Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Структура гомоморфизмов связных локально компактных групп в компактные группы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 195–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:03:48

УДК 512.546+517.986.6+512.815.1

А. И. Штерн

Структура гомоморфизмов связных локально компактных групп в компактные группы

Получен ряд следствий теоремы об автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связных групп Ли на коммутанте группы и аналога теоремы Ли для (не обязательно непрерывных) конечномерных представлений разрешимых групп Ли. В частности, показано, что почти связная локально компактная группа, допускающая (не обязательно непрерывное) вложение в компактную группу, допускает и непрерывное вложение в компактную группу, так что является конечным расширением прямого произведения компактной группы и векторной группы. Решена связанная с этим задача об описании образов (не обязательно непрерывных) гомоморфизмов связных локально компактных групп в компактные группы. Кроме того, уточнено описание ядра фон Неймана связной локально компактной группы и получено описание пересечения ядер всех (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений данной связной локально компактной группы. Указаны некоторые приложения. Показано также, что любая почти связная локально компактная группа, допускающая (не обязательно непрерывное) локально ограниченное вложение в аменабельную почти связную локально компактную группу, аменабельна.

Библиография: 58 наименований.

Ключевые слова: локально компактная группа, почти связная локально компактная группа, теорема Фрейдентала–Вейля, [MAP]-группа, полупростая локально компактная группа, локально ограниченное отображение.

§ 1. Введение

Малые, на наш взгляд, изменения показателей измерительных приборов не являются гарантией непрерывности изучаемого явления. Поэтому с точки зрения физики категория топологических пространств и таких отображений этих пространств, что каждая точка имеет окрестность с предкомпактным образом, является одним из конкурентов “естественнейшей” категории топологических пространств и их непрерывных отображений. Именно в связи с этой конкуренцией можно рассматривать первую часть 80-летней истории вопросов автоматической непрерывности для конечномерных представлений связных групп Ли. По-видимому, первой работой в этом направлении была статья Э. Картана [1],

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00057-а).

в которой было доказано, что любое конечномерное (не являющееся непрерывным априори) представление связной простой компактной группы Ли автоматически непрерывно. Несколько позже Ван дер Варден [2] доказал, что любое локально ограниченное конечномерное (не являющееся непрерывным априори) представление связной простой (не обязательно компактной) группы Ли автоматически непрерывно. Эта работа едва не вытеснила статью Картана из памяти математического сообщества, и во многих источниках, например в [3]–[8] (как и в публикации автора [9]), результат Картана приводился со ссылкой только на статью Ван дер Вардена. Я признателен профессору Д. Ремусу, обратившему мое внимание¹ на публикации [10] и [11], в которых восстанавливалась историческая справедливость.

Родственный вопрос об автоматической непрерывности автоморфизмов, изоморфизмов и гомоморфизмов, в частности, с плотным образом рассматривался (начиная с 1928 г.) многими авторами (см., например, [12]–[22] и приведенную в этих статьях библиографию), но результаты перечисленных работ связаны либо с условием плотности образа соответствующего отображения, либо с условием алгебраичности рассматриваемых групп, так что эти результаты нельзя непосредственно применить к изучению конечномерных представлений общих связных групп Ли и, тем более, общих связных локально компактных групп. В частности, не потерявшая актуальности работа Ж. Титса [19] (во многом использовавшая методы и результаты статьи [18]) содержала достаточные условия автоматической непрерывности гомоморфизмов групп Ли с *совершенной*² компонентой единицы без предположения о локальной ограниченности гомоморфизма (впрочем, в некоторых дополнительных предположениях (скажем, в предположении, что присоединенное представление подалгебры Леви алгебры Ли группы-образа и ограничение присоединенного представления этой алгебры Ли на ее радикал не имеют общего прямого слагаемого, а это условие, конечно, автоматически выполняется для конечномерных полных матричных групп) и, главное, в предположении, что все простые факторы подгруппы Леви являются абсолютно простыми (т.е. имеют простые комплексификации) [19, следствие 2], а это условие не выполняется для группы $SL(n, \mathbb{C})$, но и эти утверждения тоже нельзя непосредственно применить к комплексным линейным представлениям общих связных групп Ли именно ввиду того, что группа Ли $SL(n, \mathbb{C})$ не является абсолютно простой³.

В работе автора [9] был получен ряд результатов об автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных линейных представлений связных групп Ли, которые оказываются продуктивными при исследовании вопросов о структуре вложений, не обязательно инъективных гомоморфизмов и представлений связных групп Ли и связных локально компактных групп. Кратко перечислим важнейшие из полученных в статье результатов, относящихся к (не обязательно непрерывным) конечномерным унитарным представлениям связных локально компактных групп.

¹В частном сообщении в 2010 г.

²То есть совпадающей со своим *коммутантом* – подгруппой (априори незамкнутой), порожденной коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, где a и b пробегает группу.

³Впрочем, в [19] Титс анонсировал возможность получить с помощью своего результата утверждения теорем Картана и Ван дер Вардена.

Простейшим и во многом основным вопросом, связанным с поведением конечномерных унитарных (не обязательно непрерывных) представлений, является описание почти связных локально компактных групп, допускающих (не обязательно непрерывное) вложение в компактную группу, т. е. аналог теоремы Фрейденшталя–Вейля для (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений таких групп.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – почти связная локально компактная группа, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда группа G топологически изоморфна конечному расширению прямого произведения компактной группы и (конечномерной) векторной группы.

В частности, если связная локально компактная группа, рассматриваемая как абстрактная группа, допускает вложение в компактную топологическую группу, то сама эта локально компактная группа необходимо допускает и непрерывное вложение в компактную топологическую группу и, таким образом, по теореме Фрейденшталя–Вейля [23], [24] является прямым произведением компактной связной локально компактной группы и векторной группы.

В то время как образ локально компактной группы при непрерывном гомоморфизме является образом факторгруппы по ядру этого гомоморфизма и, тем самым, образом непрерывного вложения связной локально компактной группы, описание структуры образа не обязательно непрерывного гомоморфизма локально компактной группы в компактную группу не допускает этого элементарного описания, поскольку ядро этого гомоморфизма может быть незамкнутым. Тем не менее, структуру этих объектов удастся выяснить. Соответствующий результат имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – связная группа Ли, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфизм (не обязательно непрерывный). Тогда существуют прямое произведение H компактной группы Ли и векторной группы и гомоморфизм Θ группы H в K , удовлетворяющий условию совпадения образов, $\Theta(H) = J(G)$, как (не обязательно замкнутых) подгрупп в K .

Как мы видим, в перечисленных выше задачах расширение класса представлений (с непрерывных до локально ограниченных) не меняло ответов на поставленные вопросы. Однако в близкой задаче об описании пересечения ядер непрерывных конечномерных унитарных представлений (ядра фон Неймана) и пересечения ядер всех (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений (“наименьшего ядра фон Неймана”) данной локально компактной группы результаты могут оказаться различными. Прежде всего, различны сами описания.

Пусть $H = H(G)$ – аналитическая подгруппа связной локально компактной группы G , порожденная всеми некомпактными простыми аналитическими подгруппами группы G .

ТЕОРЕМА 3. Ядром фон Неймана $\nu_{\text{Nk}}(G)$ произвольной связной локально компактной группы G с радикалом R является замкнутый нормальный делитель, порожденный группой H и нормальным делителем $[G, R]$ в G , порожденным коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, где $g \in G$ и $r \in R$.

ТЕОРЕМА 4. *Наименьшим ядром фон Неймана $\text{svNk}(G)$ произвольной связной локально компактной группы G с радикалом R является нормальный делитель, порожденный группой H и нормальным делителем $[G, R]$, порожденным коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, где $g \in G$ и $r \in R$.*

Указан пример связной редуктивной группы Ли G с $\text{vNk}(G) \neq \text{svNk}(G)$.

В приложении излагается следующий родственный результат о локально ограниченных гомоморфизмах связной аменабельной локально компактной группы в компактную группу.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G – почти связная локально компактная группа, K – почти связная аменабельная локально компактная группа и $J: G \rightarrow K$ – локально ограниченное гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда G – аменабельная локально компактная группа, и поэтому группа G является расширением компактной топологической группы с помощью разрешимого замкнутого нормального делителя.*

Статья организована следующим образом. Необходимые предварительные сведения изложены в § 2. Аналог теоремы Фрейден탈я–Вейля для не обязательно непрерывных конечномерных унитарных представлений связных локально компактных групп и теорема 1 рассматриваются в § 3. Теорема об образе вложения связной локально компактной группы в компактную группу (теорема 2) доказывается в § 4. Теоремы о ядрах фон Неймана и наименьших ядрах фон Неймана связных локально компактных групп (теоремы 3, 4) излагаются в § 5. В приложении (§ 6) приводится аналог теоремы Фрейден탈я–Вейля, связанный с локально ограниченными (не обязательно непрерывными) вложениями связных локально компактных групп в аменабельные группы.

Часть результатов статьи анонсирована (со схемами доказательств) в [25]–[30].

Автор глубоко признателен рецензентам за полезные замечания и ценные советы, которые помогли улучшить изложение.

§ 2. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и утверждения работы [9], используемые в доказательствах настоящей статьи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – группа, X – подмножество в G . Множество X называется *бесконечно делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально бесконечно делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, т. е. множество p -х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G , содержит некоторую окрестность единицы в G .

Очевидно, любая группа Ли локально бесконечно делима. Следующее фольклорное утверждение показывает, что в любой топологической группе замыкания бесконечно делимых относительно компактных подгрупп бесконечно делимы.

ЛЕММА 1 [9]. Пусть G – топологическая группа, а X – подмножество группы G с компактным замыканием в G . Если X бесконечно делимо, то и его замыкание в G бесконечно делимо.

Сформулируем теперь одно из простейших обобщений теоремы Ли.

ТЕОРЕМА А [9]. Пусть G – разрешимая группа, и пусть каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G бесконечно делим. Пусть π – представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E . Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.

