Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Спектральные данные для пары матриц порядка 3 и действие группы $GL(2, \mathbb{Z})$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 93–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:36:58

УДК 512.772+512.64+512.54

Ю. А. Неретин

Спектральные данные для пары матриц порядка 3 и действие группы $GL(2, \mathbb{Z})$

Рассматривается 10-мерное комплексное пространство, точками которого являются кубические кривые на проективной комплексной плоскости с тремя отмеченными точками. Тройки отмеченных точек на кривой определены с точностью до эквивалентности дивизоров. Построено естественное действие группы $GL(2, \mathbb{Z})$ на этом пространстве.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: эллиптическая кривая, спектральная кривая, свободная группа.

§ 1. Введение

1.1. Цель работы. Пусть G – группа. Рассмотрим произведение n копий $G \times \cdots \times G$ группы G . Вложим G в это произведение по диагонали и рассмотрим пространство двойных классов смежности

$$G \setminus (G \times \cdots \times G)/G. \quad (1.1)$$

Данные объекты изучались для групп $G = SU(2)$ и $G = SL(2, \mathbb{R})$. Заметим, что такие пространства допускают различные конструктивные описания, обладают богатой и неожиданной геометрией и на них существует теория сферических функций (см., например, [1]–[7]). Для бесконечных симметрических групп эти пространства изучались в [8] (здесь также получено конструктивное описание пространств двойных классов смежности и есть формулы для сферических функций). Некоторые пространства орбит, родственные (1.1), рассматривались в [9, гл. IX, § 4]. Отметим также работы [10], [11] о сферических функциях на группах $GL(\infty) \times \cdots \times GL(\infty)$ (см. комментарии в [9, гл. IX, § 5, п. 5.6] и обсуждение условий сферичности и пространств двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп в [12], [13]).

В случае $G = SL(2, \mathbb{R})$ пространства (1.1) содержат (в качестве открытых подмножеств) пространства Тейхмюллера римановых поверхностей с проколами. Отметим, что на пространстве (1.1) при любом G естественным образом действует группа $\text{Out}(F_{n-1})$ внешних автоморфизмов свободной группы F_{n-1} (см. далее). В группы $\text{Out}(F_{n-1})$, в свою очередь, вкладываются группы Тейхмюллера для проколотых римановых поверхностей (см., например, [14]), в частности группы кос. В случае $G = SL(2, \mathbb{R})$ явные формулы для действия групп Тейхмюллера были получены в [3]; в случае $G = SU(2)$ формулы для действия $\text{Out}(F_{n-1})$ были получены в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке FWF (гранты P19064, P22122) и NWO.047.017.015, JSPS-RFBR-07.01.91209.

Заметим, что многие конструкции, связанные с пространствами (1.1) и существующие в случаях $G = \mathrm{SU}(2)$, $G = \mathrm{SL}(2)$, обобщаются на общие полупростые группы Ли G (см., например, [15]–[17]), но становятся не совсем явными.

В настоящей работе мы обсуждаем действие группы $\mathrm{Out}(F_{n-1})$ на пространстве (1.1) в случае $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ и $n = 3$. Основной проблемой здесь является введение естественных координат, в которых можно было бы проводить вычисления.

1.2. Спектральные данные для пары матриц. Конструкция и теорема, изложенные в настоящем пункте, многократно переоткрывались (см. [18]–[20], а также теорему Тюринга [21] о тройках квадратичных форм, более общее и более точное утверждение излагается в [15]). Такого рода конструкции интенсивно используются в теории интегрируемых систем (см., например, работу¹ [22]).

Рассмотрим на пространстве всех упорядоченных пар комплексных матриц A, B порядка $n \times n$ отношение эквивалентности, определенное диагональным действием группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ сопряжениями:

$$(A, B) \sim (gAg^{-1}, gBg^{-1}).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(n)$ факторпространство по этому отношению эквивалентности. Запишем уравнение

$$\det(\lambda + \mu A + \nu B) = 0$$

в однородных координатах $\lambda : \mu : \nu$. Оно задает кривую $\mathfrak{C}$ степени n на комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$. Очевидно, что эта кривая зависит лишь от класса эквивалентности, а не от матриц A, B . Для матриц общего положения данная кривая будет неприводимой и неособой.

