Тогда секционные кривизны интегрального многообразия распределения $T^{(0)}$ вдоль этой сферы будут отличны от нуля (действительно, если воспользоваться приведенной ниже формулой (4.3), то получим, что эти секционные кривизны суть $|n_\varphi|^2 \neq 0$). Это противоречит локальной евклидовости интегрального многообразия распределения $T^{(0)}$ (теорема 2.1). Тогда $p_\varphi = 1$ и справедлива следующая

ЛЕММА 3.3. *Если $F_x^{(\varphi)}$ содержится в $T_x^{(0)}$ и отлично от T'_x , то $\dim F_x^{(\varphi)} = p_\varphi = 1$.*

Теперь покажем, что если при некотором фиксированном значении φ подпространство $F_x^{(\varphi)}$ не содержится в $T_x^{(0)}$, то оно пересекается с $T_x^{(0)}$ по подпространству нулевой размерности. Если $\dim F_x^{(\varphi)} = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $\dim F_x^{(\varphi)} \geq 2$, и пусть $\dim(T_x^{(0)} \cap F_x^{(\varphi)}) = 1$ (если $\dim(T_x^{(0)} \cap F_x^{(\varphi)}) \geq 2$, то, как и выше, получим противоречие с локальной евклидовостью интегрального многообразия распределения $T^{(0)}$). Если $X \in T_x^{(0)} \cap F_x^{(\varphi)}$, $Y \in T_x^{(1)} \cap F_x^{(\varphi)}$, то из определения пространства $T_x^{(0)}$ (см. § 2) следует, что секционная кривизна в направлении $X \wedge Y$ равна нулю. Однако, как и выше, можем показать, что эта секционная кривизна есть $|n_\varphi|^2 \neq 0$. Полученное противоречие и доказывает, что $\dim(T_x^{(0)} \cap F_x^{(\varphi)}) = 0$. Поскольку по построению $F_x^{(\varphi)}$ ортогонально ко всем подпространствам $F_x^{(\psi)}$, $\varphi \neq \psi$, содержащимся в $T_x^{(0)}$, то $F_x^{(\varphi)}$ ортогонально $T_x^{(0)}$ и, следовательно, $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(1)}$.

Итак, справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 3.4. *Пространство дефектности $T_x^{(0)}$ нормально плоского подмногообразия M в E_n является прямой суммой пространства относительной дефектности T'_x и некоторых одномерных подпространств $F_x^{(\varphi)}$.*

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если $\dim F_x^{(\varphi)} \geq 2$ для всех $F_x^{(\varphi)}$, отличных от T'_x , то T'_x совпадает с $T_x^{(0)}$ и, следовательно, $\mu = \nu$.*

ЛЕММА 3.5. *Пространство кодефектности $T_x^{(1)}$ нормально плоского подмногообразия M в E_n является прямой суммой одномерных и многомерных подпространств $F_x^{(\varphi)}$, отличных от T'_x .*

Леммы 3.4, 3.5 описывают структуру пространств $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ в самом общем случае и позволяют сформулировать

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любого нормального вектора $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ нормально плоского подмногообразия M в E_n пространства $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ являются инвариантными подпространствами матрицы $\|\xi_\alpha h_{ij}^\alpha\|$, где $\xi_\alpha = \xi^\alpha$.*

Поскольку распределение $T^{(0)}$ является геодезическим, на основании теоремы 2.1 и лемм 3.3, 3.4 можно сформулировать следующее общее утверждение.

ЛЕММА 3.6. *Интегральное многообразие распределения дефектности $T^{(0)}$ нормально плоского подмногообразия M является локально евклидовым нормально плоским подмногообразием в E_n и допускает ортогональную сопряженную систему, состоящую из плоскости (или прямой) и линий кривизны (отличных от прямых). Эта система является проекцией естественной ортогональной сопряженной системы, которая существует на M .*

Доказанные выше леммы 3.3–3.5 дают основание для следующего определения: главный вектор кривизны n_φ будем называть *регулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(1)}$, и *сингулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(0)}$. Размерность линейной оболочки регулярных векторов n_φ будем называть *индексом регулярности* и обозначать через i_R , а число ненулевых сингулярных векторов n_φ – *индексом сингулярности* подмногообразия M и обозначать через i_S . В следующем параграфе мы покажем, что регулярные и сингулярные главные векторы кривизны обладают разными свойствами.

§ 4. Свойства главных векторов кривизны и редукция условия полуэйнштейновости

Пусть M является m -мерным нормально плоским подмногообразием в E_n , и пусть все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ в некотором ортонормированном репере одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Подставляя $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$ в (3.1), получим

$$R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}, \quad \rho_i = \sum_{\alpha} [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha]. \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что матрица $\|R_{ik}\|$ одновременно с матрицами $\|h_{ij}^\alpha\|$ приводится к диагональному виду. Следовательно, в случае плоской нормальной связности матрицы $\|R_{ik}\|$ и $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой. Этот факт впервые был установлен и использован автором в [27].

Выразим слагаемые в (4.1) через скалярные произведения главных векторов кривизны. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в E_n . Тогда

$$\sum_{\alpha} (\lambda_j^\alpha)^2 = \langle n_j, n_j \rangle = |n_j|^2, \quad \sum_{\alpha} H^\alpha \lambda_j^\alpha = \langle H, n_j \rangle.$$

На основании (4.1) имеем

$$\rho_j = \langle n_j, n_j \rangle - \langle H, n_j \rangle = |n_j|^2 - |H| |n_j| \cos \varphi_j, \quad (4.2)$$

где φ_j – угол между векторами H и n_j .

Через скалярные произведения векторов n_i мы можем выразить также секционные кривизны $k(e_i \wedge e_j)$. Действительно, поскольку репер ортонормированный, эта кривизна равна R_{ijj}^j , где нет суммирования по j . Путем прямого вычисления получаем

$$R_{ijj}^j = \sum_{\alpha} (h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha - (h_{ij}^\alpha)^2) = \sum_{\alpha} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha.$$

Следовательно,

$$k(e_i \wedge e_j) = \sum_{\alpha} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha = \langle n_i, n_j \rangle. \quad (4.3)$$

В [8] (см. также [3]) доказано, что условия полупараллельности тензора Риччи R_1 и второй фундаментальной формы α_2 подмногообразия M в E_n эквивалентны соответственно выполнению следующих равенств:

$$R_{kj}\Omega_i^k + R_{ik}\Omega_j^k = 0, \quad h_{kj}^\alpha\Omega_i^k + h_{ik}^\alpha\Omega_j^k - h_{ij}^\beta\Omega_\beta^\alpha = 0.$$

Отметим, что изучению подмногообразий с полупараллельной второй фундаментальной формой посвящена монография [3].

Легко показать (см. [8]), что если M является нормально плоским, то последние равенства принимают соответственно вид

$$(|n_j|^2 - |n_k|^2 + \langle H, n_k - n_j \rangle) \langle n_j, n_k \rangle = 0, \quad (4.4)$$

$$(n_j - n_k) \langle n_j, n_k \rangle = 0 \quad (4.5)$$

для любых j, k , $j \neq k$. Поскольку $H = n_1 + \dots + n_m$, условие (4.4) можем преобразовать к эквивалентной форме

$$\langle H - (n_j + n_k), n_j - n_k \rangle \langle n_j, n_k \rangle = 0$$

для любых j, k , $j \neq k$. На основании этого равенства можем сформулировать следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. *Нормально плоское подмногообразие M в E_n имеет полупараллельный тензор Риччи тогда и только тогда, когда любые его два различных главных вектора кривизны n_j и n_k ортогональны или удовлетворяют условию $\langle H - (n_j + n_k), n_j - n_k \rangle = 0$. Если в последнем случае n_j и n_k однократны, то их разность ортогональна сумме остальных главных векторов кривизны.*

В лемме 4.1 равенство $\langle H - (n_j + n_k), n_j - n_k \rangle = 0$ равносильно выполнению условия (см. (4.4))

$$|n_j|^2 - |n_k|^2 = \langle H, n_j - n_k \rangle \quad (4.6)$$

при любых j, k , $j \neq k$.

На основании леммы 4.1 и равенства (4.6) заключаем, что ненулевые главные векторы кривизны нормально плоского подмногообразия с полупараллельным тензором Риччи разбиваются на группы, которые обладают следующими свойствами:

(а) любые два вектора, принадлежащие разным группам, взаимно ортогональны;

(б) любые два вектора, принадлежащие одной и той же группе, удовлетворяют условию (4.6).

Из (4.6) следует, что $|n_j| = |n_k|$ тогда и только тогда, когда разность $n_j - n_k$ принадлежат некоторой гиперплоскости в $T_x^\perp(M)$, ортогональной вектору H . В частности, если $H = 0$, то $|n_j| = |n_k|$ для всех ненулевых векторов n_j и n_k , $j \neq k$.

Пусть $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ – пространства дефектности и кодефектности подмногообразия M в точке x . Пусть $\dim T_x^{(0)} = \mu$, $\dim T_x^{(1)} = m - \mu$, и пусть адаптированный к M ортонормированный репер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так, что $e_a \in T_x^{(1)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, где $a, b, c = 1, \dots, p = m - \mu$, $r, s, t = p + 1, \dots, m$, $\alpha = m + 1, \dots, n$. Поскольку $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ инвариантны относительно тензора Риччи R_1 , а также относительно матриц $\|h_{ij}^\alpha\|$ (последнее следует из лемм 3.4, 3.5 и определения подпространств $F_x^{(\varphi)}$), то при таком

выборе репера матрицы $\|R_{ik}\|$ и $\|h_{ij}^\alpha\|$ будут иметь блочно-диагональный вид. В силу плоской нормальной связности матрица $\|R_{ij}\|$ одновременно с матрицами $\|h_{ij}^\alpha\|$ приводится к диагональному виду, что следует из (4.1). Следовательно, путем выбора векторов репера в $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ мы можем матрицы $\|R_{ik}\|$ и $\|h_{ij}^\alpha\|$ одновременно привести к диагональному виду. Поэтому в дальнейшем будем считать, что матрицы $\|R_{ik}\|$ и $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеют диагональный вид.

