Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тихомиров, Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 5, 143–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:57:27

УДК 512.723

А. С. Тихомиров

Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве

Изучается пространство I_n модулей математических инстантонных векторных расслоений ранга 2 со вторым классом Черна $n \geq 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Доказывается неприводимость I_n для произвольного нечетного $n \geq 1$.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: векторные расслоения, математические инстантоны, пространство модулей.

Посвящается памяти Андрея Николаевича Тюрин

§ 1. Введение

Математическим n -инстантонным векторным расслоением (кратко n -инстантоном) на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ называем алгебраическое векторное расслоение E ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = n, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее условиям

$$h^0(E) = h^1(E(-2)) = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим через I_n множество классов изоморфизма n -инстантонов. Это множество непусто для всех $n \geq 1$ (см., например, [1], [2]). Условие $h^0(E) = 0$ для n -инстантона E влечет стабильность E в смысле Гизекера–Маруямы. Тем самым, множество I_n является подмножеством схемы модулей Гизекера–Маруямы $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 0)$ полустабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = n$, $c_3 = 0$. Условие $h^1(E(-2)) = 0$ для $[E] \in I_n$ (называемое *инстантонным условием*) по полунепрерывности влечет, что I_n – открытое по Зарискому подмножество в схеме $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 0)$, т. е. I_n – квазипроективная схема. Она называется *схемой* (или *пространством*) *модулей математических n -инстантонов*.

В настоящей статье мы изучим проблему неприводимости схемы I_n . Эта проблема имеет положительное решение для малых значений n , вплоть до $n = 5$. А именно, случаи $n = 1, \dots, 5$ были рассмотрены соответственно в статьях [3]–[7]. Целью нашей статьи является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого $n = 2t + 1$, $t \geq 0$, схема I_n модулей математических n -инстантонов является целой схемой размерности $8n - 3$.*

Приведем краткий обзор содержания статьи. В § 3 мы напоминаем хорошо известную связь между математическими n -инстантонами и связками квадратик в фиксированном n -мерном векторном пространстве H_n над основным полем $\mathbf{k}$. Связки квадратик рассматриваются как векторы в пространстве $\mathbf{S}_n = S^2 H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$, где $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))^\vee$, и те связки, которые соответствуют n -инстантонам (мы называем их *n -инстантонными связками*), удовлетворяют так называемым условиям Барта (см. определение (3.12)). Эти связки составляют локально замкнутое подмножество MI_n в $\mathbf{S}_n$, имеющее структуру главного $(\mathrm{GL}(n)/\{\pm 1\})$ -расслоения над I_n . Поэтому проблема неприводимости пространства I_n модулей n -инстантонов сводится к проблеме неприводимости пространства MI_n n -инстантонных связок квадратик.

В § 4 рассматривается некоторая линейная алгебра, связанная с разложением в прямую сумму $\xi: H_{m+1} \oplus H_m \xrightarrow{\sim} H_{2m+1}$. Используя один результат из § 12, мы получаем здесь соотношение (4.11), играющее ключевую роль во всех дальнейших построениях. Кроме того, разложение ξ позволяет установить связь между $(2m+1)$ -инстантонами E и симплектическими векторными расслоениями E_{2m+2} ранга $2m+2$ на $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющими условиям $h^0(E_{2m+2}) = h^2(E_{2m+2}(-2)) = 0$.

В § 6 вводится новое множество X_m как локально замкнутое подмножество в векторном пространстве $\mathbf{S}_{m+1} \oplus \Sigma_{m+1}$, где $\Sigma_{m+1} = \mathrm{Hom}(H_m, H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee)$, определяемое данными линейной алгебры, напоминающими условия Барта. Доказывается, что X_m изоморфно некоторому плотному открытому подмножеству $MI_{2m+1}(\xi)$ в MI_{2m+1} , задаваемому вышеуказанным разложением в прямую сумму ξ , где X_m и $MI_{2m+1}(\xi)$ понимаются как приведенные схемы. Это сводит проблему неприводимости I_{2m+1} к проблеме неприводимости схемы X_m .

Последним аргументом в доказательстве теоремы 1.1 является использование схемы Z_m , которая вводится в § 7 как локально замкнутая подсхема в аффинном пространстве $\mathbf{S}_m^\vee \times \mathrm{Hom}(H_m, H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee)$, определяемая явными уравнениями (см. (7.4)). В § 7 мы сводим доказательство теоремы 1.1 к доказательству утверждения о том, что Z_m как схема является целым локально полным пересечением в вышеуказанном аффинном пространстве. Это и другие свойства схемы Z_m формулируются в теореме 7.2. Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 7.2.

В § 8 мы начинаем доказательство теоремы 7.2 индукцией по m и доказываем часть индукционного шага (предложение 8.1), используя явные вычисления из линейной алгебры. Эти вычисления достаточно громоздки. В замечании 8.3 мы объясняем, почему их нельзя существенно упростить.

Затем с помощью предложения 8.1 мы в § 9 устанавливаем связь между Z_m и так называемыми инстантонами 'т Хоффа. В § 10 приведено описание универсального семейства расширений 'т Хоффа и связанных с ним конструкций. Результаты этого параграфа затем используются в § 11 для завершения шага индукции в доказательстве теоремы 7.2.

В приложении (§ 12) мы доказываем два результата "общего положения" для связок квадратик, используемые в тексте.

Автор благодарит за поддержку Математический институт им. Макса Планка в г. Бонне, где во время пребывания автора зимой 2008 г. была начата работа над статьей.

§ 2. Обозначения и соглашения

Мы используем, главным образом, стандартные обозначения. Основное поле $\mathbf{k}$ предполагается алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Мы отождествляем алгебраические векторные расслоения с локально свободными пучками. Если $\mathcal{F}$ – пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей на алгебраическом многообразии или схеме X , то $n\mathcal{F}$ – прямая сумма n копий пучка $\mathcal{F}$. Через $H^i(\mathcal{F})$ обозначаем i -ю группу когомологий $\mathcal{F}$, $h^i(\mathcal{F}) := \dim H^i(\mathcal{F})$, и через $\mathcal{F}^\vee$ – двойственный к $\mathcal{F}$ пучок, т.е. пучок $\mathcal{F}^\vee := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Если Z – подсхема в X , то через $\mathcal{I}_{Z,X}$ мы обозначаем пучок идеалов, соответствующий подсхеме Z . Если $X = \mathbb{P}^r$ и t – целое число, то через $\mathcal{F}(t)$ мы обозначаем пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(t)$; $[\mathcal{F}]$ – класс изоморфизма пучка $\mathcal{F}$. Для любого морфизма $\mathcal{O}_X$ -пучков $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ и любого $\mathbf{k}$ -векторного пространства U (соответственно, для любого гомоморфизма $f: U \rightarrow U'$ $\mathbf{k}$ -векторных пространств) мы будем обозначать для краткости также через f индуцированный морфизм пучков $\text{id} \otimes f: U \otimes \mathcal{F} \rightarrow U \otimes \mathcal{F}'$ (соответственно, индуцированный морфизм $f \otimes \text{id}: U \otimes \mathcal{F} \rightarrow U' \otimes \mathcal{F}$).

Далее везде V – фиксированное векторное пространство размерности 4 над $\mathbf{k}$, и мы полагаем $\mathbb{P}^3 := P(V)$. Кроме того, всюду далее u и v – морфизмы в точной последовательности Эйлера

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{u} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{v} T_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow 0.$$

Для произвольных $\mathbf{k}$ -векторных пространств U и W и произвольного вектора $\varphi \in \text{Hom}(U, W \otimes \wedge^2 V^\vee) \subset \text{Hom}(U \otimes V, W \otimes V^\vee)$, понимаемого как гомоморфизм $\varphi: U \otimes V \rightarrow W \otimes V^\vee$, или, что то же самое, как гомоморфизм $\sharp\varphi: U \rightarrow W \otimes \wedge^2 V^\vee$, мы будем обозначать через $\tilde{\varphi}$ композицию

$$U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\sharp\varphi} W \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\varepsilon} W \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(2),$$

где ε – индуцированный морфизм в точной тройке $0 \rightarrow \wedge^2 \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) \xrightarrow{\wedge^2 v^\vee} \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow 0$, получаемой переходом ко вторым внешним степеням в двойственной точной последовательности Эйлера. Кроме того, для сокращения обозначений мы иногда не будем выписывать нижний индекс $\mathbb{P}^3$ в обозначении пучков на $\mathbb{P}^3$, т.е. будем записывать $\mathcal{O}, \Omega, \dots$ вместо $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \Omega_{\mathbb{P}^3}, \dots$ соответственно.

Далее, как и ранее, для любого целого $n \geq 1$ через H_n мы обозначаем фиксированное n -мерное векторное пространство над $\mathbf{k}$. (Например, в качестве H_n можно брать $\mathbf{k}^n$.)

Повсюду в статье для $m \geq 1$ через $\mathbf{S}_m$ обозначается векторное пространство $S^2 H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$ и через Σ_{m+1} – векторное пространство $\text{Hom}(H_m, H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee)$. Для данного $\mathbf{k}$ -векторного пространства U (соответственно, прямой суммы $U \oplus U'$ двух $\mathbf{k}$ -векторных пространств) будем обозначать для упрощения обозначений также через U (соответственно, через $U \times U'$) аффинное пространство $\mathbf{V}(U^\vee) = \text{Spec}(\text{Sym}^* U^\vee)$ (соответственно, прямое произведение аффинных пространств $\mathbf{V}(U^\vee) \times \mathbf{V}((U')^\vee)$).

Все рассматриваемые в статье схемы являются нётеровыми. Неприводимая схема – это схема, подлежащее топологическое пространство которой неприводимо. Под целой схемой мы понимаем приведенную неприводимую схему. Кроме того, под размерностью данной схемы понимается максимальная из

размерностей ее неприводимых компонент. Общая точка неприводимой (но не обязательно приведенной) схемы $\mathcal{X}$ – это произвольная замкнутая точка, принадлежащая некоторому плотному открытому подмножеству в $\mathcal{X}$.

§ 3. Общие замечания об инстантонах. Множество MI_n

В этом параграфе мы напоминаем некоторые известные факты о математических инстантонных расслоениях (см., например, [7]).

Для данного n -инстантона E из условий (1.1), (1.2), теоремы Римана–Роха и двойственности Серра имеем

$$\begin{aligned} h^1(E(-1)) = h^2(E(-3)) = n, \quad h^1(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^1) = h^2(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2) = 2n + 2, \\ h^1(E) = h^2(E(-4)) = 2n - 2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} h^i(E) = h^i(E(-1)) = h^{3-i}(E(-3)) = h^{3-i}(E(-4)) = 0, \quad i \neq 1, \\ h^i(E(-2)) = 0, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кроме того, условие $c_1(E) = 0$ влечет изоморфизм $\wedge^2 E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$, а следовательно, симплектический изоморфизм $j: E \xrightarrow{\sim} E^\vee$, определенный однозначно с точностью до скалярного множителя. Рассмотрим тройку (E, f, j) , где E – n -инстантон, f – изоморфизм $H_n \xrightarrow{\sim} H^2(E(-3))$, а $j: E \xrightarrow{\sim} E^\vee$ – симплектическая структура на E . Заметим, что, поскольку E как стабильное расслоение ранга 2 является простым, всякий автоморфизм φ расслоения E имеет вид $\varphi = \lambda \text{id}$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Налагая условие совместимости φ с симплектической структурой j , т. е. условие $\varphi^\vee \circ j \circ \varphi = j$, получаем, что $\lambda = \pm 1$. Это приводит к следующему определению эквивалентности троек (E, f, j) . Две тройки (E, f, j) и (E', f', j') эквивалентны, если существует изоморфизм $g: E \xrightarrow{\sim} E'$ такой, что $g_* \circ f = \lambda f'$, где $\lambda \in \{1, -1\}$, $g_*: H^2(E(-3)) \xrightarrow{\sim} H^2(E'(-3))$ – индуцированный изоморфизм, и $j = g^\vee \circ j' \circ g$. Через $[E, f, j]$ мы будем обозначать класс эквивалентности тройки (E, f, j) . Из этого определения легко следует, что множество $F_{[E]}$ всех классов эквивалентности $[E, f, j]$ с данным $[E]$ является однородным пространством группы $\text{GL}(H_n)/\{\pm \text{id}\}$.

Каждый класс $[E, f, j]$ определяет точку

$$A = A([E, f, j]) \in S^2 H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \quad (3.3)$$

следующим образом. Рассмотрим точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1 \xrightarrow{i_1} V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^2 \rightarrow \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \wedge^4 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow \wedge^3 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \xrightarrow{i_2} \Omega_{\mathbb{P}^3}^2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

индуцированные комплексом Кошуля для морфизма $V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\text{ev}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$. Умножая тензорно эти последовательности на E и переходя к когомологиям, ввиду (1.2), (3.1), (3.2) получаем равенства $0 = h^0(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}) = h^3(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2) =$

$h^2(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3})$ и коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(E(-4)) \otimes \wedge^4 V^\vee & \longrightarrow & H^2(E(-3)) \otimes \wedge^3 V^\vee & \xrightarrow{i_2} & H^2(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}^2) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow A' & & \cong \uparrow \partial \\ 0 & \longleftarrow & H^1(E) \longleftarrow & H^1(E(-1)) \otimes V^\vee & \xleftarrow{i_1} & H^1(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}) & \longleftarrow 0 \end{array} \quad (3.5)$$

где $A' := i_1 \circ \partial^{-1} \circ i_2$. Точная последовательность Эйлера (3.4) влечет канонический изоморфизм $\omega_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\cong} \wedge^4 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$, и, фиксируя изоморфизм $\tau: \mathbf{k} \xrightarrow{\cong} \wedge^4 V^\vee$, получаем индуцированные изоморфизмы $\tilde{\tau}: V \xrightarrow{\cong} \wedge^3 V^\vee$ и $\hat{\tau}: \omega_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$. Теперь точка A из (3.3) определяется как композиция

$$\begin{aligned} A: H_n \otimes V &\xrightarrow{\tilde{\tau}} H_n \otimes \wedge^3 V^\vee \xrightarrow{f} H^2(E(-3)) \otimes \wedge^3 V^\vee \xrightarrow{A'} H^1(E(-1)) \otimes V^\vee \\ &\xrightarrow{j} H^1(E^\vee(-1)) \otimes V^\vee \xrightarrow{\text{SD}} H^2(E(1) \otimes \omega_{\mathbb{P}^3})^\vee \otimes V^\vee \\ &\xrightarrow{\hat{\tau}} H^2(E(-3))^\vee \otimes V^\vee \xrightarrow{f^\vee} H_n^\vee \otimes V^\vee, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где SD – изоморфизм двойственности Серра. Проверяется, что A – кососимметрическое отображение, зависящее лишь от класса $[E, f, j]$ и не зависящее от выбора τ , и что эта точка $A \in \wedge^2(H_n^\vee \otimes V^\vee)$ лежит в прямом слагаемом $\mathbf{S}_n = S^2 H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$ канонического разложения

$$\wedge^2(H_n^\vee \otimes V^\vee) = S^2 H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \oplus \wedge^2 H_n^\vee \otimes S^2 V^\vee. \quad (3.7)$$

Здесь $\mathbf{S}_n$ – пространство связок квадрик в H_n . Следуя [6], [8] и [9], мы называем A n -инстантонной связкой квадрик, соответствующей данным $[E, f, j]$.

Обозначим $W_A := H_n \otimes V / \ker A$. Используя цепочку изоморфизмов в (3.6), мы можем переписать диаграмму (3.5) в виде

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker A & \longrightarrow & H_n \otimes V & \xrightarrow{c_A} & W_A \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow A & & \cong \downarrow q_A \\ 0 & \longleftarrow & \ker A^\vee & \longleftarrow & H_n^\vee \otimes V^\vee & \xleftarrow{c_A^\vee} & W_A^\vee \longleftarrow 0 \end{array} \quad (3.8)$$

Здесь согласно (3.1) имеем, что $\dim W_A = 2n + 2$ и $q_A: W_A \xrightarrow{\cong} W_A^\vee$ – индуцированный кососимметрический изоморфизм. Важное свойство связки $A = A([E, f, j])$ состоит в том, что индуцированный морфизм пучков

$$a_A^\vee: W_A^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{c_A^\vee} H_n^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\text{ev}} H_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \quad (3.9)$$

является эпиморфизмом таким, что композиция $H_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{a_A} W_A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{q_A} W_A^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{a_A^\vee} H_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ равна нулю, и $E = \ker(a_A^\vee \circ q_A) / \text{Im } a_A$. Таким образом, A определяет монаду

$$\mathcal{M}_A: 0 \rightarrow H_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{a_A} W_A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{a_A^\vee \circ q_A} H_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

с когомологическим пучком

$$E = E(A) := \ker(a_A^\vee \circ q_A) / \text{Im } a_A. \quad (3.11)$$

Отметим, что, переходя к когомологиям монады $\mathcal{M}_A$, подкрученной на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)$, и используя (3.11), мы получаем изоморфизм $f: H_n \xrightarrow{\sim} H^2(E(-3))$. Кроме того, симплектичность формы q_A в монаде $\mathcal{M}_A$ влечет существование канонического изоморфизма монады $\mathcal{M}_A$ с двойственной ей монадой, и этот изоморфизм влечет симплектический изоморфизм $j: E \xrightarrow{\sim} E^\vee$. Таким образом, данные $[E, f, j]$ восстанавливаются по связке A . Это приводит к следующему описанию пространства модулей I_n . Рассмотрим множество n -инстантонных связок квадратик

$$MI_n := \left\{ A \in \mathbf{S}_n \left| \begin{array}{l} \text{(i) } \text{rk}(A: H_n \otimes V \rightarrow H_n^\vee \otimes V^\vee) = 2n + 2; \\ \text{(ii) морфизм } a_A^\vee: W_A^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow H_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1), \text{ опреде-} \\ \text{ляемый точкой } A \text{ из (3.9), сюръективен;} \\ \text{(ii) } h^0(E_2(A)) = 0, \text{ где } E_2(A) := \ker(a_A^\vee \circ q_A) / \text{im } a_A, \\ \text{а } q_A: W_A \xrightarrow{\sim} W_A^\vee \text{ — симплектический изоморфизм,} \\ \text{определяемый связкой } A \text{ в диаграмме (3.8)} \end{array} \right. \right\}. \quad (3.12)$$

Условия (i)–(iii) в (3.12) называются *условиями Барта*, которые показывают, что MI_n снабжено естественной структурой локально замкнутой подсхемы в векторном пространстве $\mathbf{S}_n$. Более того, из (3.12) следует, что существует морфизм $\pi_n: MI_n \rightarrow I_n$, $A \mapsto [E(A)]$, и известно, что этот морфизм является главным $(\text{GL}(H_n)/\{\pm \text{id}\})$ -расслоением в этальной топологии (см. [7]). Здесь по конструкции слой $\pi_n^{-1}([E])$ над произвольной точкой $[E] \in I_n$ совпадает с однородным пространством $F_{[E]}$ группы $\text{GL}(H_n)/\{\pm \text{id}\}$, описанным выше. Поэтому неприводимость $(I_n)_{\text{red}}$ равносильна неприводимости схемы $(MI_n)_{\text{red}}$.

Определение (3.12) приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любого $n \geq 1$ пространство n -инстантонных связок квадратик MI_n — локально замкнутая подсхема в векторном пространстве $\mathbf{S}_n$, задаваемая в окрестности каждой точки $A \in MI_n$ уравнениями*

$$\binom{2n-2}{2} = 2n^2 - 5n + 3, \quad (3.13)$$

налагаемыми ранговым условием (i) из (3.12).

Заметим, что из (3.13) следует соотношение

$$\dim_{[A]} MI_n \geq \dim \mathbf{S}_n - (2n^2 - 5n + 3) = n^2 + 8n - 3 \quad (3.14)$$

в каждой точке $A \in MI_n$. С другой стороны, по теории деформации для любого n -инстантона E имеем $\dim_{[E]} I_n \geq 8n - 3$. Это согласуется с (3.14), поскольку $MI_n \rightarrow I_n$ является главным $(\text{GL}(H_n)/\{\pm \text{id}\})$ -расслоением в этальной топологии.

Пусть $\mathcal{S}_n = \{[E] \in I_n \mid \exists \text{ прямая } l \subset \mathbb{P}^3 \text{ максимального подскока расслоения } E, \text{ т.е. такая прямая } l, \text{ что } h^0(E(-n)|_l) \neq 0\}$. Известно [10], что $\mathcal{S}_n$ — замкнутое подмножество размерности $6n + 2$ в I_n , причем I_n гладко вдоль $\mathcal{S}_n$. Таким образом, поскольку $\dim_{[E]} I_n \geq 8n - 3$ для каждого $[E] \in I_n$, мы получаем, что множество

$$I'_n := I_n \setminus \mathcal{S}_n \quad (3.15)$$

– плотное открытое подмножество в I_n , соответственно,

$$MI'_n := \pi_n^{-1}(I'_n) \quad (3.16)$$

– плотное открытое подмножество в MI_n , и мы имеем открытое вложение

$$MI'_n \xrightarrow{\text{dense open}} MI_n. \quad (3.17)$$

Тем самым, неприводимость MI_n равносильна неприводимости MI'_n , поэтому по техническим причинам мы ограничимся ниже рассмотрением множества MI'_n вместо MI_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В схеме I_n существуют гладкие точки (см., например, [2] или [10]). Следовательно, в MI_n существуют гладкие точки.

§ 4. Разложение $H_{2m+1} \simeq H_{m+1} \oplus H_m$ и связанные с ним конструкции

4.1. Один результат общего положения для $(2m+1)$ -инстантонных связок. Для фиксированного целого $m \geq 3$ и данного $(2m+1)$ -инстантона $[E] \in I'_{2m+1}$ зафиксируем изоморфизм $f: H_{2m+1} \xrightarrow{\simeq} H^2(E(-3))$ и обозначим

$$H_{4m} := H^2(E(-4)), \quad W_{4m+4} := H^1(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3})^\vee. \quad (4.1)$$

(Обозначения (4.1) согласованы с равенствами (3.1) для $n = 2m+1$.) Тогда нижняя точная тройка в (3.5) может быть переписана в виде

$$0 \rightarrow W_{4m+4}^\vee \rightarrow H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee \xrightarrow{\text{mult}} H_{4m}^\vee \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Сформулируем теперь результат общего положения для $(2m+1)$ -инстантонных связок квадрик, который будет важен в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $m \geq 3$ и E – $(2m+1)$ -инстантон, $[E] \in I'_{2m+1}$, снабженный изоморфизмом $f: H_{2m+1} \xrightarrow{\simeq} H^2(E(-3))$, и положим $W_{4m+4} = H^1(E \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3})^\vee$, так что имеем мономорфизм $W_{4m+4}^\vee \hookrightarrow H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee$, определенный в (4.2). Тогда для общего m -мерного подпространства V_m в $H_{2m+1}^\vee$ справедливо равенство

$$W_{4m+4}^\vee \cap V_m \otimes V^\vee = \{0\}.$$

Доказательство теоремы 4.1 носит технический характер, и мы выносим его в конец статьи (см. § 12).

4.2. Разложение $H_{2m+1} \simeq H_{m+1} \oplus H_m$. Фиксируем изоморфизм

$$\xi: H_{m+1} \oplus H_m \xrightarrow{\simeq} H_{2m+1}, \quad (4.3)$$

и пусть

$$H_{m+1} \xrightarrow{i_{m+1}} H_{m+1} \oplus H_m \xleftarrow{i_m} H_m \quad (4.4)$$

– вложения прямых слагаемых. Для данного $(2m+1)$ -инстантона E , $[E] \in I'_{2m+1}$, зафиксируем изоморфизм $f: H_{2m+1} \xrightarrow{\simeq} H^2(E(-3))$ и симплектическую структуру $j: E \xrightarrow{\simeq} E^\vee$. Данные $[E, f, j]$ определяют связку квадрик

$A \in MI'_{2m+1}$ (см. § 3), и точная тройка (4.2) естественным образом отождествляется с двойственной к тройке $0 \rightarrow \ker A \rightarrow H_{2m+1} \otimes V \rightarrow W_A \rightarrow 0$ и удовлетворяет диаграмме (3.8) для $n = 2m + 1$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker A & \longrightarrow & H_{2m+1} \otimes V & \xrightarrow{c_A} & W_A \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow A & & \cong \downarrow q_A \\ 0 & \longleftarrow & \ker A^\vee & \longleftarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \xleftarrow{c_A^\vee} & W_A^\vee \longleftarrow 0 \end{array} \quad (4.5)$$

Рассмотрим композицию

$$j_{\xi,A}: H_{m+1} \otimes V \xrightarrow{i_{m+1}^\vee} H_{m+1} \otimes V \oplus H_m \otimes V \xrightarrow{\xi} H_{2m+1} \otimes V \xrightarrow{c_A} W_A. \quad (4.6)$$

В этих обозначениях теорема 4.1 может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 4.1'. *Предположим, что $m \geq 3$, и пусть A – произвольная связка из MI'_{2m+1} . Тогда для общего изоморфизма $\xi: H_{2m+1} \xrightarrow{\sim} H_{m+1} \oplus H_m$ имеем*

$$\ker A \cap (\xi \circ i_{m+1})(H_{m+1} \otimes V) = \{0\}. \quad (4.7)$$

Последнее равносильно тому, что $j_{\xi,A}: H_{m+1} \otimes V \rightarrow W_A$ – изоморфизм.

Рассмотрим следующее разложение в прямую сумму, соответствующее изоморфизму (4.3):

$$\tilde{\xi}: \mathbf{S}_{m+1} \oplus \Sigma_{m+1} \oplus \mathbf{S}_m \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}_{2m+1}, \quad (4.8)$$

и пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{2m+1} &\rightarrow \mathbf{S}_{m+1}, & A &\mapsto A_1(\xi), & \mathbf{S}_{2m+1} &\rightarrow \Sigma_{m+1}, & A &\mapsto A_2(\xi), \\ \mathbf{S}_{2m+1} &\rightarrow \mathbf{S}_m, & A &\mapsto A_3(\xi), \end{aligned} \quad (4.9)$$

– проекции на прямые слагаемые. По определению $A_1(\xi)$ как кососимметрический гомоморфизм $H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$ является композицией

$$A_1(\xi): H_{m+1} \otimes V \xrightarrow{j_{\xi,A}} W_A \xrightarrow[\simeq]{q_A} W_A^\vee \xrightarrow{j_{\xi,A}^\vee} H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee. \quad (4.10)$$

Это означает, что теорему 4.1' можно переформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 4.1''. *Пусть $m \geq 3$, и пусть A – произвольная связка квадрик из MI'_{2m+1} . Тогда для общего изоморфизма ξ в (4.3) кососимметрический гомоморфизм $A_1(\xi): H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$ обратим.*

Теперь, используя обозначения (4.9), мы можем представить связку $A \in \mathbf{S}_{2m+1}$, рассматриваемую как гомоморфизм $A: H_{m+1} \otimes V \oplus H_m \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \oplus H_m^\vee \otimes V^\vee$, в виде $((8m+4) \times (8m+4))$ -матрицы гомоморфизмов

$$A = \begin{pmatrix} A_1(\xi) & A_2(\xi) \\ -A_2(\xi)^\vee & A_3(\xi) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет ранг $4m+4$ согласно условию Барта (i) в (3.12). С другой стороны, ввиду теоремы 4.1'' имеем $\text{rk } A_1(\xi) = 4m+4$, т. е. ранги матрицы A и

ее подматрицы $A_1(\xi)$ совпадают. Это дает после умножения матрицы A слева на обратимую матрицу гомоморфизмов

$$\begin{pmatrix} A_1(\xi)^{-1} & \mathbf{0} \\ A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} & \text{id}_{H_m^\vee \otimes V^\vee} \end{pmatrix}$$

следующее соотношение между матрицами $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ и $A_3(\xi)$:

$$A_3(\xi) = -A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi). \quad (4.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Соотношение (4.11) означает, что $A_3(\xi)$ однозначно определяется гомоморфизмами $A_1(\xi)$ и $A_2(\xi)$. В дальнейшем мы будем систематически пользоваться этим наблюдением.

Для $m \geq 1$ пусть Isom_{2m+1} – множество всех изоморфизмов ξ в (4.3), и пусть

$$MI_{2m+1}(\xi) := \{A \in MI'_{2m+1} \mid \text{кососимметрический гомоморфизм } A_1(\xi) \text{ в (4.10) обратим}\}, \quad \xi \in \text{Isom}_{2m+1}. \quad (4.12)$$

В этих обозначениях мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3. Для $m \geq 3$ множества $MI_{2m+1}(\xi)$, $\xi \in \text{Isom}_{2m+1}$, являются плотными открытыми подмножествами в MI'_{2m+1} и составляют открытое покрытие множества MI'_{2m+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – произвольная неприводимая компонента множества MI'_{2m+1} . Рассмотрим множество $U := \{(A, \xi) \in M \times \text{Isom}_{2m+1} \mid A \in MI_{2m+1}(\xi)\}$ с проекциями $M \xleftarrow{p} U \xrightarrow{q} \text{Isom}_{2m+1}$. По построению U открыто в $M \times \text{Isom}_{2m+1}$. Более того, из теоремы 4.1'' следует, что $p(U) = M$, так что U непусто, а потому плотно в $M \times \text{Isom}_{2m+1}$, поскольку M и Isom_{2m+1} неприводимы. (Заметим, что Isom_{2m+1} неприводимо как главное однородное пространство группы $G = \text{GL}(2m+1)$.) Поэтому $q(U)$ содержит плотное открытое подмножество в Isom_{2m+1} . Группа G транзитивно действует на Isom_{2m+1} сдвигами, и множество $q(U)$, очевидно, G -инвариантно. Тем самым, $q(U)$ совпадает с Isom_{2m+1} . Отсюда следует утверждение теоремы.

Далее мы воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 4.4. Для $\xi \in \text{Isom}_{2m+1}$ и $A \in MI_{2m+1}(\xi)$ положим

$$B := A_1(\xi), \quad C := A_2(\xi). \quad (4.13)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если

$$\alpha_{\xi, A} := j_{\xi, A}^{-1} \circ a_A \circ \xi: (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow H_{m+1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \quad (4.14)$$

– морфизм подрасслоения, то существует эпиморфизм

$$\lambda_{\xi, A}: \text{coker}(B \circ \alpha_{\xi, A}) \twoheadrightarrow H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1), \quad (4.15)$$

входящий в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\text{can}} & \text{coker}(B \circ \alpha_{\xi, A}) \\ & \searrow u^\vee & \downarrow \lambda_{\xi, A} \\ & & H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \end{array} \quad (4.16)$$

где can – канонический эпиморфизм;

(ii) если диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 0 \longrightarrow & (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{B \circ \alpha_{\xi, A}} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\text{can}} & \text{coker}(B \circ \alpha_{\xi, A}) \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow i_{m+1} & & \parallel & & \uparrow \varepsilon_{\xi, A} & \\
 0 \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{B \circ u} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{v \circ B^{-1}} & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \uparrow \tau_{\xi, A} & \\
 & & & & & H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) &
 \end{array} \quad (4.17)$$

коммутативна, где $\tau_{\xi, A}$ и $\varepsilon_{\xi, A}$ – индуцированные морфизмы, то $\tau_{\xi, A}$ является морфизмом подрасслоения и входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{v \circ B^{-1}} & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1) \\
 \uparrow C \circ u & & \uparrow \tau_{\xi, A} \\
 H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xlongequal{\quad} & H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)
 \end{array} \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{2m+1} \otimes \mathcal{O}(-1) & \xrightarrow{a_A} & W_A \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow[\simeq]{q_A} & W_A^\vee \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{a_A^\vee} & H_{2m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \\
 \uparrow \xi \simeq & & \uparrow j_{\xi, A} \simeq & & \downarrow j_{\xi, A}^\vee & & \downarrow \xi^\vee \\
 (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O}(-1) & \xrightarrow{\alpha_{\xi, A}} & H_{m+1} \otimes V \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow[\simeq]{B} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{\alpha_{\xi, A}^\vee} & (H_{m+1} \oplus H_m)^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \\
 \uparrow i_{m+1} & \nearrow u & & & \searrow u^\vee & & \downarrow i_{m+1}^\vee \\
 H_{m+1} \otimes \mathcal{O}(-1) & & & & & & H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}(1)
 \end{array} \quad (4.19)$$

Здесь верхняя тройка есть монада (3.10) для $n = 2m + 1$. Отсюда вытекает утверждение (i).

Утверждение (ii) доказывается стандартным диаграммным поиском, использующим (4.11), (4.13) и диаграмму (4.17).

4.3. Замечание об инстантонах 'т Хоофта. Рассмотрим множество инстантонных расслоений 'т Хоофта

$$I_{2m+1}^{tH} := \{[E] \in I_{2m+1} \mid h^0(E(1)) \neq 0\}$$

и соответствующее множество инстантонных связей 'т Хоофта

$$MI_{2m+1}^{tH} := \pi_n^{-1}(I_{2m+1}^{tH}).$$

Соберем некоторые хорошо известные факты о множестве I_{2m+1}^{tH} в следующей лемме (см. [1], [2], [9, предложение 2.2], [11]).

ЛЕММА 4.5. Пусть $m \geq 1$. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) I_{2m+1}^{tH} – неприводимое $(10m + 9)$ -мерное подмногообразие в I_{2m+1} , соответственно, MI_{2m+1}^{tH} – неприводимое $(4m^2 + 14m + 10)$ -мерное подмногообразие в I_{2m+1} ;

(ii) $I_{2m+1}^{tH*} := I_{2m+1}^{tH} \cap I'_{2m+1}$ – гладкое плотное открытое подмножество в I_{2m+1}^H

$$h^0(E(1)) = 1, \quad [E] \in I_{2m+1}^{tH*}; \quad (4.20)$$

(iii) MI_{2m+1}^{tH*} – гладкое плотное открытое подмножество в множестве

$$TH_{2m+1} := \left\{ A \in \mathbf{S}_{2m+1} \mid A = \sum_{i=1}^{2m+2} h^2 \otimes w, \quad h \in H_{2m+1}^\vee, \quad w \in \wedge^2 V^\vee, \quad w \wedge w = 0 \right\}.$$

Рассмотрим вопрос о том, верно ли утверждение теоремы 4.3 в случаях $m = 1, 2$. С этой целью для $m = 1, 2$ зафиксируем изоморфизмы $\xi^0 \in \text{Isom}_{2m+1}$, $\xi^0: H_{m+1} \oplus H_m \xrightarrow{\sim} H_{2m+1}$, и выберем базис $\{h_1, \dots, h_{2m+1}\}$ в $H_{2m+1}^\vee$ такой, что векторы $\{h_1, \dots, h_{m+1}\}$ лежат в $H_{m+1}^\vee$, а векторы $\{h_{m+2}, \dots, h_{2m+1}\}$ лежат в $H_m^\vee$; соответственно, пусть $e_1, \dots, e_4$ – некоторый базис в $V^\vee$. Рассмотрим связки квадрик $A^{(m)} \in TH_{2m+1}$, $m = 1, 2$, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= h_1^2 \otimes (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + h_2^2 \otimes (e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2), \\ A^{(2)} &= h_1^2 \otimes (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + h_2^2 \otimes (e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) \\ &\quad + h_3^2 \otimes (e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Нетрудно показать, что в обозначениях (4.9) гомоморфизмы

$$A_1^{(m)}(\xi^0): H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee, \quad m = 1, 2,$$

обратимы. С другой стороны, для данного $\xi \in \text{Isom}_{2m+1}$ условие обратимости гомоморфизма $A_1(\xi): H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$ является открытым условием для связки $A \in TH_{2m+1}$ и, соответственно, связки $A \in \mathbf{S}_{2m+1}$. Поскольку множества MI'_{2m+1} , $m = 1, 2$, неприводимы (см. [7]), это вместе с леммой 4.5 дает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Утверждение теоремы 4.3 верно в случаях $m = 1, 2$.