Однозначно восстановить точку из $\mathfrak{M}(n)$ по кривой $\mathfrak{C}$ невозможно. В самом деле, $\dim \mathfrak{M}(n) = n^2 + 1$, а размерность пространства кривых степени n на $\mathbb{CP}^2$ есть $C_n^2 - 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$. При $n > 2$ последняя размерность меньше $n^2 + 1$.

Для каждой точки $(\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0) \in \mathfrak{C}$ рассмотрим подпространство

$$\ker(\lambda_0 + \mu_0 A + \nu_0 B) \subset \mathbb{C}^n.$$

Для матриц A, B общего положения эти ядра будут одномерны во всех точках кривой $\mathfrak{C}$. Таким образом, мы получаем линейное расслоение на $\mathfrak{C}$; обозначим его через $\mathcal{L}$. Через $\mathcal{L}^*$ мы обозначим двойственное линейное расслоение.

Пара $(A, B) \in \mathfrak{M}(n)$ общего положения восстанавливается по кривой в $\mathbb{CP}^2$ и линейному расслоению на ней. А именно, верна следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Отображение $(A, B) \mapsto (\mathfrak{C}, \mathcal{L}^*)$ является биекцией (с точностью до почти всюду) пространства $\mathfrak{M}(n)$ на пространство кривых степени n в $\mathbb{CP}^2$, снабженных линейным расслоением степени $n(n-1)/2$.*

Отметим, что для интересующего нас случая матриц размера 3×3 это утверждение вытекает из явных вычислений, приведенных далее.

¹См. еще один способ ставить в соответствие спектральные данные наборам матриц в [12].

1.3. Группа внешних автоморфизмов свободной группы. Обозначим через F_2 свободную группу с двумя образующими c_1, c_2 , через $\text{Aut}(F_2)$ – группу автоморфизмов свободной группы с двумя образующими, через $\text{Int}(F_2)$ – группу внутренних автоморфизмов ($\text{Int}(F_2) \simeq F_2$) и через

$$\text{Out}(F_2) = \text{Aut}(F_2)/\text{Int}(F_2)$$

– группу внешних автоморфизмов F_2 .

Для того чтобы задать элемент $\text{Aut}(F_2)$, достаточно указать, во что он переводит образующие c_1, c_2 :

$$c_1 \mapsto c_1^{\alpha_1} c_2^{\beta_1} c_1^{\alpha_2} c_2^{\beta_2} \dots, \quad (1.2)$$

$$c_2 \mapsto c_1^{\gamma_1} c_2^{\delta_1} c_1^{\gamma_2} c_2^{\delta_2} \dots \quad (1.3)$$

Элементы из F_2 , стоящие в правой части (1.2), (1.3), не произвольны. Согласно известной теореме Нильсена (см., например, [23]) группа $\text{Aut}(F_2)$ порождается преобразованиями:

- a) $(c_1, c_2) \mapsto (c_2, c_1)$;
- b) $(c_1, c_2) \mapsto (c_1^{-1}, c_2)$;
- c) $(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_1 c_2)$.

Рассмотрим коммутант $[F_2, F_2]$ свободной группы, т.е. подгруппу, порожденную всевозможными произведениями вида $x y x^{-1} y^{-1}$. Понятно, что эта подгруппа инвариантна относительно $\text{Aut}(F_2)$. Факторгруппа $F_2/[F_2, F_2]$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Поэтому $\text{Aut}(F_2)$ действует автоморфизмами на $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Иными словами, мы получаем гомоморфизм

$$\sigma: \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}),$$

где $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ – группа таких матриц g размера 2×2 с целыми элементами, что g^{-1} также имеет целые элементы. Образы преобразований а)–с) задаются соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а преобразованию (1.2), (1.3) соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \sum \alpha_j & \sum \beta_j \\ \sum \gamma_j & \sum \delta_j \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что внутренние автоморфизмы группы F_2 лежат в ядре σ , т.е. мы получаем гомоморфизм

$$\sigma: \text{Out}(F_2) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}).$$

Оказывается (см. [23]), что σ – изоморфизм.