Поскольку тензор Риччи имеет на $T_x^{(0)}$ только нулевое собственное значение, то $\rho_r = 0$. Из (4.2) следует, что $|n_r|(|n|_r - |H| \cos \varphi_r) = 0$, где φ_r – угол между n_r и H . Следовательно, или $n_r = 0$, или $|n_r| = |H| \cos \varphi_r$. Итак, справедлива следующая

ЛЕММА 4.2. *Ненулевые главные векторы кривизны n_r нормально плоского неминимального подмногообразия M в E_n образуют с вектором средней кривизны H острые углы и имеют равные модули тогда и только тогда, когда все эти углы равны между собой.*

Пусть из векторов n_r первые ν нулевые, т.е. $n_{p+1} = \dots = n_{p+\nu} = 0$, $n_{p+\nu+1} \neq 0, \dots, n_m \neq 0$. Тогда индекс относительной дефектности подмногообразия M равен ν и, кроме того, $|n_r| = |H| \cos \varphi_r$ при $r = p + \nu + 1, \dots, m$. Покажем, что для этих же значений индекса r векторы n_r имеют кратность 1. Действительно, поскольку $T'_x \subset T_x^{(0)}$, то $T_x^{(0)}$ можем представить в виде прямой суммы: $T_x^{(0)} = T'_x + (T'_x)^\perp$, где $(T'_x)^\perp$ – ортогональное дополнение к T'_x в $T_x^{(0)}$. Тогда для векторов e_r можем провести дополнительную адаптацию, выбрав их так, что $e_{p+1}, \dots, e_{p+\nu} \in T'_x$, $e_{p+\nu+1}, \dots, e_m \in (T'_x)^\perp$. При таком выборе репера вектор e_r , $r = p + \nu + 1, \dots, m$, будет собственным вектором матрицы $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ с собственным значением λ_r^α . Отсюда следует, что подпространство $F_x^{(\varphi)}$, которое соответствует вектору n_r (см. § 3), $r = p + \nu + 1, \dots, m$, содержится в $T_x^{(0)}$. Тогда его размерность, которая совпадает с кратностью n_r , равна 1 (лемма 3.3), а вектор n_r является сингулярным. Далее, если в выбранном выше репере вычислить компоненты тензора кривизны, то получим $R_{rkl}^s = 0$, $R_{rkl}^a = 0$. Из этих равенств следует, что секционные кривизны $k(e_r \wedge e_s)$, $k(e_r \wedge e_a)$ равны нулю. На основании (4.3) заключаем, что векторы n_r ортогональны друг другу, а также векторам n_a . Таким образом, сингулярные главные векторы кривизны ортогональны друг другу, а также регулярным главным векторам кривизны. Поскольку число ненулевых векторов n_r есть $\mu - \nu = i_S$, а коразмерность подмногообразия равна $n - m$, то получаем следующее двойное неравенство:

$$0 \leq \mu - \nu + i_R \leq n - m, \quad (4.7)$$

где $i_R = \dim((n_a))$ – индекс регулярности. Неравенство (4.7) дополняет неравенство (2.7) для случая нормально плоского подмногообразия M в E_n . Неравенство (4.7) имеет простой геометрический смысл: ранг системы главных векторов кривизны нормально плоского подмногообразия в E_n не превосходит коразмерности подмногообразия. Тем не менее, учитывая структуру среднего члена неравенства (4.7), из последнего (так же, как и из неравенства (2.7)) можно извлечь ряд полезных следствий. Например, если $n - m = 1$, то или $i_R = 0$ и $\mu - \nu \leq 1$, или $\dim((n_a)) = 1$ и $\mu = \nu$. Поскольку в первом случае гиперповерхность является локально евклидовой, а во втором случае не является, мы приходим к следующему заключению (см. также [11, гл. 7, § 6]):

а) если гиперповерхность в E_n не является локально евклидовой, то ее индекс дефектности равен индексу относительной дефектности (равенство $\mu = \nu = 0$ не исключается);

б) если гиперповерхность в E_n является локально евклидовой, то $\mu = m$, и поэтому $m - \nu \leq 1$; тогда $m - 1 \leq \nu \leq m$ и, следовательно, локально евклидова гиперповерхность представляет собой гиперплоскость (при $\nu = m$) или является гиперповерхностью ранга 1 (при $\nu = m - 1$); в частности, если $\nu = 0$, т. е. гиперповерхность не содержит прямых, то $m = 1$ и гиперповерхность представляет собой кривую на плоскости.

Аналогично можно рассмотреть случай $n - m = 2$ и т. д.

Пусть подмногообразие M является полуэйнштейновым, что равносильно выполнению следующих равенств:

$$\rho_r = 0, \quad \rho_a = \rho (\neq 0). \quad (4.8)$$

Изучим свойства главных векторов кривизны n_a . Случай, когда $H = 0$, подробно рассмотрен автором в [9], [10]. В этом случае условие полуэйнштейновости $\rho_a = \rho$ равносильно условию $|n_a| = \sqrt{\rho}$ для любого a , что непосредственно следует из (4.2). Таким образом, при $H = 0$ векторы n_a имеют равные модули и, кроме того, $n_r = 0$, что равносильно условию $\rho_r = 0$.

Пусть $H \neq 0$. Поскольку $\rho_a = \rho_b = \rho$ при $a \neq b$, то на основании (4.2) имеем

$$\rho = |n_a|^2 - |H| |n_a| \cos \varphi_a, \quad (4.9)$$

где φ_a – угол между n_a и H . Это равносильно условию $\langle H - (n_a + n_b), n_a - n_b \rangle = 0$, $a \neq b$.

На основании (4.8), (4.9) и (4.2) можем сформулировать следующий критерий полуэйнштейновости нормально плоского подмногообразия в терминах главных векторов кривизны.

ЛЕММА 4.3. Пусть главные векторы кривизны n_a и n_r нормально плоского неминимального подмногообразия M в E_n удовлетворяют следующим условиям:

(а) $|n_r|^2 - |H| |n_r| \cos \varphi_r = 0$;

(б) n_a имеют равные модули, образуют с H угол φ и $\tau^2 - |H| \tau \cos \varphi \neq 0$, где $\tau = |n_a|$.

Тогда M является полуэйнштейновым подмногообразием.

Отметим, что если $\mu = \nu$, т. е. индекс дефектности подмногообразия M равен индексу его относительной дефектности, то $n_r = 0$ для любого r и условие (а) леммы 4.3 выполняется. Укажем случай, когда векторы n_a имеют равные модули и образуют с H равные углы. Действительно, если рассматривать уравнение (4.9) как квадратное уравнение относительно $|n_a|$ и предположить, что $|H|^2 \cos^2 \varphi_a + 4\rho = 0$ для любого значения a , то получим $\cos \varphi_a = \pm \cos \varphi_b$ при $a \neq b$. Пусть $\cos \varphi_a = \cos \varphi_b = \cos \varphi$, т. е. $\varphi_a = \varphi_b = \varphi$ для любых a и b , $a \neq b$. Тогда

$$\rho < 0, \quad \cos \varphi = \frac{2\sqrt{-\rho}}{|H|}, \quad |n_a| = \sqrt{-\rho}.$$

Следовательно, векторы n_a имеют равные модули и образуют с H равные острые углы.

Пусть подмногообразие M является полуэйнштейновым, и пусть векторы n_a имеют равные модули. Тогда из (4.9) следует, что все они образуют с H равные

углы. Если подмногообразие M является полуэйнштейновым и для любого a выполнено $\varphi_a = \varphi$, то из (4.9) следует, что $|n_a|$ является корнем уравнения $z^2 - |H|z \cos \varphi - \rho = 0$. Если это уравнение имеет только один положительный корень, то векторы n_a имеют равные модули. Если же это уравнение имеет два различных положительных корня, то множество векторов n_a разбивается на две группы, которые обладают следующими свойствами:

- (а) векторы, принадлежащие одной и той же группе, имеют равные модули;
- (б) для всяких двух векторов n_a и n_b из разных групп выполняются следующие условия:

$$|n_a| \neq |n_b|, \quad |n_a| + |n_b| = |H| \cos \varphi, \quad |n_a| |n_b| = -\rho.$$

Итак, справедлива следующая

ЛЕММА 4.4. *Если главные векторы кривизны n_a нормально плоского неминимального полуэйнштейнова подмногообразия M в E_n имеют равные модули, то они образуют равные углы с вектором средней кривизны H . Обратно, если векторы n_a образуют с H равные углы, то либо все они имеют равные модули, либо разбиваются на две группы, которые обладают указанными выше свойствами (а) и (б).*

Пусть M – полуэйнштейново подмногообразие. Поскольку $H = n_1 + \dots + n_m$, в силу $\langle n_a, n_r \rangle = 0$ и на основании (4.2) имеем

$$\rho = - \sum_{\substack{b \\ b \neq a}} \langle n_a, n_b \rangle \quad (4.10)$$

при любом фиксированном значении a . Это условие эквивалентно условию полуэйнштейновости M и имеет тот же геометрический смысл, который был указан в конце § 2: в каждой точке при каждом фиксированном значении индекса a сумма всех секционных кривизн $k(e_a \wedge e_b)$ принимает одно и то же значение (зависящее, вообще говоря, от точки на M).