Теперь из (3.17), теоремы 4.3 и следствия 4.6 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть $m \geq 1$. Тогда для любого $\xi \in \text{Isom}_{2m+1}$ схема $(MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}}$ является открытой плотной подсхемой в $(MI_{2m+1})_{\text{red}}$. В частности,

$$\dim_A MI_{2m+1}(\xi) = \dim_A MI_{2m+1}, \quad A \in MI_{2m+1}(\xi), \quad \xi \in \text{Isom}_{2m+1}. \quad (4.22)$$

§ 5. Обратимые связки квадратик из $\mathbf{S}_{m+1}$ и симплектические расслоения ранга $2m+2$

5.1. Конструкция симплектических расслоений ранга $2m+2$ по обратимым связкам квадратик из $\mathbf{S}_{m+1}$. В этом пункте мы покажем, что всякая обратимая связка квадратик $B \in \mathbf{S}_{m+1}$ естественно приводит к конструкции симплектического векторного расслоения $E_{2m+2}(B)$ ранга $2m+2$ на $\mathbb{P}^3$. Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$\mathbf{S}_{m+1}^0 := \{B \in \mathbf{S}_{m+1} \mid B: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee - \text{обратимый гомоморфизм}\}. \quad (5.1)$$

Множество $\mathbf{S}_{m+1}^0$ является плотным открытым подмножеством векторного пространства $\mathbf{S}_{m+1}$, и легко видеть, что для любой связки $B \in \mathbf{S}_{m+1}^0$ выполнены следующие условия:

1) морфизм $\tilde{B}: H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(1)$, индуцированный гомоморфизмом $B: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$, является морфизмом подрасслоения, т. е.

$$E_{2m+2}(B) := \text{coker}(\tilde{B}) \quad (5.2)$$

есть векторное расслоение ранга $2m+2$ на $\mathbb{P}^3$; это следует из диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{\tilde{B}} & H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) & \xrightarrow{e} & E_{2m+2}(B) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v^\vee & & \\ & & H_{m+1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow[\simeq]{B} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & & \\ & & \downarrow v & & \downarrow u^\vee & & \\ 0 \rightarrow & E_{2m+2}(B)^\vee \longrightarrow & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{\tilde{B}^\vee} & H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.3)$$

2) гомоморфизм $\sharp B: H_{m+1} \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$, индуцируемый гомоморфизмом $B: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$, инъективен; это вытекает из коммутативной диаграммы, продолжающей верхнюю горизонтальную тройку в (5.3):

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H_{m+1}^\vee \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-2) & \xlongequal{\quad} & H_{m+1}^\vee \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-2) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\sharp B} & H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\text{can}} & H^0(E_{2m+2}(B)(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow w & & \downarrow \text{ev} & \\ 0 \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\tilde{B}} & H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) & \xrightarrow{e} & E_{2m+2}(B)(1) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (5.4)$$

где w – морфизм, индуцированный морфизмом v из точной последовательности Эйлера в диаграмме (5.3); из диаграммы (5.4) мы получаем изоморфизм

$$\mathrm{coker}(\sharp B) \simeq H^0(E_{2m+2}(B)(1)); \quad (5.5)$$

3) из диаграммы (5.3) и леммы о змее имеем изоморфизм

$$\theta: E_{2m+2}(B) \xrightarrow{\sim} E_{2m+2}(B)^\vee, \quad (5.6)$$

который является симплектическим:

$$\theta^\vee = -\theta,$$

поскольку гомоморфизм $B: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$ является кососимметрическим; изоморфизм θ вместе с верхней тройкой из (5.3) и двойственной к ней тройкой входят в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{\tilde{B}} & H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) & \xrightarrow{e} & E_{2m+2}(B) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v^\vee & & \downarrow e^\vee \circ \theta \\ 0 & \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{B \circ u} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{v \circ B^{-1}} & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow u^\vee & & \downarrow \tilde{B}^\vee \\ & & & & H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \equiv & H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array} \quad (5.7)$$

Заметим, что верхняя горизонтальная тройка в (5.3) влечет равенства

$$h^0(E_{2m+2}(B)) = h^i(E_{2m+2}(B)(-2)) = 0, \quad i \geq 0. \quad (5.8)$$

5.2. Связь между $(2m+1)$ -инстантонами и симплектическими расслоениями ранга $2m+2$. Для $m \geq 1$ пусть $\xi \in \mathrm{Isom}_{2m+1}$ и $A \in MI_{2m+1}(\xi)$. В этом пункте мы установим связь между инстантонным векторным расслоением $E(A)$ и симплектическим векторным расслоением $E_{2m+2}(B)$ ранга $2m+2$ для $B = A_1(\xi)$. Мы покажем, что $E(A)$ является коомологическим пучком монады (5.12), определяемой данными (ξ, A) с членом $E_{2m+2}(B)$ в середине (см. лемму 5.1).

В самом деле, так как $\xi \in \mathrm{Isom}_{2m+1}$, гомоморфизм $B: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$ по определению лежит в $\mathbf{S}_{m+1}^0$. Поэтому по лемме 4.4 верна диаграмма (4.18). Эта диаграмма вместе с (5.7) влечет $\tilde{B}^\vee \circ \tau_{\xi,A} = 0$ (заметим, что в (4.18) имеем $\mathrm{im}(C \circ u) \subset H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(1)$, так как $C \in \Sigma_{m+1}$), так что существует морфизм

$$\rho_{\xi,A}: H_m \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow E_{2m+2}(B) \quad (5.9)$$

такой, что $\tau_{\xi,A} = e^\vee \circ \theta \circ \rho_{\xi,A}$. Поскольку $\tau_{\xi,A}$ – морфизм подрасслоения, то $\rho_{\xi,A}$ также является морфизмом подрасслоения. Более того, диаграммы (4.18)

и (5.7) дают коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) & \xrightarrow{e} & E_{2m+2}(B) \\
 \downarrow v^\vee & \swarrow \#C \quad \nearrow \rho_{\xi,A} & \downarrow e^\vee \circ \theta \\
 & H_m \otimes \mathcal{O}(-1) & \\
 & \nwarrow \tilde{C} \quad \searrow \tau_{\xi,A} & \\
 H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{v \circ B^{-1}} & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1)
 \end{array} \quad (5.10)$$

Диаграммы (5.7) и (5.10) влекут коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 H_m \otimes \mathcal{O}(-1) & \xrightarrow{\tilde{C}} & & & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O} \\
 \downarrow D_C & \swarrow \rho_{\xi,A} & \searrow \#C & \nearrow v^\vee & \downarrow \simeq B^{-1} \\
 & E_{2m+2}(B) & \xleftarrow{e} & H_{m+1}^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) & \\
 & \downarrow \simeq \theta & & \downarrow e^\vee \circ \theta \circ e & \\
 & E_{2m+2}(B)^\vee & \xrightarrow{e^\vee} & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1) & \\
 & \swarrow \rho_{\xi,A}^\vee & \nwarrow \#C^\vee & \nearrow v & \\
 H_m^\vee \otimes \mathcal{O}(1) & \xleftarrow{\tilde{C}^\vee} & & & H_{m+1} \otimes V \otimes \mathcal{O}
 \end{array} \quad (5.11)$$

где $D_C := -\tilde{C}^\vee \circ B^{-1} \circ \tilde{C} = -u^\vee \circ (C^\vee \circ B^{-1} \circ C) \circ u$ – нулевое отображение. Действительно, ввиду (4.11) и (4.13) имеем $D_C = p_2(A_3(\xi))$, где $p_2: \wedge^2(H_n^\vee \otimes V^\vee) \rightarrow \wedge^2 H_n^\vee \otimes S^2 V^\vee$ – проекция на второе прямое слагаемое разложения (3.7). Поскольку в силу (4.9) гомоморфизм $A_3(\xi)$ принадлежит первому прямому слагаемому разложения (3.7), имеем $D_C = 0$. Таким образом, мы получаем монаду

$$0 \rightarrow H_m \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\rho_{\xi,A}} E_{2m+2}(B) \xrightarrow{\rho_{\xi,A}^\vee \circ \theta} H_m^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow 0 \quad (5.12)$$

с когомологическим пучком

$$E_2(\xi, A) := \ker(\rho_{\xi,A}^\vee \circ \theta) / \text{Im } \rho_{\xi,A}, \quad (5.13)$$

который является векторным расслоением, так как $\rho_{\xi,A}$ – морфизм подрасслоения. Более того, в силу (5.8) из монады (5.12) вытекает, что $E_2(\xi, A)$ есть $(2m+1)$ -инстантон:

$$[E_2(\xi, A)] \in I_{2m+1}. \quad (5.14)$$

ЛЕММА 5.1. *Имеем $E_2(\xi, A) \simeq E(A)$, где пучок $E(A)$ определен в (3.11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим диаграммный поиск, использующий соотношение (4.11) и диаграммы (4.17)–(4.19), (5.3), (5.4) и (5.7).

**§ 6. Схема X_m . Изоморфизм между X_m
и открытым подмножеством пространства $(MI_{2m+1})_{\text{red}}$**

В этом параграфе мы вводим локально замкнутое подмножество X_m аффинного пространства $\mathbf{S}_{m+1} \times \Sigma_{m+1}$ и доказываем в теореме 6.1, что это подмножество, рассматриваемое как приведенная схема, изоморфно приведенной схеме $(MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}}$ для любого $\xi \in \text{Isom}_{2m+1}$. Множество X_m определяется следующим образом:

$$X_m := \left\{ (B, C) \in \mathbf{S}_{m+1}^0 \times \Sigma_{m+1} \mid \begin{array}{l} \text{(i)} (C^\vee \circ B^{-1} \circ C: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee) \in \mathbf{S}_m; \\ \text{(ii)} \text{ отображение } (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{(B,C) \circ u} \\ H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \text{ есть морфизм подрас-} \\ \text{слоения;} \\ \text{(iii)} \text{ композиция } \widehat{C}: H_m \xrightarrow{\#C} H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \xrightarrow{\text{can}} \\ H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee / \text{Im}(\#B) \simeq H^0(E_{2m+2}(B)(1)) \\ \text{дает морфизм подрасслоения} \\ \rho_{B,C}: H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow E_{2m+2}(B), \\ \text{т. е. морфизм } \rho_{B,C}^\vee \text{ эпиморфен и пучок} \\ E_2(B, C) := \text{Ker}({}^t \rho_{B,C}) / \text{Im}(\rho_{B,C}) \\ \text{локально свободен} \end{array} \right\}. \quad (6.1)$$

По определению X_m есть локально замкнутое подмножество в $\mathbf{S}_{m+1}^0 \times \Sigma_{m+1}$, поэтому оно естественно снабжается структурой приведенной схемы.

Заметим, что в условии (iii) из (6.1) мы полагаем ${}^t \rho_{B,C} := \rho_{B,C}^\vee \circ \theta$, где $\theta: E_{2m+2}(B) \xrightarrow{\sim} E_{2m+2}^\vee(B)$ – естественная симплектическая структура на $E_{2m+2}(B)$, определенная в (5.6).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $m \geq 1$ и $\xi \in \text{Isom}_{2m+1}$. Тогда:

(i) определен изоморфизм приведенных схем

$$f_m: (MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}} \xrightarrow{\sim} X_m, \quad A \mapsto (A_1(\xi), A_2(\xi)); \quad (6.2)$$

(ii) обратный изоморфизм задается формулой¹

$$g_m: X_m \xrightarrow{\sim} (MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}}, \quad (B, C) \mapsto \widetilde{\xi}(B, C, -C^\vee \circ B^{-1} \circ C). \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Сначала покажем, что образ отображения

$$f_m: (MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}} \rightarrow \mathbf{S}_{m+1}^0 \times \Sigma_{m,m+1}, \quad A \mapsto (A_1(\xi), A_2(\xi)),$$

лежит в X_m , т. е. удовлетворяет условиям (i)–(iii) из (6.1). В самом деле, условие (i) автоматически выполнено, так как (4.9) и (4.11) влекут

$$-C^\vee \circ B^{-1} \circ C = -A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) = A_3(\xi) \in S^2 H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee.$$

¹Здесь мы пользуемся разложением (4.8), фиксированным посредством выбора ξ .

Далее, морфизм $\rho_{B,C}$, определенный в (iii) из (6.1), совпадает по определению с морфизмом $\rho_{\xi,A}$, определенным в (5.9). Действительно, верхний треугольник в диаграмме (5.10), подкрученный на $\mathcal{O}(1)$, и нижняя часть диаграммы (5.4) входят в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H_{m+1} \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{\#B} & H_{m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{\text{can}} & H^0(E_{2m+2}(B)(1)) \otimes \mathcal{O} & \rightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow w & \swarrow \#C & \nearrow \hat{C} & & \downarrow \text{ev} \\
 0 \rightarrow H_{m+1} \otimes \mathcal{O} & \xrightarrow{\tilde{B}} & H_{m+1}^\vee \otimes \Omega(2) & \xrightarrow{e} & E_{2m+2}(B)(1) & \rightarrow & 0 \\
 & & & \nwarrow \tilde{C} & \searrow \rho_{\xi,A} & & \\
 & & & H_m \otimes \mathcal{O} & & &
 \end{array}
 \quad (6.4)$$

где композиция $\hat{C} = \text{can} \circ \#C$ определена в условии (iii) из (6.1). Отсюда имеем

$$\rho_{B,C} = \rho_{\xi,A}. \quad (6.5)$$

Поскольку $\rho_{\xi,A}$ – морфизм подрасслоения, условие (iii) из (6.1) выполнено и, более того, $\hat{C}$ также является морфизмом подрасслоения. Таким образом, нижняя часть диаграммы (6.4) показывает, что

$$(\tilde{B}, \tilde{C}): (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O} \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes \Omega(2)$$

есть морфизм подрасслоения. Поэтому его композиция с морфизмом подрасслоения $v^\vee: H_{m+1}^\vee \otimes \Omega(2) \hookrightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V \otimes \mathcal{O}(1)$ также является морфизмом подрасслоения. По определению эта композиция совпадает с $(B, C) \circ u$. Тем самым, условие (ii) из (6.1) выполнено.

Это показывает, что $f_m((MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}})$ лежит в X_m . Наконец, равенство $g_m \circ f_m = \text{id}$ прямо вытекает из (4.9) и (4.11).

(ii) Сначала докажем, что образ отображения²

$$g_m: X_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m+1}, \quad (B, C) \mapsto (B, C, C^\vee \circ B^{-1} \circ C), \quad (6.6)$$

лежит в $(MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}}$. Действительно, морфизм подрасслоения

$$\mathcal{A} := (B, C) \circ u: (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O} \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}(1)$$

и двойственный к нему морфизм продолжают до точной слева и справа последовательности

$$0 \rightarrow (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\mathcal{A}} H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\mathcal{A}^\vee \circ B^{-1}} (H_{m+1} \oplus H_m)^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow 0. \quad (6.7)$$

Далее, по определению имеем $\mathcal{A}^\vee \circ B^{-1} \circ \mathcal{A} = u^\vee \circ \mathcal{A} \circ u$, где A – матрица

$$\begin{pmatrix} B & C \\ -C^\vee & -C^\vee \circ B^{-1} \circ C \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (i) из (6.1) выполнено, в силу разложения в прямую сумму (4.8) матрицу A можно рассматривать как элемент из $\mathbf{S}_{2m+1}$. Следовательно, $u^\vee \circ \mathcal{A} \circ u = 0$, т. е. (6.7) является монадой. Покажем, что ее когомологический пучок

$$E(B, C) := \ker(\mathcal{A}^\vee \circ B^{-1}) / \text{Im } \mathcal{A}$$

²Здесь мы отождествляем тройку $(B, C, C^\vee \circ B^{-1} \circ C)$ с точкой в $S^2 H_{2m+1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$ посредством разложения (4.8).

есть $(2m+1)$ -инстантон, что даст искомое вложение $g(X_m) \subset (MI_{2m+1}(\xi))_{\text{red}}$. Для этого рассмотрим диаграмму (4.17), в которой мы обозначим $B \circ \alpha_{\xi, A}$ через $\mathcal{A}$, положим $\mathcal{G} := \text{sokeg } \mathcal{A}$ и заменим обозначения для $\tau_{\xi, A}$ и $\varepsilon_{\xi, A}$ соответственно на $\tau_{B, C}$ и $\varepsilon_{B, C}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 0 \longrightarrow & (H_{m+1} \oplus H_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\text{can}} & \mathcal{G} & \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow i_{m+1} & & \parallel & & \uparrow \varepsilon_{B, C} & \\
 0 \longrightarrow & H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{B \circ u} & H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{v \circ B^{-1}} & H_{m+1} \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \uparrow \tau_{B, C} & \\
 & & & & & H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) &
 \end{array} \tag{6.8}$$

В этих обозначениях диаграмма (5.7) становится дисплеем антиавтотдуальной монады

$$0 \rightarrow H_{m+1} \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{B \circ u} H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{u^\vee} H_{m+1}^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow 0 \tag{6.9}$$

с симплектическим когомологическим расслоением $E_{2m+2}(B)$:

$$E_{2m+2}(B) = \ker(u^\vee) / \text{Im}(B \circ u). \tag{6.10}$$

Более того, как и в (5.9), (5.10), имеем морфизм подрасслоения

$$\rho_{B, C}: H_m \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow E_{2m+2}(B) \tag{6.11}$$

такой, что

$$\tau_{B, C} = e^\vee \circ \theta \circ \rho_{B, C}, \tag{6.12}$$

где $\theta: E_{2m+2}(B) \xrightarrow{\simeq} E_{2m+2}(B)$ – симплектическая структура на $E_{2m+2}(B)$. Кроме того, как и в (5.8), имеем

$$h^0(E_{2m+2}(B)) = h^i(E_{2m+2}(B)(-2)) = 0, \quad i \geq 0. \tag{6.13}$$

Далее, по антиавтотдуальным монадам (6.7) и (6.9) восстанавливается антиавтотдуальная монада (5.12), которая в силу (6.5) становится монадой

$$0 \rightarrow H_m \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\rho_{B, C}} E_{2m+2}(B) \xrightarrow{\rho_{B, C}^\vee \circ \theta} H_m^\vee \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow 0 \tag{6.14}$$

с когомологическим пучком

$$E(B, C) = \ker(\rho_{B, C}^\vee \circ \theta) / \text{Im}(\rho_{B, C}). \tag{6.15}$$

Теперь из (6.13) и (6.14) имеем $h^0(E(B, C)) = h^i(E(B, C)(-2)) = 0$, $i \geq 0$, т. е. $E(B, C)$ является $(2m+1)$ -инстантоном.

Таким образом, $\text{im } g_m \subset I_{2m+1}(\xi)$. Равенство $f_m \circ g_m = \text{id}$ прямо следует из соотношений (6.2) и (6.3).

§ 7. Схема Z_m . Редукция неприводимости X_m к неприводимости Z_m . Доказательство основной теоремы

7.1. Схема $\widehat{Z}_m$ и ее открытое подмножество Z_m . В этом пункте мы введем новое множество Z_m , задаваемое как локально замкнутое подмножество векторного пространства (см. (7.5)), и снабдим его естественной схемной структурой. Затем мы сформулируем теорему 7.2 о неприводимости Z_m . Эта теорема играет ключевую роль в доказательстве неприводимости I_{2m+1} , которое мы дадим в п. 7.2. Доказательство теоремы 7.2 будет начато в § 8, а закончено в § 11.

Положим

$$\mathbf{A}_m := \wedge^2 H_m^\vee \otimes S^2 V^\vee, \quad \Phi_m := \text{Hom}(H_m, H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee), \quad (7.1)$$

$$(\mathbf{S}_m^\vee)^0 := \{D \in \mathbf{S}_m^\vee \mid \text{гомоморфизм } D: H_m^\vee \otimes V^\vee \rightarrow H_m \otimes V \text{ обратим}\}. \quad (7.2)$$

Заметим, что $(\mathbf{S}_m^\vee)^0$ – открытое плотное подмножество в $\mathbf{S}_m^\vee$ и существует канонический изоморфизм

$$\mathbf{S}_m^0 \xrightarrow{\sim} (\mathbf{S}_m^\vee)^0, \quad A \mapsto A^{-1}. \quad (7.3)$$

Рассмотрим множества

$$\widehat{Z}_m := \left\{ (D, \varphi) \in \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m \mid \begin{array}{l} \Theta(D, \varphi) := \varphi^\vee \circ D \circ \varphi: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee \\ \text{удовлетворяет условию } \Theta(D, \varphi) \in \mathbf{S}_m \end{array} \right\}, \quad (7.4)$$

$$Z_m := \widehat{Z}_m \cap (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m \quad (7.5)$$

(здесь мы понимаем точку $D \in \mathbf{S}_m^\vee$ как гомоморфизм $H_m^\vee \otimes V^\vee \rightarrow H_m \otimes V$), и пусть $\overline{Z}_m$ – замыкание Z_m в $\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$. По определению Z_m является открытым подмножеством в $\widehat{Z}_m$ и, соответственно, открытым плотным подмножеством в $\overline{Z}_m$.

Заметим, что имеется стандартное разложение

$$\wedge^2(H_m^\vee \otimes V^\vee) = \mathbf{S}_m \oplus \mathbf{A}_m$$

с индуцированной проекцией на второе прямое слагаемое

$$q_m: \wedge^2(H_m^\vee \otimes V^\vee) \rightarrow \mathbf{A}_m \quad (7.6)$$

и морфизмом

$$h: \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m \rightarrow \mathbf{A}_m, \quad (D, \varphi) \mapsto q_m(\Theta(D, \varphi)).$$

По определению $\widehat{Z}_m$ имеем

$$\widehat{Z}_m = h^{-1}(0). \quad (7.7)$$

Ясно, что точка $(0, 0)$ лежит в $\widehat{Z}_m$, т. е. $\widehat{Z}_m$ непусто.

Примем следующее соглашение: мы снабжаем $\widehat{Z}_m$ схемной структурой слоя $h^{-1}(0)$ морфизма h . Соответственно, Z_m наследует структуру открытой подсхемы в $\widehat{Z}_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из (7.7) следует, что $\widehat{Z}_m$ можно рассматривать как схему нулей $(h^*s_{\text{taut}})_0$ сечения h^*s_{taut} тривиального векторного расслоения $\Lambda_m \otimes \mathcal{O}_{S_m \times \Phi_m}$, где s_{taut} – тавтологическое сечение тривиального векторного расслоения $\Lambda_m \otimes \mathcal{O}_{\Lambda_m}$ ранга $\dim \Lambda_m = 5m(m-1)$ над Λ_m . Отсюда получаем следующую оценку для размерности $\widehat{Z}_m$ в каждой точке $z \in \widehat{Z}_m$:

$$\begin{aligned} \dim_z \widehat{Z}_m &= \dim h^{-1}(0) \geq \dim(\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m) - \dim \Lambda_m \\ &= 3m(m+1) + 6m^2 - 5m(m-1) = 4m(m+2). \end{aligned} \quad (7.8)$$

В частности, если Z_m непусто, то

$$\dim_z Z_m \geq 4m(m+2), \quad z \in Z_m. \quad (7.9)$$

Далее мы воспользуемся следующим результатом о Z_m .

ТЕОРЕМА 7.2. (i) Множество Z_m является целой схемой и локально полным пересечением размерности $4m(m+2)$.

(ii) Естественный морфизм $p_m: Z_m \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, $(D, \varphi) \mapsto D$, сюръективен.

Мы начнем доказательство теоремы 7.2 в § 8 и закончим в § 11.

7.2. Доказательство основной теоремы. В этом пункте дается доказательство теоремы 1.1. Положим

$$\widetilde{X}_m := \{(D, C) \in (\mathbf{S}_{m+1}^\vee)^0 \times \Sigma_{m+1} \mid (C^\vee \circ D \circ C: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee) \in \mathbf{S}_m\}. \quad (7.10)$$

Множество $\widetilde{X}_m$ имеет естественную структуру замкнутой подсхемы в $(\mathbf{S}_{m+1}^\vee)^0 \times \Sigma_{m+1}$, определяемой уравнениями

$$C^\vee \circ D \circ C \in \mathbf{S}_m. \quad (7.11)$$

Поскольку условия (ii) и (iii) из (6.1) являются открытыми и X_m непусто (см. теорему 6.1), из (7.3) немедленно следует, что X_m есть непустое открытое подмножество в $(\widetilde{X}_m)_{\text{red}}$:

$$\emptyset \neq X_m \xrightarrow{\text{open}} (\widetilde{X}_m)_{\text{red}}. \quad (7.12)$$

Зафиксируем разложение в прямую сумму

$$H_{m+1} \xrightarrow{\sim} H_m \oplus \mathbf{k}.$$

При этом изоморфизме произвольный гомоморфизм

$$C \in \Sigma_{m+1} = \text{Hom}(H_m, H_{m+1}^\vee) \otimes \wedge^2 V^\vee, \quad C: H_m \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee, \quad (7.13)$$

можно представить как гомоморфизм

$$C: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee \oplus \mathbf{k}^\vee \otimes V^\vee, \quad (7.14)$$

т. е. как матрицу гомоморфизмов

$$C = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

где

$$\varphi \in \text{Hom}(H_m, H_m^\vee) \otimes \wedge^2 V^\vee = \Phi_m, \quad \psi \in \Psi_m := \text{Hom}(H_m, \mathbf{k}^\vee) \otimes \wedge^2 V^\vee. \quad (7.16)$$

Соответственно, произвольный гомоморфизм $D \in (\mathbf{S}_{m+1}^\vee)^0 \subset \mathbf{S}_{m+1}^\vee = S^2 H_{m+1} \otimes \wedge^2 V \subset \text{Hom}(H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee, H_{m+1} \otimes V)$ можно представить как матрицу гомоморфизмов

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \lambda \\ -\lambda^\vee & \mu \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &\in \mathbf{S}_m^\vee \subset \text{Hom}(H_m^\vee \otimes V^\vee, H_m \otimes V), \\ \lambda &\in \mathbf{L}_m := \text{Hom}(\mathbf{k}^\vee, H_m) \otimes \wedge^2 V, \quad \mu \in \mathbf{M}_m := \text{Hom}(\mathbf{k}^\vee, \mathbf{k}) \otimes \wedge^2 V. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Из (7.15) и (7.17) следует, что гомоморфизм

$$C^\vee \circ D \circ C: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee, \quad C^\vee \circ D \circ C \in \wedge^2(H_m^\vee \otimes V^\vee),$$

может быть представлен в виде

$$C^\vee \circ D \circ C = \varphi^\vee \circ D_1 \circ \varphi + \varphi^\vee \circ \lambda \circ \psi - \psi^\vee \circ \lambda^\vee \circ \varphi + \psi^\vee \circ \mu \circ \psi. \quad (7.19)$$

Теперь воспользуемся следующим предложением, доказательство которого вынесено в § 12.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть $m \geq 1$. Тогда для любой точки $D \in (\mathbf{S}_{m+1}^\vee)^0$ и общего выбора разложения $H_{m+1} \xrightarrow{\sim} H_m \oplus \mathbf{k}$ индуцированный гомоморфизм D_1 в матрице гомоморфизмов D из (7.17) невырожден.

Ввиду (7.15)–(7.18) мы имеем

$$\mathbf{S}_{m+1}^\vee \times \Sigma_{m+1} = \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m \times \Psi_m \times \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m.$$

Поэтому в соответствии с предложением 7.3 зафиксируем такое разложение $H_{m+1} \xrightarrow{\sim} H_m \oplus \mathbf{k}$, что $\tilde{X}'_m = \tilde{X}_m \cap (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m \times \Psi_m \times \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m$ – плотное открытое множество в $\tilde{X}_m$. Обозначим для простоты множества $\tilde{X}'_m$ и $\tilde{X}'_m \cap X_m$ соответственно через $\tilde{X}_m$ и X_m , и пусть $\overline{X}_m$ – замыкание X_m в $\tilde{X}_m$. Определены морфизмы

$$\begin{aligned} \tilde{p}_m: \tilde{X}_m &\rightarrow \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m, & (D_1, \varphi, \psi, \lambda, \mu) &\mapsto (\lambda, \mu), \\ p_m &:= \tilde{p}_m|_{\overline{X}_m}: \overline{X}_m &\rightarrow \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольная неприводимая компонента в X_m , и пусть $\overline{\mathcal{X}}$ – ее замыкание в $\overline{X}_m$. Зафиксируем точку $z = (D_1, \varphi, \psi, \lambda, \mu) \in \mathcal{X}$, не лежащую в компонентах множества X_m , отличных от $\mathcal{X}$. Рассмотрим морфизм

$$f: \mathbb{A}^1 \rightarrow \overline{\mathcal{X}}, \quad t \mapsto (D_1, t^2 \varphi, t \psi, t \lambda, t^2 \mu), \quad f(1) = z. \quad (7.20)$$

(Этот морфизм корректно определен ввиду (7.19).) По определению точка $f(0) = (D_1, 0, 0, 0, 0)$ лежит в слое $p_m^{-1}(0, 0)$. Следовательно, $p_m^{-1}(0, 0) \cap \overline{\mathcal{X}} \neq \emptyset$. Другими словами,

$$\rho^{-1}(0, 0) \neq \emptyset, \quad \text{где } \rho := p_m|_{\overline{\mathcal{X}}}. \quad (7.21)$$

Теперь из (7.19) и определения $\tilde{X}_m$ следует, что

$$\tilde{p}_m^{-1}(0, 0) = \{(D_1, \varphi, \psi) \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m \times \Psi_m \mid \varphi^\vee \circ D_1 \circ \varphi \in \mathbf{S}_m\}. \quad (7.22)$$

Сравнивая (7.22) с определением (7.5) множества Z_m , получаем равенство множеств $\tilde{p}_m^{-1}(0, 0) = Z_m \times \Psi_m$, так что

$$\rho^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{sets}}{\subset} p_m^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{sets}}{\subset} \tilde{p}_m^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{sets}}{=} Z_m \times \Psi_m. \quad (7.23)$$

Соответственно, имеем следующие вложения схем:

$$\rho^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{schemes}}{\subset} p_m^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{schemes}}{\subset} \tilde{p}_m^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{schemes}}{=} Z_m \times \Psi_m. \quad (7.24)$$

Из (7.23) и теоремы 7.2 вытекает, в частности, что

$$\dim \rho^{-1}(0, 0) \leq \dim p_m^{-1}(0, 0) \leq \dim Z_m + \dim \Psi_m = 4m(m+2) + 6m = 4m^2 + 14m. \quad (7.25)$$

Поэтому ввиду (7.21) имеем

$$\dim \bar{\mathcal{X}} \leq \dim \rho^{-1}(0, 0) + \dim \mathbf{L}_m + \dim \mathbf{M}_m \leq 4m^2 + 14m + 6m + 6 = 4m^2 + 20m + 6. \quad (7.26)$$

С другой стороны, из формулы (3.14) для $n = 2m + 1$, равенства (4.22) и теоремы 6.1, (ii) следует, что для любой точки $x \in \mathcal{X}$ такой, что $A := g_m(x) \in MI_{2m+1}(\xi)$, выполнено

$$4m^2 + 20m + 6 = (2m + 1)^2 + 8(2m + 1) - 3 \leq \dim_A MI_{2m+1}(\xi) = \dim \bar{\mathcal{X}}. \quad (7.27)$$

Сравнивая (7.26) с (7.27), мы видим, что все неравенства в (7.25)–(7.27) являются равенствами. В частности,

$$\dim \rho^{-1}(0, 0) = \dim(Z_m \times \Psi_m) = \dim \bar{\mathcal{X}} - \dim(\mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m). \quad (7.28)$$

Поскольку по теореме 7.2 схема Z_m является целой, а поэтому $Z_m \times \Psi_m$ – также целая схема, то (7.24) и (7.28) дают изоморфизмы целых схем

$$\rho^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{schemes}}{=} p_m^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{schemes}}{=} \tilde{p}_m^{-1}(0, 0) \stackrel{\text{schemes}}{=} Z_m \times \Psi_m. \quad (7.29)$$

Сформулируем теперь следующую лемму, доказательство которой мы не приводим.

ЛЕММА 7.4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – морфизм приведенных схем, где Y – гладкая целая схема. Предположим, что существует замкнутая точка $y \in Y$ такая, что для любой неприводимой компоненты X' схемы X выполнены следующие условия:

(a) $\dim f^{-1}(y) = \dim X' - \dim Y$;

(b) теоретико-схемное вложение слоев $(f|_{X'})^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$ является изоморфизмом целых схем.

Тогда:

(i) существует открытое подмножество U в Y , содержащее точку y и такое, что $f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$ – плоский доминантный морфизм;

(ii) X – целая схема;

(iii) X неособа в любой гладкой точке слоя $f^{-1}(y)$.

Применяя утверждения (i), (ii) леммы 7.4 к $X = X_m$, $X' = \mathcal{X}$, $Y = \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m$, $y = (0, 0)$, $f = p_m$ и используя (7.28) и (7.29), мы получаем, что X_m – целая схема размерности $4m^2 + 20m + 6$.

Теперь из следствия 4.7 и теоремы 6.1 вытекает, что $(MI_{2m+1})_{\text{red}}$ неприводимо и имеет размерность $4m^2 + 20m + 6 = n^2 + 8n - 3$ для $n = 2m + 1$, т. е. неравенство (3.14) становится строгим равенством. Это вместе с теоремой 3.1 показывает, что MI_{2m+1} – локально полное пересечение в векторном пространстве $\mathbf{S}_{2m+1}$. Воспользуемся теперь следующей простой леммой, доказательство которой здесь не приводится.

ЛЕММА 7.5. *Пусть $\mathcal{X}$ – неприводимая подсхема и локально полное пересечение в гладкой целой схеме $\mathcal{Y}$, притом гладкая в некоторой точке. Тогда $\mathcal{X}$ – целая схема.*

Применяя лемму 7.5 к $\mathcal{X} = MI_{2m+1}$, $\mathcal{Y} = \mathbf{S}_{2m+1}$ и используя замечание 3.2, мы получаем, что MI_{2m+1} – целая схема. Поскольку $\pi_{2m+1}: MI_{2m+1} \rightarrow I_{2m+1}$, $A \mapsto [E(A)]$, – главное $(\text{GL}(H_{2m+1})/\{\pm \text{id}\})$ -расслоение в этальной топологии (см. § 3), отсюда следует, что I_{2m+1} – целая схема размерности $16m + 5 = 8n - 3$ для $n = 2m + 1$. Этим завершается доказательство теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Рассмотрим естественные проекции $p_1: X_m \rightarrow \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m \times \Psi_m$, $p_2: X_m \rightarrow \mathbf{S}_m \times \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m \times \Psi_m \simeq \mathbf{S}_{m+1} \times \Psi_m$ и $p: X_m \xrightarrow{p_2} \mathbf{S}_{m+1} \times \Psi_m \xrightarrow{\text{pf}_1} \mathbf{S}_{m+1}$. Из (7.29) вытекает, что $p_1^{-1}(0, 0, 0) \simeq Z_m$. С другой стороны, теорема 7.2 показывает, что проекция $p': Z_m \xrightarrow{p_m} (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \simeq \mathbf{S}_m^0 \xrightarrow{\text{open}} \mathbf{S}_m$ доминантна, поэтому для общей точки $D_1 \in \mathbf{S}_m$ слой $(p')^{-1}(D_1)$ является целой схемой размерности $\dim Z_m - \dim \mathbf{S}_m = m(m + 5)$. Этот слой ввиду равенства $p_1^{-1}(0, 0, 0) \simeq Z_m$ совпадает со слоем $p_2^{-1}(D_1, 0, 0, 0)$, и мы, таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \dim p_2^{-1}(D_1, 0, 0, 0) &= 5m(m + 1) = 4m^2 + 20m + 6 - \left(\frac{3}{2}(m + 1)(m + 2) + 6m \right) \\ &= \dim X_m - \dim(\mathbf{S}_m \times \Psi_m). \end{aligned}$$

Поэтому, применяя лемму 7.4 к $X = X' = X_m$, $Y = \mathbf{L}_m \times \mathbf{M}_m$, $y = (D_1, 0, 0, 0)$, $f = p_2$, получаем, что p_2 – доминантный морфизм. Тем самым,

$$p: X_m \rightarrow \mathbf{S}_{m+1}, \quad (D, \varphi) \mapsto D,$$

– доминантный морфизм.