Напомним, что любая коммутативная связная локально компактная группа бесконечно делима [9, следствие 1], как и любая компактная связная группа [6, теорема 9.35], а последовательные коммутанты связной топологической группы связны, как и факторгруппы по ним, и поэтому любая связная разрешимая локально компактная группа удовлетворяет всем условиям теоремы А. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 1 [9, следствие 5]. 1) Любое (не обязательно непрерывное) неприводимое конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы одномерно.

2) Любое (не обязательно непрерывное) конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы имеет базис, в котором операторы представления записываются верхними треугольными матрицами.

Приведем один из основных результатов статьи [9].

ТЕОРЕМА В [9]. Пусть G – связная группа Ли, G' – коммутант группы G и π – локально ограниченное конечномерное представление группы G . Ограничение $\pi|_{G'}$ представления π на G' непрерывно на G' в топологии, индуцированной исходной топологией группы G .

Этот результат об автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп является наилучшим возможным, потому что любая несовершенная связная группа Ли имеет разрывное локально ограниченное конечномерное представление.

На первый взгляд перечисленные выше результаты об автоматической непрерывности могут быть полезны только при изучении гомоморфизмов групп Ли, а не более общих локально компактных групп. Чтобы показать, что это не так, мы начнем с доказательства “разрывного” варианта теоремы Фрейден-таля–Вейля для “общих” связных локально компактных групп.

§ 3. Аналог теоремы Фрейден-таля–Вейля для не обязательно непрерывных конечномерных унитарных представлений связных локально компактных групп

Одним из наиболее ранних и красивых результатов теории топологических групп является теорема Фрейден-таля–Вейля, дающая описание семейства связных локально компактных групп, допускающих непрерывное вложение в компактную группу, как семейства прямых произведений связных компактных

групп и (конечномерных) векторных групп [23], [24]. Цель настоящего параграфа – показать, что условие непрерывности вложения излишне в этой теории, естественным образом распространить характеристику на случай почти связных локально компактных групп и указать некоторые следствия. Доказательства существенно используют вспомогательные результаты, перечисленные в § 2.

Напомним, что необходимым и достаточным условием существования непрерывного вложения топологической группы в компактную группу является существование семейства непрерывных конечномерных унитарных представлений данной группы, разделяющего точки этой группы. В связи с этим был введен класс [MAP] топологических групп, непрерывные конечномерные унитарные представления которого разделяют точки группы. Представляет интерес и более широкий класс [DMAP] топологических групп, конечномерные унитарные (не обязательно непрерывные) представления которых разделяют точки группы, т. е. таких топологических групп, что соответствующие абстрактные группы, рассматриваемые в дискретной топологии, принадлежат классу [MAP]. Теорема 5 равносильна утверждению о том, что почти связная локально компактная группа G принадлежит классу [MAP] тогда и только тогда, когда данная группа, рассматриваемая в дискретной топологии, принадлежит тому же классу [MAP], т. е. $G \in [\text{MAP}] \iff G \in [\text{DMAP}]$. В такой форме утверждение представляет интерес в связи с существованием сильно экзотических (тем самым, конечно, не локально компактных) абелевых групп, которые, безусловно, имеют достаточно много одномерных представлений как дискретные группы [31] (в связи с отсутствием описания локально компактных [MAP]-групп, не являющихся почти связными, вопрос о совпадении [MAP]- и [DMAP]-условий в классе локально компактных групп открыт).

С другой стороны, это утверждение показывает, что связная или почти связная локально компактная группа, являющаяся [DMAP]-группой, на самом деле принадлежит более узкому классу, так называемому классу [Moore] или [FIR]⁴, образованному локально компактными группами, все неприводимые непрерывные представления которых конечномерны [32] (см. также [33], [34] и результаты о не обязательно локально компактных группах с конечномерными представлениями в [35]). Критерий существования достаточного семейства непрерывных представлений топологической группы в рефлексивных банаховых пространствах [36] и критерий существования непрерывного вложения топологической группы в локально компактную группу в терминах ее унитарных представлений [37] стимулируют вопрос о возможности ослабления условий непрерывности в этих теоремах (может быть, за счет сужения класса рассматриваемых топологических групп), а также возможности выхода за пределы базового класса локально компактных групп, но в настоящей статье мы ограничимся обсуждением свойств локально компактных групп с дополнительными условиями.

Начнем изложение со следующего вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 2. *Любая связная разрешимая локально компактная группа, являющаяся [MAP]-группой как дискретная группа, коммутативна (и, таким*

⁴FIR – аббревиатура от “Finite-dimensional irreducible representations”.

образом, является прямым произведением конечномерного тора и (конечномерной) векторной группы; см., например, [6, теорема 7.57, (iii)]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – связная разрешимая локально компактная группа, являющаяся [МАР]-группой как дискретная группа, и, тем самым, семейство неприводимых (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений группы G разделяет точки этой группы. Согласно утверждению 2) следствия 1 эти представления можно считать треугольными, а потому (ввиду унитарности) и диагональными. Таким образом, некоторое семейство одномерных унитарных представлений разделяет точки группы G , откуда непосредственно следует, что группа G коммутативна.

Докажем теперь утверждение о подгруппах компактных групп, изоморфных (как дискретные группы) связным группам Ли. Мы доказываем это утверждение отдельно, хотя теорема 7 сильнее теоремы 6, причем теорема 6 не используется в доказательстве теоремы 7. Причина, по которой доказательство теоремы 6 представляет самостоятельный интерес, состоит в том, что доказательство теоремы 6 не опирается на используемую в доказательстве теоремы 7 сильную теорему о структуре локально компактной группы общего вида (эту ссылку в доказательстве теоремы 7 можно обойти с помощью весьма громоздкой конструкции; см. замечание 2).

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – связная группа Ли, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы Ли и (конечномерной) векторной группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – связная группа Ли, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Поскольку отображение J автоматически ограничено (и, тем самым, в частности, локально ограничено), по теореме В из § 2 оно непрерывно в топологии группы G на коммутанте G' группы G , который является (связной) аналитической подгруппой группы G (хотя и не обязательно замкнутой). По теореме Фрейден탈я–Вейля коммутант G' является прямым произведением связной компактной группы Q и конечномерной векторной группы V . В таком случае группа Q является компактным нормальным делителем в G (как подгруппа нормального делителя, образованная элементами, порождающими компактные подгруппы степеней этих элементов). Образ группы Q под действием J является компактным множеством как непрерывный образ компакта, и этот образ является нормальным делителем в J -образе $J(G)$ группы G , а потому и в замыкании $\overline{J(G)} \subset K$ группы $J(G)$. Композиция отображения J с последующим каноническим отображением группы $\overline{J(G)}$ на компактную факторгруппу $\overline{J(G)}/J(Q)$ тривиальна на Q и потому может рассматриваться как (не обязательно непрерывный) гомоморфизм факторгруппы G/Q в компактную группу $\overline{J(G)}/J(Q)$. Этот гомоморфизм инъективен, поскольку гомоморфизм J является вложением и, следовательно, образ элемента определяет элемент однозначно. Таким образом, группа G/Q допускает вложение в компактную группу и потому является [МАР]-группой как дискретная группа. Кроме того, факторгруппа G/Q разрешима, поскольку она является расширением

коммутативной группы G/G' с помощью векторной группы G'/Q , изоморфной группе V . Следовательно, факторгруппа G/Q коммутативна по лемме 2. Итак, группа G содержит компактный нормальный делитель C , факторгруппа по которому является прямым произведением тора и векторной группы (поскольку любая коммутативная группа Ли может быть представлена в виде такого произведения).

Коммутатор C' группы C замкнут (см. [6, теорема 9.2]) и является полупростой компактной группой (см. [6, следствие 9.6]). Более того, C' – нормальный делитель в группе G (как коммутант нормального делителя). Факторгруппа группы G по C' является разрешимой как расширение векторной группы с помощью компактной коммутативной группы C/C' . Снова применяя лемму 2, мы видим, что группа G/C' коммутативна, и, таким образом, группа G содержит компактный полупростой нормальный делитель C' , факторгруппа по которому является прямым произведением тора и векторной группы.

Другим замкнутым нормальным делителем группы G является ее радикал R , т. е. наибольший (замкнутый) связный разрешимый нормальный делитель в G (см., например, [38] или [39, теорема 3.7]). Применяя лемму 2 еще раз, мы видим, что группа R коммутативна и поэтому тоже является прямым произведением тора T_R и векторной группы V_R .

Поскольку группа C' полупроста и поэтому не имеет нетривиальных замкнутых связных разрешимых нормальных делителей, замкнутое пересечение $C' \cap R$ имеет тривиальную компоненту единицы. Таким образом, это пересечение дискретно. Следовательно, образ $\widetilde{C}'$ группы C' в полупростой факторгруппе $S = G/R$ локально изоморфен группе C' . Этот образ является замкнутым нормальным делителем в S , и если $\widetilde{C}' \neq S$, то группа $\widetilde{C}'$ имеет нетривиальное полупростое почти дополнение в S (нетривиальную полупростую подгруппу в S , имеющую конечное пересечение с $\widetilde{C}'$). Однако это невозможно, поскольку факторгруппа G/C' коммутативна, и поэтому факторгруппа $(G/R)/\widetilde{C}' = S/\widetilde{C}'$ коммутативна, связна и полупроста одновременно, откуда следует ее тривиальность, а тем самым, равенство $G = C'R$.