Пусть подмногообразие M является полуэйнштейновым, и пусть главные векторы кривизны n_a имеют равные модули, т. е. $|n_a| = \sqrt{\tau}$ для любого значения a . Тогда в силу (4.2) имеем $\rho = \tau - \langle H, n_a \rangle$ и, следовательно, величина $\langle H, n_a \rangle = \sigma$ также не зависит от значения индекса a . Поскольку $H = n_1 + \dots + n_m$ и $\langle n_a, n_r \rangle = 0$, имеем

$$\langle n_a, H \rangle = \sum_b \langle n_a, n_b \rangle = \sum_b \tau \cos \theta_{ab} = \sigma, \quad (4.11)$$

где θ_{ab} – угол между векторами n_a и n_b . Пусть число главных векторов кривизны n_a с учетом их кратностей равно q ($q \geq 2$), т. е. имеем векторы $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ соответственно ($p_1 + \dots + p_q = m - \mu$). Поскольку $H = p_1 n_1 + \dots + p_q n_q + \tilde{H}$, где через $\tilde{H}$ обозначена сумма главных векторов кривизны n_r , и $\langle n_\varphi, n_r \rangle = 0$, $\varphi, \psi = 1, \dots, q$, то равенство (4.11) принимает следующий вид:

$$\sum_{\psi} p_{\psi} \cos \theta_{\varphi\psi} = \frac{\sigma}{\tau}. \quad (4.12)$$

Пусть все углы между векторами n_φ попарно равны, т. е. $\theta_{\varphi\psi} = \theta$. Тогда получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} p_1 + (p_2 + \dots + p_q) \cos \theta &= \frac{\sigma}{\tau}, \\ p_2 + (p_1 + \dots + p_q) \cos \theta &= \frac{\sigma}{\tau}, \\ &\dots\dots\dots \\ p_q + (p_1 + \dots + p_{q-1}) \cos \theta &= \frac{\sigma}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Складывая все равенства, имеем

$$\cos \theta = \frac{q\sigma}{\tau(q-1)(m-\mu)} - \frac{1}{q-1}. \quad (4.14)$$

Таким образом, если углы между векторами n_φ попарно равны θ , то $\cos \theta$ определяется по формуле (4.14). Покажем, что в этом случае $p_1 = \dots = p_q$. Действительно, если приравнять первые два уравнения системы (4.13) и учесть, что векторы $n_1, \dots, n_q$ различны и имеют равные модули, т. е. $\cos \theta \neq 1$, то получим, что $p_1 = p_2$. Аналогично доказывается, что $p_1 = p_3, \dots, p_1 = p_q$. Таким образом, если углы между векторами $n_1, \dots, n_q$ попарно равны, то $p_1 = \dots = p_q$, т. е. векторы $n_1, \dots, n_q$ имеют одинаковые кратности.

Пусть $q = 3$. Тогда система (4.12) сводится к следующей системе:

$$\begin{aligned} p_2 \cos \theta_{12} + p_3 \cos \theta_{13} &= \frac{\sigma}{\tau} - p_1, \\ p_1 \cos \theta_{12} + p_3 \cos \theta_{23} &= \frac{\sigma}{\tau} - p_2, \\ p_1 \cos \theta_{13} + p_2 \cos \theta_{23} &= \frac{\sigma}{\tau} - p_3. \end{aligned}$$

Если $\cos \theta_{12}, \cos \theta_{13}, \cos \theta_{23}$ принять за неизвестные, то детерминант системы равен $-2p_1p_2p_3$ и, следовательно, отличен от нуля. В этом случае $\cos \theta_{12}, \cos \theta_{13}, \cos \theta_{23}$ определяются единственным образом по кратностям p_1, p_2, p_3 и отношению $\frac{\sigma}{\tau}$. Если $q \geq 4$, то в аналогичной системе число неизвестных превосходит число уравнений и косинусы углов между векторами, вообще говоря, не определяются единственным образом.

§ 5. Примеры полуэйнштейновых подмногообразий с одним и двумя ненулевыми главными векторами кривизны

В настоящем параграфе в качестве примеров будут рассмотрены нормально плоские подмногообразия в E_n с одним ненулевым главным вектором кривизны и некоторые классы подмногообразий с двумя ненулевыми главными векторами кривизны при произвольной коразмерности. При этом будут выделены полуэйнштейновы подмногообразия и продемонстрированы технические трудности, которые возникают при их изучении.

Пусть в евклидовом пространстве E_n m -мерное ($m \geq 2$) нормально плоское подмногообразие M имеет только один главный вектор кривизны n_1 . Тогда его кратность равна m . Если $n_1 = 0$, то M является m -мерной плоскостью. Если $n_1 \neq 0$, то M – вполне омбилическое подмногообразие, т. е. m -мерная сфера. В первом случае $\mu = m$, а во втором $\mu = 0$.

Пусть $0 < \mu < m$ и M имеет ненулевой главный вектор кривизны n_1 кратности p_1 и нулевой главный вектор кривизны кратности $m - p_1$. Пусть $F_x^{(1)}$ – собственное подпространство, соответствующее вектору n_1 (см. §3). Известно (леммы 3.4, 3.5), что $F_x^{(1)} \subset T_x^{(0)}$ или $F_x^{(1)} \subset T_x^{(1)}$. В первом случае $T_x^{(1)}$ сводится к нулевому подпространству и M будет локально евклидовым. Во втором случае $F_x^{(1)}$ и $T_x^{(1)}$ будут совпадать (тогда $\dim F_x^{(1)} \geq 2$, поскольку $\dim T_x^{(1)} \geq 2$), т.е. $\mu = \nu$ и, кроме того, распределение $T^{(1)}$ будет интегрируемым, а его интегральное многообразие будет сферой размерности $p_1 = m - \mu$, которую обозначим через $S^{m-\mu}$. В рассматриваемом случае из (4.2) следует (4.7) и M является полуэйнштейновым. Поскольку выполняются также условия (4.5), то M имеет полупараллельную вторую фундаментальную форму. Приведем полное геометрическое описание подмногообразия M . Пусть адаптированный к M ортонормированный репер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так, что $e_a \in T_x^{(0)}$, $e_r \in T_x^{(1)}$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, где $a, b, c = 1, \dots, \mu$, $r, s, t = \mu + 1, \dots, m$, $\alpha, \beta = m + 1, \dots, n$. В этом репере каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет следующий вид:

$$\|h_{ij}^\alpha\| = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda^\alpha & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda^\alpha \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где 0 имеет кратность $\mu \geq 1$, λ^α имеет кратность $p_1 \geq 2$ и $\lambda^\alpha \neq 0$ хотя бы при одном значении индекса α .

Поскольку $\mu = \nu$, то $T_x^{(0)}$ является собственным подпространством, соответствующим нулевому главному вектору кривизны. Тогда распределение $T^{(0)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие является μ -мерной плоскостью E_μ (см. §3). Пусть распределения $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ параллельны на M . Поскольку $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы (это следует из вида (5.1) матриц $\|h_{ij}^\alpha\|$), то $M = E_\mu \times S^{m-\mu}$ согласно критерию Дж. Мура [28], т.е. M является цилиндром над сферой (локально). Легко показать, что в этом случае вторая фундаментальная форма параллельна. Пусть $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ не являются параллельными на M . Поскольку $\|h_{ij}^\alpha\| = \|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$, то на основании (2.3) и (3.2) получим

$$\begin{aligned} \omega^\alpha &= 0, & \omega_i^\alpha &= \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \\ d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i &= h_{ij}^\alpha \omega^j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где в левой части (5.2) нет суммирования по i . В выбранном репере имеем $n_a = 0$, $n_r = n_s$ при $r \neq s$ и, следовательно, $\lambda_a^\alpha = 0$, $\lambda_r^\alpha = \lambda_s^\alpha = \lambda^\alpha$ при $r \neq s$. Придавая в (5.2) индексам различные значения, получим

$$\begin{aligned} h_{abc}^\alpha &= h_{abr}^\alpha = h_{rrr}^\alpha = 0, & h_{rsa}^\alpha &= h_{rst}^\alpha = 0, & r \neq s, & h_{rra}^\alpha &= h_{ssa}^\alpha, & r \neq s, \\ d\lambda^\alpha &= h_a^\alpha \omega^a, & \lambda^\alpha \omega_r^\alpha &= h_a^\alpha \omega^r, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $h_a^\alpha = h_{rra}^\alpha$. Так как $n_1 \neq 0$, то $\lambda^\alpha \neq 0$ при некотором значении α . Если при этом $h_a^\alpha = 0$ для любого a , то $\omega_r^\alpha = 0$ и распределения $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ параллельны

на M . Поскольку этот случай уже рассмотрен, будем предполагать, что $h_a^\alpha \neq 0$ при некоторых значениях индексов. Если преобразовать систему (5.3) к виду

$$d \ln |\lambda^\alpha| = F_a \omega^a, \quad \omega_r^\alpha = F_a \omega^a, \quad F_a = \frac{h_a^\alpha}{\lambda^\alpha},$$

и продифференцировать внешним образом, то получим

$$dF_a - F_b \omega_a^b = Q_{ac} \omega^c, \quad Q_{ac} = Q_{ca}, \quad dF_a - F_b \omega_a^b - F_a F_b \omega^b = P_{ar} \omega^r, \quad P_{ar} = P_{ra}.$$

Следовательно, $P_{ar} = 0$, $Q_{ab} = F_a F_b$, $dF_a - F_b \omega_a^b = F_a F_b \omega^b$. Рассуждая далее, как и в [9], [10] (аналогичные рассуждения приводятся и в § 6 при доказательстве теоремы 6.1), получим, что M локально является прямым произведением $(\mu - 1)$ -мерной плоскости $E_{\mu-1}$ и конуса, построенного над сферой размерности $m - \mu$. Это подмногообразие определяется следующей вполне интегрируемой дифференциальной системой:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_a^\alpha = 0, \quad \omega_a^b = 0, \quad \omega_r^\alpha = \lambda^\alpha \omega^r, \\ d \ln |\lambda^\alpha| = \eta \omega^m, \quad d\eta = \eta^2 \omega^\mu, \quad \omega_r^\mu = \eta \omega^r, \quad \omega_r^a = 0, \quad a \neq \mu,$$

где

$$\eta = \frac{1}{C - x^\mu}, \quad \lambda^\alpha = \frac{C^\alpha}{C - x^\mu}.$$

В последних формулах x^μ – координата вдоль образующей конуса, а C , C^α – постоянные, причем $C^\alpha \neq 0$ хотя бы при одном значении α . Таким образом, если в E_n нормально плоское подмногообразие M имеет только один ненулевой главный вектор кривизны, то оно локально является или сферой, или локально евклидовым подмногообразием (но не плоскостью), или цилиндром над сферой, или конусом над сферой, или прямым произведением плоскости и конуса над сферой.