§ 8. Изучение множества Z_m . Начало доказательства теоремы 7.2

В этом параграфе мы начинаем доказательство теоремы 7.2 о неприводимости Z_m . В п. 8.1 мы рассмотрим сначала случай $m = 1$. Затем получим явные уравнения для Z_m при фиксированном разложении пространства H_m в прямую сумму подпространств H_{m-1} и $\mathbf{k}$. В п. 8.2 формулируется основной результат этого параграфа – предложение 8.1, являющееся частью шага индукции в доказательстве теоремы 7.2. (Оставшаяся часть доказательства теоремы 7.2 будет дана в последнем пункте § 11.) В пп. 8.3–8.5 подробно исследуются явные уравнения для Z_m , и, как результат, мы получаем доказательство предложения 8.1.

8.1. Явные уравнения схемы Z_m в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$. Перейдем к доказательству неприводимости Z_m посредством возрастающей индукции по m . Для

$m = 1$, очевидно, $\Lambda_m = 0$, так что уравнения $\{\Theta_1(D_1, \varphi_1) \in \mathbf{S}_1\}$ схемы Z_1 в $(\wedge^2(\mathbf{k}^\vee \otimes V^\vee))^0$ являются пустыми, т. е. схемно-теоретически мы имеем

$$Z_1 = (\wedge^2(\mathbf{k}^\vee \otimes V^\vee))^0 \times \Phi_1 \xrightarrow{\text{open}} \mathbb{A}^{12}.$$

Таким образом, Z_1 как плотное открытое подмножество в $\mathbb{A}^{12}$ является целой схемой.

Теперь фиксируем изоморфизм

$$H_{m-1} \oplus \mathbf{k} \xrightarrow{\sim} H_m, \quad ((a_1, \dots, a_{m-1}), a_m) \mapsto (a_1, \dots, a_m). \quad (8.1)$$

При этом изоморфизме любой гомоморфизм

$$\varphi: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee, \quad \varphi \in \Phi_m = \text{Hom}(H_m, H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee), \quad (8.2)$$

может рассматриваться как гомоморфизм

$$\varphi: H_{m-1} \otimes V \oplus \mathbf{k} \otimes V \rightarrow H_{m-1}^\vee \otimes V^\vee \oplus \mathbf{k}^\vee \otimes V^\vee, \quad (8.3)$$

т. е. как матрица гомоморфизмов

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{m-1} & \chi \\ \psi & \theta \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{m-1} &\in \Phi_{m-1} = \text{Hom}(H_{m-1}, H_{m-1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee), \\ \psi &\in \Psi_{m-1} := \text{Hom}(H_{m-1}, \mathbf{k}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee), \\ \chi &\in \text{Hom}(\mathbf{k}, H_{m-1}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee) = \Psi_{m-1}, \quad \theta \in \mathbf{B}_\theta := \text{Hom}(\mathbf{k}, \mathbf{k}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee) = \mathbf{S}_1. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Соответственно, гомоморфизм

$$D \in \mathbf{S}_m^\vee \subset \text{Hom}(H_m^\vee \otimes V^\vee, H_m \otimes V) \quad (8.6)$$

может быть представлен как матрица гомоморфизмов

$$D = \begin{pmatrix} D_{m-1} & a \\ -a^\vee & \alpha \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

где

$$\begin{aligned} D_{m-1} &\in \mathbf{S}_{m-1}^\vee \subset \text{Hom}(H_{m-1}^\vee \otimes V^\vee, H_{m-1} \otimes V), \\ a &\in \text{Hom}(\mathbf{k}^\vee, H_{m-1} \otimes \wedge^2 V) = \Psi_{m-1}^\vee, \quad \alpha \in \mathbf{B}_\alpha := \text{Hom}(\mathbf{k}^\vee, \mathbf{k} \otimes \wedge^2 V). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Заметим, что из формул (8.5)–(8.8) вытекают изоморфизмы

$$\mathbf{S}_m^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee, \quad \Phi_m \xrightarrow{\sim} \Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \mathbf{B}_\theta, \quad (8.9)$$

а следовательно, изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m &\xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee \times \Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1}, \\ (D, \varphi) &\mapsto (\theta, \alpha, a, D_{m-1}, \varphi_{m-1}, \psi, \chi). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Из (8.4) и (8.7) следует, что гомоморфизм

$$\Theta(D, \varphi) := \varphi^\vee \circ D \circ \varphi: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee, \quad \Theta(D, \varphi) \in \wedge^2(H_m^\vee \otimes V^\vee),$$

может быть представлен матрицей гомоморфизмов

$$\Theta(D, \varphi) = \begin{pmatrix} \Theta_1(D, \varphi) & b(D, \varphi) \\ -b(D, \varphi)^\vee & \beta(D, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_1(D, \varphi) &:= \varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \varphi_{m-1} + \varphi_{m-1}^\vee \circ a \circ \psi - \psi^\vee \circ a^\vee \circ \varphi_{m-1} + \psi^\vee \circ \alpha \circ \psi \\ &\in \wedge^2(H_{m-1}^\vee \otimes V^\vee) \subset \text{Hom}(H_{m-1}^\vee \otimes V^\vee, H_{m-1} \otimes V), \\ b(D, \varphi) &:= \varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \chi + \varphi_{m-1}^\vee \circ a \circ \theta - \psi^\vee \circ a^\vee \circ \chi + \psi^\vee \circ \alpha \circ \theta \\ &\in \text{Hom}(H_{m-1} \otimes V, \mathbf{k}^\vee \otimes V^\vee), \\ \beta(D, \varphi) &:= \chi^\vee \circ D_{m-1} \circ \chi + \chi^\vee \circ a \circ \theta - \theta^\vee \circ a^\vee \circ \chi + \theta^\vee \circ \alpha \circ \theta \in \mathbf{B}_\theta. \end{aligned} \quad (8.12)$$

В этих обозначениях Z_m описывается следующим образом:

$$Z_m = \left\{ (D, \varphi) \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m \left| \begin{array}{l} \text{(i)} \ \Theta_1(D, \varphi) \in \mathbf{S}_{m-1}; \\ \text{(ii)} \ b(D, \varphi) \in \Psi_{m-1} \end{array} \right. \right\}. \quad (8.13)$$

(Отметим, что условие $\beta(D, \varphi) \in \mathbf{S}_1$ здесь является пустым.)

Таким образом, имеем следующие явные уравнения для Z_m в открытом подмножестве $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$ многообразия $\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$, где $\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$ ввиду (8.10) рассматривается как прямое произведение $\mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee \times \Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1}$:

$$\begin{aligned} \Theta_1(D, \varphi) &:= \varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \varphi_{m-1} + \varphi_{m-1}^\vee \circ a \circ \psi - \psi^\vee \circ a^\vee \circ \varphi_{m-1} \\ &\quad + \psi^\vee \circ \alpha \circ \psi \in \mathbf{S}_{m-1}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$b(D, \varphi) := \varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \chi + \varphi_{m-1}^\vee \circ a \circ \theta - \psi^\vee \circ a^\vee \circ \chi + \psi^\vee \circ \alpha \circ \theta \in \Psi_{m-1}. \quad (8.15)$$

Уравнения (8.14), (8.15) будут систематически использоваться в следующих пунктах.

8.2. Часть шага индукции в доказательстве теоремы 7.2. Сначала введем еще несколько обозначений. Положим

$$\begin{aligned} (\wedge^2 V)^0 &:= \{a \in \wedge^2 V \mid a: V^\vee \rightarrow V \text{ является изоморфизмом}\}, \\ (\wedge^2 V^\vee)^0 &:= \{a \in \wedge^2 V^\vee \mid a: V \rightarrow V^\vee \text{ является изоморфизмом}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим проективное пространство $P(\wedge^2 V^\vee)$ и грассманиан $G = G(1, 3) \subset P(\wedge^2 V^\vee)$, вложенный по П्लюккеру, а также две произвольные точки $a \in (\wedge^2 V)^0$ и $b \in (\wedge^2 V^\vee)^0$ такие, что соответствующие точки $\langle a^{-1} \rangle$ и $\langle b \rangle$ в $P(\wedge^2 V^\vee)$ различны. Проективная прямая $P^1(a, b) := \text{Span}(\langle a^{-1} \rangle, \langle b \rangle)$, соединяющая эти точки, пересекает квадрику G в двух точках, скажем y_1, y_2 , не обязательно различных, и пусть $\mathbb{P}_{(i)}^1(a, b)$, $i = 1, 2$, — прямые в $\mathbb{P}^3$, соответствующие точкам y_1, y_2 . Если точки y_1 и y_2 различны, то прямые $\mathbb{P}_{(1)}^1(a, b)$ и $\mathbb{P}_{(2)}^1(a, b)$ не пересекаются; полагаем

$$L(a, b) := \mathbb{P}_{(1)}^1(a, b) \sqcup \mathbb{P}_{(2)}^1(a, b). \quad (8.16)$$

Заметим, что имеются естественные изоморфизмы $\mathbf{S}_1^\vee \simeq \wedge^2 V$ и $\Phi_1^\vee \simeq \wedge^2 V^\vee$ и для любого $m \geq 2$ индуцированные изоморфизмы

$$U_{\mathbf{S}} := \bigoplus_{i=1}^m (\mathbf{S}_1^\vee)_{(i)} \simeq \bigoplus_1^m \wedge^2 V, \quad U_{\Phi} := \bigoplus_{i=1}^m (\Phi_1^\vee)_{(i)} \simeq \bigoplus_1^m \wedge^2 V^\vee, \quad (8.17)$$

где $(\mathbf{S}_1^\vee)_{(i)}$ и $(\Phi_1)_{(i)}$ – копии $\mathbf{S}_1^\vee$ и Φ_1 соответственно. Далее, всякий изоморфизм

$$h: \underbrace{H_1 \oplus \cdots \oplus H_1}_m \xrightarrow{\sim} H_m \quad (8.18)$$

индуцирует вложения $U_{\mathbf{S}} \hookrightarrow \mathbf{S}_m^\vee$ и $U_{\Phi} \hookrightarrow \Phi_m$, а значит, вложение

$$\tau_h: U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi} \hookrightarrow \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m. \quad (8.19)$$

Отметим также, что множество

$$W_{\mathbf{S}\Phi} := \left\{ ((D_{(1)}, \dots, D_{(m)}), (\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(m)})) \in U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi} \mid \begin{array}{l} \text{множества} \\ L(D_{(i)}, \varphi_{(i)}) \text{ в } \mathbb{P}^3, \ 1 \leq i \leq m, \text{ корректно определены,} \\ \text{попарно не пересекаются и не лежат на квадрике} \end{array} \right\} \quad (8.20)$$

является, очевидно, открытым подмножеством в $U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi}$.

Наша цель в остальной части этого параграфа состоит в доказательстве следующего предложения, которое является частью шага индукции $m-1 \rightsquigarrow m$ в доказательстве теоремы 7.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть $m \geq 2$ и Z_{m-1} удовлетворяет заключению теоремы 7.2. Тогда существует неприводимая компонента Z в Z_m такая, что справедливы следующие утверждения:

- (i) если $Z_m = Z \cup Y$ – разложение Z_m на компоненты, то $Z^0 := Z \setminus (Z \cap Y)$ – целая подсхема и локально полное пересечение в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$;
- (ii) $\dim Z = 4m(m+2)$ и доминантна естественная проекция $p_m|_Z: Z \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, $(D, \varphi) \mapsto D$;
- (iii) существует изоморфизм h , определенный в (8.18), такой, что в обозначениях (8.19) и (8.20) имеем $Z \cap \tau_h(W_{\mathbf{S}\Phi}) \neq \emptyset$.

Перед тем как перейти к доказательству предложения 8.1, сделаем несколько предварительных замечаний.

Сначала рассмотрим случай $m = 2$. В этом случае $D_{m-1} = D_1 \in \wedge^2 V$, $\varphi_{m-1} = \varphi_1 \in \wedge^2 V^\vee$ и $a, \alpha \in \wedge^2 V$, $\psi, \chi, \theta \in \wedge^2 V^\vee$, так что уравнения (8.14) становятся пустыми, а уравнения (8.15) принимают вид

$$(\varphi_1 \circ D_1 - \psi_1 \circ a) \circ \chi - (\varphi_1 \circ a - \psi_1 \circ \alpha) \circ \theta \in \wedge^2 V^\vee. \quad (8.21)$$

Для общей точки $x = (D_1, \varphi_1, \psi, a, \alpha) \in (\wedge^2 V)^0 \times (\wedge^2 V^\vee)^{\times 4}$ система линейных уравнений (8.21) относительно пары $(\chi, \theta) \in (\wedge^2 V^\vee)^{\times 2}$ имеет максимальный ранг, равный 10. Таким образом, пространство F_x решений этой системы как подпространство в $(\wedge^2 V^\vee)^{\times 2}$ имеет размерность 2. Это означает, что существует компонента Z в Z_2 с проекцией $p_Z: Z \rightarrow (\wedge^2 V)^0 \times (\wedge^2 V^\vee)^{\times 4}$, $(D_1, \varphi_1, \psi, a, \alpha, \chi, \theta) \mapsto (D_1, \varphi_1, \psi, a, \alpha)$, и гладким слоем $F_x = p_Z^{-1}(x)$ размерности 2. Поэтому $\dim Z \leq \dim((\wedge^2 V)^0 \times (\wedge^2 V^\vee)^{\times 4}) + 2 = 32$. С другой стороны, поскольку (8.21) – система из 10 уравнений для Z_2 в $(\mathbf{S}_2^\vee)^0 \times \Phi_2$, отсюда следует, что Z как неприводимая компонента в Z_2 имеет размерность $\geq \dim((\mathbf{S}_2^\vee)^0 \times \Phi_2) - 10 = 42 - 10 = 32$. Следовательно, $\dim Z = 32$, и проекция p_Z доминантна. Как следствие, проекция $p_2|_Z: Z \rightarrow (\mathbf{S}_2^\vee)^0$, $(D_1, \varphi_1, \psi, a, \alpha, \chi, \theta) \mapsto (D_1, a, \alpha)$, также доминантна. Кроме того, пусть Z^0 – дополнение в Z к пересечению Z с объединением остальных компонент в Z_2 . Поскольку слой F_x

является гладким и $p_Z(Z)$ также гладко, будучи плотным открытым подмножеством в $(\wedge^2 V)^0 \times (\wedge^2 V^\vee)^{\times 4}$, то Z^0 как открытая подсхема в Z_2 приведена в общей точке.

Теперь воспользуемся следующим замечанием.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Пусть $\tilde{\mathcal{X}}$ – локально замкнутая подсхема аффинного пространства $\mathbb{A}^M$, локально определяемая N уравнениями. Пусть $\mathcal{X}$ – неприводимая компонента в $\tilde{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{X}^0$ – дополнение в $\mathcal{X}$ к его пересечению с объединением остальных компонент в $\tilde{\mathcal{X}}$. Пусть $\mathcal{X}^0$ приведена в общей точке как открытая подсхема в $\tilde{\mathcal{X}}$, и пусть $\dim \mathcal{X} = M - N$. Тогда $\mathcal{X}^0$ – целая подсхема и локально полное пересечение в $\mathbb{A}^M$.

Применяя замечание 8.2 к случаю $\tilde{\mathcal{X}} = Z_2$, $\mathcal{X} = Z$, $M = 42$, $N = 10$, $\mathbb{A}^{42} = (\wedge^2 V)^0 \times (\wedge^2 V^\vee)^{\times 6}$, получаем из изложенного выше, что утверждения (i), (ii) предложения 8.1 выполнены для Z . Наконец, прямым вычислением можно показать, что утверждение (iii) этого предложения также верно для Z . Таким образом, предложение 8.1 доказано для $m = 2$.

Перейдем теперь к доказательству предложения 8.1 при $m \geq 3$. Для этого заметим, что по предположению Z_{m-1} – целая подсхема в $(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0 \times \Phi_{m-1}$ такая, что

$$\dim Z_{m-1} = 4(m^2 - 1)$$

и естественная проекция $p_{m-1}: Z_{m-1} \rightarrow (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$, $(D_{m-1}, \varphi_{m-1}) \mapsto D_{m-1}$, сюръективна:

$$p_{m-1}(Z_{m-1}) = (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0. \quad (8.22)$$

Поэтому, так как $\dim(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0 = 3m(m-1)$ и, значит, $\dim Z_{m-1} - \dim(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0 = (m-1)(m+4)$, множество

$$(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^{\text{int}} := \{D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0 \mid \text{слой } p_m^{-1}(D_{m-1}) \text{ – целая схема размерности } (m-1)(m+4)\} \quad (8.23)$$

является плотным открытым подмножеством в $(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$; соответственно,

$$Z_{m-1}^{\text{int}} := p_{m-1}^{-1}((\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^{\text{int}}) \quad (8.24)$$

– плотное открытое подмножество в Z_{m-1} .

Далее, используя (8.10) и вложение $Z_m \hookrightarrow \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$, рассмотрим проекции

$$\begin{aligned} \text{pr}_m: \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m &\rightarrow \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee, \\ \text{pr}_m: (D, \varphi) = (\theta, \alpha, a, D_{m-1}, \varphi_{m-1}, \psi, \chi) &\mapsto (\theta, \alpha, a, D_{m-1}), \\ \pi_m := \text{pr}_m|_{Z_m}: Z_m &\rightarrow \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Теперь рассмотрим слой $\pi_m^{-1}(y^0)$ проекции π_m над точкой

$$y^0 := (\theta^0, \alpha^0, 0, D_{m-1}) \in \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0, \quad (8.26)$$

где ³

$$\alpha^0 = (p_{ij}) \in \wedge^2 V^\vee \simeq \mathbf{B}_\alpha, \quad \theta^0 = (q_{ij}) \in \wedge^2 V^\vee \simeq \mathbf{B}_\theta, \quad p_{ij}, q_{ij} \in \mathbf{k}. \quad (8.27)$$

³Здесь и далее мы используем фиксированный базис $e_1, \dots, e_4$ в V , чтобы интерпретировать точки из $\wedge^2 V$ и $\wedge^2 V^\vee$ как кососимметрические (4×4) -матрицы.

Заметим, что по определению проекции π_m слой $\pi_m^{-1}(y^0)$ естественным образом лежит в $\Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1}$:

$$\pi_m^{-1}(y^0) \subset \Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1}. \quad (8.28)$$

Таким образом, подставляя (8.26) в (8.14) и (8.15), мы получаем уравнения слоя $\pi_m^{-1}(y^0)$ как подсхемы в $\Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1}$, рассматриваемые как уравнения для переменных φ_{m-1} , χ и ψ :

$$\varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \varphi_{m-1} + \psi^\vee \circ \alpha^0 \circ \psi \in \mathbf{S}_{m-1}, \quad (8.29)$$

$$\varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \chi + \psi^\vee \circ \alpha^0 \circ \theta^0 \in \Psi_{m-1}. \quad (8.30)$$

Для произвольной точки y^0 в (8.26), где $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$, рассмотрим множество

$$F(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}) := \pi_m^{-1}(y^0) \cap \{\chi = \psi = 0\}. \quad (8.31)$$

Из (8.29) следует, что

$$F(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}) \simeq \{\varphi_{m-1} \in \Phi_{m-1} \mid \varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \varphi_{m-1} \in \mathbf{S}_{m-1}\}. \quad (8.32)$$

Следовательно,

$$\bigcup_{D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0} F(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}) = \{(\theta^0, \alpha^0)\} \times Z_{m-1}.$$

Более того, из определения (8.23) вытекает, что для $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^{\text{int}}$ множество $F(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1})$ неприводимо и имеет размерность $(m-1)(m+4)$, и в силу (8.10), (8.24) и (8.31) имеем

$$\bigcup_{D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^{\text{int}}} F(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}) = \{(\theta^0, \alpha^0, 0)\} \times Z_{m-1}^{\text{int}} \times \{(0, 0)\}. \quad (8.33)$$

8.3. Доказательство предложения 8.1: случай нечетного m , начальные вычисления. В этом пункте мы доказываем предложение 8.1 для случая нечетного m , $m = 2p + 1$, $p \geq 1$.

Фиксируем разложения

$$H_{m-1} \simeq \underbrace{H_2 \oplus \cdots \oplus H_2}_p, \quad H_2 \simeq H_1 \oplus H_1. \quad (8.34)$$

При этих разложениях рассмотрим точки $D_{m-1}^\Delta \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$ и $\varphi_{m-1}^\Delta \in \Phi_{m-1}$, задаваемые матрицами⁴

$$D_{m-1}^\Delta := \underbrace{D_2 \oplus \cdots \oplus D_2}_p, \quad \varphi_{m-1}^\Delta = \varphi_{m-1}^\Delta(N, a, d, f, g) := \underbrace{\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \varphi_2}_p, \quad (8.35)$$

где

$$D_2 = D' \oplus D'' \in \mathbf{S}_2^\vee, \quad (8.36)$$

$$D' = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \wedge^2 V, \quad D'' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ -1 & & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \wedge^2 V;$$

⁴Здесь и всюду далее пустые клетки в матрицах означают нули. Кроме того, мы пользуемся стандартным обозначением $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ для прямой суммы A матриц $A_1, \dots, A_n$, которая по определению есть блочная матрица с диагональными блоками $A_1, \dots, A_n$ и нулевыми остальными блоками.

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \in \Phi_2, \\ \varphi_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & & N & \\ & -N & & \end{pmatrix}, \quad \varphi_{22} = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ -1 & & & N \\ & -N & & \end{pmatrix}, \quad N \in \mathbf{k}, \quad (8.37) \\ \varphi_{12} &= \begin{pmatrix} & & f \\ -f & -g & g \end{pmatrix}, \quad \varphi_{21} = \begin{pmatrix} & a & f \\ -a & g & -g \\ -f & -d & d \end{pmatrix} \in \wedge^2 V^\vee, \quad a, d, f, g \in \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$(\varphi_{m-1}^\Delta)^\vee \circ D_{m-1}^\Delta \circ \varphi_{m-1}^\Delta \in \mathbf{S}_{m-1}, \quad (8.38)$$

так что точка $(D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta) \in \mathbf{S}_{m-1}^\vee \times \Phi_{m-1}$ лежит в $\hat{Z}_{m-1}$. Более того, поскольку $D_{m-1}^\Delta \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$, имеем

$$(D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta) \in Z_{m-1}. \quad (8.39)$$

Кроме того, из (8.38) следует, что уравнения (8.29) выполняются для любого $\psi \in \Psi_{m-1}$. Теперь, подставляя данные $(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta)$ в (8.30), мы получаем уравнения для переменных χ, ψ :

$$(\varphi_{m-1}^\Delta)^\vee \circ D_{m-1}^\Delta \circ \chi + \psi^\vee \circ \alpha^0 \circ \theta^0 \in \Psi_{m-1}. \quad (8.40)$$

Положим

$$W(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta) := \{(\chi, \psi) \in \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \mid (\chi, \psi) \text{ удовлетворяет (8.40)}\}. \quad (8.41)$$

Заметим, что, поскольку уравнения (8.40) для χ, ψ линейны, $W(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta)$ является линейным подпространством векторного пространства $\Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \simeq \Psi_{m-1}^\vee \oplus \Psi_{m-1}$.

Найдем размерность векторного пространства $W(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta)$. Для этого, используя разложения (8.34), представим χ и ψ как наборы

$$\chi = (\chi_1, \dots, \chi_p), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_p), \quad \psi_k, \chi_k \in \Psi_2, \quad k = 1, \dots, p, \quad (8.42)$$

где

$$\chi_k = (X_k, Y_k), \quad \psi_k = (A_k, B_k), \quad X_k, Y_k, A_k, B_k \in \wedge^2 V^\vee, \quad (8.43)$$

при этом

$$X_k = (x_{ij}^{(k)}), \quad Y_k = (y_{ij}^{(k)}), \quad A_k = (a_{ij}^{(k)}), \quad B_k = (b_{ij}^{(k)}) \quad (8.44)$$

– кососимметрические (4×4) -матрицы. Подставляя D_{m-1}^Δ и φ_{m-1}^Δ из формулы (8.35) в систему уравнений (8.40), перепишем эту систему в виде

$$\varphi_2^\vee \circ D_2 \circ \chi_k + \psi_k^\vee \circ \alpha^0 \circ \theta^0 \in \Psi_2, \quad k = 1, \dots, p. \quad (8.45)$$

Подставляя D_2, φ_2 и θ^0 из (8.36), (8.37) и (8.27) в систему (8.45) и обозначая

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= x_{12}^{(k)}, & x_2^{(k)} &= x_{34}^{(k)}, & x_3^{(k)} &= x_{13}^{(k)}, & x_4^{(k)} &= x_{14}^{(k)}, & x_5^{(k)} &= x_{23}^{(k)}, & x_6^{(k)} &= x_{24}^{(k)}, \\ x_7^{(k)} &= y_{12}^{(k)}, & x_8^{(k)} &= y_{34}^{(k)}, & x_9^{(k)} &= y_{13}^{(k)}, & x_{10}^{(k)} &= y_{14}^{(k)}, & x_{11}^{(k)} &= y_{23}^{(k)}, & x_{12}^{(k)} &= y_{24}^{(k)}, \\ x_{13}^{(k)} &= a_{12}^{(k)}, & x_{14}^{(k)} &= a_{34}^{(k)}, & x_{15}^{(k)} &= a_{13}^{(k)}, & x_{16}^{(k)} &= a_{14}^{(k)}, & x_{17}^{(k)} &= a_{23}^{(k)}, & x_{18}^{(k)} &= a_{24}^{(k)}, \\ x_{19}^{(k)} &= b_{12}^{(k)}, & x_{20}^{(k)} &= b_{34}^{(k)}, & x_{21}^{(k)} &= b_{13}^{(k)}, & x_{22}^{(k)} &= b_{14}^{(k)}, & x_{23}^{(k)} &= b_{23}^{(k)}, & x_{24}^{(k)} &= b_{24}^{(k)},\end{aligned}$$

перепишем (8.45) в виде

$$\sum_{j=1}^{24} m_{ij} x_j^{(k)} = 0, \quad i = 1, \dots, 20, \quad k = 1, \dots, p, \quad (8.46)$$

где $\mathbf{M} := (m_{ij})$ – (20×24) -матрица с элементами, зависящими от $N, a, d, f, g, p_{ij}, q_{ij}$.

Теперь прямым вычислением матрицы $\mathbf{M} = (m_{ij})$ для

$$N = 101, \quad a = 4, \quad d = 6, \quad f = 2, \quad g = 5, \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} p_{12} = -9, \quad p_{13} = -2, \quad p_{14} = -4, \quad p_{23} = 6, \quad p_{24} = -3, \quad p_{34} = -7, \\ q_{12} = -4, \quad q_{13} = -4, \quad q_{14} = -2, \quad q_{23} = 3, \quad q_{24} = -7, \quad q_{34} = 8 \end{aligned} \quad (8.48)$$

получим, что $\mathbf{M}$ является левой верхней блочной подматрицей,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{1\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{2\psi} \end{pmatrix}, \quad (8.49)$$

блочной матрицы $\widetilde{\mathbf{M}}$, описанной ниже в (8.79)–(8.84). Из (8.49) и соотношений (8.80)–(8.84) явным вычислением получаем

$$\text{rk } \mathbf{M} = 20. \quad (8.50)$$

Следовательно, поскольку матрица системы (8.46) есть прямая сумма p экземпляров матрицы $\mathbf{M}$, находим, что ее ранг есть

$$p \text{ rk } \mathbf{M} = 20p = 10(m-1). \quad (8.51)$$

Далее, обозначим через φ_{m-1} , соответственно, α , θ матрицы, полученные подстановкой данных (8.47) в матрицу φ_{m-1}^Δ из (8.35) и, соответственно, данных (8.48) в матрицы α^0 и θ^0 из (8.27). Тогда, обозначая через $R(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta)$ ранг системы линейных уравнений (8.40) как функцию от $\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta$, перепишем (8.51) в виде

$$R(\theta, \alpha, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}) = 10(m-1). \quad (8.52)$$

Заметим, что $(D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}) \in Z_{m-1}$ в силу (8.39), и согласно (8.24) множество Z_{m-1}^{int} неприводимо и является плотным открытым подмножеством в Z_{m-1} . Кроме того, поскольку максимальное значение $R(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}, \varphi_{m-1})$ равно $10(m-1)$, условие $R(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}, \varphi_{m-1}) = 10(m-1)$, налагаемое на точку $(D_{m-1}, \varphi_{m-1}) \in Z_{m-1}$, является открытым. Поэтому из (8.52) вытекает следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3. Множество

$$(Z_{m-1}^{\text{int}})^0 := \{(D_{m-1}, \varphi_{m-1}) \in Z_{m-1}^{\text{int}} \mid R(\theta, \alpha, D_{m-1}, \varphi_{m-1}) = 10(m-1)\}$$

плотно и открыто в Z_{m-1}^{int} , а значит, и в Z_{m-1} . Ввиду (8.22) отсюда следует, что существует плотное открытое подмножество $(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*$ в $(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^{\text{int}}$ такое, что для $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*$ множество

$$F(\theta, \alpha, D_{m-1})^0 := F(\theta, \alpha, D_{m-1}) \cap (Z_{m-1}^{\text{int}})^0,$$

где $F(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1})$ определено в (8.31), является целой схемой размерности $(m-1)(m+4)$ и плотным открытым подмножеством в $F(\theta, \alpha, D_{m-1})$.

Теперь для $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*$ положим

$$\mathbf{F} := \pi_m^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, 0, D_{m-1}), \quad F = F(D_{m-1}) := F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, D_{m-1}) = \mathbf{F} \cap \{\chi = \psi = 0\}.$$

Из замечания 8.3 следует по аналогии с (8.33), что $\bigcup_{D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*} F(D_{m-1})$ открыто и плотно в $\{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})\} \times Z_{m-1}^{\text{int}} \times \{(0, 0)\}$, так что

$$\overline{\bigcup_{D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*} F(D_{m-1})} = \{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, 0)\} \times \widehat{Z}_{m-1} \times \{(0, 0)\}, \quad (8.53)$$

где замыкание берется в $\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$; здесь мы пользуемся изоморфизмом (8.10).

Рассмотрим произвольную точку $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*$. Ввиду замечания 8.3 множество $F = F(D_{m-1})$ является целой схемой размерности $(m-1)(m+4)$ и содержит плотное открытое подмножество F^0 такое, что для любой точки $w = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, D_{m-1}, \varphi'_{m-1}) \in F^0$ имеет место равенство

$$R(w) := R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, D_{m-1}, \varphi'_{m-1}) = 10(m-1).$$

Фиксируем такую точку $w \in F^0$, которая является гладкой на F . Перейдем к вычислению касательного пространства $T_w \mathbf{F}$.

Заметим, что в силу (8.28) мы рассматриваем схему $\mathbf{F}$, лежащую в $\Phi_{m-1} \times \Psi_{m-1} \times \Psi_{m-1}$. Поэтому уравнения касательного пространства $T_w \mathbf{F}$ получаются дифференцированием в точке w уравнений (8.29) и (8.30):

$$d\varphi_{m-1}^\vee|_{\varphi'_{m-1}} \circ D_{m-1} \circ \varphi_{m-1} + (\varphi'_{m-1})^\vee \circ D_{m-1} \circ d\varphi_{m-1}|_{\varphi'_{m-1}} \in \mathbf{S}_{m-1}, \quad (8.54)$$

$$(\varphi'_{m-1})^\vee \circ D_{m-1} \circ d\chi|_0 + d\psi|_0 \circ \alpha^0 \circ \theta^0 \in \Psi_{m-1}. \quad (8.55)$$

Уравнения (8.54) совпадают с уравнениями, полученными дифференцированием в точке w уравнений $\varphi_{m-1}^\vee \circ D_{m-1} \circ \varphi_{m-1} \in \mathbf{S}_{m-1}$, задающих F как подсхему в Φ_{m-1} . Поскольку w – гладкая точка схемы F^0 , уравнения (8.54) определяют касательное пространство $T_w F^0 = T_w F$ как подпространство в $T_{\varphi'_{m-1}} \Phi_{m-1}$ и

$$\dim T_w F = \dim F = (m-1)(m-4). \quad (8.56)$$

С другой стороны, уравнения (8.55) в точности совпадают с уравнениями (8.30) в результате отождествления $(\chi|_0, d\psi|_0)$ с (χ, ψ) , т.е. они являются уравнениями подпространства $W(w) = W(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, D_{m-1}, \varphi'_{m-1})$ в пространстве $\Psi_{m-1} \oplus \Psi_{m-1}$. Следовательно,

$$\dim W(w) = \dim(\Psi_{m-1} \oplus \Psi_{m-1}) - R(w) = 12(m-1) - 10(m-1) = 2(m-1).$$

Ввиду (8.56) имеем

$$\begin{aligned} \dim_w \mathbf{F} &\leq \dim T_w \mathbf{F} = \dim T_w F + \dim W(w) \\ &= (m-1)(m+4) + 2(m-1) = m^2 + 5m - 6. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Отметим, что поскольку $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$ и $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{S}_1^0$ (см. (8.27)), то $D = D_{m-1} \oplus \boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, так что

$$w \in Z_m. \quad (8.58)$$

Кроме того, $\dim(\mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee) = \dim(\mathbf{B}_\theta \times \mathbf{S}_m^\vee) = 6 + 3m(m+1) = 3m^2 + 3m + 6$. Вычисляя размерность слоев проекции $\pi_m: Z_m \rightarrow \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{B}_\alpha \times \Psi_{m-1}^\vee \times \mathbf{S}_{m-1}^\vee \simeq \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{S}_m^\vee$ и пользуясь (8.57), получаем

$$\dim_w Z_m \leq \dim_w \mathbf{F} + \dim(\mathbf{B}_\theta \times \mathbf{S}_m^\vee) \leq (m^2 + 5m - 6) + (3m^2 + 3m + 6) = 4m(m+2).$$

Сравнивая это с (7.9), мы видим, что последние неравенства для размерностей являются строгими равенствами. В частности, $\dim_w Z_m = 4m(m+2)$, $\dim_w \mathbf{F} = \dim T_w \mathbf{F} = m^2 + 5m - 6$ и $\dim \pi_m(Z_m) = (3m^2 + 3m + 6) = \dim(\mathbf{B}_\theta \times \mathbf{S}_m^\vee)$. Это вместе с утверждением (iii) леммы 7.4 показывает, что существует единственная неприводимая компонента, скажем, Z схемы Z_m , проходящая через w и такая, что:

(i) $\dim Z = 4m(m+2)$ и схемы Z_m и Z неособы в точке w ; следовательно, в обозначениях предложения 8.1, (i) схема Z^0 есть целая подсхема и локально полное пересечение в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$ (мы используем здесь замечание 8.2);

(ii) $\pi_m(Z)$ плотно в $\mathbf{B}_\theta \times \mathbf{S}_m^\vee$; соответственно, $p_m(Z) = \text{pr}_{\mathbf{S}}(\pi_m(Z))$ плотно в $\mathbf{S}_m^\vee$, где $\text{pr}_{\mathbf{S}}: \mathbf{B}_\theta \times \mathbf{S}_m^\vee \rightarrow \mathbf{S}_m^\vee$ — проекция; это дает доказательство утверждений (i) и (ii) предложения 8.1.