Замыкание любой однопараметрической подгруппы в группе Ли $S = G/R$ коммутативно. Следовательно, полный прообраз этой подгруппы в группе G разрешим, а потому и коммутативен по лемме 2. В частности, любой элемент образа любой однопараметрической подгруппы в группе C' при каноническом гомоморфизме группы G на $S = G/R$ имеет некоторый прообраз, коммутирующий с любым элементом группы R . Но эти прообразы отличаются множителем из R , и поэтому все прообразы любого элемента любой однопараметрической подгруппы в образе группы C' при каноническом гомоморфизме группы G на $S = G/R$ коммутируют с любым элементом группы R . Следовательно, в частности, любой элемент группы C' коммутирует с любым элементом группы R . Группа K , определяемая как произведение коммутирующих компактных групп C' и T_R , компактна и является нормальным делителем в G как произведение нормальных делителей. Любой элемент этой группы коммутирует с любым элементом векторной группы как произведение элементов, коммутирующих с этим элементом. Таким образом, любой элемент g группы G является произведением элемента k компактной группы K и элемента v векторной группы V_R , причем пересечение $K \cap V_R$ три-

виально (в векторной группе нет нетривиальных компактных подгрупп). Тогда формулы $k_1 v_1 k_2 v_2 = k_1 v_1 k_2 (v_1)^{-1} v_1 v_2 = k_1 k_2 (k_2)^{-1} v_1 k_2 v_2$ означают, что $k_1 v_1 k_2 v_2 = k_1 k_2 v_1 v_2$, откуда следует, что G – прямое произведение групп K и V , и это завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть K – связная компактная топологическая группа, содержащая плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли. Тогда группа K является произведением связной компоненты единицы центра группы K (связной коммутативной компактной группы) и связной полупростой компактной группы Ли. В частности, если группа K не имеет нетривиальных связных коммутативных компактных нормальных делителей, то K содержит плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли, тогда и только тогда, когда K является связной полупростой компактной группой Ли.

Перед доказательством следствия 2 напомним, что если G – связная топологическая группа, а Q – компактный нормальный делитель в G , то $G = HQ$, где H – нормальный делитель в G , образованный всеми элементами в G , перестановочными с каждым элементом группы Q [38, теорема 2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В этих предположениях мы будем называть подгруппу H почти дополнительной к Q в G в смысле Ивасава.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Пусть K – связная компактная топологическая группа, содержащая плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли H . Тогда факторгруппа (которая является полупростой компактной топологической группой) группы K по связной компоненте Z_0 центра Z содержит группу разрывов тавтологического вложения группы Ли H на себя как подгруппу группы K , поскольку группа разрывов является связным коммутативным нормальным делителем в K , а связная компонента Z_0 центра Z является связным коммутативным нормальным делителем в K , наибольшим из таких нормальных делителей (т.е. содержащим каждый связный коммутативный нормальный делитель в K), что сразу следует из соответствующей структурной теоремы (см. [6, теорема 9.19]). Композиция тавтологического вложения группы Ли H в K и канонического отображения $K \rightarrow K/Z_0$ имеет тогда тривиальную группу разрывов и потому является непрерывным гомоморфизмом связной группы Ли H на плотную подгруппу полупростой компактной топологической группы K/Z_0 . Этот гомоморфизм допускает факторизацию через факторгруппу группы Ли H по (замкнутому) ядру этого непрерывного отображения, так что можно считать, что этот гомоморфизм является мономорфизмом. Тогда полные прообразы компактных нормальных делителей в группе K/Z_0 , факторгруппы по которым являются группами Ли, компактны и имеют единичное пересечение. Для группы Ли ввиду отсутствия малых подгрупп получаем, что прообраз некоторого нормального делителя N с этим свойством тривиален. Таким образом, замыкание образа группы H/Z_0 в K/Z_0 содержится в подгруппе Ли в K/Z_0 , почти дополнительной к N в смысле Ивасава, откуда и следует, что K/Z_0 – группа Ли. Тогда и коммутант K' группы K , являющийся замкнутой подгруппой в K , изоморфной факторгруппе группы Ли K/Z_0 , также является группой

Ли, притом полупростой группой Ли, поскольку K' полупрост как компактная группа. Поскольку группа K является произведением $Z_0 K'$ связной компоненты единицы Z_0 центра Z группы K (это связная коммутативная компактная группа) и связной полупростой компактной группы Ли K' , то первое утверждение теоремы доказано. В случае, если группа K не имеет нетривиальных связных коммутативных компактных нормальных делителей и содержит плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли, сомножитель Z_0 единичен, и поэтому K является связной полупростой компактной группой Ли. Это завершает доказательство следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в коммутативной компактной группе, не являющейся группой Ли, может быть плотна не только некоторая подгруппа Ли, но даже некоторая однопараметрическая подгруппа. Например, в произведении $K = \prod_{\alpha} T_{\alpha}$ континуума одномерных торов достаточно воспользоваться базисом Гамеля $\{e_{\alpha}\}$ в $\mathbb{R}$ и построить однопараметрическую подгруппу $t \mapsto \{\exp(i\pi f_{\alpha}(t))\}$, $t \in \mathbb{R}$, где α пробегает индексы всех элементов базиса Гамеля, а f_{α} – координата, отвечающая индексу α (ср. [9, предложение 1]). Поэтому утверждение следствия 2 о подгруппе Z_0 не допускает усиления в общем случае.

Следующее утверждение является обобщением теоремы Фрейден탈ля–Вейля для случая связной локально компактной группы (ср. с теоремой 1).

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – связная локально компактная группа, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы и (конечномерной) векторной группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – связная локально компактная группа, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Согласно лемме 2 любая замкнутая связная разрешимая подгруппа группы G коммутативна. В частности, радикал R группы G также коммутативен. Факторгруппа $S = G/R$ группы G по радикалу R полупроста, т. е. не имеет нетривиальных замкнутых связных абелевых нормальных делителей [38, теорема 15]. Согласно [40, теорема 10.29] существуют такое прямое произведение $\prod_{j \in J} S_j$ связных односвязных простых конечномерных групп Ли S_j , $j \in J$, и такие гомоморфизмы $\pi_S: \prod_{j \in J} S_j \rightarrow S$ и $f: S \rightarrow \prod_{j \in J} S_j/Z(S_j)$, где $Z(S_j)$ – центр группы S_j и $S_j/Z(S_j)$ – факторгруппа по центру, что образ гомоморфизма π_S плотен в S , а композиция $f \circ \pi_S$ гомоморфизмов f и π_S совпадает с каноническим гомоморфизмом группы на факторгруппу, определяемым переходом к фактору $S_j \rightarrow S_j/Z(S_j)$ в каждом сомножителе. Поскольку факторгруппа группы S по некоторому компактному нормальному делителю является группой Ли, семейство некомпактных простых групп Ли в семействе $\{S_j, j \in J\}$ конечно (быть может, пусто). Докажем, что оно пусто. Если S_{j_0} – некоторая некомпактная простая группа Ли, то в ее разложении Иваса-вы $S_{j_0} = K_{j_0} A_{j_0} N_{j_0}$ (где K_{j_0} – полный прообраз соответствующей максимальной компактной подгруппы в $S_{j_0}/Z(S_{j_0})$) имеется связная замкнутая некомму- тативная разрешимая подгруппа Ли $A_{j_0} N_{j_0}$, прообраз которой в группе G – связная замкнутая некомму- тативная разрешимая подгруппа, что невозможно

для [DMAP]-группы по лемме 2. Таким образом, группа $\prod_{j \in J} S_j$ компактна, поэтому и группа S компактна как проективный предел компактных групп Ли. Итак, группа G содержит коммутативный нормальный делитель R , изоморфный произведению тора и векторного пространства, и факторгруппа S по этому нормальному делителю компактна.

Рассмотрим произвольный элемент g группы G . Его образ в группе S при каноническом отображении группы G на факторгруппу $S = G/R$ принадлежит некоторому максимальному протору T в группе S , т. е. максимальной связной абелевой подгруппе группы S , которая необходимо замкнута [41]. Полный прообраз этого протора T в группе G является связной замкнутой разрешимой подгруппой группы G , и эта подгруппа содержит данный элемент g . Следовательно, применяя ту же лемму 2, видим, что любой элемент g группы G коммутирует с любым элементом подгруппы R . В частности, любой элемент g группы G коммутирует с любым элементом векторной подгруппы V в R . Таким образом, группа G содержит векторную подгруппу V , факторгруппа по которой компактна. По теореме о расщеплении [42, предложение VII.3.2.3] в таком случае существует (автоматически связная) компактная подгруппа Q в G , дополняющая к V . Однако любой элемент группы Q коммутирует с любым элементом группы V , так что не только V , но и Q является связным замкнутым нормальным делителем в G . Таким образом, группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы Q и (конечномерной) векторной группы V , что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы 7 можно избежать ссылки на теорему 10.29 из [40], воспользовавшись теоремой Монтгомери–Циппина (см. [43]) о подъеме однопараметрической подгруппы в факторгруппе локально компактной группы по компактному нормальному делителю до однопараметрической подгруппы в самой локально компактной группе и структурной теоремой Штрошеля [44, теорема 7.2]. А именно, подъем некоммутирующих однопараметрических подгрупп в разрешимой части AN разложения Ивасава некомпактной простой факторгруппы данной связной локально компактной [DMAP]-группы G в факторгруппы Ли по направленному по убыванию семейству компактных нормальных делителей, факторгруппы по которым являются группами Ли, в сочетании с переходом к пределу прообразов этих подъемов по фильтру таких нормальных делителей позволяет построить пару однопараметрических подгрупп в факторгруппе группы G по радикалу R , которые не коммутируют и порождают связную разрешимую подгруппу в факторгруппе G/R , что невозможно для связной локально компактной [DMAP]-группы. Подробности (довольно громоздкие) здесь не приводятся.

Теорема 7 используется в доказательстве основной теоремы настоящего параграфа, теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть G – почти связная локально компактная группа, K – компактная топологическая группа и $J: G \rightarrow K$ – гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Ограничение отображения J на компоненту единицы G_0 в G является гомоморфным вложением, причем по теореме 7 группа G_0 является прямым произведением компактной связной группы K и векторной группы V , и факторгруппа G/G_0 изоморфна компактной

вполне несвязной группе Q . Тогда K – нормальный делитель в G , поскольку K – семейство элементов нормального делителя G_0 , последовательность натуральных степеней которых образует предкомпактное множество. При этом группа G/K есть расширение группы V с помощью Q . По уже примененной выше теореме о расщеплении [42, предложение VII.3.2.3] существует такая компактная подгруппа L группы G , что G – полупрямое произведение подгрупп L и V . Полный прообраз группы L в G есть компактная подгруппа $C \subset G$. По построению имеем $C \cap V = \{e\}$, $C \cap G_0 = K$, $G = CV$ и $C/K \simeq Q$. Действие группы C на V есть непрерывное линейное представление группы C в V , так как аддитивное отображение линейного пространства в себя линейно [45], так что образ некоторой окрестности единицы в C не может содержать нетривиальных подгрупп. Тогда образ открытого нормального делителя в C , содержащегося в этой окрестности [46, теорема 16 в § 22], единичен. Следовательно, группа C – конечное расширение открытого нормального делителя C_1 в C , причем действие группы C_1 на V тривиально. Поскольку $C_1 \cap V = \{e\}$, $C_1 \cap G_0 = K$ и $G_1 = C_1V$ является подгруппой конечного индекса в G , из тривиальности действия C_1 на V следует, что G_1 – прямое произведение C_1 и V .