1.4. Действие группы $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ на $\mathfrak{M}(n)$. Группа $\text{Out}(F_2)$ действует на $\mathfrak{M}(n)$ очевидным образом, т.е. преобразованию (1.2), (1.3) соответствует преобразование

$$A \mapsto A_1^{\alpha_1} B_2^{\beta_1} A_1^{\alpha_2} B_2^{\beta_2} \dots, \quad B \mapsto A_1^{\gamma_1} B_2^{\delta_1} A_1^{\gamma_2} B_2^{\delta_2} \dots$$

Возникает вопрос: можно ли явно записать это действие в терминах спектральных данных, т.е. кривых $\mathfrak{C}$ и расслоений на них?

Далее мы получаем явные формулы в случае (3×3) -матриц, хотя этот ответ вряд ли является окончательным. Хотелось бы найти какой-либо другой подход к решению обсуждаемого вопроса.

1.5. Предварительное описание конструкции. Все обсуждаемые ниже действия относятся к парам (3×3) -матриц общего положения.

Уравнение $\det(\lambda + \mu A + \nu B) = 0$ определяет кубическую кривую $\mathcal{C}$ на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$. Эта кривая задается уравнением, коэффициенты которого естественно считать координатами в пространстве кубических кривых. Зная кривую, мы можем считать известными координаты точек ее пересечения с прямой $\nu = 0$.

Более сложно ввести удобные координаты в пространстве линейных расслоений на фиксированной кривой $\mathcal{C}$. Напомним, что линейное расслоение определяется классом эквивалентных дивизоров (см., например, [24]). В случае кривых дивизор – это конечный набор $\{k_j x_j\}$ точек x_j кривой с целыми (положительными или отрицательными) кратностями k_j . Такие наборы возникают как наборы нулей и полюсов мероморфных сечений расслоений. *Степень расслоения* по определению равна $\sum k_j$.

Два набора $\{k_j x_j\}$ и $\{l_j y_j\}$ являются *эквивалентными*, если их “разность” $\{k_j x_j\} \cup \{-l_j y_j\}$ является набором нулей и полюсов мероморфной функции на $\mathcal{C}$.

В нашем случае расслоение $\mathcal{L}$ имеет степень -3 , двойственное расслоение имеет, соответственно, степень 3 . Голоморфные сечения двойственного расслоения строятся следующим образом: линейный функционал на $\mathbb{C}^3$ определяет линейный функционал на каждом слое расслоения. Оказывается, что сечение имеет три нуля (с учетом кратности). Далее нам удастся поставить две точки дивизора в два заранее предписанных места, а третья точка оказывается параметром на множестве расслоений. После этого удастся выписать формулы для образующих группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ в этих координатах.

Автор благодарит А. Г. Кузнецова, А. А. Рослого и С. Л. Трегуба за обсуждение этой темы.

§ 2. Координаты

2.1. Координаты на множестве кривых.

$$\det(\lambda + \nu A + \nu B) = 0$$

в виде

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + d_1 \mu^3 + d_2 \nu^3 \\ &+ p_+ \lambda^2 \mu + p_- \lambda \mu^2 + q_+ \lambda^2 \nu + q_- \lambda \nu^2 + r_+ \mu^2 \nu + r_- \mu \nu^2 + t \lambda \mu \nu = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Приведем матрицу A к диагональному виду. Обозначим через h_1, h_2, h_3 ее собственные числа. Заметим, что $-h_1, -h_2, -h_3$ – координаты точек $(\lambda : 1 : 0)$ пересечения кубической кривой с прямой $\nu = 0$ и они определены с точностью до перестановки. Мы считаем их порядок фиксированным.