В последних трех случаях M является полуэйнштейновым подмногообразием, однако во всех случаях M имеет полупараллельный тензор Риччи.

Пусть в E_n m -мерное нормально плоское подмногообразие M имеет два ненулевых главных вектора кривизны n_1 , n_2 ($n_1 \neq n_2$) кратностей p_1 и p_2 соответственно и нулевой главный вектор кривизны кратности ν . Тогда $\mu \geq \nu$, и пусть $F_x^{(1)}$, $F_x^{(2)}$ и $F_x^{(0)}$ обозначают собственные подпространства в $T_x(M)$, соответствующие векторам n_1 , n_2 и нулевому главному вектору кривизны. Как известно, $\dim F_x^{(1)} = p_1$, $\dim F_x^{(2)} = p_2$, $\dim F_x^{(0)} = \nu$ и $F_x^{(0)} \subseteq T_x^{(0)}$.

Пусть M имеет полупараллельный тензор Риччи, т. е. $\langle H - (n_1 + n_2), n_1 - n_2 \rangle \times \langle n_1, n_2 \rangle = 0$ (см. § 4). Если $\langle n_1, n_2 \rangle = 0$, то выполняется условие (4.5) и M является полусимметрическим. Этот класс подмногообразий исследован и геометрически описан в [3]. Пусть $\langle H - (n_1 + n_2), n_1 - n_2 \rangle = 0$. Поскольку $H = p_1 n_1 + p_2 n_2$, то

$$(p_1 - 1)|n_1|^2 + (p_2 - p_1)\langle n_1, n_2 \rangle - (p_2 - 1)|n_2|^2 = 0.$$

Пусть $p_1 = p_2 = 1$. Тогда $\dim F_x^{(1)} = \dim F_x^{(2)} = 1$. Если $F_x^{(1)} \subset T_x^{(0)}$ или $F_x^{(2)} \subset T_x^{(0)}$, то M является локально евклидовым. Если $F_x^{(1)} \subset T_x^{(1)}$ и $F_x^{(2)} \subset T_x^{(1)}$, то кодефектность M равна двум, поскольку $F_x^{(0)} \subset T_x^{(0)}$, и, следовательно, $T_x^{(1)} = F_x^{(1)} + F_x^{(2)}$. Как известно, каждое подмногообразие кодефектности два является полуэйнштейновым.

Рассмотрим случай, когда $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2$. Тогда $\mu = \nu$ и $T_x^{(1)} = F_x^{(1)} + F_x^{(2)}$. Поскольку M имеет полупараллельный тензор Риччи, можно применить следующее утверждение, доказанное автором в [9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Если нормально плоское подмногообразие M в E_n имеет полупараллельный тензор Риччи и $\mu = \nu$, то M локально разлагается в прямое произведение двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых нормально плоских подмногообразий.*

Поскольку $\dim M \geq 5, p_1 + p_2 + \mu \geq 5$, и M не является эйнштейновым (так как $\mu \geq 1$), то оно или полуэйнштейново, или разлагается в прямое произведение, как указано выше. Пусть $p_1 = p \geq 2, p_2 = q \geq 2$ и M является полуэйнштейновым. Последнее равносильно тому, что в каждой точке на M векторы $H - (n_1 + n_2)$ и $n_1 - n_2$ ортогональны. Пусть n_1 и n_2 линейно зависимы, т. е. $n_2 = kn_1$, где $k \neq 1$, поскольку $n_1 \neq n_2$. Тогда

$$\langle H - n_1 - n_2, n_1 - n_2 \rangle = (1 - k)((p - 1) + (q - 1)k)|n_1|^2 = 0$$

и, следовательно, $k = \frac{p-1}{1-q}$. Такой случай подробно рассмотрен в [8], и потому далее мы будем предполагать, что n_1 и n_2 линейно независимы. Пусть ортонормированный репер $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ выбран так, что $e_{i_1} \in F_x^{(1)}, e_{i_2} \in F_x^{(2)}, e_r \in T_x^{(0)}$ ($T_x^{(0)}$ совпадает с $F_x^{(0)}$). Индексы будут пробегать следующие значения:

$$\begin{aligned} i, j, k &= 1, \dots, m, & i_1, j_1, k_1 &= 1, \dots, p_1, & i_2, j_2, k_2 &= p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2, \\ r, s, t &= p_1 + p_2 + 1, \dots, m, & \alpha, \beta, \gamma &= m + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть нормальные векторы e_{m+1}, e_{m+2} выбраны так, что вектор e_{m+1} коллинеарен вектору $n_1 - n_2$, а вектор e_{m+2} коллинеарен вектору $n_1 + n_2 - H$. Тогда

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= (\lambda_1^{m+1} - \lambda_2^{m+1})e_{m+1}, & \lambda_1^\beta &= \lambda_2^\beta, & \beta &\neq m + 1, \\ n_1 - n_2 - H &= ((1 - p)\lambda_1^{m+2} + (1 - q)\lambda_2^{m+2})e_{m+2}, \\ \lambda_2^{m+1} &= \frac{p-1}{1-q}\lambda_1^{m+1}, & \lambda_2^\gamma &= \frac{p-1}{1-q}\lambda_1^\gamma, & \gamma &\neq m + 1, m + 2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lambda_1^{m+2} = \lambda_2^{m+2}, \lambda_1^\gamma = \lambda_2^\gamma = 0$ при $\gamma = m + 3, \dots, n$. Таким образом,

$$\begin{aligned} n_1 &= \lambda_1^{m+1}e_{m+1} + \lambda_1^{m+2}e_{m+2}, & n_2 &= \frac{p-1}{1-q}\lambda_1^{m+1}e_{m+1} + \lambda_1^{m+2}e_{m+2}, \\ H &= \frac{p-1}{1-q}\lambda_1^{m+1}e_{m+1} + (p_1 + p_2)\lambda_1^{m+2}e_{m+2}. \end{aligned}$$

На подмногообразии M выполняются условия

$$\begin{aligned} \omega^\alpha &= 0, & \omega_i^\alpha &= \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \\ (d\lambda_i^\alpha) \delta_{ij} &+ \lambda_i^\beta \delta_{ij} \omega_\beta^\alpha + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i &= \lambda_{ijk}^\alpha \omega^k, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где в третьем слагаемом левой части нет суммирования по i . Далее будем считать, что $\lambda_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_\varphi^\alpha, \lambda_r^\alpha = 0$, где $\varphi, \psi = 1, 2$. Следовательно, $\omega_r^\alpha = 0, \omega_i^\gamma = 0$ при $\gamma = m + 3, \dots, n$. Если в (5.4) положить:

- 1) $i = i_\varphi, j = j_\varphi, i_\varphi \neq j_\varphi$, то получим $h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0$;
- 2) $i = r, j = s$, то будем иметь $h_{rsk}^\alpha = 0$;
- 3) $i = r, j = j_\varphi$, то придем к соотношению

$$\lambda_\varphi^\alpha \omega_{j_\varphi}^r = h_{rj_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega_{j_\varphi}^{j_\varphi} + h_{rj_\varphi i_\psi}^\alpha \omega_{i_\psi}^{j_\varphi}, \quad \psi = \varphi, \quad (5.5)$$

где в правой части нет суммирования по j_φ ;

- (4) $i = i_1, j = j_2$, то получим

$$(\lambda_2^\alpha - \lambda_1^\alpha) \omega_{j_2}^{i_1} = h_{i_1 j_2 i_1}^\alpha \omega^{i_1} + h_{i_1 j_2 j_2}^\alpha \omega^{j_2} + h_{i_1 j_2 r}^\alpha \omega^r, \quad (5.6)$$

где в правой части нет суммирования по индексам i_1 и j_2 ;

- 5) $i = j = i_\varphi$, затем $i = j = j_\varphi, i_\varphi \neq j_\varphi$, то будем иметь

$$d\lambda_\varphi^\alpha + \lambda_\varphi^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha \omega^{i_\varphi} + h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r, \quad \psi \neq \varphi, \quad (5.7)$$

$$d\lambda_\varphi^\alpha + \lambda_\varphi^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega^{j_\varphi} + h_{j_\varphi j_\varphi j_\psi}^\alpha \omega^{j_\psi} + h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha \omega^r, \quad \psi \neq \varphi. \quad (5.8)$$

Из (5.6) следует, что $h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha = h_{i_\varphi j_\psi r}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$, где $\alpha = m+2, \dots, n$ (поскольку $\lambda_1^\alpha = \lambda_2^\alpha$ при этих же значениях α). Сравнивая (5.7) и (5.8), получаем $h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = 0, h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi j_\psi}^\alpha, \varphi \neq \psi, h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha, i_\varphi \neq j_\varphi$. Согласно этим условиям из (5.7) при $\varphi = 1, 2$ получаем следующие соотношения:

$$d\lambda_1^{m+1} + \lambda_1^{m+2} \omega_{m+2}^{m+1} = h_{i_1 i_1 j_2}^{m+1} \omega^{j_2} + h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \omega^r, \quad (5.9)$$

$$d\lambda_1^{m+2} + \lambda_1^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{i_1 i_1 r}^{m+2} \omega^r, \quad (5.10)$$

$$\frac{p-1}{1-q} d\lambda_1^{m+1} + \lambda_1^{m+2} \omega_{m+2}^{m+1} = h_{i_2 i_2 j_1}^{m+1} \omega^{j_1} + h_{i_2 i_2 r}^{m+1} \omega^r, \quad (5.11)$$

$$d\lambda_1^{m+2} + \frac{p-1}{1-q} \lambda_1^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{i_2 i_2 r}^{m+1} \omega^r. \quad (5.12)$$