Итак, группа G топологически изоморфна конечному расширению прямого произведения G_1 компактной группы и (конечномерной) векторной группы, что завершает доказательство теоремы.

Теореме 1 можно придать следующую эквивалентную форму.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – почти связная локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны:

- 1) G – [MAP]-группа;
- 2) G – [DMAP]-группа;
- 3) G – конечное расширение прямого произведения компактной группы и векторной группы.

Повторим, что структура произвольных локально компактных [MAP]-групп до сих пор не описана (напомним, что, например, свободные группы и группа $SL(2, \mathbb{Z})$ являются [MAP]-группами, а группа $SL(2, \mathbb{R})$ не является), что не дает возможности описать и структуру произвольных локально компактных [DMAP]-групп. Тем не менее, поскольку любая вполне несвязная локально компактная группа содержит открытый компактный нормальный делитель, мы получаем следующее очевидное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Любая локально компактная [DMAP]-группа содержит открытую подгруппу, являющуюся прямым произведением компактной топологической группы и векторной группы.

Приложения теорем 1, 7 к теории почти периодических представлений групп в локально выпуклых пространствах (см. [47]) мы рассмотрим в отдельной публикации.

Напомним, что согласно [9, п. 5.1, пример 2] конечномерное унитарное представление полупростой связной компактной группы может быть разрывным. Изучение разрывных представлений и гомоморфизмов облегчается введением множества так называемых финальных разрывов таких отображений и

изучением семейства отображений, финально непрерывных в смысле [9, определение 8]; см. также [48, гл. 1].

§ 4. Теорема об образе вложения связной локально компактной группы в компактную группу

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть G – локально компактная группа, K – компактная топологическая группа, и пусть $J: G \rightarrow K$ – гомоморфизм (не обязательно непрерывный). Воспользуемся результатом Ивасава о локальном разложении [38, теорема 11], из которого непосредственно следует, что в любой окрестности единицы группы G найдется такой компактный (не обязательно связный) нормальный делитель N , что факторгруппа $L = G/N$ является группой Ли, а группа G является образом некоторого гомоморфизма $\varphi: \tilde{L} \times N \rightarrow G$ с дискретным ядром, где $\tilde{L}$ – универсальная накрывающая группы Ли L . Рассмотрим гомоморфизм $\tilde{J}: \tilde{L} \times N \rightarrow K$, определенный формулой $\tilde{J} = J \circ \pi$ (и поэтому имеющий тот же образ, что и J). Поскольку N – компактная группа, очевидно, что достаточно доказать утверждение теоремы для связной односвязной группы Ли $\tilde{L}$. Заменяя в условии теоремы группу G группой $\tilde{L}$ и гомоморфизм J ограничением гомоморфизма $\tilde{J}$ на $\tilde{L}$, мы вправе считать, что рассматриваемая группа G – связная односвязная группа Ли.

По теореме Леви–Мальцева в этом случае группа G является полупрямым произведением связной полупростой группы Ли S и радикала R группы G (наибольшего связного разрешимого нормального делителя в G). По теореме В ограничение гомоморфизма J на S непрерывно.

Поскольку группа S полупроста, ограничение гомоморфизма J на некоторые простые факторы в S тривиально и является локальным изоморфизмом на других простых факторах. Из классической теоремы Фрейдентала–Вейля [23], [24] следует, что J тривиален на любом некомпактном простом факторе, входящем в полупростую группу S .

С другой стороны, R – связная разрешимая группа. Следовательно, ее образ $J(R)$ также разрешим. Поэтому и замыкание $\overline{J(R)}$ образа $J(R)$ в K разрешимо. Кроме того, каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы R бесконечно делим. Это свойство сохраняется в образе и наследуется замыканием (см. лемму 1). Следовательно, $\overline{J(R)}$ – связная разрешимая компактная группа. Поэтому она коммутативна (см. лемму 2). Тогда $J(R)$ также коммутативна и, таким образом, ядро гомоморфизма J содержит весь коммутант R' радикала R .

Заметим, что группа R' замкнута [49, теоремы 3.18.2, 3.18.12]. Более того, эта группа является характеристической в R и, следовательно, нормальным делителем в G . Поскольку J тривиален на R' , мы можем перейти к факторгруппе G/R' и к соответствующему гомоморфизму факторгруппы G/R' в K , образ которого совпадает с образом J . Поэтому мы можем дополнительно предположить, что G – связная односвязная группа Ли, радикал R которой коммутативен (и, следовательно, является векторной группой).

Обозначим через M связную компоненту единицы в пересечении ядра гомоморфизма J с полупростой подгруппой Ли S . Как и сама группа S , группа M обязательно полупроста. Действие группы M на векторной группе R

аддитивно и, следовательно, определяет конечномерное непрерывное линейное представление группы M на пространстве R . Однако M – полупростая группа Ли, так что это представление вполне приводимо (является прямой суммой конечного числа неприводимых представлений), и, очевидно, любая нормальная подгруппа в G , содержащая M , обязательно содержит векторную подгруппу (инвариантное подпространство) векторной группы R , на которой соответствующее подпредставление не является отображением в единичный оператор. Следовательно, ядро гомоморфизма J автоматически содержит не только полупростую подгруппу M , но и векторную часть V группы R , на которой группа M нетривиально действует внутренними автоморфизмами группы G . Подгруппа MV группы G , порожденная M и V , замкнута и содержится в ядре гомоморфизма J .

Таким образом, мы снова можем заменить группу G более простой группой, а именно факторгруппой Ли $G/(MV)$, и заменить гомоморфизм J соответствующим гомоморфизмом группы $G/(MV)$ (образ которого совпадает с образом J). Сохраним обозначения S , R и N для новой группы G . Как мы только что доказали, любой гомоморфный образ связной локально компактной группы в компактной группе является образом некоторого гомоморфизма прямого произведения связной односвязной группы Ли $S \cdot R$ и компактной группы N в K , где S – компактная группа Ли, нормальный делитель R является векторной группой, а действие группы S на R сохраняет каждый элемент группы R .

Любой неединичный элемент любого простого компактного фактора Ли в S принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе в S . Образ этой подгруппы нетривиален, поскольку в противном случае соответствующий фактор должен содержаться в ядре соответствующего гомоморфизма группы G (напомним, что по построению, после перехода к гомоморфизму факторгруппы $G/(MV)$, ограничение гомоморфизма J на любой простой (компактный) фактор в группе S является локальным изоморфизмом). Подгруппа в G , определяемая как полный прообраз этой однопараметрической подгруппы в факторгруппе G/R , изоморфной группе S , очевидным образом разрешима. Тогда образ этой группы в K есть разрешимая подгруппа компактной группы и, как и выше, она коммутативна из соображений делимости факторов в композиционном ряде. Таким образом, коммутатор любого элемента компактной группы S с любым элементом группы R лежит в ядре гомоморфизма J . Если это ядро содержит всю группу R , то утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что группа R не содержится в ядре гомоморфизма J . Напомним (см. предпоследний абзац), что каждый элемент группы R инвариантен относительно внутренних автоморфизмов группы G , определяемых любыми элементами группы S (поскольку группа R – векторная подгруппа “промежуточной” векторной группы, а именно пространства подпредставления, являющегося наибольшим кратным единичного представления группы S). Действительно, иначе K -образ действия некоторой однопараметрической группы в S на R был бы нетривиален, что невозможно согласно предыдущему абзацу. Это и доказывает, что образ исходного гомоморфизма совпадает с образом (в той же компактной группе) гомоморфизма (не обязательно непрерывного) прямого произведения компактной группы и векторной группы, что завершает доказательство теоремы.

§ 5. Ядро фон Неймана и наименьшее ядро фон Неймана

Дж. фон Нейман [50] ввел в 1934 г. для любой топологической группы G замкнутый нормальный делитель (и даже характеристическую подгруппу) $\text{vNk}(G)$ группы G , образованную всеми элементами $g \in G$, удовлетворяющими условию $\varphi(g) = 1$ для любой почти периодической функции φ на G . Это подмножество, которое очевидным образом совпадает с пересечением ядер всех конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений группы G (или, что равносильно, пересечению ядер всех неприводимых конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений группы G), теперь называется *ядром фон Неймана* группы G . Топологическая группа G называется *минимально почти периодической*, если $\text{vNk}(G) = G$, т.е. G не имеет нетривиальных неприводимых конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений, и *максимально почти периодической* ([MAP]), если $\text{vNk}(G) = \{e\}$, а это равносильно условию, что неприводимые конечномерные непрерывные комплексные унитарные представления разделяют точки группы G .