Обозначим через

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

оператор B в собственном базисе матрицы A . Заметим, что U определен с точностью до сопряжения диагональной матрицей. Для матриц общего положения можно положить $u_{12} = u_{13} = 1$. Тогда все остальные координаты u_{ij} будут фиксированы.

Тем самым, общее число координат на пространстве пар матриц равно 10. Число коэффициентов в уравнении (2.1) равно 9. Мы видим, что (заведомо) не хватает по крайней мере одной координаты для восстановления пары матриц по спектральной кривой.

Очевидно,

$$\begin{aligned} d_1 &= h_1 h_2 h_3, & d_2 &= \det(U) = \det(B), \\ p_+ &= h_1 + h_2 + h_3, & p_- &= h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3, \\ q_+ &= u_{11} + u_{22} + u_{33}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$q_- = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

$$r_+ = h_1 h_2 u_{33} + h_1 h_3 u_{22} + h_2 h_3 u_{11}, \quad (2.4)$$

$$r_- = h_3 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + h_2 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} + h_1 \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.5)$$

$$t = (h_1 + h_2)u_{33} + (h_1 + h_3)u_{22} + (h_2 + h_3)u_{11}. \quad (2.6)$$

Заметим, что задание (упорядоченной) тройки d_1, p_+, p_- равносильно заданию (неупорядоченной) тройки h_1, h_2, h_3 .

2.2. Частичное восстановление матрицы U . Решая систему линейных уравнений (2.2), (2.4), (2.6) относительно диагональных элементов матрицы U , получаем

$$u_{11} = \frac{q_+ h_1^2 - t h_1 + r_1}{(h_1 - h_2)(h_1 - h_3)}, \quad (2.7)$$

$$u_{22} = \frac{q_+ h_2^2 - t h_2 + r_1}{(h_2 - h_1)(h_2 - h_3)}, \quad (2.8)$$

$$u_{33} = \frac{q_+ h_3^2 - t h_3 + r_1}{(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)}. \quad (2.9)$$

2.3. Дивизор и координаты расслоения. Первая координата на пространстве $\mathbb{C}^3$ может рассматриваться как сечение расслоения $\mathcal{L}^*$ на $\mathfrak{C}$ (см. п. 1.2). Найдем нули этого сечения. Иными словами, нам нужно найти матрицы $\lambda + \mu A + \nu B$, ядро которых содержит вектор с нулевой первой координатой, т. е. уравнение

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu h_1 + \nu u_{11} & \nu u_{12} & \nu u_{13} \\ \nu u_{21} & \lambda + \mu h_2 + \nu u_{22} & \nu u_{23} \\ \nu u_{31} & \nu u_{32} & \lambda + \mu h_3 + \nu u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

должно иметь ненулевое решение v_2, v_3 . Мы получаем условие для $(\lambda : \mu : \nu)$:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \nu u_{12} & \nu u_{13} \\ \lambda + \mu h_2 + \nu u_{22} & \nu u_{23} \\ \nu u_{32} & \lambda + \mu h_3 + \nu u_{33} \end{pmatrix} = 1. \quad (2.10)$$

Существует пара очевидных решений

$$(\lambda : \mu : \nu) = (h_2 : (-1) : 0), (h_3 : (-1) : 0).$$

Далее, приравняем миноры матрицы (2.10) нулю:

$$\nu^2 u_{12} u_{23} - \nu u_{13} (\lambda + \mu h_2 + \nu u_{22}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\nu u_{12} (\lambda + \mu h_3 + \nu u_{33}) - \nu^2 u_{13} u_{32} = 0, \quad (2.12)$$

$$(\lambda + \mu h_2 + \nu u_{22})(\lambda + \mu h_3 + \nu u_{33}) - \nu^2 u_{23} u_{32} = 0. \quad (2.13)$$