Из (5.9) и (5.11), а затем из (5.10) и (5.12) последовательно имеем

$$\frac{p+q-2}{1-q} \lambda_1^{m+2} \omega_{m+2}^{m+1} = \frac{p-1}{1-q} h_{i_1 i_1 j_2}^{m+1} \omega^{j_2} - h_{i_2 i_2 j_1}^{m+1} \omega^{j_1} + \left(\frac{p-1}{1-q} h_{i_1 i_1 r}^{m+1} - h_{i_2 i_2 r}^{m+1} \right) \omega^r, \quad (5.13)$$

$$\frac{p+q-2}{1-q} \lambda_1^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = (h_{i_1 i_1 r}^{m+2} - h_{i_2 i_2 r}^{m+2}) \omega^r. \quad (5.14)$$

Поскольку векторы n_1 и n_2 линейно независимы, то $\lambda_1^{m+1} \neq 0, \lambda_1^{m+2} \neq 0$. Поэтому из (5.13) и (5.14) следует, что $h_{i_1 i_1 j_2}^{m+1} = h_{i_2 i_2 j_1}^{m+1} = 0$. Тогда из (5.6) при $\alpha = m+1$ получим

$$\frac{p+q-2}{1-q} \lambda_1^{m+1} \omega_{j_2}^{i_1} = h_{i_1 j_2 r}^{m+1} \omega^r.$$

Поскольку левая часть последнего равенства кососимметрична по индексам i_1, j_2 , а правая часть симметрична по этим индексам, то обе части равны нулю и, следовательно, $\omega_{j_2}^{i_1} = 0, h_{i_1 j_2 r}^{m+1} = 0$. Тогда $h_{i_1 j_2 r}^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi j_\psi}^\alpha = 0, \varphi \neq \psi$, при любом значении α и равенство (5.5) принимает вид

$$\lambda_\varphi^\alpha \omega_{j_\varphi}^r = h_{rj_\varphi j_\varphi}^\alpha \omega_{j_\varphi}^{j_\varphi}, \quad (5.15)$$

где в правой части нет суммирования по j_φ . Из (5.15) с учетом координат векторов n_1 и n_2 следует, что

$$\frac{h_{i_1 i_1 r}^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}} = \frac{h_{i_1 i_1 r}^{m+2}}{\lambda_1^{m+2}}, \quad \frac{h_{i_2 i_2 r}^{m+2}}{\lambda_1^{m+2}} = \frac{1-q}{p-1} \frac{h_{i_2 i_2 r}^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}}. \quad (5.16)$$

Из (5.13) и (5.14) находим

$$\begin{aligned}\omega_{m+1}^{m+2} &= \frac{p-1}{(p+q-2)\lambda_1^{m+2}} \left(\frac{1-q}{p-1} h_{i_2 i_2 r}^{m+1} - h_{i_1 i_1 r}^{m+1} \right) \omega^r, \\ \omega_{m+1}^{m+2} &= \frac{q-1}{(p+q-2)\lambda_1^{m+1}} (h_{i_1 i_1 r}^{m+2} - h_{i_2 i_2 r}^{m+2}) \omega^r.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Приравнявая коэффициенты правых частей формул в (5.17) и преобразуя полученное равенство с учетом (5.16), окончательно получим

$$\left(\left(\frac{\lambda_1^{m+2}}{\lambda_1^{m+1}} \right)^2 \frac{q-1}{p-1} + 1 \right) ((p-1)h_{i_1 i_1 r}^{m+1} + (q-1)h_{i_2 i_2 r}^{m+1}) = 0.$$

Отсюда следует, что $(p-1)h_{i_1 i_1 r}^{m+1} + (q-1)h_{i_2 i_2 r}^{m+1} = 0$. На основании (5.17) имеем $\omega_{m+1}^{m+2} = 0$. Далее, используя (5.15) и (5.16), получим, что отношение

$$\frac{h_{i_\varphi j_\varphi r}^\alpha}{\lambda_\varphi^\alpha} = F_r, \quad \alpha = m+1, m+2,$$

не зависит от φ и, следовательно, равенство (5.15) можно привести к виду $\omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi}$. Используя полученные результаты, преобразуем и запишем систему (5.9)–(5.12) в виде уравнения $d \ln |\lambda_\varphi^\alpha| = F_r \omega^r$, $\alpha = m+1, m+2$. Отсюда следует, что функции λ_φ^α при всевозможных значениях индексов α и φ различаются между собой на постоянные. Таким образом, окончательно получаем следующую систему:

$$d \ln |\lambda_1^{m+1}| = F_r \omega^r, \quad \omega_{i_\varphi}^r = F_r \omega^{i_\varphi}, \quad \omega_{i_1}^{j_2} = 0.$$

Рассуждая далее точно так же, как и в [8] (см. также [9], [10]), получим, что рассматриваемое полуэйнштейново подмногообразие M представляет собой или конус над прямым произведением двух сфер (которое является эйнштейновым подмногообразием в E_n и принадлежит гиперсфере пространства E_n), или является прямым произведением такого конуса и некоторой плоскости. Поскольку случай линейной зависимости векторов n_1 и n_2 приводит к такому же результату (см. [8]), мы приходим к следующему заключению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Если нормально плоское полуэйнштейново подмногообразие M в E_n имеет только два ненулевых главных вектора кривизны n_1, n_2 кратностей $p_1 \geq 2, p_2 \geq 2$, то локально оно является прямым произведением некоторой плоскости (размерности ≥ 0) и конуса над прямым произведением двух сфер.*

§ 6. Полуэйнштейновы подмногообразия с равными модулями главных векторов кривизны

Пусть M является минимальным нормально плоским подмногообразием в E_n . Тогда на основании (4.2) и (4.8) приходим к заключению, что условие полуэйнштейновости M равносильно тому, что $n_a = 0$ (т. е. индекс дефектности равен индексу относительной дефектности), а векторы n_r имеют равные модули. Поскольку минимальные полуэйнштейновы подмногообразия рассмотрены

автором в [9] и [10], в настоящем параграфе мы будем рассматривать только неминимальные полуэйнштейновы подмногообразия.

Итак, пусть M является m -мерным нормально плоским неминимальным полуэйнштейновым подмногообразием индекса дефектности $\mu \geq 1$ в евклидовом пространстве E_n , $n - m \geq 2$. Пусть в каждой точке $x \in M$ имеется $q \geq 2$ различных ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ кратностей $p_1 \geq 2, \dots, p_q \geq 2$ соответственно. Тогда на основании леммы 3.4 и следствия 3.1 заключаем, что индекс дефектности подмногообразия M совпадает с индексом относительной дефектности. Отсюда следует, что нулевой главный вектор кривизны имеет кратность μ . Будем предполагать также, что векторы $n_1, \dots, n_q$ имеют равные модули, т. е. $|n_1| = \dots = |n_q| = \sqrt{\tau}$. Тогда все они образуют с H один и тот же угол. Отметим, что последние два условия в совокупности достаточны для полуэйнштейновости M (лемма 4.3). Условимся, что в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} i, j, k &= 1, \dots, m, & \alpha, \beta, \gamma &= m+1, \dots, n, & a, b, c &= 1, \dots, p, & p_1 + \dots + p_q &= p, \\ r, s, t &= p+1, \dots, m, & \varphi, \psi, \chi &= 1, \dots, q, \\ i_\varphi, j_\varphi, k_\varphi &= p_1 + \dots + p_{\varphi-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{\varphi-1} + p_\varphi, \end{aligned}$$

где $p_0 = 0$ по определению.

Поскольку вектор n_φ имеет кратность p_φ , то будем считать, что $n_{i_\varphi} = n_{j_\varphi} = n_\varphi$ при $i_\varphi \neq j_\varphi$. Тогда $\lambda_{i_\varphi}^\alpha = \lambda_{j_\varphi}^\alpha = \lambda_{(\varphi)}^\alpha$ при $i_\varphi \neq j_\varphi$, хотя далее в случае необходимости наряду с записью $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ мы будем использовать также запись λ_a^α . Так как в наших обозначениях векторы n_r являются нулевыми, то $\lambda_r^\alpha = 0$. Наконец отметим, что равенство модулей векторов равносильно условию

$$\sum_{\alpha} (\lambda_{(\varphi)}^\alpha)^2 = \tau. \quad (6.1)$$

В принятых обозначениях матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M принимают следующей вид:

$$\|h_{ij}^\alpha\| = \begin{vmatrix} \lambda_{(1)}^\alpha & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_{(1)}^\alpha & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \lambda_{(q)}^\alpha & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \lambda_{(q)}^\alpha & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{vmatrix}.$$

В этих матрицах $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ имеет кратность $p_\varphi \geq 2$, а 0 – кратность $\mu \geq 1$. Остальные элементы этих матриц равны нулю. Поскольку векторы $n_1, \dots, n_q$ являются ненулевыми, то $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$ при некотором значении α . Более того, так как все эти векторы различны, то $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq \lambda_{(\psi)}^\alpha$ при некотором значении α . Из условия

полуэйнштейновости и равенства $|n_\varphi|^2 = \tau$ следует, что выражение $\langle n_\varphi, H \rangle$ не зависит от φ , т. е. $\langle n_\varphi, H \rangle = \sigma$, или, более подробно,

$$\sum_{\psi} p_{\psi} \cdot \sum_{\alpha} (\lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \lambda_{(\psi)}^{\alpha}) = \sigma, \quad \sigma \neq 0, \quad (6.2)$$

при любом значении φ .

Обратно, пусть в некотором поле адаптированного ортонормированного репера к t -мерному подмногообразию M в евклидовом пространстве E_n матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы одновременно приводятся к указанному виду, а их диагональные элементы обладают указанными выше свойствами (т. е. $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha} = 0$ для некоторого α и $\lambda_{(\varphi)}^{\beta} \neq \lambda_{(\psi)}^{\beta}$ для некоторого β) и выполняются условия (6.1), (6.2). Тогда M является нормально плоским полуэйнштейновым подмногообразием индекса дефектности $\mu \geq 1$ с q различными ненулевыми главными векторами кривизны, имеющими равные модули и кратности $p_1 \geq 1, \dots, p_q \geq 2$ соответственно.