Более того, в силу замечания 8.3 имеем $F = F(D_{m-1}) \subset Z$ для $D_{m-1} \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^*$, так что соотношение (8.53) влечет существование вложения

$$\{(\theta, \alpha, 0)\} \times \widehat{Z}_{m-1} \times \{(0, 0)\} \subset \overline{Z}, \quad (8.59)$$

где $\overline{Z}$ — замыкание Z в $\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$. В частности, по аналогии с (8.58) ввиду соотношения (8.39) имеем

$$w^0 := (\theta, \alpha, 0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta, 0, 0) \in Z. \quad (8.60)$$

8.4. Доказательство предложения 8.1: случай нечетного m ; заключительные вычисления. В этом пункте мы доказываем последнее утверждение (iii) предложения 8.1 для случая нечетного m . Для этого рассмотрим следующую модификацию данных (8.35)–(8.37):

$$\begin{aligned} D_{m-1}^\Delta(c, \mathbf{f}, \mathbf{g}) &:= D_2(c, f_1, g_1) \oplus \cdots \oplus D_2(c, f_p, g_p), \\ \varphi_{m-1}^\Delta(\varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g}) &:= \varphi_2(\varepsilon, f_1, g_1) \oplus \cdots \oplus \varphi_2(\varepsilon, f_p, g_p), \end{aligned} \quad (8.61)$$

где

$$\begin{aligned} D_2(c, f_i, g_i) &= \begin{pmatrix} D'(c, f_i, g_i) & \\ & D'' \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_2^\vee, \\ D'(c, f_i, g_i) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & cf_i & cg_i \\ & -cf_i & -1 & 1 \\ -cg_i & & & \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, p, \\ D'' &= \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \wedge^2 V; \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$\varphi_2(\varepsilon, f_i, g_i) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}(\varepsilon, f_i, g_i) \\ \varphi_{21}(\varepsilon, f_i, g_i) & \varphi_{22} \end{pmatrix} \in \Phi_2,$$

$$\varphi_{11} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \\ & N \end{pmatrix}, \quad \varphi_{22} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \\ & -N \end{pmatrix}, \quad (8.63)$$

$$\varphi_{12}(\varepsilon, f_i, g_i) = \begin{pmatrix} \varepsilon f_i \\ \varepsilon g_i \\ -\varepsilon f_i \end{pmatrix}, \quad \varphi_{21}(\varepsilon, f_i, g_i) = \begin{pmatrix} \varepsilon a & \varepsilon f_i \\ -\varepsilon a & \varepsilon g_i \\ -\varepsilon f_i & -\varepsilon d \end{pmatrix} \in \wedge^2 V^\vee,$$

$$c, \varepsilon, N, a, d, f_i, g_i \in \mathbf{k}, \quad i = 1, \dots, p,$$

и где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_p) \in \mathbf{k}^p$. Легко проверяется, что $(\varphi_{m-1}^\Delta(\varepsilon))^\vee \circ D_{m-1}^\Delta(c, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \circ \varphi_{m-1}^\Delta(\varepsilon) \in \mathbf{S}_{m-1}$, поэтому точка

$$(D_{m-1}^\Delta(c, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \varphi_{m-1}^\Delta(\varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g})) \in \mathbf{S}_{m-1}^\vee \times \Phi_{m-1}$$

лежит в $\tilde{Z}_{m-1}$. Более того, так как $D_{m-1}^\Delta(0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = D_{m-1}^\Delta \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$ и $(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$ открыто в $\mathbf{S}_{m-1}^\vee$, то для любых $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{k}^p$ существует плотное открытое подмножество $\mathcal{U}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ в $\mathbf{k}$ такое, что $D_{m-1}^\Delta(c, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$, $c \in \mathcal{U}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$. Поэтому $(D_{m-1}^\Delta(c, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \varphi_{m-1}^\Delta(\varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g})) \in Z_{m-1}$ для $c \in \mathcal{U}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, так что, поскольку Z_{m-1} замкнуто в $(\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0 \times \Phi_{m-1}$, имеем

$$(D_{m-1}^\Delta(c, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \varphi_{m-1}^\Delta(\varepsilon, \mathbf{f}, \mathbf{g})) \in Z_{m-1}, \quad c, \varepsilon \in \mathbf{k}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{k}^p. \quad (8.64)$$

В частности, пусть $c = 1$ и $\varepsilon = 0$ в (8.61)–(8.63). Тогда получаем, что точка

$$w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta^0, \alpha^0) := (D_{m-1}^\Delta(1, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \oplus \alpha^0, \varphi_{m-1}^\Delta(0, \mathbf{f}, \mathbf{g}) \oplus \theta^0),$$

$$(\theta^0, \alpha^0) \in \wedge^2 V^\vee \times \wedge^2 V,$$

есть образ точки

$$((D'(1, f_1, g_1), \dots, D'(1, f_p, g_p), \underbrace{D'', \dots, D''}_p, \alpha^0), \underbrace{(\varphi_{11}, \dots, \varphi_{11})}_p, \underbrace{(\varphi_{22}, \dots, \varphi_{22})}_p, \theta^0))$$

из $U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi}$ при вложении $\tau_h: U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi} \hookrightarrow \mathbf{S}_m^\vee \times \Phi_m$, определенном (с точностью до перестановки прямых слагаемых), как и в (8.18), (8.19), посредством изоморфизма

$$h: \underbrace{H_1 \oplus \dots \oplus H_1}_m \xrightarrow{\cong} H_m, \quad m = 2p + 1, \quad (8.65)$$

задаваемого разложениями (8.34).

С другой стороны, ввиду (8.10) и (8.64) имеем $w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta, \alpha) \in \{(\theta, \alpha, 0)\} \times \hat{Z}_{m-1} \times \{(0, 0)\}$, так что в силу (8.59) и (8.60) получаем $w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta, \alpha) \in Z$. Таким образом,

$$w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta, \alpha) \in Z \cap \tau_h(U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi}), \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{k}^p. \quad (8.66)$$

Заметим, что $D_{m-1}^\Delta(1, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = D_{m-1}^\Delta$, поэтому из определения точки $w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta^0, \alpha^0)$ следует, что точка $w(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta, \alpha)$ лежит в Z_m (ср. (8.60)). Поскольку условие $w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta^0, \alpha^0) \in Z_m$, налагаемое на точку $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta^0, \alpha^0) \in \mathbf{k}^{2p} \times \wedge^2 V^\vee \times \wedge^2 V$,

открыто, мы получаем из (8.66), что существует плотное открытое подмножество $\mathcal{U} \subset \mathbf{k}^{2p} \times \wedge^2 V^\vee \times \wedge^2 V$ такое, что

$$w(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta^0, \alpha^0) \in Z \cap \tau_h(U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi}), \quad (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \theta^0, \alpha^0) \in \mathcal{U}. \quad (8.67)$$

Далее, легко видеть, что для общих $f_i, g_i \neq 0$ точки $D'(0, f_i, g_i)$, $D'(1, f_i, g_i)$ лежат в $(\wedge^2 V)^0$ и, более того, проективная плоскость $\text{Span}(\langle D'(0, f_i, g_i)^{-1} \rangle, \langle D'(1, f_i, g_i)^{-1} \rangle, \langle \varphi_{11} \rangle)$ в $P(\wedge^2 V^\vee)$ пересекает грассманиан $G = G(1, 3)$ по гладкой конике. Отсюда следует в обозначениях (8.16), что при общем выборе $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathbf{k}$ множества $L(D'(1, f_1, g_1)^{-1}, \varphi_{11})$ и $L(D'(1, f_2, g_2)^{-1}, \varphi_{11})$ корректно определены и не пересекаются. Последнее утверждение можно переформулировать следующим образом. Воспользуемся обозначением (8.17) и, взяв проекцию на прямое слагаемое

$$\text{pr}_{ij}: U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi} \rightarrow ((\mathbf{S}_1^\vee)_{(i)} \oplus (\mathbf{S}_1^\vee)_{(j)}) \times ((\Phi_1)_{(i)} \oplus (\Phi_1)_{(j)}) \simeq (\mathbf{S}_1^\vee \oplus \mathbf{S}_1^\vee) \times (\Phi_1 \oplus \Phi_1),$$

рассмотрим для каждой пары (i, j) , $1 \leq i < j \leq m$, открытые плотные подмножества W_{ij} в $U_{\mathbf{S}} \times U_{\Phi}$, определенные следующим образом:

$$W_{ij} := \text{pr}_{ij}^{-1}(\{((D_1, D_2), (\varphi_1, \varphi_2)) \in (\mathbf{S}_1^\vee \oplus \mathbf{S}_1^\vee) \times (\Phi_1 \oplus \Phi_1) \mid \text{подмножества } L(D_1^{-1}, \varphi_1) \text{ и } L(D_2^{-1}, \varphi_2) \text{ в } \mathbb{P}^3 \text{ определены корректно, не пересекаются и не лежат на квадрике}\}).$$

Тогда ввиду (8.67) можно переформулировать изложенное выше следующим образом:

$$Z \cap \tau_h(W_{12}) \neq \emptyset. \quad (8.68)$$

Теперь ввиду того, что множество Isom_m всех изоморфизмов h из (8.65) есть главное однородное пространство группы $\text{GL}(H_m)$, которое связно, согласно (8.68) получаем, что $Z \cap \tau_h(W_{ij}) \neq \emptyset$ для общего $h \in \text{Isom}_m$ и любой пары (i, j) , $1 \leq i < j \leq m$. Поэтому из того, что $W_{\mathbf{S}\Phi} = \bigcap_{1 \leq i < j \leq m} W_{ij}$ согласно определению (8.20) множества $W_{\mathbf{S}\Phi}$, выводим, что $Z \cap \tau_h(W_{\mathbf{S}\Phi}) \neq \emptyset$. Этим завершается доказательство предложения 8.1 для нечетного m .

8.5. Доказательство предложения 8.1: случай четного m . Доказательство предложения 8.1 для случая⁵ четного m , $m = 2p + 4$, $p \geq 0$, аналогично приведенному выше доказательству для нечетного m . А именно, по аналогии с (8.34) зафиксируем разложения

$$H_{m-1} \simeq H_3 \oplus \underbrace{H_2 \oplus \cdots \oplus H_2}_p, \quad H_2 \simeq H_1 \oplus H_1, \quad H_3 \simeq H_1 \oplus H_1 \oplus H_1. \quad (8.69)$$

⁵Отметим, что мы начинаем рассмотрение со случая $m = 4$, поскольку случай $m = 2$ уже исследован в п. 8.2.

Ввиду этих разложений аналогично (8.35) рассмотрим точки $D_{m-1}^\Delta \in (\mathbf{S}_{m-1}^\vee)^0$ и $\varphi_{m-1}^\Delta \in \Phi_{m-1}$, задаваемые матрицами с диагональными блоками

$$D_{m-1}^\Delta := D_3 \oplus \underbrace{D_2 \oplus \cdots \oplus D_2}_p, \quad (8.70)$$

$$\varphi_{m-1}^\Delta = \varphi_{m-1}^\Delta(N, a, d, f, g, \lambda) := \varphi_3 \oplus \underbrace{\varphi_2 \oplus \cdots \oplus \varphi_2}_p,$$

$$D_3 = D_2 \oplus D', \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \lambda\varphi_{21} \\ \varphi_{31} & \lambda\varphi_{12} & \varphi_{11} \end{pmatrix} \in \Phi_3, \quad \lambda \in \mathbf{k}, \quad (8.71)$$

где D_2 , D' и φ_2 , φ_{ij} , $i, j = 1, 2$, заданы в (8.36), (8.37) и

$$\varphi_{13} = (r_{ij}) \in \wedge^2 V^\vee, \quad \varphi_{31} = (s_{ij}) \in \wedge^2 V^\vee; \quad (8.72)$$

здесь r_{ij} , $s_{ij} \in \mathbf{k}$ удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$r_{i3} + r_{i4} = s_{i3} + s_{i4}, \quad i = 1, 2. \quad (8.73)$$

Теперь проведем рассуждения по той же схеме, что и выше. В частности, из (8.37) и (8.70)–(8.73) следует, что соотношения (8.38) и (8.39) выполнены для точки $(D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta)$. Поэтому, как и выше, соотношения (8.29) выполняются при любом $\psi \in \Psi_{m-1}$. Подставляя теперь данные $(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^\Delta, \varphi_{m-1}^\Delta)$ из (8.27) и (8.70)–(8.72) в (8.30), мы получаем следующие уравнения для χ , ψ :

$$(\varphi_{m-1}^\Delta)^\vee \circ D_{m-1}^\Delta \circ \chi + \psi^\vee \circ \alpha^0 \circ \theta^0 \in \Psi_{m-1}. \quad (8.74)$$

Далее, используя разложения (8.69), представим χ и ψ как наборы (ср. (8.42))

$$\chi = (\chi_0, \dots, \chi_p), \quad \psi = (\psi_0, \dots, \psi_p), \quad \psi_0, \chi_0 \in \Psi_3, \quad \psi_k, \chi_k \in \Psi_2, \quad k = 1, \dots, p, \quad (8.75)$$

где $\chi_k = (X_k, Y_k)$, $\psi_k = (A_k, B_k)$, $k = 1, \dots, p$, – те же матрицы от переменных, что и в (8.43), и $\chi_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$, $\psi_0 = (A_0, B_0, C_0)$, $X_0, Y_0, Z_0, A_0, B_0, C_0 \in \wedge^2 V^\vee$, т.е.

$$\begin{aligned} X_0 &= (x_{ij}^{(0)}), & Y_0 &= (y_{ij}^{(0)}), & Z_0 &= (z_{ij}^{(0)}), \\ A_0 &= (a_{ij}^{(0)}), & B_0 &= (b_{ij}^{(0)}), & C_0 &= (c_{ij}^{(0)}) \end{aligned} \quad (8.76)$$

являются кососимметрическими (4×4) -матрицами от переменных. Используя те же обозначения для переменных $x_1^{(k)}, \dots, x_{24}^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, что и в (8.46), и вводя новые переменные $x_1^{(0)}, \dots, x_{36}^{(0)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= x_{12}^{(0)}, & x_2^{(0)} &= x_{34}^{(0)}, & x_3^{(0)} &= x_{13}^{(0)}, & x_4^{(0)} &= x_{14}^{(0)}, & x_5^{(0)} &= x_{23}^{(0)}, & x_6^{(0)} &= x_{24}^{(0)}, \\ x_7^{(0)} &= y_{12}^{(0)}, & x_8^{(0)} &= y_{34}^{(0)}, & x_9^{(0)} &= y_{13}^{(0)}, & x_{10}^{(0)} &= y_{14}^{(0)}, & x_{11}^{(0)} &= y_{23}^{(0)}, & x_{12}^{(0)} &= y_{24}^{(0)}, \\ x_{13}^{(0)} &= z_{12}^{(0)}, & x_{14}^{(0)} &= z_{34}^{(0)}, & x_{15}^{(0)} &= z_{13}^{(0)}, & x_{16}^{(0)} &= z_{14}^{(0)}, & x_{17}^{(0)} &= z_{23}^{(0)}, & x_{18}^{(0)} &= z_{24}^{(0)}, \\ x_{19}^{(0)} &= a_{12}^{(0)}, & x_{20}^{(0)} &= a_{34}^{(0)}, & x_{21}^{(0)} &= a_{13}^{(0)}, & x_{22}^{(0)} &= a_{14}^{(0)}, & x_{23}^{(0)} &= a_{23}^{(0)}, & x_{24}^{(0)} &= a_{24}^{(0)}, \\ x_{25}^{(0)} &= b_{12}^{(0)}, & x_{26}^{(0)} &= b_{34}^{(0)}, & x_{27}^{(0)} &= b_{13}^{(0)}, & x_{28}^{(0)} &= b_{14}^{(0)}, & x_{29}^{(0)} &= b_{23}^{(0)}, & x_{30}^{(0)} &= b_{24}^{(0)}, \\ x_{31}^{(0)} &= c_{12}^{(0)}, & x_{32}^{(0)} &= c_{34}^{(0)}, & x_{33}^{(0)} &= c_{13}^{(0)}, & x_{34}^{(0)} &= c_{14}^{(0)}, & x_{35}^{(0)} &= c_{23}^{(0)}, & x_{36}^{(0)} &= c_{24}^{(0)}, \end{aligned}$$

перепишем систему (8.74) по аналогии с (8.46) в виде

$$\sum_{j=1}^{36} \tilde{m}_{ij} x_j^{(0)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{24} m_{ij} x_j^{(k)} = 0, \quad i = 1, \dots, 20, \quad k = 1, \dots, p. \quad (8.77)$$

Прямое вычисление матриц $\mathbf{M} = (m_{ij})$ и $\widetilde{\mathbf{M}} = (\tilde{m}_{ij})$ для взятых выше значений (8.47), (8.48) переменных $N, a, d, f, g, p_{ij}, q_{ij}$ в (8.37) и (8.70) и, соответственно, для следующих значений λ, r_{ij}, s_{ij} в (8.71) и (8.72), удовлетворяющих (8.73):

$$\begin{aligned} \lambda = -2, \quad r_{12} = 3, \quad r_{13} = 7, \quad r_{14} = -2, \quad r_{23} = 4, \quad r_{24} = -6, \quad r_{34} = -8, \\ s_{12} = -8, \quad s_{13} = -3, \quad s_{14} = 8, \quad s_{23} = -2, \quad s_{24} = 0, \quad s_{34} = -5, \end{aligned} \quad (8.78)$$

показывает, что $\mathbf{M}$ является блочной матрицей (8.49), а $\widetilde{\mathbf{M}}$ – следующей блочной матрицей:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{1\psi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{2\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3\psi} \end{pmatrix} \quad (8.79)$$

с блоками

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.80)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.81)$$

$$\mathbf{M}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & -2 & 7 \\ -7 & -7 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad (8.82)$$

$$\mathbf{M}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{32} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -4 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.83)$$

$$\mathbf{M}_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\psi} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 20 & 66 & -5 & -47 \\ 0 & 3 & 40 & -38 & -37 & -57 \\ 57 & -47 & -82 & -38 & -22 & 0 \\ 37 & 5 & 7 & -79 & 0 & -22 \\ -38 & 66 & -28 & 0 & -62 & -38 \\ 40 & -20 & 0 & -28 & 7 & -59 \\ -56 & 0 & 0 & 0 & 40 & 132 \\ 0 & -76 & -76 & 0 & -114 & 0 \\ 44 & 0 & -10 & -94 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 80 & 0 & -74 \end{pmatrix}. \quad (8.84)$$

Теперь, как и в (8.50), мы имеем $\text{rk } \mathbf{M} = 20$. Соответственно, из соотношений (8.79)–(8.84) находим прямым вычислением, что $\text{rk } \widetilde{\mathbf{M}} = 30$. Поскольку матрица системы (8.77) есть прямая сумма матрицы $\widetilde{\mathbf{M}}$ и p экземпляров матрицы $\mathbf{M}$, отсюда следует, что ее ранг есть

$$\text{rk } \widetilde{\mathbf{M}} + p \text{rk } \mathbf{M} = 30 + 20p = 10(m-1). \quad (8.85)$$

Обозначим через $R(\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^{\Delta}, \varphi_{m-1}^{\Delta})$ ранг линейной системы (8.74), эквивалентной системе (8.77), рассматриваемый как функция от $\theta^0, \alpha^0, D_{m-1}^{\Delta}, \varphi_{m-1}^{\Delta}$. Из (8.85) следует, что существуют значения $\varphi_{m-1}, \alpha, \theta$ соответственно переменных $\varphi_{m-1}^{\Delta}, \alpha^0, \theta^0$ такие, что, как и в (8.52),

$$R(\theta, \alpha, D_{m-1}^{\Delta}, \varphi_{m-1}) = 10(m-1). \quad (8.86)$$

Повторяя теперь рассуждения из п. 8.3 и используя (8.86), получаем вложения (8.59) и (8.60) для вышеуказанных значений $\theta, \alpha, D_{m-1}^{\Delta}, \varphi_{m-1}^{\Delta}$.

Наконец, используя (8.70)–(8.72), мы можем видоизменить подходящим образом матрицы (8.61)–(8.63), так что, рассуждая, как и в п. 8.4, и используя вложения (8.59) и (8.60), получим $Z \cap \tau_h(W_{\mathbf{S}\Phi}) \neq \emptyset$. Это завершает доказательство предложения 8.1 для четного m .

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. При вычислениях ранга линейной системы (8.30) можно было бы попытаться упростить вид матриц φ_2 в (8.37). Например, для проведения вычислений одновременно для четных и нечетных значений m можно было бы положить $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0$. Однако при таких ограничениях вычислительные эксперименты для произвольных значений параметров N, p_{ij}, q_{ij} дают в лучшем случае значение $9(m-1)$ для ранга системы (8.30), что недостаточно для проведения дальнейших рассуждений. Соответственно, в случае четного m можно было бы также упростить вид матрицы φ_3 в (8.71). Например, можно было бы положить $\varphi_{13} = \varphi_{31} = 0$, и при этом удовлетворялись бы

уравнения (8.29). Однако вычислительные эксперименты в этом случае для произвольных значений параметров $N, p_{ij}, q_{ij}, a, d, f, g, \lambda$ дают в лучшем случае значение 29 для ранга матрицы $\widetilde{\mathbf{M}}$, что также недостаточно.

§ 9. Геометрический смысл множества Z_m .

Связь Z_m с инстантонами 'т Хоофта

9.1. Одно свойство компоненты Z схемы Z_m . В этом пункте мы доказываем одно открытое свойство для компоненты Z в Z_m , $m \geq 3$, введенной в предложении 8.1 (см. ниже лемму 9.2).

Рассмотрим произвольную точку $D \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0$. Тогда в обозначениях (6.10) имеем симплектическое расслоение $E_{2m}(D^{-1})$ ранга $2m$ (см. (5.2) и (5.6), где мы берем $2m$ вместо $2m + 2$ и полагаем $B = D^{-1}$) и естественный эпиморфизм

$$c_D: H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \rightarrow W_{5m} := H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee / \text{im}(\sharp(D^{-1})) \simeq H^0(E_{2m}(D^{-1})(1)),$$

$$\dim W_{5m} = 5m.$$

Теперь возьмем произвольную точку $z = (D, \varphi) \in Z_m$. Здесь морфизм φ , понимаемый как гомоморфизм $\sharp\varphi: H_m \rightarrow H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$, определяет диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_m & & \\ \sharp\varphi \downarrow & \searrow s(z) & \\ 0 \rightarrow H_m \xrightarrow{\sharp(D^{-1})} H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee & \xrightarrow{c_D} & W_{5m} \rightarrow 0 \end{array} \quad (9.1)$$

Нижняя горизонтальная тройка в (9.1) дает диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\sharp(D^{-1})} & H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{c_D} & W_{5m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \rightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow \text{ev} & & \downarrow \text{ev} & & \\ 0 \rightarrow H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\widetilde{D^{-1}}} & H_m^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) & \xrightarrow{c_D} & E_{2m}(D^{-1})(1) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (9.2)$$

Кроме того, диаграммы (9.1) и (9.2) определяют композицию

$$s_z: H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s(z)} W_{5m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\text{ev}} E_{2m}(D^{-1}). \quad (9.3)$$

Заметим, что соотношение $\varphi^\vee \circ D \circ \varphi \in \mathbf{S}_m$, вытекающее из определения множества Z , легко переписывается в виде

$${}^t s_z \circ s_z = 0, \quad (9.4)$$

где ${}^t s_z := s_z^\vee \circ \theta$, а $\theta: E_{2m}(D^{-1}) \xrightarrow{\sim} E_{2m}(D^{-1})^\vee$ – симплектическая структура на $E_{2m}(D^{-1})$, определенная в (5.6). Имеем антиавтอดуальный комплекс

$$0 \rightarrow H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s_z} E_{2m}(D^{-1}) \xrightarrow{{}^t s_z} H_m^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0. \quad (9.5)$$

Теперь в соответствии с утверждением (iii) предложения 8.1 возьмем точку

$$z = (D, \varphi) \in Z \cap \tau_h(W_{\mathbf{S}\Phi}), \quad (9.6)$$

где h – фиксированное разложение (8.18), и рассмотрим индуцированные разложения

$$D = D_1 \oplus \cdots \oplus D_m, \quad \varphi := \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_m, \quad (D_i, \varphi_i) \in (\wedge^2 V^\vee)^0 \times (\wedge^2 V)^0, \quad (9.7)$$

такие, что

$$L := \bigsqcup_{i=1}^m L(D_i, \varphi_i) \quad (9.8)$$

есть несвязное объединение $2m$ прямых в $\mathbb{P}^3$, не лежащих на квадрике. Кроме того, для точки z мы имеем

$$E_{2m}(D^{-1}) = \bigoplus_{i=1}^m E_2(D_i^{-1}), \quad (9.9)$$

где $E_2(D_i^{-1})$, $i = 1, \dots, m$, – нуль-корреляционные расслоения ранга 2.

Ввиду разложения (8.18) диаграммы (9.1) и (9.2) разлагаются в прямые суммы m диаграмм вида

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{k} & & \\ & & \downarrow \scriptstyle \# \varphi_i & \searrow \scriptstyle s_i(z) & \\ 0 & \rightarrow & \mathbf{k} & \xrightarrow{\scriptstyle \#(D_i^{-1})} & \wedge^2 V^\vee \xrightarrow{\scriptstyle c_{D_i}} W_{5(i)} \rightarrow 0 \end{array} \quad (9.10)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\scriptstyle \#(D_i^{-1})} & \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\scriptstyle c_{D_i}} & W_{5(i)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \scriptstyle \text{ev} & & \downarrow \scriptstyle \text{ev} \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{\scriptstyle \widetilde{D_i^{-1}}} & \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) & \xrightarrow{\scriptstyle c_{D_i}} & E_2(D_i^{-1})(1) \rightarrow 0 \end{array} \quad (9.11)$$

где $i = 1, \dots, m$, в которые мы подставляем $\mathbf{k}$ вместо H_1 и полагаем $W_{5(i)} := \wedge^2 V^\vee / \text{im}(\#(D_i^{-1}: \mathbf{k} \rightarrow \wedge^2 V^\vee))$, $\dim W_{5(i)} = 5$, $i = 1, \dots, m$.

Разложение (8.18) индуцирует разложение комплекса (9.5) в прямую сумму m комплексов

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s_i} E_2(D_i^{-1}) \xrightarrow{t_{s_i}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9.12)$$

Здесь сечения $0 \neq s_i \in H^0(E_2(D_i^{-1})(1)) \simeq W_{5(i)}$, понимаемые как гомоморфизмы $\mathbf{k} \rightarrow W_{5(i)}$, по построению совпадают с мономорфизмами $s_i(z)$ в диаграмме (9.10). Поэтому гомоморфизм $s(z)$ в диаграмме (9.1) инъективен как прямая сумма мономорфизмов $s_i(z)$. Это означает, что $\text{im}(\# \varphi) \cap \text{im}(\#(D^{-1})) = \{0\}$, т. е.

$$\begin{aligned} z \in ((\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m)^* &:= \{(D, \varphi) \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m \mid \text{гомоморфизм} \\ \# \varphi: H_m &\rightarrow H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \text{ инъективен и } \text{im}(\# \varphi) \cap \text{im}(\#(D^{-1})) = \{0\}\}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Далее, из определения множества L и конструкции морфизмов s_z , s_i , $i = 1, \dots, m$ (см. (9.3), (9.8) и (9.12)), следует, что эти комплексы точны всюду, кроме правых членов, и

$$\begin{aligned} \text{coker}(^t s_z) &= \mathcal{O}_L(1), \quad \text{coker}(^t s_i) = \mathcal{O}_{L(D_i, \varphi_i)}(1), \\ (s_i)_0 &= L(D_i, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (9.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Для произвольного вложения $j: H_{m-1} \hookrightarrow H_m$ и произвольной точки $z \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$ определен индуцированный морфизм пучков

$$s_z(j): H_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{j} H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s_z} E_{2m}(D^{-1}). \quad (9.15)$$

Пусть $e_1, \dots, e_m$ – базис в H_m , согласованный с разложением (8.18), и пусть

$$H_{m-1} := \text{Span}(e_1, \dots, e_{m-1}).$$

Рассмотрим мономорфизм

$$j_0: H_{m-1} \hookrightarrow H_m, \quad e_i \mapsto e_i + e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (9.16)$$

Поскольку L – дизъюнктное объединение прямых $L(D_i, \varphi_i)$, $i = 1, \dots, m$, из (9.14)–(9.16) следует, что $s_z(j_0)$ – морфизм подрасслоения, т.е.

$$\text{coker}({}^t s_z(j_0)) = 0. \quad (9.17)$$

Теперь для данного мономорфизма $j: H_{m-1} \hookrightarrow H_m$ рассмотрим следующие условия, налагаемые на точку $z = (D, \varphi) \in Z$:

(I) композиция $s_z(j) = s_z \circ j: H_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow E_{2m}(D^{-1})$ есть морфизм подрасслоения;

(II) $s_z: H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow E_{2m}(D^{-1})$ – инъективный морфизм пучков (но не морфизм подрасслоения).

Заметим, что условия (I) и (II) являются открытыми условиями для точки $z \in Z_m$. Условие (I) выполняется для точки z из (9.6) и вложения j_0 в силу (9.17). Условие (II) выполняется для этой точки z в силу (9.14). Таким образом, поскольку множество $((\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m)^*$, определенное в (9.13), является плотным открытым подмножеством в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$, получаем следующий результат.

ЛЕММА 9.2. *Существует мономорфизм $j: H_{m-1} \hookrightarrow H_m$ такой, что множество*

$$Z_m(j) := \{z = (D, \varphi) \in Z_m \cap ((\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m)^* \mid z \text{ удовлетворяет условиям (I) и (II)}\}$$

является непустым открытым подмножеством в Z_m и, соответственно, множество

$$Z(j) := Z \cap Z_m(j)$$

является плотным открытым подмножеством в Z . То же самое верно для общего мономорфизма $j: H_{m-1} \hookrightarrow H_m$. Другими словами, множества

$$P(H_m^\vee)^* := \{j \in P(H_m^\vee) \mid Z_m(j) \neq \emptyset\}, \quad P(H_m^\vee)^{**} := \{j \in P(H_m^\vee)^* \mid Z(j) \neq \emptyset\}$$

открыты и плотны в $P(H_m^\vee)$.

9.2. Связь между Z и инстантонами 'т Хоофта. Морфизм $\lambda_j: Z_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$. В этом пункте мы установим связь между открытым подмножеством $Z_m(j)$ множества Z_m , введенным в лемме 9.2, и инстантонами 'т Хоофта (см. лемму 9.3).

Пусть $j \in P(H_m^\vee)^*$. Возьмем произвольную точку $z = (D, \varphi) \in Z_m(j)$, так что симплектическое векторное расслоение $E_{2m}(D^{-1})$ удовлетворяет диаграммам (9.1), (9.2). Соответственно, морфизм пучков s_z , определенный в (9.3), инъективен (см. условие (II)). Вдобавок, s_z удовлетворяет соотношению (9.4), которое, очевидно, влечет соотношение

$${}^t s_z(j) \circ s_z(j) = 0 \quad (9.18)$$

для морфизма подрасслоения $s_z(j)$, т. е. мы получаем монаду

$$0 \rightarrow H_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s_z(j)} E_{2m}(D^{-1}) \xrightarrow{{}^t s_z(j)} H_{m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0. \quad (9.19)$$

Из диаграммы (9.2) выводим равенства $h^i(E_{2m}(D^{-1})(-2)) = 0$, $i \geq 0$, так что когомологический пучок монады (9.19) есть инстантонное расслоение

$$E_2(z, j) := \text{Ker}({}^t s_z(j)) / \text{Im}(s_z(j)), \quad [E_2(z, j)] \in I_{2m-1}. \quad (9.20)$$

Теперь рассмотрим подмногообразие $I_{2m-1}^{tH} \subset I_{2m-1}$ инстантонных расслоений 'т Хоофта (см. п. 4.3).

ЛЕММА 9.3. Пусть $j \in P(H_m^\vee)^*$ и $z = (D, \varphi)$ — произвольная точка в $Z_m(j)$. Тогда расслоение $E_2(z, j)$ является инстантоном 'т Хоофта, т. е. $[E_2(z, j)] \in I_{2m-1}^{tH}$. При этом точна тройка

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s} E_2(z, j) \rightarrow \mathcal{I}_{L, \mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0, \quad (9.21)$$

где $L = (s)_0$. Если при этом схема L не лежит на квадрике, то

$$h^0(E_2(z, j)) = 1, \quad h^1(E_2(z, j)) = 6m - 10, \quad h^{\geq 2}(E_2(z, j)) = 0. \quad (9.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим комплексы (9.5) и (9.19) и положим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{m-1} &:= H_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), & \mathcal{H}_m &:= H_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \\ \mathcal{K}_{m+1} &:= \text{coker } s_z(j), & \mathcal{K}_m &:= \text{coker } s_z. \end{aligned}$$

Комплексы (9.5) и (9.19) антиавтодуальны, поэтому они продолжаются до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & & & E_2(z, j) \xleftarrow{u_z} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \\ & & & & \downarrow \tau \quad \swarrow \alpha \\ & & \mathcal{H}_{m-1} \xrightarrow{s_z(j)} E_{2m}(D^{-1}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_{m+1} \\ & \swarrow j & \parallel & \searrow \beta & \downarrow \delta \\ \mathcal{H}_m \xrightarrow{s_z} E_{2m}(D^{-1}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_m & & \\ & \downarrow {}^t s_z(j) & \downarrow \gamma & & \\ & \mathcal{H}_{m-1}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{H}_{m-1}^\vee & \\ & \uparrow j^\vee & \uparrow j^\vee & & \\ & \mathcal{H}_m^\vee & \longrightarrow & \mathcal{H}_m^\vee & \\ & \nwarrow & \nwarrow & & \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & & \end{array} \quad (9.23)$$

в которой $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и τ – индуцированные морфизмы. В последней диаграмме имеем $\beta \circ \alpha = 0$ и $j^\vee \circ \gamma \circ \beta = \delta$. Тем самым, $\delta \circ \alpha = 0$. Отсюда следует, что α пропускается через морфизм τ , т.е. существует инъективный морфизм $u_z: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow E_2(z, j)$ такой, что $\alpha = \tau \circ u_z$. Морфизм u_z есть ненулевое сечение, $u_z \in H^0(E_2(z, j)(1))$, поэтому $E_2(z, j)$ – инстантонное расслоение 'т Хоффа.

Далее, поскольку тройка (9.5) является частью диаграммы (9.23), из этой диаграммы с учетом первого равенства (9.14) стандартным диаграммным поиском получаем тройку (9.21). Если L не лежит на квадрике, то (9.22) следует из (9.21) и теоремы Римана–Роха. Лемма доказана.