Полагая $\nu = 1$ и решая уравнения (2.11), (2.12) относительно λ, μ , мы получаем еще одну точку дивизора $(\lambda : \mu : \nu) = (L : M : 1)$, где

$$L = \frac{u_{12} h_3 \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} + u_{13} h_2 \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}}{u_{13} u_{12} (h_3 - h_2)}, \quad (2.14)$$

$$M = - \frac{u_{12} \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} + u_{13} \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}}{u_{13} u_{12} (h_3 - h_2)}. \quad (2.15)$$

Точка $(L : M : 1)$ лежит на кривой $\mathfrak{C}$ в силу условия (2.10).

ТЕОРЕМА 2.1. 1) Точка $(L : M : 1)$ однозначно определяется парой матриц $(A, B) \in \mathfrak{M}(3)$ и упорядочением собственных чисел матрицы A .

2) Пара матриц $(A, B) \in \mathfrak{M}(3)$ общего положения восстанавливается по спектральной кривой и точке $(L : M : 1)$.

Доказательство теоремы 2.1 займет оставшуюся часть настоящего параграфа. Утверждение 1) очевидно, набор точек

$$(h_2 : (-1) : 1), \quad (h_3 : (-1) : 1), \quad (L : M : 1)$$

является дивизором, определяющим расслоение степени 3 на эллиптической кривой. Поскольку две точки дивизора фиксированы, третья однозначно определена линейным расслоением и определяет расслоение.

Обратная конструкция задается явными формулами, которые мы выпишем.

2.4. Обратное отображение. Напомним, что u_{11}, u_{22}, u_{33} были восстановлены выше, в (2.7)–(2.9). Далее мы можем положить

$$u_{12} = 1, \quad u_{13} = 1. \quad (2.16)$$

Тогда выражения для L, M несколько упрощаются:

$$L = \frac{h_3(u_{23} - u_{22}) + h_2(u_{33} - u_{32})}{h_3 - h_2},$$

$$M = \frac{(u_{23} - u_{22}) + (u_{33} - u_{32})}{h_3 - h_2}.$$

Мы можем рассматривать последнюю пару равенств как систему уравнений для $(u_{23} - u_{22})$ и $(u_{33} - u_{32})$. Решая эту систему, мы получаем

$$u_{23} = L + h_2 M + u_{22} = L + h_2 M + \frac{q + h_2^2 - t h_2 + r_+}{(h_2 - h_1)(h_2 - h_3)}, \quad (2.17)$$

$$u_{32} = L + h_3 M + u_{33} = L + h_3 M + \frac{q + h_3^2 - t h_3 + r_+}{(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)}. \quad (2.18)$$

Остается восстановить две неизвестные u_{21} , u_{31} из двух неиспользованных уравнений (2.3), (2.5), в которые u_{21} , u_{31} входят линейно. Теорема 2.1 доказана, но нам понадобятся окончательные выражения

$$\begin{aligned} u_{21} = & \frac{h_1 - h_2}{h_2 - h_3} (L + h_2 M)(L + h_3 M) \\ & + \frac{M}{(h_1 - h_3)(h_2 - h_3)} (r_+ (h_1 - h_2 - h_3) - q_+ h_1 h_2 h_3 + t h_2 h_3) \\ & + \frac{L}{(h_1 - h_3)(h_2 - h_3)} (q_+ (h_2 h_3 - h_1 h_2 - h_1 h_3) - r_+ + t h_1) \\ & + \frac{r_- - q_- h_2}{h_2 - h_3} + \frac{(q_+ h_2^2 - t h_2 + r_+) (q_+ h_1^2 - t h_1 + r_1)}{(h_1 - h_2)^2 (h_3 - h_1) (h_2 - h_3)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u_{31} = & \frac{h_1 - h_3}{h_3 - h_2} (L + h_2 M)(L + h_3 M) \\ & + \frac{M}{(h_1 - h_2)(h_3 - h_2)} (r_+ (h_1 - h_2 - h_3) - q_+ h_1 h_2 h_3 + t h_2 h_3) \\ & + \frac{L}{(h_1 - h_2)(h_3 - h_2)} (q_+ (h_2 h_3 - h_1 h_2 - h_1 h_3) - r_+ + t h_1) \\ & + \frac{r_- - q_- h_3}{h_3 - h_2} + \frac{(q_+ h_3^2 - t h_3 + r_+) (q_+ h_1^2 - t h_1 + r_1)}{(h_1 - h_3)^2 (h_2 - h_1) (h_3 - h_2)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Формулы (2.19), (2.20) громоздки, но любопытны (см., например, присутствие элементарных симметрических функций от $(-h_1)$, h_2 , h_3).