Основная цель настоящего параграфа – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть в евклидовом пространстве E_n t -мерное нормально плоское неминимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке $x \in M$ только $q \geq 2$ различных ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$, которые имеют равные модули и кратности $p_1 \geq 1, \dots, p_q \geq 2$ соответственно. Если распределение кодефектности $T^{(1)}$ подмногообразия M является интегрируемым с интегральным многообразием $M^{(1)}$, то M или локально представляет собой цилиндр над $M^{(1)}$, т. е. $M = E_{\mu} \times M^{(1)}$, где E_{μ} – плоскость размерности μ , или имеет вид прямого произведения $E_{\mu-1} \times \widetilde{M}$, где $E_{\mu-1}$ – плоскость размерности $\mu - 1$, а $\widetilde{M}$ – $(p_1 + \dots + p_q + 1)$ -мерное полуэйнштейново подмногообразие, которое является конусом над $M^{(1)}$, причем в последнем случае $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере пространства E_n . В этих двух случаях $M^{(1)}$ является или прямым произведением q сфер $S^{p_1}(R), \dots, S^{p_q}(R)$, или скрученным произведением этих сфер, либо имеет вид прямого произведения $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_u$, где N_0 – прямое произведение некоторых из этих сфер, а $N_1, \dots, N_u$ представляют собой скрученные произведения различных групп остальных сфер (при $q = 2$ многообразие $M^{(1)}$ всегда является прямым произведением сфер $S^{p_1}(R)$ и $S^{p_2}(R)$). Более того, $M^{(1)}$ как подмногообразие в E_n во всех случаях имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым.

В теореме 6.1 под скрученным произведением сфер имеется в виду такое неприводимое подмногообразие в E_n , которое локально имеет структуру ортогональной сопряженной системы, состоящей из $q \geq 3$ сфер, вращающихся относительно друг друга при движении вдоль этого подмногообразия.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 6.1, сформулируем сначала ряд лемм.

Пусть $T_x^{(0)}$ – пространство дефектности в точке $x \in M$, а $T_x^{(1, \varphi)}$ – собственное подпространство, соответствующее вектору n_{φ} . Поскольку $p_{\varphi} \geq 2$, то $T_x^{(0)}$ фактически совпадает с пространством относительной дефектности. Следовательно, $T_x^{(1, \varphi)}$ являются подпространствами в $T_x^{(1)}$, и справедливо следующее разложение в прямую сумму:

$$T_x(M) = T_x^{(1)} + T_x^{(0)} = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + T_x^{(0)}.$$

Пусть адаптированный ортонормированный репер к M выбран так, что $e_{i_\varphi} \in T_x^{(1,\varphi)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$. Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать параллельными в нормальном расслоении, что равносильно условию $\omega_\beta^\alpha = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что e_α именно так и выбраны. Подставляя $h_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij}$ в (2.3) и (3.2), получим следующие равенства:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \quad (6.3)$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad (6.4)$$

в левой части (6.4) нет суммирования по i .

ЛЕММА 6.1. *В выбранном выше репере функции h_{ijk}^α удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned} h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha &= 0, \quad i_\varphi \neq j_\varphi, \quad h_{rsk}^\alpha = 0, \quad h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = 0, \quad h_{i_\varphi i_\varphi i_\psi}^\alpha = 0, \quad \varphi \neq \psi, \\ h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha &= h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha, \quad i_\varphi \neq j_\varphi, \quad \sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = \sum_\alpha \lambda_{(\psi)}^\alpha h_{j_\psi j_\psi r}^\alpha, \quad \varphi \neq \psi. \end{aligned}$$

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 1 в [10]. При доказательстве последней было существенно использовано равенство модулей векторов n_φ . Свойства функций h_{ijk}^α , устанавливаемые в [10, лемма 1], позволяют доказать следующие леммы.

ЛЕММА 6.2. *В выбранном выше репере справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} (\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j_\varphi}^{i_\varphi} &= \sum_{\substack{\chi \\ \chi \neq \varphi, \chi \neq \psi}} h_{i_\varphi j_\psi k_\chi}^\alpha \omega^{k_\chi} + h_{i_\varphi j_\psi r}^\alpha \omega^r, \quad \varphi \neq \psi, \\ \lambda_{(\varphi)}^\alpha \omega_{j_\varphi}^r &= h_{rj_\varphi a}^\alpha \omega^a, \quad d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [10, лемма 2].

ЛЕММА 6.3. *Интегральные многообразия распределений $T^{(1,\varphi)}$ представляют собой p_φ -мерные сферы одного и того же радиуса R . Интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$ представляет μ -мерную плоскость, где $\mu = t - p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [10, леммы 3, 4], а также из леммы 3.1.

Далее интегральное многообразие распределения $T^{(1,\varphi)}$ будем обозначать через $S^{p_\varphi}(R)$.

Умножая второе равенство в лемме 6.2 на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , получим

$$\omega_{j_\varphi}^r = F_r \omega^{j_\varphi} + \frac{1}{\tau} \sum_{\substack{\psi \\ \psi \neq \varphi}} \left(\sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{rj_\varphi j_\psi}^\alpha \right) \omega^{j_\psi},$$

где

$$F_r = \frac{1}{\tau} \sum_\alpha \lambda_{(\varphi)}^\alpha h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha.$$

Из последнего равенства в лемме 6.1 следует, что F_r не зависят ни от значения φ , ни от значения j_φ . Далее, умножая последнее равенство в лемме 6.2 на $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ и суммируя по α , получим

$$\frac{1}{2} d \ln \tau = F_r \omega^r. \quad (6.5)$$

ЛЕММА 6.4. *На подмногообразии M распределение $T^{(1)} = T^{(1,1)} + \dots + T^{(1,q)}$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ прямую сумму $T_x^{(1)} = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)}$, является интегрируемым тогда и только тогда, когда распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны относительно друг друга в направлении подпространства $T_x^{(0)}$. Если $q = 2$ и $T^{(1)}$ интегрируемо, то распределения $T^{(1,1)}, T^{(1,2)}$ параллельны на всем M .*

Лемма 6.4 является частным случаем леммы 5 в [10], в ходе доказательства которой было фактически показано, что равенство $h_{ri_\varphi j_\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$ является необходимым и достаточным условием интегрируемости распределения $T^{(1)}$ и, следовательно, параллельности распределений $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ относительно друг друга в направлении подпространства $T_x^{(0)}$. В общем случае функции $h_{ri_\varphi j_\psi}^\alpha$, $i_\varphi \neq j_\psi$, должны удовлетворять определенным условиям. Действительно, если равенство (6.5) продифференцировать внешним образом, то получим

$$(dF_r - F_s \omega_r^s) \wedge \omega_r - F_r \omega_a^r \wedge \omega^a = 0. \quad (6.6)$$

Применяя лемму Картана, приходим к следующей системе:

$$dF_r - F_s \omega_r^s = C_{rt} \omega^t + C_{ra} \omega^a, \quad -F_r \omega_a^r = C_{ar} \omega^r + C_{ab} \omega^b,$$

где матрица $\|C_{ij}\|$ является симметрической. Поскольку ω_a^r выражаются только через ω^a (лемма 6.2), то $C_{ar} = 0$. Следовательно,

$$dF_r - F_s \omega_r^s = C_{rt} \omega^t, \quad -F_r \omega_a^r = C_{ab} \omega^b.$$

Подставляя последние равенства в (6.6) и учитывая, что $C_{rt} = C_{tr}$, получим $F_r \omega_a^r \wedge \omega^a = 0$. Если $\lambda_a^\alpha = 0$, то из второго равенства в лемме 6.2 следует, что $h_{rab}^\alpha = 0$. Если $\lambda_a^\alpha \neq 0$, то $\omega_a^r = (\lambda_a^\beta)^{-1} h_{ab}^{\beta r} \omega^b$ (лемма 6.2). Подставляя значение ω_a^r в равенство $F_r \omega_a^r \wedge \omega^a = 0$, получим

$$F_r h_{ab}^{\beta r} ((\lambda_a^\beta)^{-1} - (\lambda_b^\beta)^{-1}) = 0.$$

Последнее равенство имеет смысл при $a = i_\varphi$, $b = i_\psi$, $\varphi \neq \psi$, поскольку $\lambda_{(\varphi)}^\beta \neq \lambda_{(\psi)}^\beta$ при некотором значении β . Следовательно,

$$F_r h_{i_\varphi j_\psi}^{\beta r} = 0, \quad \varphi \neq \psi. \quad (6.7)$$

Пусть индекс r принимает только одно значение (это значит, что пространство дефектности $T_x^{(0)}$ имеет размерность 1). Тогда или $F_r = 0$, или $h_{i_\varphi j_\psi}^{\beta r} = 0$. В первом случае $\tau = \text{const}$, т. е. векторы n_φ имеют равные постоянные модули, а во втором случае распределение $T^{(1)}$ является интегрируемым.

Распределение $T^{(1)}$ будет интегрируемым и в том случае, когда какая-либо из матриц $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет на $T_x^{(1)}$ только одно собственное значение, отличное от нуля [26].

Если определить инвариантный вектор $\xi = F^r e_r$ (где $F^r = F_r$) и векторы $F_{i_\varphi j_\psi}^\beta = h_{i_\varphi j_\psi}^{\beta r} e_r$, $\varphi \neq \psi$, то из (6.7) получим, что вектор ξ всегда должен быть ортогонален системе векторов $F_{i_\varphi j_\psi}^\beta$.