Г. Фрейденталь [23] получил в 1936 г. необходимые и достаточные условия того, что связная локально компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, является [MAP]-группой. А. Вейль [24] освободился от условия сепарабельности и доказал, что связная локально компактная группа G является [MAP]-группой тогда и только тогда, когда она является прямым произведением векторной группы и компактной группы. Заметим, что факторгруппа $G/\text{vNk}(G)$ является очевидным образом [MAP]-группой. Обобщения теоремы Фрейденталь–Вейля для почти связных локально компактных групп (т.е. таких, что G/G_0 компактна, где G_0 – компонента единицы в G) были получены в [51]–[53]. Попытка дать полное описание ядер фон Неймана связных групп Ли G была предпринята Ш. Ротманом [54], одним из соавторов знаменитой теоремы о проторах в компактных топологических группах [41], однако его статья ошибочна (в утверждениях и доказательствах этих утверждений Ротман существенно использует тот “факт”, что любая подгруппа Леви в связной группе Ли замкнута, хотя это условие может не выполняться; см. ниже пример 1). Ошибка сделана в доказательстве теоремы 1.4 из [54], где автор “использует” замкнутость центра подгруппы Леви во всей группе, что может нарушаться, и эта ошибка приводит к неверному доказательству в [54] основного утверждения этой статьи (сформулированного с опечаткой в определении на с. 404 ключевого в [54] векторного подпространства V_f векторной части абелевой группы $R/[R, R]$, где R – радикал рассматриваемой группы как подпространства, образованного элементами с конечными орбитами). Позже ошибка была повторена и развита в [55], где результат статьи [54] был “распространен” на случай связных локально компактных групп с использованием тех же инструментов, но с устраненной опечаткой и, тем самым, с верной формулировкой для связных локально компактных групп (и с той же ошибкой в доказательстве).

По этой причине мы приводим здесь новую характеристику ядра фон Неймана $\text{vNk}(G)$ для связной локально компактной группы G . Мы также приводим характеристику “наименьшего ядра фон Неймана” $\text{svNk}(G)$ связной локально компактной группы G , определяемого как пересечение ядер всех (не обяза-

тельно непрерывных) неприводимых конечномерных комплексных унитарных представлений группы G .

Обозначим через $Z(G)$ центр связной локально компактной группы G , а через $R = \text{rad } G$ – радикал группы G . Воспользуемся следующим построением. Рассмотрим замыкание $\overline{[G, R]}$ нормального делителя $[G, R]$ в G , порожденного коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, $g \in G$, $r \in R$. Тогда $\overline{[G, R]}$ – замкнутый нормальный делитель в G .

ЛЕММА 3. *Факторгруппа $R/\overline{[G, R]}$ центральна в $G/\overline{[G, R]}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение немедленно следует из определения нормального делителя $[G, R]$, поскольку образ любого коммутатора элемента группы $R/\overline{[G, R]}$ с любым элементом группы $G/\overline{[G, R]}$ принадлежит образу группы $[G, R]$ в $G/\overline{[G, R]}$, т.е. равен единице. Таким образом, любой коммутатор рассматриваемого типа автоматически отображается в единичный элемент группы $G/\overline{[G, R]}$.

При описании рассматриваемых объектов для связной локально компактной группы G мы снова воспользуемся результатом Ивасава о локальном разложении [38, теорема 11], как уже было сделано в доказательстве теоремы 2. Таким образом, в любой окрестности единицы группы G найдется такой компактный (не обязательно связный) нормальный делитель N , что факторгруппа $L = G/N$ является группой Ли, а группа G является образом некоторого гомоморфизма $\varphi_G: \tilde{L} \times N \rightarrow G$ с дискретным ядром, где $\tilde{L}$ – универсальная накрывающая группы Ли L . Пусть $\tilde{L} = \tilde{S}R_{\tilde{L}}$ – разложение Леви–Мальцева связной односвязной группы Ли $\tilde{L}$ (таким образом, $\tilde{S}$ – подгруппа Леви в $\tilde{L}$, а $R_{\tilde{L}}$ – радикал группы Ли $\tilde{L}$). Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\tilde{H} = \tilde{H}(S)$ – произведение всех некомпактных простых факторов в полупростой группе Ли $\tilde{S}$ (таким образом, $\tilde{H}$ – замкнутый нормальный делитель в $\tilde{S}$), а $\tilde{Q} = \tilde{Q}(S)$ – произведение всех компактных простых факторов в $\tilde{S}$ (таким образом, $\tilde{Q}$ – компактный нормальный делитель в $\tilde{S}$). Пусть $H(G)$ ($Q(G)$) – образ группы $\tilde{H}$ (группы $\tilde{Q}$) в G при отображении φ_G .

Очевидно, что $H = H(G)$ – наибольшая (т.е. содержащая все остальные) полупростая аналитическая подгруппа связной локально компактной группы G без компактных факторов, а $Q = Q(G)$ – компактная полупростая подгруппа Ли связной локально компактной группы G .

Сформулируем теперь соответствующие теоремам 3, 4 результаты о связных группах Ли.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Ядром фон Неймана $\text{vNk}(G)$ произвольной связной группы Ли G с разложением Леви $G = SR$, где R – радикал, а S – некоторая подгруппа Леви в G , является замкнутый нормальный делитель, порожденный группой H и нормальным делителем $[G, R]$ в G , порожденным коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, $g \in G$, $r \in R$.*

СЛЕДСТВИЕ 5. *Наименьшим ядром фон Неймана $\text{svNk}(G)$ произвольной связной группы Ли G с разложением Леви $G = SR$, где R – радикал, а S –*

некоторая подгруппа Леви в G , является нормальный делитель, порожденный группой H и нормальным делителем $[G, R]$, порожденным коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, где $g \in G$ и $r \in R$.

Мы также укажем пример связной редуктивной группы Ли G , для которой ядра фон Неймана $\text{vNk}(G)$ и $\text{svNk}(G)$ различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть G – связная локально компактная группа с радикалом R . Рассмотрим семейство $[G, R]$ элементов группы G , являющихся конечными произведениями коммутаторов вида $grg^{-1}r^{-1}$, где $g \in G$ и $r \in R$. Поскольку

$$g_1^{-1}grg^{-1}r^{-1}g_1^{-1} = (g_1^{-1}gg_1)(g_1^{-1}rg_1)(g_1^{-1}g^{-1}g_1)(g_1^{-1}r^{-1}g_1^{-1}), \quad (1)$$

$$(grg^{-1}r^{-1})^{-1} = g^{-1}(grg^{-1})g(gr^{-1}g^{-1}) \quad (2)$$

для любых $g, g_1 \in G$ и $r, r_1 \in R$, то $[G, R]$ – нормальный делитель в G . Так как R – замкнутый разрешимый нормальный делитель в G , то и подгруппа $[G, R] \subset R$ также разрешима.

Следующее соображение полезно для доказательства и теоремы 3, и теоремы 4. Рассмотрим произвольное конечномерное (не обязательно непрерывное) унитарное представление π группы G . По утверждению 2) следствия 1 ограничение представления π на R реализуется верхними треугольными матрицами в некотором базисе в пространстве представления π . Следовательно, эти матрицы одновременно являются и верхними треугольными, и подобными унитарным матрицам, поэтому они одновременно записываются в некотором базисе диагональными матрицами, так что ограничение представления π на R оказывается прямой суммой одномерных унитарных представлений. Поскольку любой коммутатор невырожденных матриц имеет единичный определитель, мы видим, что ограничение представления π на $[G, R]$ реализуется соответствующей единичной матрицей. Таким образом, $[G, R]$ содержится в ядре любого конечномерного унитарного представления группы G и, тем самым, также в наименьшем ядре фон Неймана группы G , а замыкание $\overline{[G, R]}$ группы $[G, R]$ содержится в ядре фон Неймана группы G .

Поскольку замыкание $\overline{[G, R]}$ является замкнутым нормальным делителем в G , можно рассмотреть факторгруппу $G_{\text{red}} = G/\overline{[G, R]}$ как такую локально компактную группу, что любое конечномерное непрерывное унитарное представление группы G может быть пропущено через G_{red} . Пусть H_{red} (Q_{red}) – образ H (Q) в G_{red} . Заметим, что радикал группы G_{red} коммутативен (потому что факторгруппа $R_{\text{red}} = R/\overline{[G, R]}$ очевидным образом коммутативна) и даже централен (по лемме 3). Таким образом, группа G_{red} редуктивна. Остается описать ядро фон Неймана редуктивной локально компактной группы G_{red} .

Рассмотрим представление $\tilde{\pi}$ группы $\tilde{L} \times N$, определенное как композиция, $\tilde{\pi} = \pi \circ \varphi$. Это отображение автоматически непрерывно и потому тривиально на каждом некомпактном полупростом факторе в S ; следовательно, представление π тривиально на подгруппе $H = H(G)$ в G , введенной в определении 3, т.е. на подгруппе, порожденной образами всех некомпактных полупростых факторов в группе G . Если π непрерывно, то оно тривиально и на замыкании подгруппы H в G . Таким образом, и замыкание подгруппы H , и замыкание группы $[G, R]$ содержатся в ядре фон Неймана группы G .

Факторизуя локально компактную группу G по нормальному делителю $\overline{[G, R]}$, мы получаем редуктивную локально компактную группу, а после факторизации группы $G/\overline{[G, R]}$ по нормальному делителю $\overline{H}/(\overline{H} \cap \overline{[G, R]})$ (это нормальный делитель в группе $G/\overline{[G, R]}$, потому что радикал $R/\overline{[G, R]}$ группы $G/\overline{[G, R]}$ централен) получаем, что образ группы $\tilde{L}$ в $G/\overline{H}$ имеет компактную полупростую часть. Поскольку и эта компактная часть, и группа N , и центральный радикал имеют достаточно много непрерывных конечномерных унитарных представлений, мы видим, как и в доказательстве теоремы 1, что полученная факторгруппа C группы $G/\overline{[G, R]}$ по нормальному делителю $\overline{H}/(\overline{H} \cap \overline{[G, R]})$ может быть реализована как группа с центральным векторным нормальным делителем, факторгруппа по которому компактна, так что полученная группа имеет достаточно много непрерывных конечномерных унитарных представлений, и в рассматриваемой ситуации нормальный делитель, факторизацией которого эта группа получена, порожден подгруппами, указанными в условии теоремы, что завершает доказательство этой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В этом доказательстве естественно рассматривать некоторые локально компактные группы и их подгруппы и факторгруппы как абстрактные группы. Нужно описать наименьшее ядро фон Неймана абстрактной группы $G/[G, R]$, содержащей центральный нормальный делитель $R/[G, R]$, факторгруппа по которому изоморфна как абстрактная группа связанной полупростой группе Ли G/R . Напомним, что, как мы видели в доказательстве теоремы 3, подгруппа $[G, R]$ содержится в ядре любого конечномерного унитарного представления группы G и, тем самым, также в наименьшем ядре фон Неймана группы G . По лемме 3 все элементы подгруппы $R/[G, R]$ центральны в $G/[G, R]$. В частности, факторгруппа $G/[G, R]$ (рассматриваемая в теоретико-групповом смысле) имеет абелев и даже центральный нормальный делитель $R/[G, R]$, причем факторгруппа $(G/[G, R])/(R/[G, R])$ изоморфна (как абстрактная группа) полупростой локально компактной группе G/R . Напомним, что группы $\tilde{H}$ и $\tilde{Q}$ являются нормальными делителями в $\tilde{S}$. Как и в доказательстве теоремы 3, видим, что любое (не обязательно непрерывное) конечномерное унитарное представление группы G тривиально на H . Тем самым, любое (не обязательно непрерывное) конечномерное унитарное представление группы G тривиально на нормальном делителе в G , порожденном (в теоретико-групповом смысле) подгруппами $[G, R]$ и H .