§ 3. Действие образующих $GL(2, \mathbb{Z})$

3.1. Перестановка матриц. Перестановке матриц соответствует простое преобразование плоскости

$$(\lambda : \mu : \nu) \mapsto (\lambda : \nu : \mu).$$

Расслоение на кривой остается тем же.

Введенные нами координаты не совсем удобны для описания данной операции, однако ее можно описать в стиле обычных “построений с помощью кубики и линейки” (см., например, [25]).

Обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 собственные числа матрицы B . Введем следующие обозначения для точек кривой $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned} P_1 &:= (h_1 : (-1) : 0), & P_2 &:= (h_2 : (-1) : 0), & P_3 &:= (h_3 : (-1) : 0), \\ X_1 &:= (\xi_1 : 0 : (-1)), & X_2 &:= (\xi_2 : 0 : (-1)), & X_3 &:= (\xi_3 : 0 : (-1)). \end{aligned}$$

Обозначим также

$$Q = (L : M : 1),$$

так что точки P_2, P_3, Q являются дивизором расслоения $\mathcal{L}^*$. Необходимо найти эквивалентный дивизор вида X_2, X_3, Y с неизвестной точкой Y . Для этого рассмотрим прямую $X_1 Q$. Пусть $l_1(\lambda, \mu, \nu) = 0$ – ее уравнение, и пусть T – третья точка пересечения этой прямой и кубики $\mathfrak{C}$. Рассмотрим прямую $P_1 T$; пусть $l_2(\lambda, \mu, \nu) = 0$ – ее уравнение. Третья точка пересечения прямой $P_1 T$ с кубикой $\mathfrak{C}$ есть искомая точка Y .

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую мероморфную функцию на $\mathbb{CP}^2$:

$$f(\lambda : \mu : \nu) = \frac{\mu}{\nu} \frac{l_2}{l_1}.$$

Ограничим эту функцию на кривую $\mathfrak{C}$. Легко видеть, что:

- а) P_2, P_3, Q – полюсы функции f ;
- б) X_2, X_3 и только что построенная точка Y – нули функции f ;
- с) X_1, P_1, T – точки устранимых особенностей.

Таким образом, дивизоры P_2, P_3, Q и X_2, X_3, Y эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ соответствует следующее преобразование: в уравнении (2.1) переставляются μ и ν , отмеченная точка на новой кривой – образ точки Y при перестановке μ, ν .

3.2. Обращение первой матрицы. Рассмотрим более сложную операцию $(A, B) \mapsto (A^{-1}, B)$. Уравнение новой кривой имеет вид