ЛЕММА 6.5. *Если распределение $T^{(1)}$ является интегрируемым, то его интегральное многообразие $M^{(1)}$ имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым подмногообразием в E_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы доказывается точно так же, как и первое утверждение леммы 6 в [10]. Для доказательства второго утверждения вычисляем непосредственно (см. [10]) компоненты тензора Риччи подмногообразия $M^{(1)}$ и получаем, что матрица этого тензора имеет диагональный вид с диагональными элементами

$$\tilde{\rho}_a = \tau - \sigma - (p_1 + \dots + p_q - 1) \sum_r (F_r)^2. \quad (6.8)$$

(При выводе формулы (6.8) было учтено равенство (6.2).) Поскольку правая часть в (6.8) не зависит от индекса a , то $M^{(1)}$ является эйнштейновым подмногообразием.

ЛЕММА 6.6. *Если распределение $T^{(1)}$ интегрируемо и $q \geq 3$, то его интегральное многообразие $M^{(1)}$ является либо прямым произведением сфер $S^{p_1}(R), \dots, S^{p_q}(R)$, либо скрученным произведением этих сфер, либо прямым произведением вида $N_0 \times N_1 \times \dots \times N_u$, где N_0 – прямое произведение некоторых из этих сфер, а $N_1, \dots, N_u$ представляют собой скрученные произведения различных групп остальных сфер (каждая сфера входит только в одну группу). При $q = 2$ многообразие $M^{(1)}$ всегда является прямым произведением сфер $S^{p_1}(R)$ и $S^{p_2}(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [10, лемма 7]. Поскольку две сферы не могут образовать скрученного произведения, то, говоря о скрученном произведении сфер, будем предполагать, что оно образовано не менее чем тремя сферами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Ряд утверждений теоремы доказан фактически в леммах 6.3–6.6. В одном частном случае мы решим также проблему существования такого подмногообразия.

Из второго равенства леммы 6.2 следует, что если $\lambda_{(\varphi)}^\alpha \neq 0$, то $F_r = (\lambda_{(\varphi)})^{-1} h_{ri\varphi j\varphi}^\alpha$ (учтено также, что $h_{ri\varphi j\psi}^\alpha = 0$ при $\varphi \neq \psi$). Поэтому на основании леммы 6.2 получаем следующую систему:

$$d \ln |\lambda_{(\varphi)}^\alpha| = F_r \omega^r, \quad (6.9)$$

$$\omega_{j\varphi}^r = F_r \omega^{j\varphi}, \quad (6.10)$$

$$(\lambda_{(\psi)}^\alpha - \lambda_{(\varphi)}^\alpha) \omega_{j\psi}^{i\varphi} = \sum_{\substack{\chi \\ \chi \neq \varphi, \chi \neq \psi}} h_{i\varphi j\psi k\chi}^\alpha \omega^{k\chi}, \quad \varphi \neq \psi. \quad (6.11)$$

Из (6.9) следует, что собственные значения $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ при всевозможных значениях α и φ различаются между собой на постоянные множители.

Из (6.10) следует, что $M^{(1)}$ является вполне омбилическим подмногообразием в M . Как известно (лемма 6.5), $M^{(1)}$ как подмногообразие в E_n имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым. Поскольку $\omega_r^\alpha = 0$, то $T^{(0)}$ как подрасслоение нормального расслоения для $M^{(1)}$ является параллельным и, следовательно, в нем индуцируется плоская нормальная связность. Тогда нормальные к $M^{(1)}$ векторные поля e_r в $T^{(0)}$ можно выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении подмногообразия $M^{(1)}$. При таком выборе полей e_r получим $\omega_r^s = 0$ (при $\omega^r = 0$). Поскольку в общем случае $\omega_r^s = \Gamma_{rk}^s \omega^k$, то $\Gamma_{ra}^s = 0$ и, следовательно, $\omega_r^s = \Gamma_{rt}^s \omega^t$.

Дифференцируя внешним образом (6.9) и (6.10) и применяя лемму Картана, а также учитывая выражения форм ω_r^s , получим (см. [10])

$$dF_r = (F_s \Gamma_{rt}^s + F_r F_t) \omega^t. \quad (6.12)$$

Из (6.12) следует, что F_r постоянны на $M^{(1)}$. Поскольку векторные поля e_r параллельны в нормальном расслоении на $M^{(1)}$, нормальное к $M^{(1)}$ векторное поле $\xi = \sum_r F_r e_r$ также параллельно в нормальном расслоении на $M^{(1)}$. Поэтому, выбирая e_m так, что $\xi = \eta e_m$, получим $F_t = 0$ при $t \neq 1$ и $F_m = \eta$.

Пусть $\eta = 0$. Тогда $\omega_{j_\varphi}^r = 0$, что означает параллельность распределений $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ на подмногообразии M . Рассуждая так же, как и в [10], получим $M = E_\mu \times M^{(1)}$, где E_μ – интегральное многообразие распределения $T^{(0)}$, которое является μ -мерной плоскостью (лемма 6.3). Следовательно, в этом случае подмногообразие M представляет собой цилиндр над эйнштейновым подмногообразием $M^{(1)}$, локальная структура которого описывается леммой 6.6. Из (6.9) следует, что при $\eta = 0$ собственные значения $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$ являются постоянными. Кроме того, как мы знаем, они должны удовлетворять условиям (6.1) и (6.2), которые в совокупности достаточны для полуэйнштейновости подмногообразия M .

Пусть $\eta \neq 0$. Отождествляя точку $x \in M^{(1)}$ с радиус-вектором, получим

$$d\left(x + \frac{1}{\eta} e_m\right) = \omega^a e_a + \frac{1}{\eta} \omega_m^a e_a = \omega^a e_a + \frac{1}{\eta} (-\eta) \omega^a e_a = 0.$$

Отсюда вытекает, что $x + \eta^{-1} e_m = \text{const}$ и, следовательно, подмногообразие $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере $S^{n-1}(\tilde{R})$ пространства E_n , для которой вектор e_m является нормальным. Далее, поскольку $F_m = \eta \neq 0$ и $F_r = 0$ при $r \neq m$, из (6.12) вытекает, что $\Gamma_{rt}^m = 0$. Следовательно, $\omega_m^r = 0$, и так как $\omega_{j_\varphi}^r = 0$ при $r \neq m$ (согласно (6.10)), то распределение K , сопоставляющее каждой точке подмногообразия M линейную оболочку $\mu - 1$ векторов e_r , $r \neq m$, является параллельным на M и вполне интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой $(\mu - 1)$ -мерную плоскость, которую будем обозначать через $E_{\mu-1}$. Ортогональное дополнение к K_x в касательном пространстве $T_x(M)$ имеет вид $T_x^{(1)} + L_x = T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + L_x$, где L_x – прямая с направляющим вектором e_m . Соответствующее распределение $T^{(1)} + L$ также параллельно на M и вполне интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через $\tilde{M}$.

В силу сопряженности распределений K и $T^{(1)} + L$ относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M заключаем, что M локально является прямым произведением их интегральных многообразий, т. е. $M = E_{\mu-1} \times \tilde{M}$. Здесь $\tilde{M}$ представляет собой $(p_1 + \dots + p_q + 1)$ -мерное полуэйнштейново подмногообразие некоторого $(n - \mu + 1)$ -мерного евклидова пространства. Покажем, что $\tilde{M}$ является конусом над $M^{(1)}$. Действительно, поскольку $de_m = -\eta \omega^a e_a$, то $e_m = \text{const}$ при $\omega^a = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{M}$ является либо конусом (с исключенной точечной вершиной, ибо в ней теряется регулярность), либо цилиндром над $M^{(1)}$ (в любом из этих случаев с образующей L_x в каждой точке). Поскольку $\eta \neq 0$, то $\tilde{M}$ можем быть только конусом. Этим завершается доказательство теоремы.

Для частичного решения проблемы существования рассматриваемого класса подмногообразий определим функции η и $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$.

Поскольку $E_{\mu-1}$ является плоскостью, то в качестве локальных координат на $E_{\mu-1}$ можем взять декартовы прямоугольные координаты. Тогда $\omega_s^r = 0$ и, следовательно, $\Gamma_{rt}^s = 0$ для любых значений индексов r, s, t . На подмногообразии $\widetilde{M}$ интегральное многообразие распределения L есть прямая с направляющим вектором e_m . Обозначим через x^m координату на этой прямой. Поскольку $d\omega^m = 0$ (что легко проверить), можно считать, что $\omega^m = dx^m$. Если в (6.12) положить $r = m$, то получим уравнение $d\eta = \eta^2 dx^m$. Интегрируя его, находим

$$\eta = \frac{1}{C - x^m}, \quad (6.13)$$

где C – постоянная интегрирования. Подставляя (6.13) в (6.9), получим

$$\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \frac{C_\varphi^\alpha}{C - x^m}, \quad (6.14)$$

где C_φ^α – постоянные интегрирования. На основании (6.1) и (6.2) получим следующие соотношения:

$$\tau = \frac{\sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2}{(C - x^m)^2}, \quad (6.15)$$

$$\sigma = \frac{1}{(C - x^m)^2} \sum_\psi p_\psi \left(\sum_\alpha C_\varphi^\alpha C_\psi^\alpha \right), \quad (6.16)$$

откуда следует, что отношение $\frac{\sigma}{\tau}$ является величиной постоянной. Покажем, что постоянные C_φ^α , удовлетворяющие условиям

$$\sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2 = \sum_\alpha (C_\psi^\alpha)^2, \quad \varphi \neq \psi, \quad (6.17)$$

$$\sum_\psi p_\psi \left(\sum_\alpha C_\varphi^\alpha C_\psi^\alpha \right) = \sum_\psi p_\psi \left(\sum_\alpha C_\chi^\alpha C_\psi^\alpha \right), \quad \varphi \neq \chi, \quad (6.18)$$

существуют. Действительно, если $p_1 = \dots = p_q$, то (6.18) при $\varphi \neq \chi$ сводится к следующему равенству:

$$\sum_\psi \sum_\alpha C_\varphi^\alpha C_\psi^\alpha = \sum_\psi \sum_\alpha C_\chi^\alpha C_\psi^\alpha. \quad (6.19)$$

Построим систему векторов $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_q$ с координатами $C_1^\alpha, \dots, C_q^\alpha$, которые удовлетворяют условиям (6.17) и (6.19). Будем предполагать, что в $(n-m)$ -мерном евклидовом пространстве (каковым является нормальное пространство в E_n к m -мерному подмногообразию) точки $A_1, A_2, \dots, A_q$ являются вершинами правильного $(q-1)$ -мерного ($q \geq 2$) симплекса. Из центра O этого симплекса восстановим перпендикуляр к $(q-1)$ -мерной плоскости, в которой находится симплекс, и через A обозначим некоторую точку на этом перпендикуляре (отличную от O). Легко проверить, что координаты векторов $\tilde{n}_1 = \overline{AA_1}, \dots, \tilde{n}_q = \overline{AA_q}$ удовлетворяют условиям (6.17) и (6.19). Построенные векторы имеют равные модули и составляют между собой попарно равные углы. В этом случае максимальное число таких векторов может быть равно $n-m$, т. е. $q \leq n-m$. В случае одномерного симплекса и двумерного правильного симплекса схемы векторов $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_q$ будут иметь вид, представленный на рис. 1.