Зафиксируем изоморфизм

$$\xi: H_m \oplus H_{m-1} \xrightarrow{\sim} H_{2m-1}, \quad \xi \in \text{Isom}_{2m-1}, \quad (9.24)$$

и пусть $j \in P(H_m^\vee)$. Тогда определен морфизм

$$\lambda_j: Z_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}, \quad z = (D, \varphi) \mapsto A_j = \tilde{\xi}(D^{-1}, \varphi \circ j, -(\varphi \circ j)^\vee \circ D \circ (\varphi \circ j)). \quad (9.25)$$

Наряду с изоморфизмом (9.24) зафиксируем изоморфизм

$$\eta: H_m \oplus H_m \xrightarrow{\sim} H_{2m}, \quad \eta \in \text{Isom}_{2m}, \quad (9.26)$$

и по аналогии с (9.25) рассмотрим морфизм

$$\lambda_\eta: Z_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m}, \quad z = (D, \varphi) \mapsto A = \tilde{\eta}(D^{-1}, \varphi, -\varphi^\vee \circ D \circ \varphi). \quad (9.27)$$

По построению λ_η – вложение: $\lambda_\eta^{-1}(A) = (A_1(\eta)^{-1}, A_2(\eta))$. Заметим, что для любого $z \in Z_m$ ранг $(8m \times 8m)$ -матрицы $A = \lambda_\eta(z)$ совпадает с рангом матрицы $D^{-1} = \text{pr}(A): H_m \otimes V \xrightarrow{\sim} H_m^\vee \otimes V^\vee$, где $\text{pr}: \mathbf{S}_{2m} \rightarrow \mathbf{S}_m$ – проекция, индуцированная вложением первого слагаемого $i_\eta: H_m \hookrightarrow H_{2m}$ в (9.26). Поэтому, обозначая $W_{4m} := H_m \otimes V$ и учитывая изоморфизм $i_\eta^\vee: \text{im } A \xrightarrow{\sim} W_{4m}^\vee$, получаем комплекс $0 \rightarrow H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_m} \xrightarrow{s} W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Z_m} \xrightarrow{t_s} H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_m} \rightarrow 0$. При этом вложение

$$\mathbf{j}: H_{2m-1} \xrightarrow{\xi} H_m \oplus H_{m-1} \xrightarrow{\text{id} \oplus j} H_m \oplus H_m \xrightarrow{\eta} H_{2m} \quad (9.28)$$

индуцирует диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_m} & \xrightarrow{s(\mathbf{j})} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Z_m} & \xrightarrow{t_{s(\mathbf{j})}} & H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_m} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \mathbf{j} & & \parallel & & \uparrow \mathbf{j}^\vee & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_m} & \xrightarrow{s} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Z_m} & \xrightarrow{t_s} & H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_m} & \longrightarrow 0 \end{array} \quad (9.29)$$

где $s(\mathbf{j}) := s \circ \mathbf{j}$. Для произвольной точки $z \in Z_m$ рассмотрим ограничение диаграммы (9.29) на $\mathbb{P}^3 \times \{z\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{s_z(\mathbf{j})} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{t_{s_z(\mathbf{j})}} & H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \mathbf{j} & & \parallel & & \uparrow \mathbf{j}^\vee & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \xrightarrow{s_z} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{t_{s_z}} & H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \longrightarrow 0 \end{array} \quad (9.30)$$

и обозначим

$$\begin{aligned} Z_m^0 &:= \{z \in Z_m \mid \text{нижний комплекс в (9.30) точен слева и в центре}\}, \\ Z_m^1(j) &:= \{z \in Z_m \mid \text{когомологический пучок } E_2(z, j) := \ker({}^t s_z) / \operatorname{im}(s_z) \\ &\quad \text{в среднем члене верхнего комплекса в (9.30)} \\ &\quad \text{удовлетворяет условиям (9.22)}\}, \quad j \in P(H_m^\vee). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Ясно, что Z_m^0 – открытое подмножество в Z_m . Кроме того, для $j \in P(H_m^\vee)$, по теореме о полунепрерывности, $Z_m^1(j)$ – открытое множество в Z_m . В частности, имеет место следующая

ЛЕММА 9.4. *Для любого $j \in P(H_m^\vee)^{**}$ множество $Z^1(j) := Z(j) \cap Z_m^1(j)$ открыто и плотно в Z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (9.6), (9.8) и лемме 9.2 существуют точка z в $Z(j)$ и сечение $s \in H^0(E(z, j)(1))$ такие, что схема $L = (s)_0$ не лежит на квадрике, так что $E_2(z, j)$ удовлетворяет (9.22). Заметим, что два последних равенства в (9.22) вытекают из первого равенства, тройки (9.21) и теоремы Римана–Роха. Рассмотрим морфизм

$$Z(j) \rightarrow I_{2m-1}^{tH}, \quad z \mapsto [E_2(z, j)].$$

Тогда открытость и плотность $Z^1(j)$ в Z вытекает из неприводимости $Z(j)$ и того, что множество

$$I_{2m-1}^{tH*} = \{[E] \in I_{2m-1}^{tH} \mid h^0(E(1)) = 1\}$$

открыто и плотно в I_{2m-1}^{tH} (лемма 4.5, (ii)).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5. Пусть $j \in P(H_m^\vee)^*$.

(i) Из определения $Z_m(j)$ непосредственно следует, что $Z_m(j) \subset Z_m^0 \cap Z_m^1(j)$.

(ii) Для $z \in Z_m(j)$ верхний комплекс есть монада, построенная по связке A_j , определенной в (9.25), а ее когомологический пучок совпадает с расслоением 'т Хоофта $E_2(z, j)$, определенным в (9.20).

Тем самым, морфизм λ_j , определенный в (9.25), удовлетворяет условию

$$\lambda_j(Z_m(j)) \subset MI_{2m-1}^{tH}(\xi). \quad (9.32)$$

Кроме того, для любой точки $z = (D, \varphi) \in Z_m$ ввиду обратимости D связка A_j как гомоморфизм

$$A_j: H_{2m-1} \otimes V \xrightarrow{\sim} H_{2m-1}^\vee \otimes V^\vee$$

удовлетворяет равенству $\operatorname{rk} A = 4m$.

9.3. Поточечное описание слоев морфизма $\lambda_j: Z_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$. Пусть $j \in P(H_m^\vee)$ таково, что $Z_m^0 \cap Z_m^1(j) \neq \emptyset$. (Например, $j \in P(H_m^\vee)^*$ удовлетворяет последнему условию – см. замечание 9.5, (i).) В настоящем пункте мы приведем описание слоев морфизма $\lambda_j: Z_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$ в точках открытого множества $Z_m^0 \cap Z_m^1(j)$. Точное утверждение будет дано далее в лемме 9.6.

Чтобы получить результат о слоях, заметим, что для точки $z = (D, \varphi) \in Z_m^0 \cap Z_m^1(j)$ верхний комплекс в (9.30) определяет комплекс (9.19) (являющийся монадой, если $z \in Z_m(j)$) с когомологическим пучком $E_2(z, j)$ в среднем члене.

Дисплей этого комплекса, подкрученного на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$, имеет вид

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E_2(z, j)(1) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 H_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \xrightarrow{s_z(j)} & E_{2m}(D^{-1})(1) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{coker}(s_z(j)) \\
 & \searrow^{t s_z(j)} & & & \downarrow \\
 & & H_{m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) & &
 \end{array} \quad (9.33)$$

Поскольку $z \in Z_m^1(j)$, то $h^0(E_2(z, j)(1)) = 1$. Поэтому, переходя к сечениям в диаграмме (9.33), получаем корректно определенный гомоморфизм

$$\begin{aligned}
 b(z, j) &:= H^0(t s_z(j)): H^0(E_{2m}(D^{-1})(1)) \xrightarrow{h^0(\varepsilon)} H^0(\text{coker}(s_z(j))) \\
 &\xrightarrow{\text{can}} H^0(\text{coker}(s_z(j)))/H^0(E_2(z, j)(1)) \simeq \mathbf{k}^{4m} \hookrightarrow H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee. \quad (9.34)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим эпиморфизм $c_D: H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \rightarrow H^0(E_{2m}(D^{-1})(1))$, определенный в начале п. 9.1, и положим

$$V(z, j) := c_D^{-1}(\ker b(z, j)). \quad (9.35)$$

Из (9.34) немедленно следует, что

$$V(z, j) \simeq \mathbf{k}^{2m}. \quad (9.36)$$

ЛЕММА 9.6. Пусть $j \in P(H_m^\vee)$ таково, что $Z_m^0 \cap Z_m^1(j) \neq \emptyset$. Для каждой точки $z \in Z_m^0 \cap Z_m^1(j)$ слой морфизма $\lambda_j: Z_m \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$, проходящий через точку z , есть приведенная схема, являющаяся открытым подмножеством в аффинном пространстве $V(z, j)$, определенном в (9.35):

$$\lambda_j^{-1}(\lambda_j(z)) \xrightarrow{\text{open}} V(z, j) \simeq \mathbb{A}^{2m}, \quad \dim \lambda_j^{-1}(\lambda_j(z)) = 2m. \quad (9.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространства $\mathbf{\Lambda}_m = \wedge^2 H_m^\vee \otimes S^2 V^\vee$ и $\mathbf{\Lambda}_{m-1} = \wedge^2 H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee$ соответственно вместе с проекциями $q_m: \wedge^2 (H_m^\vee \otimes V^\vee) \rightarrow \mathbf{\Lambda}_m$ и $q_{m-1}: \wedge^2 (H_{m-1}^\vee \otimes V^\vee) \rightarrow \mathbf{\Lambda}_{m-1}$ (ср. (7.1) и (7.6)). Зафиксируем мономорфизм $j_{\mathbf{k}}: \mathbf{k} \hookrightarrow H_m$ такой, что $j(H_{m-1}) \cap \mathbf{k} = \{0\}$, т.е. имеем следующие разложения H_m в прямую сумму и вложения прямых слагаемых:

$$H_m = H_{m-1} \oplus \mathbf{k}, \quad H_{m-1} \xhookrightarrow{j} H_m \xhookleftarrow{j_{\mathbf{k}}} \mathbf{k}. \quad (9.38)$$

Это разложение индуцирует следующие разложение $\mathbf{\Lambda}$ в прямую сумму и проекции:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Lambda}_m &= \mathbf{\Lambda}_{m-1} \oplus \text{Hom}(\mathbf{k}, H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee), \\
 \mathbf{\Lambda}_{m-1} &\xleftarrow{\text{pr}'} \mathbf{\Lambda}_m \xrightarrow{\text{pr}''} \text{Hom}(\mathbf{k}, H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee).
 \end{aligned}$$

Теперь уравнения Z_m в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$ принимают вид

$$\mathcal{A} := q_m(\varphi^\vee \circ D \circ \varphi) = 0. \quad (9.39)$$

Далее, рассмотрим диаграмму (5.11), подкрученную на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$, в которой мы подставляем $m - 1$ вместо m , полагаем $B = D^{-1}$ и берем $s_z(j)$ вместо $\rho_{\xi, A}$ и, соответственно, $\varphi \circ j$ вместо $\tilde{C}$. Переходя к сечениям в этой диаграмме и, соответственно, к сечениям в диаграмме (9.33), мы видим, что условие

$$0 = \mathrm{pr}'(\mathcal{A}) := q_{m-1}((\varphi \circ j)^\vee \circ D \circ (\varphi \circ j)) = b(z, j) \circ e(z)$$

выполнено, где $e(z)$ – гомоморфизм, $e(z) = h^0(s_z(j)): H_{m-1} \rightarrow H^0(E_{2m}(B)(1))$. (Ясно, что обнуление $\mathrm{pr}'(\mathcal{A})$ можно эквивалентным образом переписать как условие того, что отображение $\sharp\varphi \circ j$ вкладывает H_{m-1} в $V(z, j)$.) Поэтому уравнения (9.39) равносильны уравнениям

$$\mathrm{pr}''(\mathcal{A}) := b(z, j) \circ c(z) \circ \sharp\varphi \circ j_{\mathbf{k}} = 0,$$

которые с учетом определения (9.35) означают, что

$$\sharp\varphi|_{\mathbf{k}} \subset V(z, j).$$

Таким образом, поскольку точка $\lambda_j(z)$ задана, так что точки D и $\varphi \circ j$ определены точкой $\lambda_j(z)$ (см. (9.25)), то, значит, точка $(D, \varphi) \in \lambda_j^{-1}(\lambda_j(z))$ определена данными $\sharp\varphi|_{\mathbf{k}}$. Следовательно, последнее включение показывает, что $\lambda_j^{-1}(\lambda_j(z)) \simeq V(z, j)$.

Предыдущее рассуждение можно проиллюстрировать диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_m & \xlongequal{\quad} & H_m & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 H_{m-1} & \xrightarrow{j} & H_m & \xleftarrow{j_{\mathbf{k}}} & \mathbf{k} & & \\
 & \searrow \sharp\varphi & \downarrow \sharp\varphi & \swarrow \sharp\varphi|_{\mathbf{k}} & & & \\
 & & 0 \longrightarrow & V(z, j) & \longrightarrow & H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee & \longrightarrow H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee \\
 & & & \downarrow e(z) & & \downarrow c_D & \\
 H_{m-1} & \xrightarrow{\quad} & 0 \longrightarrow & \ker b(z, j) & \longrightarrow & H^0(E_{2m}(D^{-1})(1)) & \xrightarrow{b(z, j)} H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee
 \end{array} \quad (9.40)$$

Лемма доказана.

§ 10. Универсальное семейство расширений 'т Хоофта с $c_2 = 2m - 1$ и связанные с ним конструкции

В этом параграфе мы построим полное $(10m - 1)$ -мерное семейство $\mathbf{T}$ $(2m - 1)$ -инстантов 'т Хоофта и их вырождений (мы называем эти вырождения *пучками 'т Хоофта*). Эти пучки реализуются как расширения пучков ранга 1, так что $\mathbf{T}$ является базой универсального семейства таких расширений, называемых *расширениями 'т Хоофта*. Семейство $\mathbf{T}$ и другие конструкции этого параграфа будут затем использованы в следующем параграфе для доказательства того, что многообразие Z , рассмотренное в § 8, 9, совпадает с Z_m . Этим завершается доказательство теоремы 7.2.

10.1. $(2m - 1)$ -расслоения 'т Хоофта и многообразие Н. Рассмотрим подмногообразие $I_{2m-1}^{tH} \subset I_{2m-1}$ $(2m - 1)$ -инстантонов 'т Хоофта. Сначала напомним следующие свойства произвольных инстантонов 'т Хоофта $[E] \in I_{2m-1}^{tH}$, $m \geq 1$ (см. [1] и [2]):

(i) $h^0(E(1)) \leq 2$;

(ii) для любого сечения $0 \neq s \in H^0(E(1))$ схема нулей $Z_s = (s)_0$ локально лежит на гладкой поверхности;

(iii) $(Z_s)_{\text{red}}$ является несвязным объединением прямых $l_1, \dots, l_r$, $1 \leq r \leq 2m$, и $\mathcal{O}_{Z_s} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{Z_i}$, где для каждого i , $1 \leq i \leq r$, схема Z_i имеет фильтрацию подсхемами $l_i = Z_{1i} \subset Z_{2i} \subset \dots \subset Z_{m_i, i} = Z_i$ для некоторых $m_i \geq 1$, $\text{Supp}(Z_{ji}) = l_i$, такими, что если $m_i \geq 2$, то

$$\mathcal{O}_{Z_{j-1, i}} = \mathcal{O}_{Z_{ji}} / \mathcal{O}_{l_i}, \quad 2 \geq j \geq m_i. \quad (10.1)$$

Для данного целого $d \geq 1$ рассмотрим схему Гильберта $\mathcal{H}_d := \text{Hilb}^d G$ 0-мерных подсхем длины d грассманиана $G = G(1, 3)$ прямых в $\mathbb{P}^3$, и пусть $\Gamma_{\mathcal{H}_d} \subset G \times \mathcal{H}_d$ – универсальное семейство с проекциями $G \xleftarrow{p_d} \Gamma_{\mathcal{H}_d} \xrightarrow{q_d} \mathcal{H}_d$. Для данной точки $x \in \mathcal{H}_d$ обозначим через $\mathcal{Y}_x$ соответствующую 0-мерную подсхему $p_d(q_d^{-1}(x))$ в G . Назовем точку $x \in \mathcal{H}_d$ *криволинейной*, если существуют целое число $b \geq 1$, разбиение $d = d_1 + \dots + d_b$, $d_i \geq 1$, и точки $x_i \in \mathcal{H}_{d_i}$, $1 \leq i \leq b$, такие, что:

(а) для каждого i , $1 \leq i \leq b$, подсхема $\mathcal{Y}_{x_i} \subset G$ изоморфна $\text{Spec}(\mathbf{k}[t]/(t^{d_i+1}))$;

(б) $\mathcal{Y}_x$ есть несвязное объединение: $\mathcal{Y}_x = Y_{x_1} \sqcup \dots \sqcup Y_{x_b}$.

Положим $\mathcal{H}_d^{\text{curv}} := \{x \in \mathcal{H}_d \mid \mathcal{Y}_x \text{ криволинейна}\}$. Хорошо известно (и легко проверяется), что $\mathcal{H}_d^{\text{curv}}$ – гладкая открытая $(4d)$ -мерная подсхема в $\mathcal{H}_d$. Далее, пусть $\Gamma \subset \mathbb{P}^3 \times G$ – график инциденции с проекциями $\mathbb{P}^3 \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} G$. Из свойств (i)–(iii) вытекает следующая

ЛЕММА 10.1. *Для любых $[E] \in I_{2m-1}^{tH}$ и $0 \neq s \in H^0(E(1))$ существует криволинейная точка $x = x([E], s) \in \mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}}$ такая, что $Z_s \stackrel{\text{sets}}{=} p(q^{-1}(\mathcal{Y}_x))$ и схемная структура на Z_s совпадает со структурой, задаваемой формулой*

$$\mathcal{O}_{Z_s} = p_* q^* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_x}. \quad (10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу (ii) носитель схемы Z_s есть несвязное объединение прямых, из определения криволинейной схемы следует, что достаточно рассмотреть случай, когда Z_s – единственная прямая, скажем l , с неприведенной схемной структурой. Это означает, что существует фильтрация схемы Z_s подсхемами

$$l = Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_{2m} = Z_s, \quad m \geq 2, \quad (10.3)$$

такая, что точны следующие тройки (см. (10.1)):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_l \rightarrow \mathcal{O}_{Z_2} \rightarrow \mathcal{O}_l \rightarrow 0, \dots, 0 \rightarrow \mathcal{O}_l \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{2m}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{2m-1}} \rightarrow 0. \quad (10.4)$$

Из первой тройки в (10.4), свойства (ii) и конструкции Феррана [12, §1] следует, что $\mathcal{O}_l$ является факторпучком конормального пучка $N_{l/\mathbb{P}^3} \simeq 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ и что сюръекция $N_{l/\mathbb{P}^3} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_l$ задает двойную структуру на l , совпадающую со структурой схемы Z_2 . Из этой сюръекции следует, что Z_2 как схема лежит

на гладкой квадрике, скажем Q , проходящей через l . Выберем однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ на $\mathbb{P}^3$ такие, что:

1) $l = \{x_2 = x_3 = 0\}$, $Q = \{x_0x_2 - x_1x_3 = 0\}$;

2) если $\mathbb{P}^3 = U_0 \cup U_1$ – открытое покрытие пространства $\mathbb{P}^3$ множествами $U_i = \{x_i \neq 0\}$, $i = 0, 1$, то идеал схемы $Z_2 \cap U_i$ в $\mathbf{k}[U_i]$ порождается элементами x_2/x_0 и $(x_3/x_0)^2$ при $i = 0$ и, соответственно, элементами x_3/x_1 и $(x_2/x_1)^2$ при $i = 1$.

Пусть $S_1, \dots, S_c$ – гладкие квазипроjektивные поверхности в $\mathbb{P}^3$ такие, что множества $Z_{(k)} := Z_s \cap S_k$, $k = 1, \dots, c$, составляют открытое покрытие схемы Z_s . (Такие поверхности существуют в силу (ii).) Положим $Z_{(ik)} := Z_{(k)} \cap U_i$, $i = 0, 1$, $k = 1, \dots, c$. Из (i)–(iii) и 1), 2) вытекает свойство:

3) для $k = 1, \dots, c$ идеал $I_{Z_{(ik)}}$ схемы $Z_{(ik)}$ в $\mathcal{O}[U_i \cap S_k]$ порожден элементами $(x_3/x_0)^{2m+1}$ при $i = 0$ и, соответственно, элементами $(x_2/x_1)^{2m+1}$ при $i = 1$.

Поскольку ввиду 1) элементы $x_3/x_0 \in \mathcal{O}[Z_{(0k)}]$ и $x_2/x_1 \in \mathcal{O}[Z_{(1k)}]$ совпадают в $\mathcal{O}[Z_{(0k)} \cap Z_{(1k)}]$, $k = 1, \dots, c$, корректно определены гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathbf{k}[t]/(t^{2m+1}) &\rightarrow \mathcal{O}[Z_{(ik)}], & 1 \bmod(t^{2m+1}) &\mapsto 1 \bmod I_{Z_{(ik)}}, \\ t \bmod(t^{2m+1}) &\mapsto (x_3/x_0) \bmod I_{Z_{(0k)}}, & i = 0, \\ & & i = 1, \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$t \bmod(t^{2m+1}) \mapsto (x_2/x_1) \bmod I_{Z_{(1k)}}, \quad i = 1,$$

которые совпадают на $Z_{(0k)} \cap Z_{(1k)}$. Это определяет морфизм $\pi_Z: Z_s \rightarrow \text{Спец}(\mathbf{k}[t]/(t^{2m+1}))$. Положим $\tau_i := \text{Спец}(\mathbf{k}[t]/(t^{i+1}))$, $i = 0, \dots, 2m$. Из определения морфизма π_Z и точных троек (10.4) следует, что для $i = 2, \dots, 2m$ (нильпотентный) пучок идеалов $\mathcal{I}_i := \mathcal{I}_{\tau_{i-1}, \tau_i} \subset \mathcal{O}_{\tau_i}$ удовлетворяет изоморфизму $\text{mult}: \mathcal{I}_i \otimes_{\mathcal{O}_{\tau_i}} \mathcal{O}_{Z_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{Z_i}$, $a \otimes \bar{1} \mapsto \pi_Z^*(a)$. Следовательно, согласно [13, лемма 2.13] морфизм π_Z есть плоское семейство прямых над τ_{2m} , так что он определяет вложение $\tau_{2m} = \text{Спец}(\mathbf{k}[t]/(t^{2m+1})) \hookrightarrow G$, т. е. криволинейную точку $x \in \mathcal{H}_{2m}$ такую, что $p: q^{-1}(\mathcal{Y}_x) \xrightarrow{\sim} Z_s$ – изоморфизм. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Легко видеть, что $\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}} \mid x = x([E], s) \text{ для некоторого } [E] \in I_{2m-1}^H \text{ и } 0 \neq s \in H^0(E(1))\}$ – плотное открытое подмножество в $\mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}}$. В частности, $\mathcal{H}$ является гладкой целой $(8m)$ -мерной схемой.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.3. Рассмотрим в $\mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}}$ плотное открытое подмножество $\mathcal{H}_0 = \{x \in \mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}} \mid \mathcal{Y}_x \text{ – приведенная схема}\}$. Пусть $\mathbf{D}_0^* := \{x \in \mathcal{H}_0 \mid \text{среди прямых множества } p(q^{-1}(\mathcal{Y}_x)) \text{ имеются пересекающиеся прямые}\}$ и $\mathbf{D}^*$ – замыкание множества $\mathbf{D}_0^*$ в $\mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}}$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{D}^*$ – неприводимый дивизор в $\mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}}$, и из леммы 10.1 легко следует, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}} \setminus \mathbf{D}^*$.

ЛЕММА 10.4. (i) Пусть $\mathbf{H}$ – замыкание схемы $\mathcal{H}$ в схеме Гильберта $\mathcal{H}_{2m}$, рассматриваемое как целая схема. Тогда замыкание $\mathbf{D}_{\mathbf{H}}$ дивизора $\mathbf{D}^*$ в $\mathbf{H}$ – неприводимый дивизор (Вейля) в $\mathbf{H}$.

(ii) Рассмотрим множество $\mathbf{H}_s = \mathbf{H} \setminus \mathcal{H}_{2m}^{\text{curv}} = \{x \in \mathbf{H} \mid \text{схема } \mathcal{Y}_x \text{ содержит точку } y \text{ такую, что } \dim T_y(\mathcal{Y}_x) \geq 2\}$. Тогда $\text{codim}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_s \geq 2$ и $\mathbf{H}_s \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}$. Тем самым, $\mathcal{H} = \mathbf{H} \setminus \mathbf{D}_{\mathbf{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) леммы следует из замечания 10.3. Далее, для произвольной точки $x \in G$ и произвольного двумерного подпространства U в касательном пространстве $T_x G$ обозначим через $Y(x, U)$ 0-мерную

подсхему в G длины 3 с носителем в точке x , изоморфную $\mathrm{Spec}(\mathbf{k}[u, v]/(u, v)^2)$ и такую, что $T_x Y(x, U) = U$. Пусть $\mathbf{H}_{(3)} = \{Y \in \mathrm{Hilb}^3 G \mid Y = Y(x, U) \text{ для некоторых } x \in G \text{ и } U \in \mathrm{Gr}(2, T_x G)\}$. Имеем $\dim \mathbf{H}_{(3)} = \dim G + \dim \mathrm{Gr}(2, 4) = 8$. Далее, нетрудно видеть, что $\mathbf{H}_s = \{Y \in \mathbf{H} \mid Y \text{ содержит подсхему } Y' \in \dim \mathbf{H}_{(3)}\}$ и, более того, $\mathbf{H}_s^* = \{Y \in \mathbf{H}_s \mid Y - \text{дизъюнктное объединение подсхем } Y' \in \dim \mathbf{H}_{(3)} \text{ и некоторой схемы } Y'' \in \mathcal{H}_{2m-3}^{\mathrm{curv}}\}$ – плотное открытое множество в $\mathbf{H}_s$. Отсюда $\dim \mathbf{H}_s = \dim \mathbf{H}_{(3)} + \dim \mathcal{H}_{2m-3}^{\mathrm{curv}} = 8 + 4(2m - 3) = 4(2m - 1)$, так что $\mathrm{codim}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_s = 8m - 4(2m - 1) = 4 \geq 2$. Наконец, элементарной проверкой получаем, что $\mathbf{H}_s^* \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}$, а значит, и $\mathbf{H}_s \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}$. Отсюда и из замечания 10.3 вытекает равенство $\mathcal{H} = \mathbf{H} \setminus \mathbf{D}_{\mathbf{H}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.5. Рассмотрим замыкание $\mathbf{H}_{(2)}$ множества $\mathcal{H}_{(2)} := \{x \in \mathcal{H} \mid x = x([E], s) \text{ для некоторого расслоения } [E] \in I_{2m-1}^{tH}, h^0(E(1)) = 2\}$ в $\mathbf{H}$; $\mathbf{H}_{(2)}$ (соответственно, $\mathcal{H}_{(2)}$) является замкнутой подсхемой в $\mathbf{H}$ (соответственно, в $\mathcal{H}$), и хорошо известно (см., например, [1]), что условие $x = x([E], s) \in \mathcal{H}_{(2)}^*$, налагаемое на точку $x \in \mathcal{H}$, эквивалентно условию, что схема $Z_s = (s)_0$ лежит на гладкой квадрике в $\mathbb{P}^3$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что 0-мерная подсхема $\mathcal{Y}_x$ в G лежит в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^5 = \mathrm{Span}(G)$, пересекающей G по гладкой конике, т. е. в общей проективной плоскости в $\mathbb{P}^5$. Отсюда следует, что $\dim \mathcal{H}_{(2)}^* = \mathrm{length}(\mathcal{Y}_x) + \dim G(2, \mathbb{P}^5) = 2m + 9$. Соответственно,

$$\mathrm{codim}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_{(2)} = \mathrm{codim}_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_{(2)}^* = 8m - (2m + 9) = 6m - 9 > 2, \quad m \geq 2. \quad (10.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.6. Рассмотрим множество $D^\tau := \{x \in \mathcal{H}_{2m}^{\mathrm{curv}} \mid \#(\mathcal{Y}_x) = 2m - 1\}$. Другими словами, $x \in D^\tau$, если $\mathrm{Supp} \mathcal{Y}_x = z_1 \sqcup z_2 \sqcup \dots \sqcup z_{2m-1}$ и схема $\mathcal{Y}_x$ приведена в точках $z_2, \dots, z_{2m-1}$ и имеет длину 2 в точке z_1 . Пусть $D_0^\tau := D^\tau \setminus (\mathcal{H}_{(2)} \cap D^\tau)$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{D}^\tau := \overline{D^\tau} = \overline{D_0^\tau}$ – неприводимый дивизор в $\mathbf{H}$ (здесь замыкания берутся в $\mathbf{H}$) и

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \setminus (\mathcal{H} \cap \mathbf{D}^\tau), \quad \mathrm{codim}_{\mathcal{H}}(D^\tau \setminus D_0^\tau) = \mathrm{codim}_{\mathbf{H}}(\mathbf{D}^\tau \setminus D_0^\tau) \geq 2. \quad (10.6)$$

Рассмотрим универсальное семейство $\Gamma_{\mathbf{H}} \subset G \times \mathbf{H}$ с проекциями $G \xleftarrow{u} \Gamma_{\mathbf{H}} \xrightarrow{v} \mathbf{H}$ и схему $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \times_G \Gamma_{\mathbf{H}}$ как подсхему в $\mathbb{P}^3 \times G \times \mathbf{H}$ с проекцией $\mathbf{\Gamma} \xrightarrow{q_{\mathbf{\Gamma}}} \Gamma_{\mathbf{H}}$. Пусть $\mathbf{L}$ – схемный образ морфизма $\gamma := p_{13}|_{\mathbf{\Gamma}}: \mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}$ в смысле [14, гл. II, упражнение 3.11, (d)], где $p_{13}: \mathbb{P}^3 \times G \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}$ – проекция. Рассмотрим проекции $\pi: \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ и $\mathbf{p} := \pi \circ p_{13}: \mathbb{P}^3 \times G \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ и обозначим $\mathcal{I}_{\mathbf{L}} := \mathcal{I}_{\mathbf{L}, \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}}$, $\mathcal{I}_{\mathbf{\Gamma}} := \mathcal{I}_{\mathbf{\Gamma}, \mathbb{P}^3 \times G \times \mathbf{H}}$. Для $m, n \in \mathbb{Z}$ обозначим $\mathcal{O}(m, 0) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}}$ и для произвольного пучка $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^3 \times G \times \mathbf{H}$ (соответственно, произвольного пучка $\mathcal{G}$ на $\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}$) положим $\mathcal{F}(m, n) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m) \boxtimes \mathcal{O}_G(n) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}}$ (соответственно, $\mathcal{G}(m) := \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}}$). Кроме того, для произвольной точки $t \in \mathbf{H}$ положим $\Gamma_t := \mathbb{P}^3 \times G \times \{t\} \cap \mathbf{\Gamma}$, $L_t := \mathbb{P}^3 \times \{t\} \cap \mathbf{L}$, $\mathcal{I}_{\Gamma_t} := \mathcal{I}_{\Gamma_t, \mathbb{P}^3 \times G}$.

Из леммы 10.1 непосредственно следует, что $p_{13}: \mathbf{\Gamma} \times_{\mathbf{H}} \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{L} \times_{\mathbf{H}} \mathcal{H}$ – изоморфизм приведенных схем. В частности, для любой точки $t \in \mathcal{H}$ схема L_t как подсхема в $\mathbb{P}^3$ имеет многочлен Гильберта $\chi(\mathcal{O}_{L_t}(n)) = 2m(n + 1)$, так что определен морфизм $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathrm{Hilb}^{2m(n+1)} \mathbb{P}^3$, $t \mapsto \{L_t\}$, являющийся локально замкнутым вложением.

ЛЕММА 10.7. Вложение $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathrm{Hilb}^{2m(n+1)} \mathbb{P}^3$ продолжается до изоморфизма $g: \mathbf{H} \xrightarrow{\sim} g(\mathbf{H})$, $t \mapsto \{L_t\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_G(1)$ обилиен на $\mathbb{P}^3 \times G$, то при $n \gg 0$ для любого $t \in \mathbf{H}$ по теореме Серра имеем эпиморфизм ограничения

$$e_{n,n}(t): H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}_G(n)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \boxtimes \mathcal{O}_G(n)) \\ \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n, n)) \simeq \mathbf{k}^{2m(n+1)}$$

и обнуление групп когомологий $H^i(\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n, n))$, $i > 0$. Заметим, что по построению $\Gamma_t = q^{-1}(\mathcal{Y}_t)$, где $\mathcal{Y}_t = u(v^{-1}(t))$ – 0-мерная подсхема в G , поэтому имеем изоморфизм (неканонический) пучков $\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n, n) \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_t}(n)$. Тем самым, эпиморфизм $e_{n,n}(t)$ и нулевые когомологии $H^i(\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n, n))$, $i > 0$, индуцируют эпиморфизм ограничения $e_n(t): H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \boxtimes \mathcal{O}_G) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n)) \simeq \mathbf{k}^{2m(n+1)}$. Поэтому, переходя к когомологиям точной тройки $0 \rightarrow \mathcal{I}_{\Gamma_t}(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \boxtimes \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_t}(n) \rightarrow 0$, находим $H^i(\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n)) = 0$, $i > 0$, и $r_n := h^0(\mathcal{I}_{\Gamma_t}(n)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) - 2m(n+1)$ не зависит от $t \in \mathbf{H}$. Кроме того, имеем мономорфизм $H^0(\mathcal{I}_{\Gamma_t}(n)) \xrightarrow{\varphi(t)} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n))$. Поэтому ввиду того, что $\mathcal{I}_{\Gamma_t}(n) = \mathcal{I}_{\Gamma}(n) \otimes \mathbf{k}(t)$, а пучок $\mathcal{I}_{\Gamma}(n)$ является $\mathbf{H}$ -плоским в силу $\mathbf{H}$ -плоскости пучка $\mathcal{O}_{\Gamma}(n)$, по теореме о замене базы [14, гл. III, п. 12.11] получаем, что $\mathbf{p}_*(\mathcal{I}_{\Gamma}(n))$ – локально свободный $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}$ -пучок ранга r_n и $R^i \mathbf{p}_*(\mathcal{I}_{\Gamma}(n)) = 0$, $i > 0$.

С другой стороны, из определения схемы $\mathbf{L}$ и формулы проекции следует, что $p_{13*}(\mathcal{I}_{\Gamma}(n)) = \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(n)$. Последнее и предыдущие равенства вместе со спектральной последовательностью $E_2^{i,j} = R^i \pi_*(R^j p_{13*}(\mathcal{I}_{\Gamma}(n))) \Rightarrow R^\bullet \mathbf{p}_*(\mathcal{I}_{\Gamma}(n))$ влекут $\pi_*(\mathcal{I}_{\mathbf{L}}(n)) = \mathbf{p}_*(\mathcal{I}_{\Gamma}(n))$, $R^i \pi_*(\mathcal{I}_{\mathbf{L}}(n)) = 0$, $i > 0$. Отсюда, применяя к точной тройке $0 \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n) \rightarrow 0$ функтор $R^i \pi_*$, получаем точную тройку

$$0 \rightarrow \mathbf{p}_*(\mathcal{I}_{\Gamma}(n)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}} \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n)) \rightarrow 0$$

и равенства $R^i \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n)) = 0$, $i > 0$. Ограничивая последнюю тройку на произвольную точку $t \in \mathbf{H}$, получаем точную тройку

$$H^0(\mathcal{I}_{\Gamma_t}(n)) \xrightarrow{\varphi(t)} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n)) \otimes \mathbf{k}(t) \rightarrow 0.$$

Отсюда в силу инъективности $\varphi(t)$ следует, что $\dim_{\mathbf{k}(t)}(\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n)) \otimes \mathbf{k}(t)) = 2m(n+1)$ не зависит от t . Поскольку $\mathbf{H}$ – целая схема, отсюда в силу [15, с. 51] следует, что пучок $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n))$ локально свободен и имеет ранг $2m(n+1)$. Тем самым, согласно [16, лекция 7, следствие 3] $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(n)$ является плоским $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}$ -пучком, а равенства $R^i \pi_*(\mathcal{I}_{\mathbf{L}}(n)) = 0$, $i > 0$, и вышеупомянутая теорема о замене базы влекут равенства $h^0(\mathcal{O}_{L_t}(n)) = 2m(n+1)$. Таким образом, морфизм $g: \mathbf{H} \rightarrow \text{Hilb}^{2m(n+1)} \mathbb{P}^3$, $t \mapsto \{L_t\}$, корректно определен.