$$\det(\lambda + \mu A^{-1} + \nu B) = 0 \quad (3.1)$$

или

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu h_1^{-1} + \nu u_{11} & \nu u_{12} & \nu u_{13} \\ \nu u_{21} & \lambda + \mu h_2^{-1} + \nu u_{22} & \nu u_{23} \\ \nu u_{31} & \nu u_{32} & \lambda + \mu h_3^{-1} + \nu u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Новые коэффициенты (см. обозначения (2.1)) следующие:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1 &= h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1}, & \tilde{d}_2 &= \det(U) = \det(C), \\ \tilde{p}_+ &= h_1^{-1} + h_2^{-1} + h_3^{-1}, & \tilde{p}_- &= h_1^{-1} h_2^{-1} + h_1^{-1} h_3^{-1} + h_2^{-1} h_3^{-1}, \\ \tilde{q}_+ &= u_{11} + u_{22} + u_{33}, \\ \tilde{q}_- &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \\ \tilde{r}_+ &= h_1^{-1} h_2^{-1} u_{33} + h_1^{-1} h_3^{-1} u_{22} + h_2^{-1} h_3^{-1} u_{11}, \\ \tilde{r}_- &= h_3^{-1} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + h_2^{-1} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} + h_1^{-1} \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \\ \tilde{t} &= (h_1^{-1} + h_2^{-1}) u_{33} + (h_1^{-1} + h_3^{-1}) u_{22} + (h_2^{-1} + h_3^{-1}) u_{11}. \end{aligned}$$

Кроме того, мы должны подставить h_j^{-1} вместо h_j в выражения для L и M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Матрице $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ соответствует следующее преобразование пространства кубических кривых с отмеченными точками:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1 &= d_1^{-1}, & \tilde{d}_2 &= d_2, & \tilde{p}_+ &= \frac{p_-}{d_1}, & \tilde{p}_- &= \frac{p_+}{d_1}, \\ \tilde{q}_+ &= q_+, & \tilde{q}_- &= q_-, \\ \tilde{r}_+ &= \frac{q_+ p_+ - t}{d_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_- &= -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} [(h_1 - h_2)(h_1 - h_3)(L + M h_2)(L + M h_3) \\ &\quad + L(r_+ - t h_1 + q_+(-h_2 h_3 + h_1 h_3 + h_1 h_2)) \\ &\quad + M(r_+(h_2 + h_3 - h_1) - t h_2 h_3 + q_+ h_1 h_2 h_3) + q_- h_1(h_2 + h_3) - h_1 r_-], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tilde{t} = \frac{q_+ p_- - r_+}{d_1}, \quad \tilde{L} = L + M(h_2 + h_3), \quad \widetilde{M} = -h_2 h_3 M.$$

Все эти формулы достаточно очевидны, кроме (3.2), для которой необходимо провести вычисления с участием формул обращения (2.7)–(2.9) и (2.16)–(2.18).

3.3. Третья образующая группы $GL(2, \mathbb{Z})$. Теперь мы рассмотрим преобразование $(A, B) \mapsto (A, AB)$ и, соответственно, коэффициенты уравнения

$$\det(\lambda + \mu A + \nu AB) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\det(\lambda A^{-1} + \mu + \nu B) = 0,$$

что эквивалентно уже разобранному уравнению (3.1) с точностью до переобозначений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответствует следующее преобразование пространства кривых с отмеченной точкой: координаты $d_1, p_{\pm}$ не изменяются, а остальные преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} d_2^* &= d_1 d_2, & q_+^* &= q_+ p_+ - t, & q_-^* &= d_1 \tilde{r}_-, & r_+^* &= d_1 q_+, & r_-^* &= d_1 q_-, \\ t^* &= p_- q_+ - r_+, & L^* &= -h_2 h_3 M, & M^* &= L + M(h_2 + h_3), \end{aligned}$$

где $\tilde{r}_-$ задается формулой (3.2).