Рис. 1

Пусть $\omega_{j\psi}^{i\varphi} = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Геометрически это значит, что распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны относительно друг друга (но не относительно $T^{(0)}$). Дифференцируя это равенство внешним образом, получим

$$\sum_{\alpha} \lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \lambda_{(\psi)}^{\alpha} + \eta^2 = 0. \quad (6.20)$$

Отсюда следует, что если подмногообразие $\widetilde{M}$ мы рассматриваем с точки зрения объемлющего пространства E_n , то секционные кривизны между сферами $S^{p_1}(R), \dots, S^{p_q}(R)$ равны нулю. Если же $\widetilde{M}$ мы рассматриваем как подмногообразие в M , то на M секционные кривизны между этими сферами равны между собой и все отрицательны. Это значит, что скалярные произведения векторов $n_1, \dots, n_q$ отрицательны и равны между собой. Так как модули этих векторов равны, то равны и отрицательные косинусы углов между этими векторами. Следовательно, все эти углы равны некоторому углу θ , $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Тогда, как известно (см. § 4), $p_1 = \dots = p_q = p$, а $\cos \theta$ определяются формулой (4.14). Поскольку $\cos \theta < 0$, то на основании (4.14) получаем

$$0 < \frac{\sigma}{\tau} < \frac{m - \mu}{q},$$

где первое неравенство следует из того, что $\sigma > 0$ (векторы n_{φ} образуют с H равные острые углы). Подставляя в (6.20) значения $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha}$, $\lambda_{(\psi)}^{\alpha}$ и η , получим, что постоянные C_{φ}^{α} должны удовлетворять условию

$$\sum_{\alpha} C_{\varphi}^{\alpha} C_{\psi}^{\alpha} = -1, \quad \varphi \neq \psi. \quad (6.21)$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$\sum_{\psi} p_{\psi} \left(\sum_{\alpha} C_{\varphi}^{\alpha} C_{\psi}^{\alpha} \right) = p \left(1 - q + \sum_{\alpha} (C_{\varphi}^{\alpha})^2 \right),$$

то, подставляя в (4.14) значения τ и σ и учитывая, что $pq = m - \mu$, получим

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sum_{\alpha} (C_{\varphi}^{\alpha})^2}.$$

Вычисляя ρ ($\rho = \tau - \sigma$), приходим к следующему соотношению:

$$\rho = \frac{1}{(C - x^m)^2} \left[p(q - 1) - (p - 1) \sum_{\alpha} (C_{\varphi}^{\alpha})^2 \right].$$

Поскольку $\rho \neq 0$, постоянные C_{φ}^{α} должны удовлетворять также условию

$$\sum_{\alpha} (C_{\varphi}^{\alpha})^2 \neq \frac{p(q - 1)}{p - 1}.$$

Пусть η и $\lambda_{(\varphi)}^{\alpha}$ определяются по формулам (6.13), (6.14), и пусть выполняются условия (6.17), (6.21). В евклидовом пространстве E_n рассмотрим следующую дифференциальную систему:

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha} &= 0, \quad \omega_{\beta}^{\alpha} = 0, \quad \omega_r^{\alpha} = 0, \quad \omega_s^r = 0, \quad \omega_{j_{\psi}}^{i_{\varphi}} = 0, \quad \varphi \neq \psi, \quad \omega_{i_{\varphi}}^{\alpha} - \lambda_{(\varphi)}^{\alpha} \omega^{i_{\varphi}} = 0, \\ d \ln |\lambda_{(\varphi)}^{\alpha}| - \eta \omega^m &= 0, \quad d\eta - \eta^2 \omega^m = 0, \quad \omega_{j_{\varphi}}^m - \eta \omega^{j_{\varphi}} = 0, \quad \omega_{j_{\varphi}}^r = 0, \quad r \neq m. \end{aligned}$$

Путем непосредственного вычисления легко убедиться в том, что эта система вполне интегрируема. Она фактически и задает описанное выше нормально плоское полуэйнштейново подмногообразие $M = E_{\mu-1} \times \widetilde{M}$, что и доказывает существование рассматриваемого класса подмногообразий в указанном выше частном случае.

Список литературы

1. В. А. Мирзоян, “Ric-полусимметрические подмногообразия”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **23**, ВИНТИ, М., 1991, 29–66; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Ric-semisymmetric submanifolds”, *J. Math. Sci.*, **70**:2 (1994), 1624–1646.
2. E. Boeckx, O. Kowalski, L. Vanhecke, *Riemannian manifolds of conullity two*, World Scientific, Singapore, 1996.
3. Ü. Lumiste, *Semiparallel submanifolds in space forms*, Springer-Verlag, New York, 2009.
4. В. А. Мирзоян, “Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств”, *Изв. вузов. Матем.*, 1992, №6, 80–89; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Structure theorems for Riemannian Ricci semi-symmetric spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **36**:6 (1992), 75–83.
5. А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: A. Z. Petrov, *Einstein spaces*, Pergamon Press, Oxford–Edinburgh–New York, 1969.
6. А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
7. В. А. Мирзоян, “Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 65–80; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Classification of Ric-semiparallel hypersurfaces in Euclidean spaces”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1323–1338.
8. В. А. Мирзоян, “Скращенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 107–124; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Warped products, cones over Einstein spaces, and classification of a class of Ricci-semiparallel submanifolds”, *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 955–973.

9. В. А. Мирзоян, “Структурные теоремы для Ricc-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий”, *Матем. сб.*, **197**:7 (2006), 47–76; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Structure theorems for Ricci-semisymmetric submanifolds and geometric description of a class of minimal semi-Einstein submanifolds”, *Sb. Math.*, **197**:7 (2006), 997–1024.
10. В. А. Мирзоян, “Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности”, *Матем. сб.*, **199**:3 (2008), 69–94; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Classification of a class of minimal semi-Einstein submanifolds with an integrable conullity distribution”, *Sb. Math.*, **199**:3 (2008), 385–409.
11. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. 2, Interscience Publ., New York–London–Sydney, 1969.
12. В.-Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Pure Appl. Math., **22**, Marcel Dekker, New York, 1973.
13. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.
14. М. М. Постников, *Риманова геометрия*, Факториал, М., 1998; англ. пер.: M. M. Postnikov, *Geometry VI. Riemannian geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **91**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
15. S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, *Lectures on differential geometry*, Ser. Univ. Math., **1**, World Scientific, Singapore, 2000.
16. S.-S. Chern, N. H. Kuiper, “Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space”, *Ann. of Math.* (2), **56**:3 (1952), 422–430.
17. R. Maltz, “The nullity spaces of the curvature operator”, *Topologie et Géométrie Différentielle*, **8**, Centre Nat. Recherche Sci., Paris, 1966, 1–20.
18. A. Gray, “Spaces of constancy of curvature operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 897–902.
19. R. Maltz, “The nullity spaces of curvature-like tensors”, *J. Differential Geometry*, **7** (1972), 519–523.
20. S. Alexander, R. Maltz, “Isometric immersions of Riemannian products in Euclidean space”, *J. Differential Geometry*, **11**:1 (1976), 47–57.
21. В. А. Мирзоян, “Конусы над эйнштейновыми пространствами”, *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **33**:5 (1998), 46–54; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Cones over Einstein spaces”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **33**:5 (1998), 40–46.
22. В. А. Мирзоян, “Нормальная дефектность подмногообразия”, *Докл. АН АрмССР*, **77**:1 (1983), 11–15.
23. В. А. Мирзоян, “Нормальная дефектность подмногообразия в римановом многообразии”, *Ученые записки Тартуск. гос. ун-та*, **734** (1986), 63–79.
24. H. Reckziegel, “Krümmungsflächen von isometrischen Immersionen in Räume konstanter Krümmung”, *Math. Ann.*, **223**:2 (1976), 169–181.
25. Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян, “Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **12**, ВИНТИ, М., 1981, 3–30; англ. пер.: Yu. G. Lumiste, A. V. Chakmazyan, “Normal connection and submanifolds with parallel normal fields in a space of constant curvature”, *J. Soviet Math.*, **21**:2 (1983), 107–127.

26. В. А. Мирзоян, “Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **14**, ВИНТИ, М., 1983, 73–100; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Submanifolds with commuting normal vector field”, *J. Soviet Math.*, **28**:2 (1985), 192–207.
27. В. А. Мирзоян, “Подмногообразия с параллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах”, *Изв. вузов. Матем.*, 1993, № 9, 22–27; англ. пер.: V. A. Mirzoyan, “Submanifolds with parallel Ricci tensor in Euclidean spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **37**:9 (1993), 20–25.
28. J. D. Moore, “Isometric immersions of Riemannian products”, *J. Differential Geometry*, **5** (1971), 159–168.

В. А. Мирзоян (V. A. MIRZOYAN)
Государственный инженерный университет Армении,
г. Ереван;
Российский государственный университет туризма
и сервиса, Ереванский филиал
E-mail: vmirzoyan@mail.ru

Поступило в редакцию
15.06.2009
12.12.2010