Тот факт, что g – изоморфизм, проверяется поточечно следующим образом. Для произвольной точки $t \in \mathbf{H}$ рассмотрим проекцию $\gamma_t := \gamma|_{\Gamma_t}: \Gamma_t \rightarrow L_t$, и пусть y_t – точка в $\text{Hilb}^{2m(n+1)} \mathbb{P}^3$, соответствующая подсхеме L_t в $\mathbb{P}^3$, т.е. $y_t = g(t)$. Здесь p_t – конечный бирациональный морфизм, поэтому для общей плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^3$ имеем $q(p_t^{-1})(\mathbb{P}^2 \cap L_t) = \mathcal{Y}_t$, так что точка $t = \{\mathcal{Y}_t\} \in \mathbf{H}$ восстанавливается по точке y_t однозначно. По построению обратное к g отображение $y_t \mapsto t$ является морфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.8. Ввиду леммы 10.7 мы всюду далее отождествляем $\mathbf{H}$ с $g(\mathbf{H})$ и полагаем $g = \text{id}_{\mathbf{H}}$. Тем самым, $\mathbf{L} \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}$ – универсальное семейство над $\mathbf{H}$, а $\gamma: \Gamma \rightarrow \mathbf{L}$ – конечный бирациональный морфизм.

10.2. Семейство $\mathbf{T}$ расширений 'т Хоофта. Описание проекции $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{H}$. Рассмотрим проекции $\pi: \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ и $\mathbf{p}: \mathbf{\Gamma} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{L} \xrightarrow{\pi} \mathbf{H}$ и, используя обозначения из п. 10.1, положим $\mathbf{A}_i := \mathcal{E}xt_{\pi}^i(\mathcal{I}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0))$, $i \geq 0$, $\mathbf{A} := \mathbf{A}_1$ и $\mathbf{T} := \text{Proj}(\mathbf{A}^{\vee}) \xrightarrow{\rho} \mathbf{H}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.9. (i) *Имеют место следующие изоморфизмы пучков на $\mathbf{H}$:*

$$\mathbf{A} \simeq \pi_* \mathcal{E}xt^2(\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) \simeq \mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(0, 1) \simeq v_* u^* \mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1). \quad (10.7)$$

Тем самым, $\mathbf{A}$ – локально свободный $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}$ -пучок ранга $2m$, и потому $\rho: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{H}$ – проективное расслоение со слоем $\mathbb{P}^{2m-1}$. При этом построение пучка $\mathbf{A}$ коммутует с заменой базы.

(ii) Для произвольного дивизора $X \in |\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1)|$ рассмотрим дивизор $X_{\mathbf{H}} = v(u^{-1}(X))$ на $\mathbf{H}$ и его дополнение $\mathbf{H}_X = \mathbf{H} \setminus X_{\mathbf{H}}$. Тогда на $\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}_X$ имеет место изоморфизм пучков

$$\mathcal{E}xt^2(\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0))|_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}_X} \simeq \gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}|_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}_X}. \quad (10.8)$$

Кроме того, на $\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}_X$ определена точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathbf{B} \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathbf{W}_{4m} \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathbf{B}^{\vee} \xrightarrow{\text{ev}} \gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}|_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}_X} \rightarrow 0, \quad (10.9)$$

где $\mathbf{B} := \mathbf{A}^{\vee}|_{\mathbf{H}_X}$, а $\mathbf{W}_{4m}$ – пучок ранга $4m$ на $\mathbf{H}_X$. Последовательность (10.9) определяет сечение $A_X \in H^0(S^2 \mathbf{B}^{\vee} \otimes \wedge^2 V^{\vee})$, получаемое как композиция морфизмов

$$A_X: \mathbf{B} \otimes V \xrightarrow{H^0(\alpha_X^{\vee})} \mathbf{W}_{4m} \xrightarrow{H^0(\beta_X)} \mathbf{B}^{\vee} \otimes V^{\vee}. \quad (10.10)$$

При этом A_X является семейством связей квадрик ранга $4m$ с базой $\mathbf{H}_X$. Для любых двух дивизоров $X, X' \in |\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1)|$ связи $A_X|_{\mathbf{H}_X \cap \mathbf{H}_{X'}}$ и $A_{X'}|_{\mathbf{H}_X \cap \mathbf{H}_{X'}}$ совпадают по построению:

$$A_X|_{\mathbf{H}_X \cap \mathbf{H}_{X'}} = A_{X'}|_{\mathbf{H}_X \cap \mathbf{H}_{X'}}, \quad (10.11)$$

и тем самым определяют связь квадрик на $\mathbf{H}$

$$A \in H^0(S^2 \mathbf{A} \otimes \wedge^2 V^{\vee}). \quad (10.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для произвольной точки $t \in \mathbf{H}$ морфизм $\gamma_t := \gamma|_{\Gamma_t}: \Gamma_t \rightarrow L_t$ – конечный бирациональный морфизм, и по формуле проекции имеем

$$\gamma_{t*}(\mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(1, 0)|_{\Gamma_t}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}} = \gamma_{t*}(\mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0)|_{\Gamma_t}).$$

Ввиду спектральной последовательности Лере число $h^1(\gamma_{t*}(\mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0)|_{\Gamma_t})) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0)|_{\Gamma_t}) = 2m$ не зависит от t и $h^2(\mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0)|_{\Gamma_t}) = 0$. Тем самым, пучок $R^1 \pi_*(\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0))$ коммутует с заменой базы, и с учетом формулы проекции РФ, двойственности Серра SD (см. [17]) и спектральной последовательности Лере L для композиции $\pi \circ \gamma = \mathbf{p}$ находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{\pi}^2(\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) &\stackrel{\text{PF}}{\simeq} \mathcal{E}xt_{\pi}^2(\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0), \omega_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}}) \\ &\stackrel{\text{SD}}{\simeq} (R^1 \pi_*(\gamma_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0)))^{\vee} \stackrel{L}{\simeq} (R^1 \mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\mathbf{\Gamma}}(-2, 0))^{\vee}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Поскольку $\mathbf{p}$ совпадает с композицией $\Gamma \xrightarrow{q_\Gamma} \Gamma_{\mathbf{H}} \xrightarrow{v} \mathbf{H}$, а $\omega_{q_\Gamma} \simeq \mathcal{O}_\Gamma(-2, 1)$, то стандартное вычисление показывает, что

$$(R^1 \mathbf{p}_* \mathcal{O}_\Gamma(-2, 0))^\vee \simeq \mathbf{p}_* \mathcal{O}_\Gamma(0, 1) \simeq v_* u^* \mathcal{O}_G(1) \quad (10.14)$$

– локально свободный $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}$ -пучок ранга $2m$. Так как $\mathcal{E}xt_\pi^k(\mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) = 0$, $k = 1, 2$, имеем

$$\mathcal{E}xt_\pi^1(\mathcal{I}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0)) \simeq \mathcal{E}xt_\pi^2(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0)).$$

С другой стороны, поскольку $\text{codim}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}} \mathbf{L} = 2$, спектральная последовательность

$$E_2^{j,k} = R^j \pi_* \mathcal{E}xt^k(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0)) \Rightarrow \mathcal{E}xt_\pi^\bullet(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0))$$

вырождается и дает изоморфизм

$$\mathcal{E}xt_\pi^2(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0)) \simeq \pi_* \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0)).$$

Тем самым, $\mathbf{A} \simeq \pi_* \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0))$. Далее, имеем точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1) \xrightarrow{c} \gamma_* \mathcal{O}_\Gamma(1, 0) \rightarrow \text{coker}(c) \rightarrow 0,$$

в которой по построению $\text{codim}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}} \text{Supp}(\text{coker}(c)) = 4$. Отсюда

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{\mathbf{L}}(1), \mathcal{O}(-1, 0)) = \mathcal{E}xt^2(\gamma_* \mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)),$$

и аналогично предыдущим вычислениям имеем

$$\mathcal{E}xt_\pi^2(\gamma_* \mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) = \pi_* \mathcal{E}xt^2(\gamma_* \mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)).$$

Отсюда $\mathbf{A} \simeq \pi_* \mathcal{E}xt^2(\gamma_* \mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0))$. Тем самым, в силу (10.13) и (10.14) получаем (10.7). Из предыдущих вычислений также следует, что построение пучка $\mathbf{A}$ коммутует с заменой базы.

(ii) Для произвольной точки $t \in \mathbf{H}$ рассмотрим пучок $\gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}$ и обозначим $B_t := (H^0(\gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}))^\vee$. По определению пучок $\gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}$, как и в (10.4), имеет фильтрацию с факторами вида $\mathcal{O}_{l_i}$, $i = 1, \dots, 2m$, где l_i – прямые в $\mathbb{P}^3$, не обязательно различные. Поэтому отображение вычисления $B_t^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\text{ev}_t} \gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}$ сюръективно.

Рассмотрим пучок $\mathcal{G} := \ker(B_t^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \xrightarrow{\text{ev}_t(1)} \gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}(1, 0))$. Используя вышеуказанную фильтрацию пучка $\gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}$, простым вычислением получаем, что пучок $\mathcal{G}$ является 0-регулярным в смысле Мамфорда–Кастельнуово [16, лекция 14] и $h^0(\mathcal{G}) = 4m$. Тем самым, $\mathcal{G}$ порождается глобальными сечениями. Положим $W_{4m}(t) := H^0(\mathcal{G})$, и пусть K_t – ядро отображения вычисления $W_{4m}(t) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \xrightarrow{\text{ev}_t(1)} \mathcal{G}(1)$. Вычисление, аналогичное предыдущему, показывает, что $\text{rk}(K_t) = h^0(K_t) = 2m$ и пучок K_t также 0-регулярен в смысле Мамфорда–Кастельнуово, а значит, он порождается глобальными сечениями. Поэтому, полагая $B'_t := H^0(K_t)$, получаем сюръективный морфизм вычисления $B'_t \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\text{ev}_t} K_t$. Этот эпиморфизм является изоморфизмом ввиду совпадения рангов обоих пучков. Тем самым, мы получаем точную последовательность

$$(A): 0 \rightarrow B'_t \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha_t} W_{4m}(t) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\beta_t} B_t^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \xrightarrow{\text{ev}_t(1)} \gamma_{t*} \mathcal{O}_{\Gamma_t}(1, 0) \rightarrow 0. \quad (10.15)$$

Применяя к этой последовательности функтор $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, получаем двойственную последовательность

$$(A)^\vee : 0 \rightarrow B_t \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\beta_t^\vee} W_{4m}^\vee(t) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\alpha_t^\vee} (B'_t)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \\ \xrightarrow{\text{ev}_t(1)} \mathcal{E}xt^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}(1, 0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0.$$

Отсюда следует изоморфизм $(B'_t)^\vee \simeq H^0(\mathcal{E}xt^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}(1, 0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)))$.

С другой стороны, рассуждая, как в п. (i), мы получаем, что изоморфизмы пучков в (10.7) коммутируют с заменой базы, т. е.

$$H^0(\mathcal{E}xt^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}(1, 0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))) = H^0(\mathcal{E}xt^2(\gamma_*\mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) \otimes \mathbf{k}(t)) \\ = \pi_*\mathcal{E}xt^2(\gamma_*\mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) \otimes \mathbf{k}(t) \simeq \mathbf{p}_*\mathcal{O}_\Gamma(0, 1) \otimes \mathbf{k}(t) = H^0(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}) = B_t^\vee.$$

Отсюда вытекает изоморфизм $(B'_t)^\vee \simeq B_t^\vee$, который продолжается до изоморфизма комплексов (A) и $(A)^\vee$. Этот изоморфизм, в частности, влечет изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}(1, 0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) \simeq \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}. \quad (10.16)$$

Кроме того, стандартная проверка с учетом изоморфизма $(B'_t)^\vee \simeq B_t^\vee$ показывает, что композиция

$$B_t \otimes V \xrightarrow{H^0(\alpha_t^\vee)} W_{4m}(t) \xrightarrow{H^0(\beta_t)} B_t^\vee \otimes V^\vee$$

антиавтодуальна, т. е. $A_t \in \wedge^2(B_t^\vee \otimes V^\vee)$. При этом условие $\beta_t \circ \alpha_t = 0$ влечет, что A_t содержится в прямом слагаемом $S^2 B_t^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$ пространства $\wedge^2(B_t^\vee \otimes V^\vee)$, т. е. A_t – связка квадратик. Более того, так как по построению $H^0(\beta) : W_{4m}(t) \rightarrow B_t^\vee \otimes V^\vee$ – инъективный гомоморфизм, отсюда следует, что A_t – связка квадратик ранга $4m$.

Теперь заметим, что изоморфизм $\mathcal{O}_G(1)|_{G \setminus X} \simeq \mathcal{O}_{G \setminus X}$ влечет изоморфизм $\mathbf{p}_*\mathcal{O}_\Gamma(0, 1)|_{\mathbf{H}_X} \simeq \mathbf{p}_*\mathcal{O}_\Gamma|_{\mathbf{H}_X}$. Тем самым, изоморфизмы (10.16) для $t \in \mathbf{H}_X$ глобализуются в изоморфизм (10.8). Соответственно, комплексы (A) и $(A)^\vee$ глобализуются в изоморфные комплексы $(A)_X$ и $(A)_X^\vee$, где $(A)_X$ есть комплекс

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathbf{B}^\vee \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathbf{W}_{4m} \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathbf{B}^\vee \xrightarrow{\text{ev}} \gamma_*\mathcal{O}_\Gamma|_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}_X} \rightarrow 0,$$

в котором

$$\mathbf{B}^\vee = \mathbf{p}_*\mathcal{O}_\Gamma|_{\mathbf{H}_X},$$

$$(\mathbf{B}')^\vee = \mathcal{E}xt_\pi^2(\gamma_*\mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0))|_{\mathbf{H}_X} \simeq \pi_*\mathcal{E}xt^2(\gamma_*\mathcal{O}_\Gamma(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0))|_{\mathbf{H}_X},$$

а изоморфизм $\mathbf{B}^\vee \simeq (\mathbf{B}')^\vee$ вытекает из (10.8). Соответственно, связки A_t , $t \in \mathbf{H}_X$, глобализуются в сечение $A_X \in H^0(S^2 \mathbf{B}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee)$, определенное в (10.10).

Наконец, заметим, что равенство (10.11) является следствием того, что по построению для произвольной точки $t \in \mathbf{H}_X \cap \mathcal{H}_0$, где $\mathbf{H}_X \cap \mathcal{H}_0$ плотно в $\mathbf{H}_X$, связка квадратик

$$A_X \otimes \mathbf{k}(t) : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{k}(t))^\vee \otimes V \rightarrow (\mathbf{A} \otimes \mathbf{k}(t)) \otimes V^\vee$$

является следствием двойственности Серра–Гротендика $\text{Ext}^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}, \omega_{\mathbb{P}^3}) \simeq H^0(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t})^\vee \simeq H^0(\mathcal{O}_{\Gamma_t})^\vee$, равенства $\text{Ext}^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}, \omega_{\mathbb{P}^3}) = H^0(\mathcal{E}xt^2(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}, \omega_{\mathbb{P}^3}))$ и коммутирования изоморфизма (10.7) с заменой базы, а значит, не зависит от выбора базиса в $H^0(\mathcal{O}_{\Gamma_t})^\vee \simeq \mathbf{A} \otimes \mathbf{k}(t)$. Предложение доказано.

Теперь рассмотрим многообразие $\mathbf{Y} := \mathbf{Isom}(\mathbf{A}, H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{H}})$ с проекцией $\zeta: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{H}$. Универсальный изоморфизм $\psi_{\mathbf{Y}}: \zeta^* \mathbf{A} \xrightarrow{\sim} H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ и связка $A \in H^0(S^2 \mathbf{A} \otimes \wedge^2 V^\vee)$, построенная в (10.12), определяют на $\mathbf{Y}$ связку

$$\mathcal{A}_{\mathbf{Y}} = \psi_{\mathbf{Y}}(\zeta^* A) \in H^0(S^2 H_{2m}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) = H^0(\mathbf{S}_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}). \quad (10.17)$$

Эта связка определяет $\mathrm{GL}(H_{2m})$ -эквивариантный морфизм

$$f_{\mathbf{Y}}: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{S}_{2m} \quad (10.18)$$

такой, что $\mathcal{A}_{\mathbf{Y}} = f_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{A}_{\mathbf{S}_{2m}}$, где $\mathbf{A}_{\mathbf{S}_{2m}}: \mathcal{O}_{\mathbf{S}_{2m}} \rightarrow \mathbf{S}_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{S}_{2m}}$ – универсальное сечение.

Далее, рассмотрим универсальный эпиморфизм $\varepsilon: \rho^*(\mathbf{A}^\vee) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1)$ на схеме $\mathbf{T}$, где $\mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1)$ – пучок Гротендика, и пусть $\mathbf{T} \xleftarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^3 \times \mathbf{T} \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}$ – индуцированные проекции. Поскольку π и $\tilde{\pi}$ – проекции на сомножители, имеем изоморфизмы замены базы

$$\mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1) \otimes \rho^* \mathbf{A}_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\tilde{\pi}}^k(\tilde{\rho}^* \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(1), \tilde{\rho}^* \mathcal{O}(-1, 0) \otimes \tilde{\pi}^* \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1)), \quad k \geq 0,$$

и, тем самым, спектральную последовательность

$$(S): E_2^{j,k} = H^j(\mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1) \otimes \rho^* \mathbf{A}_k) \Rightarrow \mathrm{Ext}^\bullet(\tilde{\rho}^* \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(1), \tilde{\rho}^* \mathcal{O}(-1, 0) \otimes \tilde{\pi}^* \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1)).$$

Поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}} \mathbf{L} = 2$, то $\mathbf{A}_0 = \pi_* \mathcal{H}om(\mathcal{O}(1, 0), \mathcal{O}(-1, 0)) = \pi_* \mathcal{O}(-2, 0) = 0$, и спектральная последовательность (S) дает изоморфизм

$$\psi: H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1) \otimes \rho^* \mathbf{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\tilde{\rho}^* \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(1), \tilde{\rho}^* \mathcal{O}(-1, 0) \otimes \tilde{\pi}^* \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1)).$$

Рассмотрим композицию

$$s: \mathcal{O}_{\mathbf{T}} \xrightarrow{\rho^*(\mathrm{id})} \rho^*(\mathbf{A}^\vee \otimes \mathbf{A}) = \rho^*(\mathbf{A}^\vee) \otimes \rho^* \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon \times \mathrm{id}} \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1) \otimes \rho^* \mathbf{A},$$

и пусть $\xi = \psi(s)$. Элемент ξ определяет расширение

$$0 \rightarrow \tilde{\rho}^* \mathcal{O}(-1, 0) \otimes \tilde{\pi}^* \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1) \rightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{T}} \rightarrow \tilde{\rho}^* \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(1) \rightarrow 0 \quad (10.19)$$

как универсальное семество расширений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -пучков с базой $\mathbf{T}$. Мы называем это семейство *универсальным семейством расширений 'т Хоффа*. Для произвольного $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{T}})$ -пучка $\mathcal{G}$ мы будем также пользоваться обозначением $\mathcal{G}(k) = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{T}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.10. Рассмотрим в $\mathbf{T}$ дивизор $\mathbf{D}_{\mathbf{T}} = \rho^{-1}(\mathbf{D}_{\mathbf{H}})$ и его дополнение $\mathbf{T}_{\mathcal{H}} := \mathbf{T} \setminus \mathbf{D}_{\mathbf{T}}$. Ввиду леммы 10.4 и предложения 10.9, (i) имеем, что $\mathbf{D}_{\mathbf{T}}$ – неприводимый дивизор (Вейля) в $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{H}} = \rho^{-1}(\mathcal{H})$. Возьмем произвольную точку $y \in \mathcal{H}$ и рассмотрим подсхему $L_y = \mathbf{L} \cap (P^3 \times \{y\})$ и векторное пространство $\mathbf{U}_y := \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{L_y, \mathbb{P}^3}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))$. По определению схемы $\mathbf{T}$ слой $\rho^{-1}(y)$ изоморфен $P(\mathbf{U}_y) \simeq \mathbb{P}^{2m-1}$. Если $y \in \mathcal{H}_0$, то $L_y = \sqcup_{1 \leq i \leq 2m} l_i$ – дизъюнктное объединение $2m$ прямых $l_1, \dots, l_{2m}$ и стандартное вычисление дает изоморфизм

$$\varphi_y: \mathbf{U}_y \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{1 \leq i \leq 2m} H^0(\mathcal{O}_{l_i}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{k}^{2m}, \quad \xi \mapsto (x_1(\xi), \dots, x_{2m}(\xi)).$$

Рассмотрим в $\mathbf{T}$ открытое плотное подмножество $\mathbf{T}_{\mathcal{H}_0} = \rho^{-1}(\mathcal{H}_0)$ и в нем дивизор $\mathbf{D}_{\mathcal{H}_0} := \{t = (y, \mathbf{k}\xi) \mid y \in \mathcal{H}_0, \text{ а } \xi \in \mathbf{U}_y \text{ удовлетворяет условию: не все } x_i(\xi), i = 1, \dots, 2m, \text{ отличны от нуля}\}$. Пусть $\mathbf{D}'_{\mathbf{T}}$ – замыкание $\mathbf{D}_{\mathcal{H}_0}$ в $\mathbf{T}$. Легко видеть, что $\mathbf{D}'_{\mathbf{T}}$ – неприводимый дивизор (Вейля) в $\mathbf{T}$. Более того, прямое вычисление по формулам (10.4) с использованием леммы Накаямы показывает, что открытое плотное в $\mathbf{T}$ подмножество $\mathbf{T}^* = \{t \in \mathbf{T} \mid \mathbf{E}_{\mathbf{T}}|_{\mathbb{P}^3 \times \{t\}} - \text{локально свободный пучок на } \mathbb{P}^3\}$ совпадает с $\mathbf{T} \setminus (\mathbf{D}_{\mathbf{T}} \cup \mathbf{D}'_{\mathbf{T}})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.11. По построению $\mathbf{E}_{\mathbf{T}^*} = \mathbf{E}_{\mathbf{T}}|_{\mathbb{P}^3 \times \mathbf{T}^*}$ – семейство $(2m - 1)$ -инстантонов 'т Хоофта с базой $\mathbf{T}^*$, причем модулярный морфизм $f_{\mathbf{T}^*}: \mathbf{T}^* \rightarrow I_{2m-1}^{tH}$, $t \mapsto [\mathbf{E}_{\mathbf{T}^*}|_{\mathbb{P}^3 \times \{t\}}]$, сюръективен. Поскольку $\dim \mathbf{T}^* = \dim \mathbf{H} + 2m - 1 = 10m - 1 = \dim I_{2m-1}^{tH}$, то $f_{\mathbf{T}^*}$ – конечный в общей точке морфизм. Кроме того, обозначая

$$\mathbf{T}^{**} = \{t \in \mathbf{T}^* \mid h^0((\mathbf{E}_{\mathbf{T}^*}|_{\mathbb{P}^3 \times \{t\}})(1)) = 1, \quad h^1((\mathbf{E}_{\mathbf{T}^*}|_{\mathbb{P}^3 \times \{t\}})(1)) = 6m - 10, \\ h^{\geq 2}((\mathbf{E}_{\mathbf{T}^*}|_{\mathbb{P}^3 \times \{t\}})(1)) = 0\},$$

имеем $\mathbf{T}^* \setminus \mathbf{T}^{**} = \rho^{-1}(\mathbf{H}_{(2)}) \cap \mathbf{T}^*$ (см. [1]), и из замечания 10.5 следует, что $\text{codim}_{\mathbf{T}^*}(\mathbf{T}^* \setminus \mathbf{T}^{**}) > 2$, $m \geq 2$.

Теперь на многообразии $\mathbf{T}$ рассмотрим универсальную точную тройку расслоений

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(-1) \rightarrow \rho^* \mathbf{A} \xrightarrow{e_{\mathbf{T}}} \mathbf{A}_{\mathbf{T}} \rightarrow 0, \quad (10.20)$$

где $\mathbf{A}_{\mathbf{T}}$ – универсальное факторрасслоение ранга $2m - 1$. Связка $A \in H^0(S^2 \mathbf{A} \otimes \wedge^2 V^{\vee})$ из (10.12) определяет связку на $\mathbf{T}$

$$A_{\mathbf{T}} = e_{\mathbf{T}}(\rho^* A) \in H^0(S^2 \mathbf{A}_{\mathbf{T}} \otimes \wedge^2 V^{\vee}). \quad (10.21)$$

Далее, рассмотрим многообразие $\mathbf{M} := \mathbf{Isom}(\mathbf{A}_{\mathbf{T}}, H_{2m-1}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{T}})$ с проекцией $\tau: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{T}$. Универсальный изоморфизм $\psi_{\mathbf{M}}: \tau^* \mathbf{A}_{\mathbf{T}} \xrightarrow{\sim} H_{2m-1}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{M}}$ и связка $A_{\mathbf{T}}$ из (10.21) определяют связку на $\mathbf{M}$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M}} = \psi_{\mathbf{M}}(\tau^* A_{\mathbf{T}}) \in H^0(S^2 H_{2m-1}^{\vee} \otimes \wedge^2 V^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{M}}) = H^0(\mathbf{S}_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{M}}). \quad (10.22)$$

Эта связка задает $\text{GL}(H_{2m-1})$ -эквивариантный морфизм

$$f_{\mathbf{M}}: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1} \quad (10.23)$$

такой, что $\mathcal{A}_{\mathbf{M}} = f_{\mathbf{M}}^* \mathbf{A}_{\mathbf{S}_{2m-1}}$, где $\mathbf{A}_{\mathbf{S}_{2m-1}}: \mathcal{O}_{\mathbf{S}_{2m-1}} \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{S}_{2m-1}}$ – универсальное сечение.

Заметим, что мономорфизм $\mathbf{j}: H_{2m-1} \hookrightarrow H_{2m}$, задаваемый точкой $j \in P(H_m^{\vee})$ (см. (9.28)), определяет точную тройку

$$0 \rightarrow \mathbf{k} \xrightarrow{j} H_{2m}^{\vee} \xrightarrow{\mathbf{j}^{\vee}} H_{2m-1}^{\vee} \rightarrow 0 \quad (10.24)$$

(здесь и ниже мы для простоты используем обозначение j для левого морфизма в тройке). Поэтому всякая точка $y \in \mathbf{Y}$, рассматриваемая как изоморфизм векторных пространств $\psi_y: A(y) := \mathbf{A} \otimes \mathbf{k}(\zeta(y)) \xrightarrow{\sim} H_{2m}$, вместе с тройкой (10.24) определяет вложение $\psi_y^{-1} \circ j: \mathbf{k} \hookrightarrow A(y)$ и изоморфизм $\psi(y, j): A(y)/(\psi_y^{-1} \circ j)(\mathbf{k}) \xrightarrow{\sim} H_{2m-1}$. Тем самым, определен морфизм $\mu_j: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{M}$, $y \mapsto ((\psi_y^{-1} \circ j)(\mathbf{k}), \psi(y, j))$. Этот морфизм сюръективен и имеет $\mathbb{A}^{2m}$ своим слоем, и по построению $\zeta = \rho \circ \tau \circ \mu$. При этом из определения

связок $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_M$ следует, что $\tilde{j}(\mathcal{A}_Y) = \mu_j^* \mathcal{A}_Y$, где $\tilde{j}: S_{2m} \rightarrow S_{2m-1}$ – проекция, индуцированная мономорфизмом j . Поэтому морфизмы f_Y и f_M , определенные формулами (10.18) и (10.23), включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f_Y} & S_{2m} \\ \mu_j \downarrow & & \downarrow \tilde{j} \\ M & \xrightarrow{f_M} & S_{2m-1} \end{array} \quad (10.25)$$

Кроме того, сечения $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_M$ определяют коммутативную диаграмму комплексов на $\mathbb{P}^3 \times Y$ (точный аналог диаграммы (9.29))

$$\begin{array}{ccccccc} H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{s_Y(j)} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Y} & \xrightarrow{t_{s_Y(j)}} & H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow j & & \parallel & & \uparrow j^\vee & & \\ H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{s_Y} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Y} & \xrightarrow{t_{s_Y}} & H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{\text{can}_Y} & p_{Y*} \mathcal{O}_{\Gamma_Y}(0, 1) \\ & & & & \uparrow j & \nearrow \xi_Y(j) & \\ & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_Y & & \end{array} \quad (10.26)$$

Здесь $\Gamma_Y := \Gamma \times_{\mathbf{H}} Y$, $p_Y: \Gamma_Y \rightarrow Y$ – проекция, can_Y – каноническая сюръекция и $\xi_Y(j)$ – композиция. Заметим, что нижний комплекс в диаграмме (10.26) является точным и по построению есть релятивизированный вариант комплекса (10.15).

Положим $M^* := \tau^{-1}(T^*)$. Ввиду замечания 10.11 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 10.12. *Многообразие $\widetilde{MI} = f_M(M)$ содержит в качестве плотно-го открытого подмножества многообразие MI_{2m-1}^{tH} $(2m-1)$ -инстантонных связок 'т Хоффа, и коммутативна $GL(H_{2m-1})$ -инвариантная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xrightarrow{f_M} & MI_{2m-1}^{tH} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \pi_{2m-1} \\ T^* & \xrightarrow{f_{T^*}} & I_{2m-1}^{tH} \end{array} \quad (10.27)$$

§ 11. Завершение доказательства теоремы 7.2

В этом параграфе мы завершаем доказательство теоремы 7.2, используя универсальное семейство расширений 'т Хоффа и связанные с ним конструкции из § 10.

11.1. Отображения компонент множества Z_m в многообразии T .
Сначала в обозначениях замечаний 10.3, 10.5 положим $H'_0 := \{x \in \mathcal{H}_0 \setminus \mathcal{H}_{(2)} \mid \text{среди прямых множества } p(q^{-1}(\mathcal{Y}_x)) \text{ имеется не более двух пересекающихся прямых}\}$. Ясно, что H'_0 – открытое плотное подмножество в H , и $D_H^0 := D_H \cap H'_0 = \{x \in \mathcal{H}_0 \mid \text{среди прямых множества } p(q^{-1}(\mathcal{Y}_x)) \text{ имеются только две}$

пересекающиеся прямые}. Нетрудно видеть, что $(\mathbf{H}'_0)^* := \mathbf{H}'_0 \setminus \mathbf{D}_\mathbf{H}^0$ – плотное открытое множество в $\mathbf{H}'_0$. Далее, воспользуемся обозначениями замечания 10.6 и положим $\mathbf{H}_0 := \mathbf{H}'_0 \sqcup D_0^\tau$. Из (10.6) и определения $\mathbf{D}_\mathbf{H}$ непосредственно следует, что

$$\text{codim}_{\mathbf{H} \setminus \mathbf{D}_\mathbf{H}}(\mathbf{H} \setminus (\mathbf{D}_\mathbf{H} \cup \mathbf{H}_0)) \geq 2. \quad (11.1)$$

Далее, в обозначениях из п. 10.2 рассмотрим схему $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3 \times G \times \mathbf{H}$ с проекцией $\gamma: \mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbf{H}$ и пучок $\gamma_*\mathcal{O}_\mathbf{\Gamma}$ как семейство пучков $\{\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}\}_{t \in \mathbf{H}}$ на $\mathbb{P}^3$. Как уже отмечалось в доказательстве предложения 10.9, (ii), каждый пучок $\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ этого семейства имеет фильтрацию с факторами вида $\mathcal{O}_{l_i}$, $i = 1, \dots, 2m$, где l_i – прямые в $\mathbb{P}^3$, определяемые точкой $t \in \mathbf{H}$. Тем самым, $\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ – полустабильный по Гизекеру $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -пучок с многочленом Гильберта $P_m(n) := \chi(\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}(n)) = 2m(n+1)$.

Для произвольной точки $t \in \mathbf{H}'_0$ пучок $\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ имеет вид

$$\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t} = \bigoplus_{i=1}^{2m} \mathcal{O}_{l_i}. \quad (11.2)$$

Этот пучок 0-регулярен по Мамфорду–Кастельнуово, поэтому морфизм вычисления $e_t: \mathbf{k}^{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ сюръективен. Тем самым, при $n \gg 0$ сюръективен и морфизм вычисления $e_t: \mathbf{k}^{M_n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-n) \rightarrow \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$, где $M_n = 2mh^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) = 2m\binom{n+3}{3}$, и его класс $[e_t]$ можно рассматривать как точку Quot-схемы $\text{Quot}(\mathbf{k}^{M_n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-n), P_m)$. Пусть Q – неприводимая компонента схемы $\text{Quot}(\mathbf{k}^{M_n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-n), P_m)$, содержащая точку $[e_t]$, и пусть $Q^{ss} := \{[\mathbf{k}^{M_n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-n) \twoheadrightarrow F] \in Q \mid \text{пучок } F \text{ полустабильн}\}$. Рассмотрим неприводимую компоненту Y_m схемы модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков на $\mathbb{P}^3$ с многочленом Гильберта P_m , содержащую точку $[F_t]$, где $F_t := \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$. Тогда, как известно [13, ч. 4], $Y_m = Q^{ss}/G$, где $G = \text{GL}(M_n)$ действует на Q через действие на $\mathbf{k}^{2m}$. Пусть $K_t := \ker(\mathbf{k}^{M_n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \twoheadrightarrow F_t)$. Как известно, $T_{[e_t]}Q = \text{Hom}(K_t, F_t)$, и элементарное вычисление дает $\dim T_{[e_t]}Q = M_n^2 + 6m = \dim Q$, т. е. Q^{ss} неособо в точке $[e_t]$. С другой стороны, аналогичным вычислением получаем $\text{Stab}_G[e_t] = \text{Aut}(F_t) = (\mathbf{k}^*)^{2m}$, так что каноническая проекция $Q^{ss} \rightarrow Y_m$ – гладкий в окрестности точки $[e_t]$ морфизм со слоем $\text{GL}(M_n)/(\mathbf{k}^*)^{2m}$. Тем самым, Y_m имеет размерность $8m$ и неособо в произвольной точке $[F_t]$ для $t \in \mathbf{H}'_0$. Аналогично доказывается, что Y_m имеет размерность $8m$ и неособо в произвольной точке $[F_t]$ для $t \in D_0^\tau$. Кроме того, семейство $\gamma_*\mathcal{O}_\mathbf{\Gamma}$ определяет морфизм $\psi: \mathbf{H} \rightarrow Y_m$, $t \mapsto [\gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}]$. Из определения $\mathbf{H}_0$ непосредственно следует, что ограничение $\psi_0 := \psi|_{\mathbf{H}_0}: \mathbf{H}_0 \rightarrow Y_m^0 := \psi(\mathbf{H}_0)$ биективно. Тем самым, в силу гладкости Y_m^0 морфизм ψ_0 является изоморфизмом, т. е. определен обратный морфизм $\psi_0^{-1}: Y_m^0 \rightarrow \mathbf{H}_0$.

Теперь для произвольной точки $z \in Z_m$ и произвольного мономорфизма $j: H_{2m-1} \rightarrow H_{2m}$ рассмотрим диаграмму (9.30) и положим $\mathcal{C}_z := \text{coker}(^ts_z)$. Если $z \in Z_m^0$ (см. определение (9.31)), то прямым вычислением получаем $\chi(\mathcal{C}_z(n)) = P_m(n)$. Поэтому корректно определено множество $Z_m^{00} := \{z \in Z_m^0 \mid [\mathcal{C}_z] \in Y_m^0\}$, открытое в Z_m .