Список литературы

1. R. C. Penner, “The decorated Teichmüller space of punctured surfaces”, *Comm. Math. Phys.*, **113**:2 (1988), 299–339.
2. A. A. Klyachko, “Spatial polygons and stable configurations of points in the projective line”, *Algebraic geometry and its applications* (Yaroslavl, Russia, 1992), Aspects Math., **25**, Vieweg, Braunschweig, 1994, 67–84.
3. V. V. Fock, *Dual Teichmüller space*, arXiv: dg-ga/9702018.
4. В. В. Фок, Л. О. Чехов, “Квантовые пространства Тейхмюллера”, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 511–528; англ. пер.: L. O. Chekhov, V. V. Fock, “A quantum Teichmüller space”, *Theoret. and Math. Phys.*, **120**:3 (1999), 1245–1259.
5. V. V. Fock, A. B. Goncharov, “Dual Teichmüller and lamination spaces”, *Handbook of Teichmüller theory*, v. 1, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **11**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 647–684.
6. Ю. А. Неретин, “О сферических функциях на группе $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:1 (2010), 59–67; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “On spherical functions on the group $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:1 (2010), 48–54.
7. Yu. A. Neretin, “Double cosets for $SU(2) \times \cdots \times SU(2)$ and outer automorphisms of free groups”, *Int. Math. Res. Notices*, 2011, №9, 2047–2067.
8. Yu. A. Neretin, *Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories*, arXiv: abs/0909.4739.

9. Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998; англ. пер.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **16**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
10. Н. И. Нессонов, “Фактор-представления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления группы $GL(\infty)^X$ ”, *Матем. физика, анализ, геом. Харьковский матем. журн.*, **10:2** (2003), 167–178.
11. Н. И. Нессонов, “Факторпредставления группы $GL(\infty)$ и допустимые представления группы $GL(\infty)^X$. II”, *Матем. физика, анализ, геом. Харьковский матем. журн.*, **10:4** (2003), 524–556.
12. Yu. A. Neretin, *Multi-operator colligations and multivariate characteristic functions*, arXiv: [abs/1006.2275](https://arxiv.org/abs/1006.2275).
13. Yu. A. Neretin, *Sphericity and multiplication of double cosets for infinite-dimensional classical groups*, arXiv: [1101.4759](https://arxiv.org/abs/1101.4759).
14. B. Farb, D. Margalit, *A primer of mapping class groups*, <http://www.math.utah.edu/margalit/primer>.
15. N. Hitchin, “Riemann surfaces and integrable systems”, *Integrable systems* (Oxford, UK, 1997), Oxf. Grad. Texts Math., **4**, Clarendon Press, Oxford, 1999, 11–52.
16. V. V. Fock, A. A. Roslyi, “Flat connections and polybles”, *ТМФ*, **95:2** (1993), 228–238; англ. пер.: V. V. Fock, A. A. Rosly, “Flat connections and polyubles”, *Theor. Math. Phys.*, **95:2** (1993), 526–534.
17. V. V. Fock, A. A. Rosly, “Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r -matrix”, *Moscow Seminar in mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **191**, Amer. Math. Soc., 1999, 67–86.
18. R. J. Cook, A. D. Thomas, “Line bundles and homogeneous matrices”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **30:4** (1979), 423–429.
19. V. Vinnikov, “Determinantal representations of algebraic curves”, *Linear algebra in signals, systems, and control* (Boston, MA, 1986), SIAM, Philadelphia, PA, 1988, 73–99.
20. A. Beauville, “Determinantal hypersurfaces”, *Michigan Math. J.*, **48:1** (2000), 39–64.
21. А. Н. Тюрин, “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30:6** (1975), 51–99; англ. пер.: A. N. Tyurin, “On intersections of quadrics”, *Russian Math. Surveys*, **30:6** (1975), 51–105.
22. М. Г. Рейман, М. С. Семёнов-Тян-Шаньский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003.
23. Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
24. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
25. Г. Клеменс, *Мозаика теории комплексных кривых*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: C. H. Clemens, *A scrapbook of complex curve theory*, Plenum, New York–London, 1980.

Ю. А. НЕРЕТИН (Yu. A. NERETIN)
 Mathematical Department, University of Vienna, Austria;
 Институт теоретической и экспериментальной физики
 им. А. И. Алиханова, г. Москва;
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступило в редакцию
 24.06.2009
 15.07.2010