Отметим, что каждый элемент $\tilde{g}$ группы $(\tilde{Q} \cdot R_{\tilde{L}}) \times N$ можно естественным образом представить в виде произведения: $\tilde{g} = \tilde{h}\tilde{q}\tilde{r}n$, где $\tilde{h} \in \tilde{H}$, $\tilde{q} \in \tilde{Q}$, $\tilde{r} \in R_{\tilde{L}}$, $n \in N$, так что образ g элемента $\tilde{g}$ есть произведение $hqrn$ образов элементов $\tilde{h}$, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$ и n в подгруппах-образах этих групп в G , т.е. в H , Q , R_L и N соответственно, где N совпадает со своим образом и является нормальным делителем в G , так что $K = QN$ – компактная группа, а нормальный делитель R_L является группой Ли как образ группы Ли $R_{\tilde{L}}$ при гомоморфизме с дискретным ядром. Заметим также, что подгруппа в G , порожденная подгруппами H и $[R_L, G]$, является нормальным делителем в G , на котором, как мы видели ранее, любое конечномерное унитарное представление группы G тривиально.

Рассмотрим пересечение P группы R_L с компактной группой K . Поскольку элементы группы N коммутируют с элементами образа группы $\tilde{L}$ в G , рассмат-

риваемое пересечение содержится в подгруппе Q . Это замкнутая разрешимая подгруппа в Q и R_L и, тем самым, компактная разрешимая группа Ли. Замыкание W пересечения группы $[R_L, G]$ с Q содержится в P и является компактной подгруппой и даже компактным нормальным делителем в Q и, тем самым, также в K . Поскольку любое конечномерное унитарное представление группы G тривиально, в частности, на $[R_L, G]$, причем любое конечномерное унитарное представление подгруппы Q автоматически непрерывно, а группа R_L является подгруппой радикала R (поскольку она связна и разрешима), то оказывается, что любое конечномерное унитарное представление группы G тривиально не только на подгруппах H и $[R_L, G]$, но и на замыкании пересечения коммутанта радикала $[G, R]$ с произведением Π всевозможных компактных простых сомножителей Ли, являющихся аналитическими подгруппами группы G (нетрудно проверить совпадение этого замыкания с W).

Заметим, однако, что пересечение радикала R с произведением Π всевозможных компактных простых сомножителей Ли, являющихся аналитическими подгруппами группы G , содержится в пересечении произведения группы R_L и коммутативного связного нормального делителя N_{00} в N с прямым произведением $Q \times N$. Таким образом, рассматривается произведение группы $R_L \cap Q$ и группы N_{00} . Поскольку группа N_{00} поэлементно перестановочна со всеми элементами группы G , то $[G, R] \cap N_{00} = \{e\}$. Следовательно, $[G, R] \cap \Pi = [G, R_L] \cap Q$, и группа $[G, R_L] \cap Q$ содержится в $R_L \cap Q$, а это – компактная разрешимая группа Ли. Следовательно, группа $R_L \cap Q$ конечна. Поэтому группа $[G, R_L] \cap Q$ также конечна и, тем самым, автоматически замкнута.

Факторгруппа Q/W (в теоретико-групповом смысле) может рассматриваться как обычная компактная топологическая группа, и она имеет даже достаточно много непрерывных конечномерных унитарных представлений. Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно убедиться в том, что любое непрерывное конечномерное унитарное представление группы Q/W может быть продолжено до (не обязательно непрерывного) конечномерного унитарного представления группы $(KR)/X$, где X – нормальный делитель, порожденный подгруппой $[R, G]$.

Образ группы R в $(KR)/X$ коммутативен, и пересечение группы $R/(X \cap R) = R/[G, R]$ с образом группы K является коммутативной и даже центральной подгруппой в $K/(K \cap X)$. Поэтому ограничение любого конечномерного неприводимого унитарного представления группы $K/(K \cap X)$ на пересечение $F = (K/(K \cap X)) \cap (R/[G, R])$ кратно некоторому (автоматически непрерывному) характеру центральной группы F . Рассмотрим группу $R/[G, R]$ в дискретной топологии. Тогда дискретная абелева группа F становится замкнутой в дискретной абелевой группе $R/[G, R]$, и поэтому любой характер группы F можно продолжить до непрерывного характера коммутативной дискретной группы $R/[G, R]$ (см., например, [57, п.24.12]). Таким образом, факторгруппа по нормальному делителю, описанному в формулировке теоремы, имеет достаточно много конечномерных унитарных представлений (семейство таких представлений разделяет точки рассматриваемой факторгруппы), что завершает доказательство теоремы.

Приведем теперь пример редуکتивной группы Ли G с $\text{vNk}(G) \neq \text{svNk}(G)$.

ПРИМЕР 1. Воспользуемся известным примером редуктивной группы Ли с незамкнутой подгруппой Леви (см., например, [49, с. 256]). Пусть G_0 – универсальная накрывающая группа группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$ и Z – центр группы G_0 , который изоморфен аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Существует такая дискретная подгруппа D в $\mathbb{R} \times Z$, что факторгруппа $(\mathbb{R} \times Z)/D$ изоморфна одномерному тору $\mathbb{T}$ и образ подгруппы $\{0\} \times Z$ плотен в $\mathbb{T}$ (например, можно взять в качестве D ядро гомоморфизма вида

$$(t, \nu) \mapsto \exp(2\pi i(t + \alpha \bar{\nu})), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \nu \in Z,$$

произведения $\mathbb{R} \times Z$ на $\mathbb{T}$, где α иррационально и отображение $\nu \mapsto \bar{\nu}$ – некоторый изоморфизм группы Z на $\mathbb{Z}$). В качестве группы G можно взять факторгруппу $G = (\mathbb{R} \times G_0)/D$. Ясно, что $\text{vNk}(G) = G$ (группа G минимально почти периодическая), тогда как $\text{svNk}(G) = [G, G]$.

Таким образом, при изучения пересечения ядер унитарных конечномерных представлений учет разрывных конечномерных представлений может повлиять на ответ.

Отметим два непосредственных следствия теорем 3, 4. Первое из них сформулировано в [54] (пробел в доказательстве этого утверждения в [54] отмечен выше).

СЛЕДСТВИЕ 6. Группы $\text{vNk}(G)$ и $\text{svNk}(G)$ связаны для любой связной локально компактной группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединение связного множества с замыканием части этого множества связно. Поэтому порождающие множества для нормальных делителей $\text{vNk}(G)$ и $\text{svNk}(G)$, указанные в теоремах 3, 4, можно считать связными, что немедленно доказывает утверждение следствия 6.

СЛЕДСТВИЕ 7. Связная локально компактная группа G с радикалом R и факторгруппой по радикалу S является минимально почти периодической тогда и только тогда, когда полупростая группа S не имеет нетривиальных компактных простых факторов (в частности, является группой Ли), а замыкание нормального делителя $[G, R]$ группы G , порожденного коммутаторами вида

$$grg^{-1}r^{-1}, \quad g \in G, \quad r \in R,$$

совпадает с радикалом R . Группа G не имеет нетривиальных конечномерных унитарных представлений (т.е. $\text{svNk}(G) = G$) тогда и только тогда, когда полупростая группа S не имеет нетривиальных компактных простых факторов (в частности, является группой Ли), а радикал R совпадает с нормальным делителем $[G, R]$ в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое условие означает, что $\text{vNk}(G) = G$, а второе – что $\text{svNk}(G) = G$. Остается применить теоремы 3, 4 соответственно.

§ 6. Приложения. Вложения в аменабельные группы

Установленный в § 3 факт, что условие непрерывности вложения в теореме Фрейденшталя–Вейля излишне, вызывает интерес к другим не обязательно непрерывным вложениям, которые могут налагать сильные условия на

структуру вкладываемых групп. В настоящем параграфе показано, что почти связная локально компактная группа, допускающая (не обязательно непрерывное) локально ограниченное вложение в почти связную аменабельную локально компактную группу, аменабельна (здесь и далее – как топологическая группа). Чтобы демистифицировать это утверждение, напомним, что почти связная локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда ее факторгруппа по радикалу является компактной группой (см., например, [39, теорема 3.8]). С другой стороны, любая простая (некоммутативная) компактная группа Ли содержит неаменабельную (незамкнутую) подгруппу, некоторая факторгруппа которой изоморфна свободной группе с двумя образующими (см., скажем, [58, пример 1.2.8, теорема 1.3.4]), так что далеко не каждая незамкнутая подгруппа аменабельной связной локально компактной группы аменабельна, и дополнительные условия, специализирующие вкладываемую группу, действительно нужны для установления желаемого аналога теоремы Фрейден탈я–Вейля.

Как и в основном тексте, доказательства основаны на результатах статьи [9], связанных с автоматической непрерывностью локально ограниченных конечномерных представлений топологических групп и обобщающих теоремы Картана [1] и Ван дер Вардена [2].