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Множество Z_m^{00} непусто. Действительно, точка $z \in Z$, определенная в (9.6), ввиду (9.8) и (9.14) лежит в $Z_m^{00} \cap Z$. При этом определен морфизм

$$h_m: Z_m^{00} \rightarrow \mathbf{H}_0, \quad z \mapsto \psi_0^{-1}([\mathcal{C}_z]).$$

Пусть Z_c – произвольная неприводимая компонента в Z , удовлетворяющая в обозначениях (9.31) условию

$$Z_c^1(j) := Z_m^1(j) \cap Z_c \neq \emptyset \quad (11.3)$$

для некоторого мономорфизма $j: H_{m-1} \hookrightarrow H_m$ и условию

$$Z_c^0 := Z_m^{00} \cap Z_c \neq \emptyset. \quad (11.4)$$

Пусть $P(H_m^\vee)_c := \{j \in P(H_m^\vee) \mid Z_c^1(j) \neq \emptyset\}$. По построению $P(H_m^\vee)_c$ – открытое подмножество в $P(H_m^\vee)$, и условие (11.3) означает, что

$$P(H_m^\vee)_c \neq \emptyset. \quad (11.5)$$

Далее, пусть для выбранного нами мономорфизма $j \in P(H_m^\vee)_c$ определен конечный бирациональный морфизм $\sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c$, удовлетворяющий условию

$$\text{codim}_{Z_c}(Z_c \setminus \sigma(\tilde{Z}_c)) \geq 2. \quad (11.6)$$

Пусть $j \in P(H_m^\vee)_c$, так что $Z_c^0 \cap Z_c^1(j)$ – непустое, а значит, плотное открытое множество в Z_c . Поэтому

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}(j) := \sigma^{-1}(Z_c^0 \cap Z_c^1(j)) \quad (11.7)$$

– плотное открытое множество в $\tilde{Z}_c$ с проекциями

$$h := (h_m \circ \sigma)|_{\tilde{Z}}: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{H}_0, \quad \tilde{\sigma} := \sigma|_{\tilde{Z}}: \tilde{Z} \rightarrow Z_c, \quad \tilde{\lambda} := \lambda_j \circ \tilde{\sigma}: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}. \quad (11.8)$$

Рассмотрим многообразие $\tilde{\Gamma} := \Gamma \times_{\mathbf{H}} \tilde{Z}$ с проекцией $\tilde{\rho}: \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{Z}$. В этих обозначениях справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.2. Пусть Z_c – неприводимая компонента в Z , удовлетворяющая условиям (11.4) и (11.5), и $\sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c$ – конечный бирациональный морфизм, удовлетворяющий (11.6), и пусть $j \in P(H_m^\vee)_c$. Рассмотрим многообразие $\tilde{Z}$, определенное в (11.7). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) существует морфизм $\theta: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{T}_0 := \rho^{-1}(\mathbf{H}_0)$, зависящий от j и такой, что

$$h = \rho \circ \theta; \quad (11.9)$$

(ii) имеют место изоморфизмы пучков на $\tilde{Z}$

$$\tilde{\mathbf{A}} := \tilde{\rho}^* \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \simeq h^* \mathbf{A} \simeq H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}; \quad (11.10)$$

(iii) точная тройка $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \xrightarrow{j} H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow 0$ получается применением функтора θ^* к тройке (10.20); в частности, имеем изоморфизмы пучков $\theta^* \mathbf{A}_{\mathbf{T}} \simeq H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$, $h^* \mathbf{A} \simeq H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ и, тем самым, изоморфизмы многообразий

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}} &:= \text{Isom}(\theta^* \mathbf{A}_{\mathbf{T}}, H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \simeq \mathbf{M} \times_{\mathbf{T}} \tilde{Z}, \\ \widetilde{\mathbf{Y}} &:= \text{Isom}(h^* \mathbf{A}, H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \simeq \mathbf{Y} \times_{\mathbf{H}} \tilde{Z} \end{aligned} \quad (11.11)$$

и равенства композиций морфизмов

$$f_{\mathbf{M}} \circ \theta_{\mathbf{M}} = \tilde{\lambda} \circ \tau_{\tilde{Z}}, \quad f_{\mathbf{Y}} \circ \theta_{\mathbf{Y}} = \tilde{\sigma} \circ \zeta_{\tilde{Z}}, \quad (11.12)$$

где $\mathbf{M} \xleftarrow{\theta_{\mathbf{M}}} \widetilde{\mathbf{M}} \xrightarrow{\tau_{\tilde{Z}}} \tilde{Z}$ и $\mathbf{Y} \xleftarrow{\theta_{\mathbf{Y}}} \widetilde{\mathbf{Y}} \xrightarrow{\zeta_{\tilde{Z}}} \tilde{Z}$ – проекции, а проекции $f_{\mathbf{Y}}$ и $f_{\mathbf{M}}$ определены в (10.18) и (10.23) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим возможные случаи $h(\tilde{Z}) \not\subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$ и $h(\tilde{Z}) \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$.

Пусть $h(\tilde{Z}) \not\subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$. Применим функтор $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times \tilde{\sigma})^*$ к диаграмме (9.29):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} & \xrightarrow{s_{\tilde{Z}}(j)} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}} & \xrightarrow{t_{s_{\tilde{Z}}(j)}} & H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow j & & \parallel & & \uparrow j^\vee & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} & \xrightarrow{s_{\tilde{Z}}} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}} & \xrightarrow{t_{s_{\tilde{Z}}}} & H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} & \longrightarrow 0 \end{array} \quad (11.13)$$

Диаграмма (11.13) индуцирует сечение $\mathbf{s}$ пучка $\tilde{\mathbf{E}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$, где $\tilde{\mathbf{E}} := \ker(t_{s_{\tilde{Z}}})/\mathrm{im}(s_{\tilde{Z}})$, которое продолжается до точной тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbf{L}, \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow 0. \quad (11.14)$$

Здесь ввиду условия $h(\tilde{Z}) \subset \mathbf{H}_0 \setminus \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$ схема $\mathbf{L}$ – приведенная подсхема в $\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}$ такая, что для любой точки $z \in \tilde{Z}$ схема $L_z = \mathbf{L} \cap \mathbb{P}^3 \times \{z\}$ имеет вид $L_z = l_1 \sqcup \dots \sqcup l_{2m}$, где $l_1, \dots, l_{2m}$ – приведенные прямые в $\mathbb{P}^3$. Нетрудно видеть, что $\chi(\tilde{L}_z(n)) = P_m(n)$. Тройка (11.14) ввиду универсальности расширения (10.19) определяет морфизм $\theta: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{T}$ такой, что тройка (11.14) получается из (10.19) применением функтора $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times \theta)^*$ (см. [18]). При этом по построению θ удовлетворяет (11.9) и $\mathrm{im} \theta \subset \rho^{-1}(\mathbf{H}_0 \setminus \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0) \subset \mathbf{T}_0$, так что θ – искомый морфизм.

Пусть $h(\tilde{Z}) \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$. Применяя функтор $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times \tilde{\sigma})^*$ к диаграмме (9.29), получаем диаграмму (11.13). Эта диаграмма индуцирует сечение $\mathbf{s}$ пучка $\tilde{\mathbf{E}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$, где $\tilde{\mathbf{E}} := \ker(t_{s_{\tilde{Z}}})/\mathrm{im}(s_{\tilde{Z}})$, которое в настоящем случае продолжается до точной тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \xrightarrow{\mathbf{s}} \tilde{\mathbf{E}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}_{\tilde{\mathbf{L}}, \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \rightarrow 0.$$

Здесь ввиду условия $h(\tilde{Z}) \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$ схема $\tilde{\mathbf{L}}$ – приведенная подсхема в $\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}$ такая, что для любой точки $z \in \tilde{Z}$ схема $\tilde{L}_z = \tilde{\mathbf{L}} \cap \mathbb{P}^3 \times \{z\}$ имеет вид $\tilde{L}_z = l_1 \cup l_2 \sqcup \dots \sqcup l_{2m}$, где $l_1, \dots, l_{2m}$ – приведенные прямые в $\mathbb{P}^3$, причем прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке, скажем, $x(z)$. Нетрудно видеть, что $\chi(\tilde{L}_z(n)) = P_m(n) - 1$. Более того, существует единственная схема $\mathbf{L}$, содержащая $\tilde{\mathbf{L}}$, такая, что для любой точки $z \in \tilde{Z}$ схема $L_z = \mathbf{L} \cap \mathbb{P}^3 \times \{z\}$ имеет многочлен Гильберта $\chi(L_z(n)) = P_m(n)$, и однозначно определяемая тем свойством, что $\ker(\mathcal{O}_{L_z} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{L}_z}) = \mathbf{k}(x(z))$. Другими словами, L_z – схема с вложенной точкой $x(z)$. Вложение $\tilde{\mathbf{L}} \hookrightarrow \mathbf{L}$ определяет вложение пучков идеалов $\mathcal{I}_{\mathbf{L}, \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}} \hookrightarrow \mathcal{I}_{\tilde{\mathbf{L}}, \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}}$, и пусть $\mathbf{E} := \varepsilon^{-1}(\mathcal{I}_{\mathbf{L}, \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}})$. В этих обозначениях опять точна тройка (11.14), которая, как и выше, определяет искомый морфизм $\theta: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{T}$. В этом случае по построению $\mathrm{im} \theta \subset \rho^{-1}(\mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0) \subset \mathbf{T}_0$.

(ii) Изоморфизмы (11.10) вытекают из определения многообразия $\tilde{\Gamma}$ и того, что построение пучка $\mathbf{A} \simeq \mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\Gamma}(0, 1)$ коммутирует с заменой базы (предложение 10.9, (i)).

(iii) Утверждение об изоморфизме троек вытекает из утверждения (ii) и конструкции пучка $\mathbf{A}_{\mathbf{T}}$. Отсюда следуют остальные утверждения из (iii).

11.2. Описание морфизма λ_j для компонент множества Z_m . Пусть Z_c – произвольная неприводимая компонента множества Z_m , удовлетворяющая условиям (11.4) и (11.5). В этом пункте для фиксированного $j \in P(H_m^\vee)_c$ мы построим многообразие $\tilde{Z}_c$ и конечный бирациональный морфизм $\sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c$, удовлетворяющий условию (11.6), и докажем гладкость морфизма $\tilde{\lambda} = \lambda_j \circ \sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$ как морфизма на свой образ (см. предложение 11.3).

Пусть $\tilde{\nu}: Z_c^\nu \rightarrow Z_c$ – нормализация Z_c и $Z_c^* := Z_c^\nu \setminus \text{Sing } Z_c^\nu$. По построению имеем конечный бирациональный морфизм

$$\nu = \tilde{\nu}|_{Z_c^*}: Z_c^* \rightarrow \nu(Z_c^*), \quad \text{codim}_{Z_c}(Z_c \setminus \nu(Z_c^*)) \geq 2. \quad (11.15)$$

Над Z_c^* имеем следующую коммутативную диаграмму комплексов, получаемую из (9.29) применением функтора $(\text{id}_{\mathbb{P}^3} \times i)^*$, где i – композиция $Z_c^* \xrightarrow{\nu} Z_c \hookrightarrow Z_m$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_c^*} & \xrightarrow{s(j)} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Z_c^*} & \xrightarrow{t_s(j)} & H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_c^*} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow j & & \parallel & & \uparrow j^\vee & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_c^*} & \xrightarrow{s} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times Z_c^*} & \xrightarrow{t_s} & H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{Z_c^*} & \longrightarrow 0 \end{array} \quad (11.16)$$

В соответствии с (11.7) рассмотрим в Z_c^* плотное открытое множество $\tilde{Z} = \sigma^{-1}(Z_c^0 \cap Z_c^1(j))$. Согласно предложению 11.2, (i) определен морфизм $\theta: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{T}_0$ такой, что $\rho \circ \theta = h$, где морфизм h определен формулой (11.8).

Далее, применяя функтор pr_{2*} , где $\text{pr}_2: \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}$ – проекция, к левому квадрату диаграммы (11.16), подкрученному на $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$, получаем флаг $U_{\tilde{Z}}$ векторных подрасслоений тривиального расслоения $W_{4m} \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$:

$$U_{\tilde{Z}} = \{H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \hookrightarrow H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \hookrightarrow W_{4m} \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}}\}.$$

Рассмотрим флаговое многообразие $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2m-1, 2m, W_{4m} \otimes V^\vee)$ и универсальный флаг подрасслоений $U_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{S}_{2m-1} \hookrightarrow \mathcal{S}_{2m} \hookrightarrow W_{4m} \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}\}$ на $\mathcal{F}$. По универсальному свойству многообразия $\mathcal{F}$ определен морфизм $f': \tilde{Z} \rightarrow \mathcal{F}$ такой, что $U_{\tilde{Z}} = (f')^*(U_{\mathcal{F}})$. В частности, $H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} = (f')^*(\mathcal{S}_{2m-1})$, $H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}} = (f')^*(\mathcal{S}_{2m})$. Поскольку $\tilde{Z}$ – плотное открытое подмножество в Z_c^* , морфизм f' продолжается до рационального морфизма $f': Z_c^* \dashrightarrow \mathcal{F}$. Пусть $\tilde{Z}_c^*$ – замыкание графика рационального морфизма f' в $Z_c^* \times \mathcal{F}$, и пусть $Z_c^* \xleftarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{Z}_c^* \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{F}$ – проекции. Поскольку Z_c^* нормально, существует плотное открытое множество $\tilde{Z}_c$ в $\tilde{Z}_c^*$ такое, что $\tilde{\sigma}|_{\tilde{Z}_c}: \tilde{Z}_c \xrightarrow{\sim} \tilde{\sigma}(\tilde{Z}_c)$ – изоморфизм и $\text{codim}_{Z_c^*}(Z_c^* \setminus \tilde{\sigma}(\tilde{Z}_c)) \geq 2$. Тем самым, ввиду (11.15) имеем конечный бирациональный морфизм

$$\sigma := \nu \circ \tilde{\sigma}: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c, \quad \text{codim}_{Z_c}(Z_c \setminus \sigma(\tilde{Z}_c)) \geq 2. \quad (11.17)$$

Положим $f := \tilde{f}|_{\tilde{Z}_c}$, $\mathcal{S}_{2m-1} := f^*\mathcal{S}_{2m-1}$, $\mathcal{S}_{2m} := f^*\mathcal{S}_{2m}$. Равенство $U_{\tilde{Z}} = (f')^*(U_{\mathcal{F}})$ продолжается до диаграммы морфизмов $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}$ -пучков

$$\begin{array}{ccccccc} H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{S}_{2m-1} & \xhookrightarrow{w} & W_{4m} \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & & \\ \downarrow j & & \downarrow j & & \parallel & & \\ H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & \xhookrightarrow{i'} & \mathcal{S}_{2m} & \xhookrightarrow{w'} & W_{4m} \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & & \end{array} \quad (11.18)$$

где w и w' – тавтологические вложения подрасслоений. Верхняя строка диаграммы (11.18) индуцирует диаграмму, в которой верхняя строка совпадает с результатом применения функтора $(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times \sigma)^*$ к верхней строке в (9.29):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow H_{2m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & \xrightarrow{s'(j)} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}_c} & \xrightarrow{ts'(j)} & H_{2m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow i & & \parallel & & \uparrow i^\vee & & \\
 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{S}_{2m-1} & \xrightarrow{w} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}_c} & \xrightarrow{tw} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{S}_{2m-1}^\vee & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad (11.19)$$

Здесь $s'(j) := (\mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times \sigma)^* s(j)$. По построению $\tilde{Z}_c$ содержит плотное открытое множество

$$\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{Z}) \simeq \tilde{Z} \quad (11.20)$$

такое, что ограничение диаграммы (11.19) на $\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}$ является изоморфизмом комплексов. Далее мы будем отождествлять $\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{Z})$ с $\tilde{Z}$.

Рассмотрим нижний комплекс в (11.19) и положим $\mathbf{K} := \mathrm{coker} \, w$, $\mathbf{E}_w := \ker {}^t w / \mathrm{im} \, w$, $\mathcal{O}(1, 0) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}$, $\mathbf{K}(1, 0) := \mathbf{K} \otimes \mathcal{O}(1, 0)$, $\mathbf{E}_w(1, 0) := \mathbf{E}_w \otimes \mathcal{O}(1, 0)$. Подкручивая нижний комплекс в (11.19) на $\mathcal{O}(1, 0)$, получаем две точные тройки:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{S}_{2m-1} &\rightarrow W_{4m} \otimes \mathcal{O}(1, 0) \rightarrow \mathbf{K}(1, 0) \rightarrow 0, \\
 0 \rightarrow \mathbf{E}_w(1, 0) &\rightarrow \mathbf{K}(1, 0) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \boxtimes \mathcal{S}_{2m-1}^\vee.
 \end{aligned}$$

Применяя к этим тройкам функтор $R^\bullet \mathrm{pr}_{2*}$, где $\mathrm{pr}_2: \mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}_c \rightarrow \tilde{Z}_c$ – проекция, получаем точные тройки:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathcal{S}_{2m-1} &\xrightarrow{w} W_{4m} \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} \rightarrow \mathrm{pr}_{2*} \mathbf{K}(1, 0) \rightarrow 0, \\
 0 \rightarrow \mathrm{pr}_{2*} \mathbf{E}_w(1, 0) &\rightarrow \mathrm{pr}_{2*} \mathbf{K}(1, 0) \rightarrow \mathcal{S}_{2m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}.
 \end{aligned}$$

Поскольку в первой тройке w – морфизм подрасслоения, пучок $\mathrm{pr}_{2*} \mathbf{K}(1, 0)$ локально свободен. Поэтому из второй тройки следует, что пучок $\mathrm{pr}_{2*} \mathbf{E}_w(1, 0)$ рефлексивен как ядро морфизма локально свободных пучков. Здесь в силу бирациональности морфизма $\tilde{Z} \xrightarrow{\sigma} Z_c$, плотности в Z_c открытого множества $Z_c^1(j)$ и замены базы получаем, что $\mathrm{pr}_{2*} \mathbf{E}_w(1, 0)|_{\tilde{Z}}$ – пучок ранга 1. Следовательно, $\mathrm{pr}_{2*} \mathbf{E}_w(1, 0)$ – обратимый пучок.

Заметим, что разложение (9.24) индуцирует коммутативную диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow H_m \otimes \mathcal{O}(-1, 0) & \xrightarrow{w_0} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}_c} & \xrightarrow{tw_0} & H_m^\vee \otimes \mathcal{O}(1, 0) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow i_0 & & \parallel & & \uparrow i_0^\vee & & \\
 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{S}_{2m-1} & \xrightarrow{w} & W_{4m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \tilde{Z}_c} & \xrightarrow{tw} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{S}_{2m-1}^\vee & \longrightarrow & 0.
 \end{array} \quad (11.21)$$

В диаграмме (11.21) верхний комплекс является монадой и по построению $\mathbf{E}_{2m} := \ker {}^t w_0 / \mathrm{im} \, w_0$ – локально свободный пучок ранга $2m$ такой, что для любой точки $z' \in \tilde{Z}_c$ пучок $\mathbf{E}_{2m} \otimes \mathbf{k}(z')$ на $\mathbb{P}^3$ есть расслоение $E_{2m}(D^{-1})$, где $(D, \varphi) = \sigma(z')$. Соответственно, $i_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}} \otimes i_0$, где $i_0: H_m \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} \hookrightarrow \mathcal{S}_{2m-1}$ –

морфизм подрасслоения, так что $\mathcal{S}_{m-1} := \mathcal{S}_{2m-1}/H_m \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}$ – локально свободный $\mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}$ -пучок. Таким образом, диаграмма (11.21) индуцирует комплекс

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{S}_{m-1} \xrightarrow{\mathbf{w}_1} \mathbf{E}_{2m} \xrightarrow{t\mathbf{w}_1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{S}_{m-1}^\vee \rightarrow 0,$$

для которого пучок $\ker t\mathbf{w}_1/\text{im } \mathbf{w}_1$ совпадает с пучком $\mathbf{E}_\mathbf{w}$. Заметим, что дисплей (D) этого комплекса, подкрученного на $\mathcal{O}(1,0)$, будучи ограничен на $\mathbb{P}^3 \times \{\tilde{z}\}$, $\tilde{z} \in \tilde{Z}$, совпадает по построению с дисплеем (9.33) для точки $z = \sigma(\tilde{z})$. Применяя к дисплею (D) функтор $R^\bullet \text{pr}_{2*}$, получаем точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{S}'_m \xrightarrow{\zeta} \mathbf{W}_{5m} \xrightarrow{\tau} \mathcal{S}_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}, \quad (11.22)$$

где $\mathbf{W}_{5m} = \text{pr}_{2*} \mathbf{E}_{2m}(1,0)$ – локально свободный пучок ранга $5m$, $\mathcal{S}'_m$ – пучок, определяемый как расширение $0 \rightarrow \mathcal{S}_{m-1} \rightarrow \mathcal{S}'_m \rightarrow \text{pr}_{2*} \mathbf{E}_\mathbf{w}(1,0) \rightarrow 0$, тем самым, локально свободный пучок ранга m ввиду обратимости пучка $\text{pr}_{2*} \mathbf{E}_\mathbf{w}(1,0)$. Заметим, что на $(\mathcal{S}'_m)^0$ мы имеем универсальный морфизм подрасслоения

$$\mathbf{b}_{\text{univ}}: H_m \otimes \mathcal{O}_{(\mathcal{S}'_m)^0} \hookrightarrow H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{(\mathcal{S}'_m)^0}$$

(относительный вариант гомоморфизма $\sharp(D^{-1}): H_m \hookrightarrow H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$) и по построению точна тройка

$$0 \rightarrow H_m \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} \xrightarrow{\mathbf{b}} H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} \rightarrow \mathbf{W}_{5m} \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{b}$ – обратный образ морфизма $\mathbf{b}_{\text{univ}}$ относительно композиции проекций $\tilde{Z}_c \xrightarrow{\sigma} Z$ и $Z \rightarrow (\mathcal{S}'_m)^0$, $(D, \varphi) \mapsto D$. Эта тройка вместе с тройкой (11.22) включается в диаграмму морфизмов расслоений

$$\begin{array}{ccccccc} H_m \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & \xlongequal{\quad} & H_m \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow \mathbf{b} & & & & \\ \mathcal{V}_{2m} & \xrightarrow{\quad} & H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & \longrightarrow & H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & & (11.23) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ \mathcal{S}'_m & \xrightarrow{\quad \zeta \quad} & \mathbf{W}_{5m} & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & H_{m-1}^\vee \otimes S^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c} & & \end{array}$$

где $\mathcal{V}_{2m}$ – подрасслоение ранга $2m$ в $H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Z}_c}$. Ограничение диаграммы (11.23) на точку $\tilde{z} \in \tilde{Z}$ по построению совпадает с правой частью диаграммы (9.40) для $z = \sigma(\tilde{z})$. Отсюда ввиду неприводимости $\tilde{Z}_c$ вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.3. Пусть Z_c – произвольная неприводимая компонента множества Z_m , удовлетворяющая условиям (11.4) и (11.5), и пусть $j \in P(H_m^\vee)_c$. Тогда определены гладкое многообразие $\tilde{Z}_c$, зависящее от j , и конечный бирациональный морфизм $\sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c$, удовлетворяющий условию (11.6), такие, что слой морфизма $\tilde{\lambda} = \lambda_j \circ \sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$ имеет следующее описание:

$$\tilde{\lambda}^{-1}(\tilde{\lambda}(\tilde{z})) = \sigma^{-1}(\lambda_j^{-1}(\tilde{\lambda}(\tilde{z}))) \xrightarrow{\text{open}} \mathcal{V}_{2m} \times \mathbf{k}(\tilde{z}) \simeq \mathbb{A}^{2m}, \quad \tilde{z} \in \tilde{Z}_c. \quad (11.24)$$

11.3. Пересечение многообразия Z с другими компонентами в Z_m .

В этом пункте мы покажем, что Z не имеет дивизоров в пересечении с другими компонентами в Z_m (см. предложение 11.8 в конце данного пункта).

Заметим сначала, что в силу леммы 9.4 и замечания 11.1 многообразие $Z_c = Z$ и элемент $j \in P(H_m^\vee)^*$ удовлетворяют условиям предложений 11.2, 11.3. Вводя в этих предложениях обозначения $Z' := \tilde{Z}_c$, $\sigma' := \sigma$, $Z_b := \tilde{Z}$, заключаем, что:

(i) существуют гладкое многообразие Z' и конечный бирациональный морфизм $\sigma': Z' \rightarrow Z$, зависящие от j и такие, что

$$\text{codim}_Z(Z \setminus \sigma'(Z')) \geq 2 \quad (11.25)$$

и слой морфизма $\tilde{\lambda} = \lambda_j \circ \sigma': Z' \rightarrow \mathbf{S}_{2m-1}$ удовлетворяет (11.24);

(ii) $Z_b = (\sigma')^{-1}(Z \cap Z_m^{00} \cap Z_m^1(j))$ – плотное открытое множество в Z' , и определены морфизм $\theta_b: Z_b \rightarrow \mathbf{T}_0$ и многообразия $\mathbf{M}_b := Z_b \times_{\mathbf{T}} \mathbf{M}$ и $\mathbf{Y}_b := Z_b \times_{\mathbf{H}} \mathbf{Y}$ с проекциями $Z_b \xleftarrow{\tau_b} \mathbf{M}_b \xrightarrow{\hat{\theta}_b} \mathbf{M}$ и $Z_b \xleftarrow{\zeta_b} \mathbf{Y}_b \xrightarrow{\hat{\theta}_b} \mathbf{Y}$, удовлетворяющими соотношениям $f_{\mathbf{M}} \circ \tilde{\theta}_b = \tilde{\lambda} \circ \tau_b$ и $f_{\mathbf{Y}} \circ \hat{\theta}_b = \tilde{\sigma} \circ \zeta_b$.

Рассмотрим рациональный морфизм $\theta': Z' \dashrightarrow \mathbf{T}$ такой, что $\theta'|_{Z_b}$ совпадает с морфизмом θ_b . Поскольку Z' нормально, существует подмножество B в Z' с условиями

$$\text{codim}_{Z'} B \geq 2, \quad Z_a := Z' \setminus B \supset Z_b$$

такое, что $\theta_a := \theta'|_{Z_a}: Z_a \rightarrow \mathbf{T}$ является морфизмом и $\theta_a|_{Z_b} = \theta_b$. При этом условие (11.25) вместе с последним неравенством влекут

$$\text{codim}_Z(Z \setminus \sigma_a(Z_a)) \geq 2, \quad \sigma_a := \sigma'|_{Z_a}. \quad (11.26)$$

Рассмотрим многообразия $\mathbf{M}_a = Z_a \times_{\mathbf{T}} \mathbf{M}$ и $\mathbf{Y}_a := Z_a \times_{\mathbf{H}} \mathbf{Y}$ с проекциями $Z_a \xleftarrow{\tau_a} \mathbf{M}_a \xrightarrow{\hat{\theta}_a} \mathbf{M}$ и $Z_a \xleftarrow{\zeta_a} \mathbf{Y}_a \xrightarrow{\hat{\theta}_a} \mathbf{Y}$. При этом равенство $f_{\mathbf{M}} \circ \tilde{\theta}_b = \tilde{\lambda} \circ \tau_b$ по построению есть равенство $f_{\mathbf{M}} \circ \hat{\theta}_a|_{\mathbf{M}_b} = \tilde{\lambda} \circ \tau_a|_{\mathbf{M}_b}$. Поскольку $\mathbf{M}_b$ – плотное открытое подмножество в $\mathbf{M}_a$, а $\mathbf{M}_a$ и $\mathbf{S}_{2m-1}$ – целые приведенные схемы, то из вышеуказанного совпадения морфизмов следует, что морфизмы $\tilde{\lambda} \circ \tau_a$ и $f_{\mathbf{M}} \circ \hat{\theta}_a$ также совпадают. По аналогичной причине совпадают морфизмы $\tilde{\sigma} \circ \zeta_a$ и $f_{\mathbf{Y}} \circ \hat{\theta}_a$. Итак,

$$\tilde{\lambda} \circ \tau_a = f_{\mathbf{M}} \circ \hat{\theta}_a, \quad \tilde{\sigma} \circ \zeta_a = f_{\mathbf{Y}} \circ \hat{\theta}_a. \quad (11.27)$$

Из равенств (11.27) имеем

$$\tilde{\lambda}(Z_a) = (\tilde{\lambda} \circ \tau_a)(\mathbf{M}_a) = (f_{\mathbf{M}} \circ \hat{\theta}_a)(\mathbf{M}_a) \subset f_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \widetilde{MI}, \quad (11.28)$$

$$\tilde{\sigma}(Z_a) = (\tilde{\sigma} \circ \zeta_a)(\mathbf{M}_a) = (f_{\mathbf{Y}} \circ \hat{\theta}_a)(\mathbf{M}_a) \subset f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}). \quad (11.29)$$

Эти вложения вместе с диаграммой (10.25) включаются в диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Y} & \xrightarrow{f_{\mathbf{Y}}} & f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) & \longleftarrow & \sigma_a(Z_a) \xleftarrow{\sigma_a} Z_a \\ \mu_j \downarrow & & \downarrow \bar{j} & & \lambda_j \downarrow \swarrow \tilde{\lambda} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{f_{\mathbf{M}}} & \widetilde{MI} & \longleftarrow & \tilde{\lambda}(Z_a) \end{array} \quad (11.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.4. Поскольку $\dim \mathbf{Y} = \dim \mathbf{H} + \dim \text{GL}(H_{2m}) = 8m + 4m^2 = \dim Z$, а $\sigma_a(Z_a)$ плотно в Z ввиду (11.26), то из включения $\sigma_a(Z_a) \subset f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})$ и неприводимости $\mathbf{Y}$ следует, что $\overline{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})} = \overline{Z}$, где оба замыкания берутся в $\mathbf{S}_{2m}$. (Напомним, что Z лежит в $\mathbf{S}_{2m}$ согласно (9.27).)

Из (11.28) ввиду леммы 10.12 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 11.5. Пусть $j \in P(H_m^\vee)^*$. Тогда во введенных выше обозначениях образ многообразия Z_a при морфизме $\tilde{\lambda}$ является плотным подмножеством в многообразии $\widetilde{MI}$, определенном в лемме 10.12. Тем самым, $\theta_a(Z_a)$ плотно в $\mathbf{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, $\tilde{\lambda}(Z_a)$ содержит плотное подмножество $\lambda_j(Z(j)) \subset MI_{2m-1}^{tH}(\xi) \subset MI_{2m-1}^{tH}$ ввиду (9.32). При этом, поскольку $\dim Z' = \dim Z = 4m(m+2)$ и $\dim MI_{2m-1}^{tH} = \dim \mathrm{GL}(2m-1) + \dim I_{2m-1}^{tH} = 4m^2 + 6m$, из (11.24) следует, что $\dim \tilde{\lambda}(Z_a) = \dim Z_a - 2m = 4m(m+2) - 2m = \dim MI_{2m-1}^{tH}$, так что $\tilde{\lambda}(Z_a)$ плотно в MI_{2m-1}^{tH} , а значит, и в $\widetilde{MI}$. Тем самым, ввиду равенства $\tilde{\lambda} \circ \tau_a = f_M \circ \tilde{\theta}_a$ и неприводимости $\mathbf{M}$ получаем, что $\tilde{\theta}_a(\mathbf{M}_a)$ плотно в $\mathbf{M}$, поэтому и $\theta_a(Z_a) = \theta_a(\tau_a(\mathbf{M}_a)) = \tau(\tilde{\theta}_a(\mathbf{M}_a))$ плотно в $\mathbf{T}$.

Рассмотрим в Z_a подмножества

$$\mathcal{Z} := \theta_a^{-1}(\mathbf{T}^*), \quad \mathbf{D} := \theta_a^{-1}(\mathbf{D}_\mathbf{T}), \quad \mathbf{D}' := \theta_a^{-1}(\mathbf{D}'_\mathbf{T}).$$

В силу замечания 10.10 имеем $Z_a = \mathcal{Z} \sqcup \mathbf{D} \cup \mathbf{D}'$, причем $\mathcal{Z}$ плотно в Z_a ввиду леммы 11.5. Из равенства $\tilde{\lambda} \circ \tau_a = f_M \circ \tilde{\theta}_a$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \tilde{\lambda}^{-1}(f_M(\tau^{-1}(\mathbf{T}^*))), \\ \mathbf{D} &= \tilde{\lambda}^{-1}(f_M(\tau^{-1}(\mathbf{D}_\mathbf{T}))), \quad \mathbf{D}' = \tilde{\lambda}^{-1}(f_M(\tau^{-1}(\mathbf{D}'_\mathbf{T}))). \end{aligned} \tag{11.31}$$

Заметим, что в силу предложения 10.9, (i) морфизм $\rho: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{H}$ является про-ективным расслоением. Поэтому из (11.31), предложения 11.3, леммы 11.5 и замечания 10.10 получаем, что если $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}'$ непусты, то они являются неприводимыми дивизорами в Z_a .

СЛЕДСТВИЕ 11.6. Если D – дивизор в Z_a , лежащий в $Z_a \setminus \mathcal{Z}$, то имеет место один из следующих случаев:

- (i) $D = \mathbf{D}$ и $(\rho \circ \theta_a)(D)$ плотно в $\mathbf{D}_\mathbf{H}$;
- (ii) $D = \mathbf{D}'$ и $\theta_a(D)$ плотно в $\mathbf{D}'_\mathbf{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем один из двух случаев: $D = \mathbf{D}$ или $D = \mathbf{D}'$. Достаточно рассмотреть первый случай, так как во втором случае рассуждение аналогично.

В соответствии с (11.31) положим $\mathbf{D}_\mathbf{M} := \tau^{-1}(\mathbf{D}_\mathbf{T})$, $\mathbf{D}_\mathbf{S} := f_M(\mathbf{D}_\mathbf{M})$, $D_S := \mathbf{D}_\mathbf{S} \cap \tilde{\lambda}_j(Z_b)$, так что $\mathbf{D} = \tilde{\lambda}_j^{-1}(D_S)$. Из определения $\mathbf{D}_\mathbf{M}$ получаем $\dim \mathbf{D}_\mathbf{M} = \dim \mathbf{D}_\mathbf{T} + (2m-1)^2 = 4m^2 + 6m - 1$. С другой стороны, так как $\mathbf{D} = \dim D = \dim Z_b - 1 = 4m(m+2) - 1$, а $\tilde{\lambda}_j$ – гладкий морфизм с $2m$ -мерным слоем, то $\dim D_S = 4m^2 + 6m - 1 = \dim \mathbf{M} - 1$. Отсюда следует, что D_S плотно в $\mathbf{D}_\mathbf{S}$, а значит, $D_M := (f_M|_{\mathbf{D}_\mathbf{M}})^{-1}(D_S)$ плотно в $\mathbf{D}_\mathbf{M}$. Поскольку $\tau: \mathbf{D}_\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{D}_\mathbf{T}$ – главное $\mathrm{GL}(2m-1)$ -расслоение, существует плотное открытое подмножество $\mathbf{D}_\mathbf{T}^0$ в $\mathbf{D}_\mathbf{T}$ такое, что $\tau^{-1}(\mathbf{D}_\mathbf{T}^0) \cap D_M$ плотно в D_M . Так как $\tau \circ \tilde{\theta}_a = \theta_a \circ \tau_a$ и $f_M \circ \tilde{\theta}_a = \tilde{\lambda} \circ \tau_a$, отсюда следует, что $\tau_a^{-1}(\theta_a^{-1}(\mathbf{D}_\mathbf{T}^0)) \subset \tau_a^{-1}(D)$, значит, $\theta_a^{-1}(\mathbf{D}_\mathbf{T}^0) \subset D$. Поэтому $\theta_a(D)$ плотно в $\mathbf{D}_\mathbf{T}$, а тем самым, ввиду того, что $\rho: \mathbf{D}_\mathbf{T}^0 \rightarrow \mathbf{D}_\mathbf{H}^0$ – проективное расслоение, получаем, что $(\rho \circ \theta_a)(D)$ плотно в $\mathbf{D}_\mathbf{H}$.