Следует отметить два вспомогательных результата. Во-первых, показано, что прообраз центра факторгруппы связной локально компактной группы по ее радикалу является наибольшим разрешимым нормальным делителем данной связной локально компактной группы. Во-вторых, показано, что образ (не обязательно непрерывного) локально ограниченного гомоморфизма связной локально компактной группы в почти связную локально компактную группу содержится в компоненте единицы этой почти связной группы.

Следующая теорема является аналогом теоремы Фрейден탈я–Вейля для аменабельных связных локально компактных групп, причем вложение одной группы в другую может быть не непрерывным.

ТЕОРЕМА 9. Пусть G – связная локально компактная группа, K – почти связная аменабельная локально компактная группа и $J: G \rightarrow K$ – локально ограниченное гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда G – аменабельная локально компактная группа, и поэтому G является расширением связной компактной топологической группы с помощью связного разрешимого нормального делителя.

Данная теорема имеет почти очевидное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть G – почти связная локально компактная группа, K – почти связная аменабельная локально компактная группа и $J: G \rightarrow K$ – локально ограниченное гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда G – аменабельная локально компактная группа (и потому является расширением компактной топологической группы с помощью разрешимого нормального делителя).

Перейдем к доказательствам теоремы 9 и следствия 8. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть K – связная локально компактная группа, R – радикал группы K , а Z – центр факторгруппы K/R . Тогда полный прообраз $N = N(K)$ группы Z в K содержит любой разрешимый нормальный делитель группы K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что R – замкнутый нормальный делитель в K . Пусть Q – разрешимый нормальный делитель в K . Образ P группы Q при каноническом отображении $K \rightarrow K/R$ разрешим и является нормальным делителем в K/R . Тогда полный прообраз $\tilde{P}$ группы P в K при этом каноническом отображении содержит и R , и Q и является разрешимым нормальным делителем в K . Таким образом, любой разрешимый нормальный делитель в K содержится в разрешимом нормальном делителе в K , содержащем R . Рассмотрим теперь разрешимый нормальный делитель N в K , содержащий R . Его образ N/R в факторгруппе K/R является разрешимым нормальным делителем в K/R . Компонента единицы в N/R тривиальна, поскольку иначе ее полный прообраз в K был бы связным разрешимым нормальным делителем в K , строго содержащим R , что невозможно по определению R . Следовательно, группа N/R – вполне несвязная подгруппа связной топологической группы. Как хорошо известно, любая такая группа центральна, так что $N/R \subset Z$, что и доказывает утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть K – связная локально компактная группа, R – радикал группы K , а Z – центр факторгруппы K/R . Полный прообраз $N = N(K)$ группы Z в K является наибольшим разрешимым нормальным делителем в K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из леммы 4, поскольку N разрешим как расширение коммутативной группы с помощью разрешимой группы.

ЛЕММА 5. Пусть G – связная локально компактная группа, K – почти связная локально компактная группа и $J: G \rightarrow K$ – локально ограниченное гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда образ $J(G)$ группы G в K содержится в компоненте единицы K_0 группы K .

Разумеется, предположение о почти связности группы K существенно. Образ связной группы $\mathbb{R}$ (в естественной топологии) при ее тождественном отображении в ту же группу в дискретной топологии неединичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Рассматривая композицию I отображения J и канонического отображения группы K на K/K_0 , мы вправе считать, что K – вполне несвязная компактная группа. Заменяя группу K при необходимости замыканием $\overline{J(G)}$ образа $J(G)$ группы G в K , можно считать, что образ $J(G)$ плотен в K . Рассмотрим произвольный связный разрешимый замкнутый нормальный делитель Q группы G . Покажем, что замыкание $\overline{J(Q)}$ образа $J(Q)$ группы Q в K есть единичная группа. Если $Q = \{e\}$, то утверждение очевидно. Если длина композиционного ряда группы Q равна 1, т. е. если группа Q коммутативна, то группа Q бесконечно делима [9, следствие 1]. В таком случае и образ $J(Q)$ группы Q бесконечно делим. По лемме 1 замыкание образа $J(Q)$ группы Q в компактной группе K также бесконечно делимо. Следовательно, оно связно [6, теорема 9.35] и потому единично, как и утверждалось.

Таким образом, образ $I(N)$ наименьшего неединичного нормального делителя N в композиционном ряде группы Q единичен. Отсюда следует, что можно рассматривать отображение I как отображение факторгруппы группы Q по N , после чего утверждение о единичности образа $I(Q)$ группы Q в K сразу следует индукцией по длине композиционного ряда группы Q . В частности, I -образ радикала R группы G единичен. Следовательно, отображение I определяет гомоморфизм связной полупростой локально компактной группы $S = G/R$ во вполне несвязную компактную группу K .

Факторгруппа $S = G/R$ группы G по радикалу R связна и полупроста, т. е. не имеет нетривиальных замкнутых связных абелевых нормальных делителей [38, теорема 15]. Согласно [40, теорема 10.29] существуют такое прямое произведение $\prod_{j \in J} S_j$ связных односвязных простых конечномерных групп Ли S_j , $j \in J$, и такие гомоморфизмы $\pi_S: \prod_{j \in J} S_j \rightarrow S$ и $f: S \rightarrow \prod_{j \in J} S_j/Z(S_j)$, где $Z(S_j)$ – центр группы S_j и $S_j/Z(S_j)$ – факторгруппа по центру, что образ гомоморфизма π_S плотен в S , а композиция $f \circ \pi_S$ гомоморфизмов f и π_S совпадает с каноническим гомоморфизмом группы на факторгруппу, определяемым переходом к фактору $S_j \rightarrow S_j/Z(S_j)$ в каждом сомножителе. Поскольку факторгруппа группы S по некоторому компактному нормальному делителю является группой Ли, семейство некомпактных простых групп Ли в семействе $\{S_j, j \in J\}$ конечно (быть может, пусто). Докажем, что оно пусто. Если S_{j_0} – некоторая некомпактная простая группа Ли, то в ее разложении Иваса-вы $S_{j_0} = K_{j_0} A_{j_0} N_{j_0}$, где K_{j_0} – полный прообраз соответствующей максимальной компактной подгруппы в $S_{j_0}/Z(S_{j_0})$, имеется связная замкнутая некоммутативная разрешимая подгруппа Ли $A_{j_0} N_{j_0}$. Полный прообраз этой подгруппы в группе S – связная замкнутая некоммутативная разрешимая подгруппа Ли, и, как мы видели в первой части доказательства, образ этой подгруппы в группе K единичен (напомним, что группа K вполне несвязна). Следовательно, ядро гомоморфизма S_{j_0} в K , определяемого ограничением отображения S в K , содержит нетривиальную компоненту единицы. Поскольку S_{j_0} – простая группа Ли по построению, ядро этого гомоморфизма есть вся группа S_{j_0} . Таким образом, можно рассматривать отображение I как отображение компактной факторгруппы группы S по π_S -образу M подгруппы, отвечающей (конечно-му) произведению всех некомпактных простых сомножителей вида S_j , $j \in J$. Однако группа S/M компактна и связна. Любой максимальный протор (максимальная связная абелева подгруппа) в S/M (см. [6, определение 9.30] или [41]) имеет единичный образ, как показано в первой части доказательства, и поэтому образ всей группы S/M в K единичен, что завершает доказательство леммы.

Докажем теперь утверждение о подгруппах аменабельных групп, изоморфных (как дискретные группы) с помощью локально ограниченных отображений связным локально компактным группам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Пусть G – связная локально компактная группа, K – почти связная аменабельная локально компактная группа и $J: G \rightarrow K$ – локально ограниченное гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). По лемме 5, заменяя группу K при необходимости замыканием образа $J(G)$ группы G при отображении J , мы вправе предположить

дополнительно, не нарушая общности утверждения, что аменабельная локально компактная группа K связна.

Рассмотрим ограничение вложения J на построенный в лемме 4 нормальный делитель $N = N(G)$ группы G . Его образ $J(N(G))$ разрешим, а потому и его замыкание $\overline{J(R)}$ разреσιμο. По лемме 4 нормальный делитель $\overline{J(R)}$ содержится в построенном в лемме 4 разрешимом нормальном делителе $N = N(K)$ в группе K . Таким образом, композиция I отображения J и последующего канонического отображения группы K на факторгруппу $K/N(K)$ тривиальна на R и поэтому может рассматриваться как гомоморфизм (не обязательно непрерывный) связной полупростой факторгруппы G/N в связную факторгруппу без центра K/N , которая компактна, так как группа K аменабельна по предположению. Кроме того, поскольку J – вложение, то полный прообраз разрешимой группы разрешим и полный прообраз нормального делителя является нормальным делителем. Таким образом, полный прообраз разрешимого нормального делителя $N = N(K)$ в группе K содержится в нормальном делителе $N(G)$ группы G . Отсюда следует, что гомоморфизм I определяет локально ограниченное вложение связной факторгруппы $G/N(G)$ в компактную связную факторгруппу без центра $K/N(K)$.

Заметим теперь, что согласно аналогу теоремы Фрейден탈ля–Вейля для не обязательно непрерывных вложений связных локально компактных групп в компактные топологические группы (§ 2), группа $G/N(G)$ изоморфна прямому произведению связной компактной группы и векторной группы. Поскольку нормальный делитель $N(G)$ группы G разрешим, группа G оказывается расширением компактной группы с помощью разрешимой группы и потому аменабельна как топологическая группа. Это завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 8. Пусть G – почти связная локально компактная группа, K – почти связная аменабельная локально компактная группа и $J: G \rightarrow K$ – локально ограниченное гомоморфное вложение (не обязательно непрерывное). Тогда связная компонента единицы G_0 в группе G является связной аменабельной локально компактной группой, а ограничение отображения J на G_0 является вложением группы G_0 в почти связную аменабельную локально компактную группу K . Таким образом, G_0 является связной аменабельной локально компактной группой по только что доказанной теореме 9, а локально компактная группа G , являющаяся расширением компактной топологической группы с помощью связной аменабельной локально компактной группы, аменабельна (в силу [39, теорема 3.8]).

Вложение группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ в дискретной топологии на себя, где образ рассматривается в обычной топологии, показывает, что при наличии вложения (в данном случае – даже непрерывного) не обязательно почти связной локально компактной группы G в компактную группу группа G может быть топологически неизоморфна прямому произведению компактной группы и векторной группы и даже неаменабельна. Таким образом, условие почти связности в теореме 1 существенно.

Следствие 1 можно переформулировать следующим очевидным образом.

ТЕОРЕМА 10. Пусть G – почти связная локально компактная группа. Следующие условия равносильны:

1) группа G допускает локально ограниченное вложение (как топологическая группа) в некоторую почти связную аменабельную локально компактную группу;

2) группа G аменабельна;

3) группа G содержит связный разрешимый нормальный делитель, факторгруппа по которому компактна;

4) группа G изоморфна (как абстрактная группа) всюду плотной подгруппе почти связной аменабельной локально компактной группы.

Напомним, что основной результат из § 2 можно выразить как равносильность условий принадлежности связной локально компактной группы в исходной и дискретной топологиях классу [МАР]. Однако в случае локально ограниченных вложений аналогичной возможности нет, и, кроме того, для аменабельных групп привлечение дискретной топологии малоэффективно, поскольку аменабельность топологической группы в дискретной топологии не равносильна ее аменабельности в исходной топологии (напомним, что связная локально компактная топологическая группа аменабельна в дискретной топологии тогда и только тогда, когда она разрешима).

Список литературы

1. E. Cartan, “Sur les représentations linéaires des groupes clos”, *Comment. Math. Helv.*, **2**:1 (1930), 269–283.
2. B. L. van der Waerden, “Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen”, *Math. Z.*, **36**:1 (1933), 780–786.
3. J. D. Lawson, “Intrinsic topologies in topological lattices and semilattices”, *Pacific J. Math.*, **44** (1973), 593–602.
4. W. W. Comfort, “Topological groups”, *Handbook of set-theoretic topology*, North-Holland, Amsterdam–New York, 1984, 1143–1263.
5. A. Pillay, “An application of model theory to real and p -adic algebraic groups”, *J. Algebra*, **126**:1 (1989), 139–146.
6. K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The structure of compact groups*, de Gruyter Stud. Math., **25**, de Gruyter, Berlin, 1998.
7. W. W. Comfort, D. Remus, H. Szambien, “Extending ring topologies”, *J. Algebra*, **232**:1 (2000), 21–47.
8. J. E. Hart, K. Kunen, “Bohr compactifications of non-abelian groups”, *Topology Proc.*, **26**:2 (2001–2002), 593–626.
9. А. И. Штерн, “Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 183–224; англ. пер.: A. I. Shtern, “A version of van der Waerden’s theorem and a proof of Mishchenko’s conjecture for homomorphisms of locally compact groups”, *Izv. Math.*, **72**:1 (2008), 169–205.
10. W. W. Comfort, L. C. Robertson, “Images and quotients of $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$: remarks on a theorem of Van der Waerden”, *Rocky Mountain J. Math.*, **17**:1 (1987), 1–14.
11. A. Borel, *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, Hist. Math., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
12. O. Schreier, B. L. van der Waerden, “Die Automorphismen der projektiven Gruppen”, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, **6**:1 (1928), 303–322.
13. H. Freudenthal, “Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I”, *Ann. of Math. (2)*, **42** (1941), 1051–1074.

14. W. T. van Est, “Dense imbeddings of Lie groups”, *Indagationes Math.*, **13** (1951), 321–328.
15. W. T. van Est, “Dense imbeddings of Lie groups. II (I, II)”, *Indagationes Math.*, **14** (1952), 255–266, 267–274.
16. M. Goto, “Dense imbedding of topological groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 653–655.
17. M. Goto, “Dense imbeddings of locally compact connected groups”, *Ann. of Math.* (2), **61** (1955), 154–169.
18. A. Borel, J. Tits, “Homomorphismes “abstraites” de groupes algebriques simples”, *Ann. of Math.* (2), **97** (1973), 499–571.
19. J. Tits, “Homomorphismes “abstraites” de groupes de Lie”, *Symposia Mathematica*, v. XIII (Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 1972), Academic Press, London, 1974, 479–499.
20. D. James, W. Waterhouse, B. Weisfeiler, “Abstract homomorphisms of algebraic groups: problems and bibliography”, *Comm. Algebra*, **9**:1 (1981), 95–114.
21. Y. Chen, “Homomorphisms from linear groups over division rings to algebraic groups”, *Group theory* (Beijing, 1984), Lecture Notes in Math., **1185**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1986, 231–265.
22. G. M. Seitz, “Abstract homomorphisms of algebraic groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **56**:1 (1997), 104–124.
23. H. Freudenthal, “Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen”, *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 57–77.
24. А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его приложения*, ИЛ, М., 1950; пер. с фр.: A. Weil, *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940.
25. A. I. Shtern, “Applications of automatic continuity results to analogs of the Freudenthal–Weil and Hochschild theorems”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **20**:2 (2010), 203–212.
26. A. I. Shtern, “Hochschild kernel for locally bounded finite-dimensional representations of a connected reductive Lie group”, *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, **13**:2 (2010), 127–132.
27. A. I. Shtern, “Von Neumann kernel of a connected locally compact group, revisited”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **20**:3 (2010), 313–318.
28. A. I. Shtern, “Homomorphic images of connected Lie groups in compact groups”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **20**:1 (2010), 1–6.
29. A. I. Shtern, “Connected Lie groups having faithful locally bounded (not necessarily continuous) finite-dimensional representations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:4 (2009), 566–567.
30. A. I. Shtern, “Freudenthal–Weil theorem for arbitrary embeddings of connected Lie groups in compact groups”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **19**:2 (2009), 157–164.
31. W. Banaszczyk, *Additive subgroups of topological vector spaces*, Lecture Notes in Math., **1466**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
32. C. C. Moore, “Groups with finite dimensional irreducible representations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166** (1972), 401–410.
33. L. C. Robertson, “A note on the structure of Moore groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 594–599.
34. А. И. Штерн, “Локально бикомпактные группы с конечномерными неприводимыми представлениями”, *Матем. сб.*, **90(132)**:1 (1973), 86–95; англ. пер.: A. I. Štern, “Locally bicomcompact groups with finite-dimensional irreducible representations”, *Math. USSR-Sb.*, **19**:1 (1973), 85–94.

35. А. И. Штерн, “Топологические группы с конечными групповыми алгебрами фон Неймана типа Γ ”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 143–160; англ. пер.: A. I. Shtern, “Topological groups with finite von Neumann group algebras of type Γ ”, *Sb. Math.*, **196**:3 (2005), 447–463.
36. A. I. Shtern, “Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups”, *Russian J. Math. Phys.*, **2**:1 (1994), 131–132.
37. А. И. Штерн, “Непрерывные вложения топологических групп в локально компактные группы”, *Современные проблемы математики и механики*, т. 2, вып. 1, Изд-во МГУ, М., 2009, 89–98.
38. K. Iwasawa, “On some types of topological groups”, *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 507–558.
39. A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monogr., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
40. K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The Lie theory of connected pro-Lie groups*, EMS Tracts Math., **2**, Europ. Math. Soc., Zürich, 2007.
41. S. Ahdout, C. Hurwitz, G. Itzkowitz, S. Rothman, H. Strassberg, “Maximal protori in compact topological groups”, *Papers on general topology and applications* (New York, USA, 1992), Ann. New York Acad. Sci., **728**, New York Acad. Sci., New York, 1994, 227–236.
42. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления*, Наука, М., 1970; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXIX. Livre VI: Intégration. Chap. 7: Mesure de Haar. Chap. 8: Convolution et représentations*, Hermann, Paris, 1963.
43. D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publ., New York, 1955.
44. M. Stroppel, “Lie theory for non-Lie groups”, *J. Lie Theory*, **4**:2 (1994), 257–284.
45. М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, Наука, М., 1961; пер. с англ.: M. M. Day, *Normed linear spaces*, v. 21, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.
46. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, 4-е изд., Наука, М., 1984; англ. пер. 2-го изд.: L. S. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1966.
47. А. И. Штерн, “Почти периодические функции и представления в локально выпуклых пространствах”, *УМН*, **60**:3 (2005), 97–168; англ. пер.: A. I. Shtern, “Almost periodic functions and representations in locally convex spaces”, *Russ. Math. Surv.*, **60**:3 (2005), 489–557.
48. А. И. Штерн, “Конечномерные квазипредставления связных групп Ли и гипотеза Мищенко”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:7 (2007), 85–225; англ. пер.: A. I. Shtern, “Finite-dimensional quasirepresentations of connected Lie groups and Mishchenko’s conjecture”, *J. Math. Sci.*, **159**:5 (2009), 653–751.
49. V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
50. J. von Neumann, “Almost periodic functions in a group. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**:3 (1934), 445–492.
51. M. Kuranishi, “On non-connected maximally almost periodic groups”, *Tôhoku Math. J.* (2), **2** (1950), 40–46.
52. S. Murakami, “Remarks on the structure of maximally almost periodic groups”, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 119–129.
53. S. Grosser, M. Moskowitz, “Compactness conditions in topological groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **246** (1971), 1–40.
54. S. Rothman, “The von Neumann kernel and minimally almost periodic groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **259**:2 (1980), 401–421.

- 55. S. Rothman, H. Strassberg, “The von Neumann kernel of a locally compact group”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **36**:2 (1984), 279–286.
- 56. A. I. Shtern, “Von Neumann kernels of connected Lie groups, revisited and refined”, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:2 (2010), 262–266.
- 57. Э. Хьюитт, К. А. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, Наука, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, v. I, Grundlehren Math. Wiss., **115**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- 58. Ф. Гринлиф, *Инвариантные средние на топологических группах и их приложения*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand, London, 1969.

А. И. ШТЕРН (A. I. SHTERN)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова;

Научно-исследовательский институт системных
исследований РАН, г. Москва

E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступило в редакцию

25.06.2009

23.06.2010