ЛЕММА 11.7. Пусть Z_c – неприводимая компонента в Z_m , отличная от Z и такая, что $Z_c \cap Z$ содержит дивизор Вейля D_c в Z . Тогда Z_c удовлетворяет условиям (11.4) и (11.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – произвольная неприводимая компонента в $\sigma_a^{-1}(D_c)$. Тогда D – дивизор в Z_a согласно (11.26). Ввиду (11.6) возможны два случая: $D \subset \mathcal{Z} \cup \mathbf{D}'$ и $D = \mathbf{D}$. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $D \subset \mathcal{Z} \cup \mathbf{D}'$. В этом случае, поскольку $\dim D = \dim Z - 1 = 4m(m+2) - 1$, из предложения 11.3 следует, что $\dim \tilde{\lambda}(D) \geq 4m^2 + 6m - 1$, откуда ввиду (11.27) имеем

$$\dim(f_{\mathbf{M}} \circ \theta_a)(\tau_a^{-1}(D)) \geq \dim \tilde{\lambda}(D) \geq 4m^2 + 6m - 1.$$

Отсюда $\dim \theta_a(D) = \dim(\tau \circ f_{\mathbf{M}} \circ \tilde{\theta}_a)(\tau_a^{-1}(D)) \geq 4m^2 + 6m - 1 - \dim\{\text{слой проекции } \tau\} = 4m^2 + 6m - 1 - (2m - 1)^2 = 10m - 2 = \dim \mathbf{T} - 1$. Соответственно, $D_a := (\rho \circ \theta_a)(D)$ удовлетворяет неравенству $\dim D_a \geq \dim \mathbf{H} - 1$. Поскольку $D \not\subset \mathbf{D}$, то D_a не содержится в $\mathbf{D}_{\mathbf{H}}$. Поэтому последнее неравенство вместе с неравенством (11.1) показывает, что $D_a^* := D_a \cap \mathbf{H}_0$ – плотное открытое подмножество в D_a . Тем самым, и $D^* := D \cap (\rho \circ \theta_a)^{-1}(D_a)$ – плотное открытое подмножество в D .

Рассмотрим произвольную точку $\tilde{z} \in D^*$, и пусть $t = (\rho \circ \theta_a)(\tilde{z})$. В силу диаграммы (11.30) имеем $\sigma_a(D) \subset f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})$, так что существует точка $y \in \mathbf{Y}$ такая, что $z := f_{\mathbf{Y}}(y) = \tilde{z}$ и $(\rho \circ \zeta)(y) = t$. Обозначим через $C(y)$ диаграмму (10.26), ограниченную на $\mathbb{P}^3 \times \{y\}$. Пусть в этой диаграмме $\xi_y(j): \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ – ограничение на $\mathbb{P}^3 \times \{y\}$ морфизма $\xi_{\mathbf{Y}}(j)$, подкрученное на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$. (Здесь γ_t и Γ_t – те же, что и в (10.15).) Пусть, далее, E_y – когомологический пучок в среднем члене верхнего комплекса в диаграмме $C(y)$. Как и в диаграмме (9.23), вложение $j: \mathbf{k} \hookrightarrow H_{2m}^{\vee}$ определяет сечение $s_y: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow E_y(1)$.

Если $\xi_y(j)$ – эпиморфизм, то стандартный диаграммный поиск показывает, что, во-первых, верхний комплекс в $C(y)$ точен справа, так что E_y – расслоение 'т Хоофта, и, во-вторых, $\text{сокер}(s_y) = \mathcal{I}_{L_t, \mathbb{P}^3}(2)$, где $L_t = \gamma_t(\Gamma_t)$. Заметим, что так как $t \in D_a^* \subset \mathbf{H}_0$, то L_t по определению $\mathbf{H}_0$ не лежит на квадрике. Тем самым, $h^0(E_y) = 1$. Однако E_y по построению совпадает с расслоением $E_2(z, y)$ в обозначениях леммы 9.3. Это означает, что точка $z = \sigma_a(\tilde{z}) \in D \subset Z_c$ лежит в $Z_m(j) \cap Z_m^{00} \cap Z_m^1(j)$, т.е. Z_c удовлетворяет (11.4) и (11.5).

Предположим, что $\xi_y(j)$ не эпиморфизм. Заметим, что нижний комплекс в $C(y)$ зависит только от точки $t = (\rho \circ \theta_a)(\tilde{z})$. Поскольку $t \in D^* \subset \mathbf{H}^0$, элементарное вычисление показывает (см. конец замечания 10.10), что для общего вложения $j': \mathbf{k} \hookrightarrow H_{2m}^{\vee}$ морфизм $\xi_y(j'): \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ сюръективен. Поэтому, взяв j' вместо j в диаграмме (10.26) и используя предыдущие рассуждения, получаем, что $z \in Z_m(j') \cap Z_m^{00} \cap Z_m^1(j')$, т.е. Z_c также удовлетворяет (11.4) и (11.5).

2. Пусть теперь $D = \mathbf{D}$. В этом случае, проводя рассуждение о размерностях в диаграмме (11.30), получаем, что $(\rho \circ \theta_a)(D)$ плотно в $\mathbf{D}_{\mathbf{H}}$. В частности, поскольку $\mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$ плотно в $\mathbf{D}_{\mathbf{H}}$ (см. п. 11.1), множество $D^* = \theta_a^{-1}(\mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0)$ плотно в D . Рассмотрим произвольную точку $\tilde{z} \in D^*$, и пусть, как и выше, $t = (\rho \circ \theta_a)(\tilde{z})$. Опять ввиду диаграммы (11.30) имеем $\sigma_a(D) \subset f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})$, так что существует точка $y \in \mathbf{Y}$ такая, что $z := f_{\mathbf{Y}}(y) = \tilde{z}$ и $(\rho \circ \zeta)(y) = t$. Снова имеем диаграмму $C(y)$, полученную ограничением диаграммы (10.26) на $\mathbb{P}^3 \times \{y\}$. Сохраняя

в этой диаграмме прежнее определение морфизма $\xi_y(j): \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \gamma_{t*}\mathcal{O}_{\Gamma_t}$ и пучка E_y , снова получаем, как и в диаграмме (9.23), что вложение $j: \mathbf{k} \hookrightarrow H_{2m}^\vee$ определяет сечение $s_y: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow E_y(1)$. По-прежнему мы можем считать, что j – общее вложение. Однако в этом случае для общего j , как и в доказательстве предложения 11.2 (случай $h(\tilde{Z}) \subset \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^0$), будем иметь $\text{soker}(s_y) = \mathcal{I}_{L_t, \mathbb{P}^3}(2)$, где $L_t = \gamma_t(\Gamma_t)$ – приведенная схема, имеющая многочлен Гильберта $P_m(n) - 1$. Эта схема не лежит на квадрике, так что по-прежнему $h^0(E_y) = 1$, хотя пучок E_y не локально свободен в точке пересечения единственной пары пересекающихся прямых из L_t . Поэтому, как и в случае 1, получаем, что $z \in Z_m^{00} \cap Z_m^1(j)$, так что Z_c по-прежнему удовлетворяет (11.4) и (11.5). Лемма доказана.

Теперь докажем основной результат настоящего пункта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.8. *Не существует неприводимой компоненты Z_c в Z_m , отличной от Z и такой, что $Z_c \cap Z$ содержит дивизор Вейля в Z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. пусть существует неприводимая компонента Z_c в Z_m , отличная от Z и содержащая в пересечении с Z дивизор Вейля D_c в Z . Согласно лемме 11.7 компонента Z_c удовлетворяет условиям (11.4) и (11.5), а значит, для нее справедливы предложения 11.2, 11.3. Поэтому мы можем провести рассуждения для Z_c , аналогичные проведенным выше для компоненты Z .

Во-первых, согласно предложению 11.3 для фиксированного элемента $j \in P(H_m^\vee)_c$ рассмотрим конечный бирациональный морфизм $\sigma: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c$, где $\tilde{Z}_c$ – гладкое многообразие, удовлетворяющий условию (11.6) и такой, что слой морфизма $\tilde{\lambda} = \sigma \circ \lambda_j: \tilde{Z}_c \rightarrow Z_c$ имеет описание (11.24). Во-вторых, $\tilde{Z} = \sigma^{-1}(Z_c \cap Z_m^{00} \cap Z_m^1(j))$ – плотное открытое множество в $\tilde{Z}_c$ в силу предложения 11.2, и определены морфизм $\theta: \tilde{Z} \rightarrow \mathbf{T}_0$ и многообразия $\tilde{\mathbf{M}} := \tilde{Z} \times_{\mathbf{T}} \mathbf{M}$ и $\tilde{\mathbf{Y}} := \tilde{Z} \times_{\mathbf{H}} \mathbf{Y}$ с проекциями $\tilde{Z} \xleftarrow{\tau_{\tilde{Z}}} \tilde{\mathbf{M}} \xrightarrow{\theta_{\mathbf{M}}} \mathbf{M}$ и $\tilde{Z} \xleftarrow{\zeta_{\tilde{Z}}} \tilde{\mathbf{Y}} \xrightarrow{\theta_{\mathbf{Y}}} \mathbf{Y}$, удовлетворяющими соотношениям $f_{\mathbf{M}} \circ \theta_{\mathbf{M}} = \tilde{\lambda} \circ \tau_{\tilde{Z}}$ и $f_{\mathbf{Y}} \circ \theta_{\mathbf{Y}} = \tilde{\sigma} \circ \zeta_{\tilde{Z}}$.

Полагая теперь $Z_a = \tilde{Z}$, $\mathbf{M}_a = \tilde{\mathbf{M}}$, $\mathbf{Y}_a = \tilde{\mathbf{Y}}$, $\hat{\theta}_a = \theta_{\mathbf{M}}$, $\hat{\theta}_a = \theta_{\mathbf{Y}}$, $\tau_a = \tau_{\tilde{Z}}$, $\zeta_a = \zeta_{\tilde{Z}}$ в формулах (11.27), мы видим, что предыдущие соотношения для композиций морфизмов совпадают с соотношениями (11.27). Поэтому снова верны равенства (11.27)–(11.29) и диаграмма (11.30). Кроме того, согласно (7.9) имеем $\dim \tilde{Z} = \dim Z_c \geq 4m(m+2)$. Отсюда, как и в замечании 11.4, получаем $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = \bar{Z}_c$, где оба замыкания берутся в $\mathbf{S}_{2m}$. Однако $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = \bar{Z}$ согласно замечанию 11.4, откуда $\bar{Z}_c = \bar{Z}$. Тем самым, и $Z_c = Z$ вопреки условию предложения.

11.4. Завершение доказательства теоремы 7.2. Мы докажем неприводимость Z_m , а сюръективность проекции $p_m: Z \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, $(D, \varphi) \mapsto D$, будет вытекать из этого доказательства. Во-первых, Z_m содержит неприводимую компоненту Z , введенную в предложении 8.1. Предположим, что существует другая неприводимая компонента Z' в Z_m .

Пусть $b: \Phi_m \setminus \{0\} \rightarrow P(\Phi_m)$, $\varphi \mapsto \langle \varphi \rangle$, – каноническая проекция, и пусть $\mathbf{b} := \text{id} \times b: (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times (\Phi_m \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times P(\Phi_m)$ – индуцированная проекция. Уравнения Z_m в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi_m$ (см. (7.4), (7.5)) однородны по отношению к аффинным координатам в Φ_m , поэтому существуют замкнутые неприводимые подмножества $\underline{Z}$ и $\underline{Z}'$ и замкнутое подмножество $\underline{Z}_m$ в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times P(\Phi_m)$ такие,

что $Z = \mathbf{b}^{-1}(\underline{Z}) \cup \{0\}$ и, соответственно, $Z' = \mathbf{b}^{-1}(\underline{Z}') \cup \{0\}$, $Z_m = \mathbf{b}^{-1}(\underline{Z}_m) \cup \{0\}$. Более того, по конструкции $\underline{Z}$ и $\underline{Z}'$ – неприводимые компоненты в $\underline{Z}_m$.

Рассмотрим произвольную точку

$$y = (D_0, \langle \varphi \rangle) \in \underline{Z}' \setminus \underline{Z}' \cap \underline{Z} \quad (11.32)$$

и проективное пространство $\mathbb{P} = \{D_0\} \times P(\Phi_m)$, $\dim \mathbb{P} = 6m^2 - 1$. По определению множества $\underline{Z}_m(D_0) = \underline{Z}_m \cap \mathbb{P}$ и $\underline{Z}'(D_0) = \underline{Z}' \cap \mathbb{P}$ являются замкнутыми подмножествами в $\mathbb{P}$ и такими, что

$$y \in \underline{Z}'(D_0) \subset \underline{Z}_m(D_0), \quad (11.33)$$

и по замечанию 7.1 имеем $\text{codim}_{\mathbb{P}} \underline{Z}_m(D_0) \leq 5m(m-1)$, т. е.

$$\dim_{\mathbb{P}} \underline{Z}_m(D_0) \geq m^2 + 5m - 1 \geq 1, \quad m \geq 1. \quad (11.34)$$

По определению подмножество $\underline{Z}_m(D_0)$ задается в $\mathbb{P}$ посредством $5m(m-1)$ глобальными уравнениями вида $\varphi^\vee \circ D_0 \circ \varphi \in \mathbf{S}_m$, которые являются однородными уравнениями степени 2 по координатам в Φ .

ЛЕММА 11.9. Пусть X – теоретико-множественное полное пересечение $r = 5m(m-1)$ гиперквадрик в проективном пространстве $\mathbb{P}$ размерности $N = 6m^2 - 1$. Тогда X связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим векторное пространство $\mathbf{V} := H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2))$ и грассманиан $G := G(r, \mathbf{V})$. Пусть $i: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{V} \otimes \mathcal{O}_G$ – тавтологическое подрасслоение. На $G \times \mathbb{P}$ рассмотрим композицию морфизмов $s: \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{i} \mathbf{V} \otimes \mathcal{O}_{G \times \mathbb{P}} \xrightarrow{\text{ev}} \mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)$, где ev – морфизм вычисления. Пусть $\Gamma = (s)_0$ – схема нулей сечения s с проекциями $G \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} \mathbb{P}$. По построению для произвольной точки $x \in \mathbb{P}$ слой $q^{-1}(x)$ изоморфен $G(r, H^0(\mathcal{I}_{x, \mathbb{P}}(2)))$, так что q – гладкий проективный морфизм, а тем самым, Γ – гладкое проективное многообразие. При этом слой $p^{-1}(y)$ над общей точкой $y \in G$ есть полное пересечение r гиперквадрик, имеющее коразмерность r в $\mathbb{P}$, т. е. имеющее положительную размерность. Хорошо известно и легко показать, что это полное пересечение связно. Тем самым, в силу разложения Штейна (см. [14, гл. III, п. 11.5]) слой $p^{-1}(y)$ над произвольной точкой $y \in G$, являющийся теоретико-множественным полным пересечением r гиперквадрик, связан. Лемма доказана.

Применяя лемму 11.9 к $X = \underline{Z}_m(D_0)$, ввиду (11.34) получаем, что множество $\underline{Z}_m(D_0)$ связно.

Далее, в силу предложения 8.1, (ii) морфизм $\text{pr}_1: Z \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, $(D, \varphi) \mapsto D$, доминантен, так что индуцированный проективный морфизм $\text{pr}: \underline{Z} \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, $(D, \langle \varphi \rangle) \mapsto D$, также доминантен, а значит, сюръективен, поскольку $\underline{Z}$ замкнуто в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times P(\Phi_m)$. В частности, множество $\underline{Z}(D_0) = \underline{Z} \cap \mathbb{P}$ является непустым замкнутым подмножеством в $\underline{Z}_m(D_0)$. Кроме того, в силу (11.32) получаем, что $y \in \underline{Z}_m(D_0) \setminus \underline{Z}(D_0)$. Поэтому, так как $\underline{Z}_m(D_0)$ связно, оно содержит неприводимую компоненту, скажем $\underline{Z}^0(D_0)$, отличную от $\underline{Z}(D_0)$ и пересекающую $\underline{Z}(D_0)$. Пусть $\underline{Z}^0$ – неприводимая компонента в $\underline{Z}_m$, содержащая $\underline{Z}^0(D_0)$, а значит, отличная от $\underline{Z}(D_0)$. Таким образом, имеем

$$\underline{Z} \cap \underline{Z}^0 \neq \emptyset. \quad (11.35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.10. Сюръективность проективного морфизма $\text{pr}: \underline{Z} \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$, очевидно, влечет сюръективность проекции $p_m = \text{pr}_1: Z \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$.

Пусть $Z^0 = \mathbf{b}^{-1}(\underline{Z}^0) \cup \{0\}$ и Z_c – объединение всех неприводимых компонент в Z_m , отличных от Z . По построению имеем $Z_c \supset Z^0$, а значит, ввиду соотношения (11.35) существует точка

$$z_0 = (D, \varphi) \in Z \cap Z_c, \quad \varphi \neq 0. \quad (11.36)$$

Введем в $\mathbf{S}_m^\vee$ и Φ аффинные координаты x_i , $1 \leq i \leq M := 3m(m+1)$, и y_j , $1 \leq j \leq 6m^2$, соответственно и дополним $\mathbf{S}_m^\vee \times \Phi$ как аффинное пространство до проективного пространства $\mathbb{P}^N$, $N := 3m(3m+1)$, с проективными координатами $w_0, \dots, w_N$ такими, что $x_i = w_i/w_0$, $1 \leq i \leq M$, $y_j = w_{M+j}/w_0$, $1 \leq j \leq 6m^2$. Пусть $\bar{Z}_m$, $\bar{Z}$ и $\bar{Z}_c$ – замыкания в $\mathbb{P}^N$ множеств Z_m , Z и Z_c соответственно. Поскольку уравнения $\varphi^\vee \circ D_0 \circ \varphi \in \mathbf{S}_m$ множества Z_m в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Phi$ однородны степени 1 по координатам x_i и степени 2 по координатам y_j , уравнения $\bar{Z}_m$ однородны степени 3 по координатам w_i в $\mathbb{P}^N$. Пусть $\{F_1 = \dots = F_r = 0\}$ – эти уравнения. Выберем теперь в $\mathbb{P}^N$ гиперплоскости $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ общего положения такие, что

$$z_0 \notin \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_r, \quad \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_r =: \mathbb{P}^{N-r} \not\subset \bar{Z} \cup \bar{Z}_c, \quad (11.37)$$

где $\mathbb{P}^{N-r}$ – подпространство коразмерности r в $\mathbb{P}^N$. Пусть $\Pi_i = \{L_i = 0\}$, $1 \leq i \leq r$. Рассмотрим в $\mathbb{P}^N$ подмножество Y , заданное уравнениями $\{F_1 L_1 = \dots = F_r L_r = 0\}$. Заметим, что Y ввиду (11.37) содержит подпространство $\mathbb{P}^{N-r}$ и многообразие $\bar{Z}$ в качестве неприводимых компонент, а также содержит $\bar{Z}_c$ в качестве компоненты. Обозначим через Y_0 замыкание в $\mathbb{P}^N$ множества $Y \setminus \bar{Z}$.

Рассмотрим вложение Веронезе $v_4: \mathbb{P}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_1} := P(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(4))^\vee)$. отождествим $\mathbb{P}^N$ с $v_4(\mathbb{P}^N)$ и, тем самым, $\bar{Z}$, $\bar{Z}_c$, Y и $\mathbb{P}^{N-r}$ с их образами при v_4 . Рассмотрим в $\mathbb{P}^{N_1}$ подпространство $\mathbb{P}^{N_2} := \text{Span}(\bar{Z})$, и пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^{N_1} \rightarrow \mathbb{P}^{N_1}$ – раздутие $\mathbb{P}^{N_1}$ вдоль подпространства $\mathbb{P}^{N_2}$ и $\tilde{\mathbb{P}}^N := \sigma^{-1}(\mathbb{P}^N)$. Линейная проекция $\mathbb{P}^{N_1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_3} := P(\mathbf{W}^\vee)$, где $\mathbf{W} := H^0(\mathcal{I}_{\bar{Z}, \mathbb{P}^N}(4))$, продолжается до морфизма $\pi: \tilde{\mathbb{P}}^{N_1} \rightarrow \mathbb{P}^{N_3}$. Пусть $G := G(r, \mathbf{W})$, $\Gamma \subset \mathbf{P}^{N_3} \times G$ – график инциденции с проекциями $G \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} \mathbb{P}$, $\tilde{X} := \tilde{\mathbb{P}}^{N_1} \times_{\mathbb{P}^{N_3}} \Gamma$ и $\pi_X: \tilde{X} \rightarrow \Gamma$ – проекция. По построению исключительный дивизор D раздутия σ изоморфен $\mathbb{P}^{N_2} \times \mathbb{P}^{N_3}$ и содержит подмногообразие $\bar{Z} \times \mathbb{P}^{N_3}$. Тем самым, $\tilde{X}$ содержит подмногообразие $\bar{Z} \times \Gamma$. Рассмотрим замыкание X множества $U = \tilde{X} \setminus (\bar{Z} \times \Gamma)$ в $\tilde{\mathbb{P}}^{N_1} \times_{\mathbb{P}^{N_3}} \Gamma$, и пусть $\tilde{\mathbb{P}}^{N_1} \xrightarrow{q_X} X \xrightarrow{\pi_X} \Gamma$ и $q_X := q \circ \pi_X: X \rightarrow G$ – проекции. Для произвольной точки $y \in G$ обозначим через X_y образ слоя $q_X^{-1}(y)$ при морфизме $\sigma_y := \sigma \circ p_X|_{q_X^{-1}(y)}$. По построению X неприводимо, и все слои проекции q_X имеют размерность не менее $N - r$.

Пусть $y_0 \in G$ – точка, соответствующая уравнениям $\{F_1 L_1 = \dots = F_r L_r = 0\}$. По построению X_{y_0} содержит множество Y_0 , описанное выше, и содержится в $Y_0 \cup \bar{Z}$:

$$Y_0 \subset X_{y_0} \subset Y_0 \cup \bar{Z}. \quad (11.38)$$

Поскольку Y_0 содержит в качестве компоненты подпространство $\mathbb{P}^{N-r}$, определенное в (11.37), то $\tilde{\mathbb{P}}^{N-r} := (\sigma_{y_0})_{\text{групп}}^{-1}(\mathbb{P}^{N-r})$ – компонента слоя $q_X^{-1}(y_0)$, имеющая размерность $N - r$ ввиду бирациональности морфизма $\sigma_{y_0}: \tilde{\mathbb{P}}^{N-r} \rightarrow \mathbb{P}^{N-r}$. Тем самым, слой $q_X^{-1}(y)$ над общей точкой $y \in G$ неприводим и имеет размерность $N - r$. При этом $\sigma_y: q_X^{-1}(y) \rightarrow X_y$ – бирациональный морфизм, и по

построению $X_y \cup \bar{Z}$ – полное пересечение r гиперповерхностей степени 4 в $\mathbb{P}^N$. Оно имеет коразмерность r в $\mathbb{P}^N$, а значит, согласно принципу связности локально полных пересечений в коразмерности 1 (см. [19]) получаем

$$\dim_z(\bar{Z} \cap X_y) = \dim \bar{Z} - 1, \quad z \in \bar{Z} \cap X_y. \quad (11.39)$$

Теперь возьмем произвольную общую точку $y \in G$ и произвольную точку $z(y)$ в многообразии $X_y \setminus (X_y \cap Y_0)$. Пусть $\mathbb{P}^1$ – прямая в $\mathbb{P}^N$, соединяющая точки z_0 и $z(y)$, $\tilde{C}$ – собственный прообраз прямой $\mathbb{P}^1$ при бирациональной проекции $\sigma \circ p_X: X \rightarrow \mathbb{P}^N$, так что $\nu = (\sigma \circ p_X|_{\tilde{C}})^{-1}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \tilde{C}$ – изоморфизм ввиду гладкости $\mathbb{P}^1$. Рассмотрим композицию $\varphi: \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu} \tilde{C} \xrightarrow{q_X} G$. По построению имеем $\varphi(z_0) = y_0$, и существует окрестность C точки z_0 в $\mathbb{P}^1$ такая, что для всех точек $z \in C \setminus \{z_0\}$ слои X_y для $y = \varphi(z)$ неприводимы, имеют размерность $N-r$ и удовлетворяют равенству (11.39). Рассмотрим схему $X_C := X \times_G C$ и естественные вложения схем $X_C \subset \tilde{T} := C \times \bar{Z} \cup X_C \subset C \times \mathbb{P}^N$. По построению слой проекции $p_{\tilde{T}}: \tilde{T} \rightarrow C$ над каждой точкой $y \in C$ есть теоретико-множественное пересечение r гиперповерхностей степени 4 в $\{y\} \times \mathbb{P}^N$. Пусть T – единственная неприводимая компонента в X_C , для которой проекция $p_T := p_{\tilde{T}}|_T: T \rightarrow C$ доминантна. Заметим, что $\bar{Z}$ как компонента слоя $p_{\tilde{T}}^{-1}(z_0)$ является целой схемой ввиду целостности Z . Поэтому, так как $\bar{Z}$ – слой над y_0 проекции $p_{\tilde{T}}|_{C \times \bar{Z}}$, слой $T_{z_0} := p_T^{-1}(z_0)$ не содержит $\bar{Z}$. Однако по построению $T_{z_0} \subset X_{y_0}$. Поэтому ввиду (11.38) имеем $T_{z_0} \subset Y_0$. Более того, из построения прямой $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^N$ следует, что $z_0 \in T_{z_0}$. С другой стороны, по условию для любого $z \in C \setminus \{z_0\}$ слой $X_y = p_T^{-1}(z)$ для $y = \varphi(z)$ удовлетворяет (11.39). Следовательно, и $\text{codim}_{\bar{Z}}(\bar{Z} \cap T_{z_0}) = 1$. Поскольку $z_0 \in T_{z_0} \subset Y_0$, то $\text{codim}_{\bar{Z}}(\bar{Z} \cap Y_0) = 1$ и $z_0 \in \bar{Z} \cap Y_0$. Наконец, из условий (11.37) и уравнений $\{F_1 L_1 = \dots = F_r L_r = 0\}$ следует, что $z_0 \notin Y$ для любой неприводимой компоненты Y в Y_0 , не содержащейся в $\bar{Z}_c$. Следовательно, $\text{codim}_{\bar{Z}}(\bar{Z} \cap \bar{Z}_c) = 1$ и, в частности, $\dim_{z_0}(\bar{Z} \cap \bar{Z}_c) = \dim \bar{Z} - 1$. Так как $z_0 \in Z \cap Z_c$ в силу (11.36), отсюда следует, что $\dim_{z_0}(Z \cap Z_c) = \dim Z - 1$. Итак, пересечение $Z \cap Z_c$ содержит дивизор Вейля в Z вопреки предложению 11.8. Следовательно, Z_m неприводимо.

Сюръективность морфизма $p_m: Z_m \rightarrow (\mathbf{S}_m^\vee)^0$ уже упоминалась в замечании 11.10. Теорема 7.2 доказана.

§ 12. Приложение: два результата общего положения

В этом параграфе мы доказываем теорему 4.1 и предложение 7.3.

12.1. Доказательство теоремы 4.1. Сначала напомним некоторые определения и стандартные факты из теории детерминантных многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Пусть U и U' – два векторных пространства размерности соответственно m и n , где $m \geq n$. Рассмотрим проективное пространство $P(U \otimes U')$. Говорят, что точка $x \in P(U \otimes U')$ имеет ранг r (и обозначают $\text{rk}(x) = r$), если:

- i) существуют единственные подпространства $U_r(x) \subset U$ и $U'_r(x) \subset U'$ размерностей $\dim U_r(x) = \dim U'_r(x) = r$ такие, что $x \in P(U_r(x) \otimes U'_r(x))$;
- ii) не существуют подпространства $\tilde{U} \subset U$ и $\tilde{U}' \subset U'$ размерности $\dim \tilde{U} = \dim \tilde{U}' < r$ такие, что $x \in P(\tilde{U} \otimes \tilde{U}')$.

Хорошо известна следующая лемма из теории детерминантных многообразий (см., например, [20]).

ЛЕММА 12.2. *Для каждой точки $x \in P(U \otimes U')$ однозначно определен ее ранг $\text{rk}(x)$, $1 \leq \text{rk}(x) \leq n$. Более того, для данной точки $x \in P(U \otimes U')$ ранга $\text{rk}(x) = r$ такой, что $x \in W \otimes W'$ для некоторых подпространств $W \subset U$ и $W' \subset U'$, подпространства $U_r(x) \subset U$ и $U'_r(x) \subset U'$ размерностей $\dim U_k(x) = \dim U'_k(x) = r$ из определения 12.1, i) таковы, что $U_r(x) \subset W$ и $U'_r(x) \subset W'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. В соответствии с определением 12.1, в котором мы полагаем $U = H_{2m+1}^\vee$, $U' = V^\vee$, каждая точка $x \in P(H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee)$ имеет ранг⁶ $1 \leq \text{rk}(x) \leq \dim V^\vee = 4$. Таким образом,

$$P(W_{4m+4}^\vee) = \bigcup_{r=1}^4 Z_r, \quad (12.1)$$

где

$$Z_r := \{x \in P(W_{4m+4}^\vee) \mid \text{rk}(x) = r\}, \quad 1 \leq r \leq 4,$$

– локально замкнутые подмножества в $P(W_{4m+4}^\vee)$. Рассмотрим грассманиан

$$G := G(m, H_{2m+1}^\vee)$$

и его локально замкнутые подмножества

$$\Sigma_r := \{V_m \in G \mid V_m \supset U_r(x) \text{ для некоторой точки } x \in Z_r\}, \quad 1 \leq r \leq 4. \quad (12.2)$$

Ввиду леммы 12.2 условие $x \in Z_r \cap P(V_m \otimes V^\vee)$ означает, что $x \in Z_r \cap P(U_r \otimes V^\vee)$ для некоторого r -мерного подпространства $U_r = U_r(x) \subset V_m$. Отсюда и из (12.1) и (12.2) следует, что

$$\{V_m \in G \mid P(V_m \otimes V^\vee) \cap P(W_{4m+4}^\vee) \neq \emptyset\} = \bigcup_{r=1}^4 \Sigma_r.$$

Таким образом, утверждение теоремы равносильно тому, что $\bigcup_{r=1}^4 \Sigma_r \subsetneq G$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\dim \Sigma_r < \dim G, \quad 1 \leq r \leq 4. \quad (12.3)$$

Итак, переходим к доказательству неравенств (12.3) для $r = 4, 3, 2, 1$.

Случай $r = 4$. Положим $\Gamma_4 := \{(x, U) \in P(W_{4m+4}^\vee) \times G(4, H_{2m+1}^\vee) \mid \text{rk}(x) = 4, U = U_4(x)\}$, и пусть $P(W_{4m+4}^\vee) \xleftarrow{p_4} \Gamma_4 \xrightarrow{q_4} G(4, H_{2m+1}^\vee)$ – проекции. По построению имеем $p_4(\Gamma_4) = Z_4$, и по определению 12.1, i) проекция $p_4: \Gamma_4 \rightarrow Z_4$ биективна. Следовательно,

$$\dim q_4(\Gamma_4) \leq \dim \Gamma_4 = \dim Z_4 \leq \dim P(W_{4m+4}^\vee) = 4m + 3.$$

По построению имеем график инциденции

$$\Pi_4 = \{(U, V_m) \in q_4(\Gamma_4) \times \Sigma_4 \mid U \subset V_m\}$$

⁶Всюду в этом доказательстве под рангом точки x из данного подпространства в $P(H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee)$ понимается ее ранг как точки в $P(H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee)$.

с сюръективными проекциями $q_4(\Gamma_4) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_4 \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_4$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq G(m-4, H_{2m+1}^\vee/U) \quad (12.4)$$

над произвольной точкой $U \in q_4(\Gamma_4)$. (В самом деле, условие $U \subset V_m \subset H_{2m+1}^\vee$ означает, что $V_m/U \in G(m-4, H_{2m+1}^\vee/U)$.) Тем самым,

$$\begin{aligned} \dim \Sigma_4 &\leq \dim \Pi_4 = \dim q_4(\Gamma_4) + \dim G(m-4, H_{2m+1}^\vee/U) \\ &\leq 4m+3 + (m-4)(m+1) = m(m+1) - 1 = \dim G - 1 < \dim G, \end{aligned}$$

т. е. (12.3) верно для $r = 4$.

Случай $r = 3$. Рассмотрим проекцию $f_3: Z_3 \rightarrow P(V^\vee)^\vee = \mathbb{P}^3$, $x \mapsto V_3(x)$, где пара 3-мерных пространств $(U_3(x), V_3(x))$, $U_3(x) \subset H_{2m+1}^\vee$ и $V_3(x) \subset V^\vee$, определена однозначно точкой x в силу условия $x \in P(U_3(x) \otimes V_3(x))$, поскольку $\text{rk}(x) = 3$ (см. определение 12.1 и лемму 12.2). Теперь для данного 3-мерного подпространства $V_3 \subset V^\vee$ положим

$$\Sigma_3(V_3) = \{V_m \in G \mid V_m \supset U_3(x) \text{ для некоторой точки } x \in f_3^{-1}(V_3)\}. \quad (12.5)$$

Сравнивая это с (12.2) для $r = 3$ мы получим

$$\Sigma_3 = \bigcup_{V_3 \subset V^\vee} \Sigma_3(V_3). \quad (12.6)$$

Заметим, что априори f_3 не обязательно сюръективно. Поэтому

$$\dim \Sigma_3 \leq \dim \Sigma_3(V_3) + 3. \quad (12.7)$$

Наша цель – получить оценку размерности множества $\Sigma_3(V_3)$ для произвольного 3-мерного подпространства V_3 в $V^\vee$. Это подпространство определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & \mathcal{I}_z(-1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_z & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & \mathbf{k}_z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (12.8)$$

где $z = P(\ker: V \rightarrow V_3^\vee)$ – точка в $\mathbb{P}^3$, а пучок F имеет $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -резольвенту $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \rightarrow F \rightarrow 0$. Подкручивая эту резольвенту на векторное расслоение E и переходя к когомологиям, получаем равенства $H^1(F \otimes E) \simeq H^2(E(-3)) = H_{2m+1}$, $H^2(F \otimes E) = 0$. Соответственно, переходя к когомологиям в диаграмме (12.8), подкрученной на E , и используя последние равенства, а также очевидные соотношения $H^0(E \otimes \mathbf{k}_z) \simeq \mathbf{k}^2$, $H^1(E \otimes \mathbf{k}_z) = 0$, получаем

диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & \mathbf{k}^2 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1} & \longrightarrow & W_{4m+4}^\vee & \longrightarrow & H^1(E \otimes \mathcal{I}_z(-1)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_3 & \xrightarrow{\lambda} & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{mult} & & \downarrow \\
 \mathbf{k}^2 & \twoheadrightarrow & H^1(E \otimes \mathcal{I}_z) & \longrightarrow & H_{4m}^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (12.9)$$

В этой диаграмме композиция $\varepsilon := \text{mult} \circ \lambda$ сюръективна. Следовательно, полагая $W_{2m+3}(V_3) := \ker \varepsilon$, где $\dim W_{2m+3}(V_3) = 2m + 3$, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & W_{2m+3}(V_3) & \longrightarrow & W_{4m+4}^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_3 & \xrightarrow{\lambda} & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \text{mult} & & \\
 & & H_{4m}^\vee & \xlongequal{\quad} & H_{4m}^\vee & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

из которой имеем соотношение

$$W_{2m+3}(V_3) = H_{2m+1}^\vee \otimes V_3 \cap W_{4m+4}^\vee, \quad (12.10)$$

где пересечение берется в $H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee$. Пусть

$$Z_3(V_3) := \{x \in P(W_{2m+3}(V_3)) \mid \text{rk}(x) = 3\}.$$

Соотношение (12.10) и лемма 12.2 влекут биекцию

$$Z_3(V_3) \xrightarrow{\cong} f_3^{-1}(V_3). \quad (12.11)$$

Рассмотрим график инциденции $\Gamma_3(V_3) := \{(x, U) \in Z_3(V_3) \times G(3, H_{2m+1}^\vee) \mid U = U_3(x)\}$ с проекциями $Z_3(V_3) \xleftarrow{p_3} \Gamma_3(V_3) \xrightarrow{q_3} G(3, H_{2m+1}^\vee)$. По лемме 12.2 имеем $p_3(\Gamma_3(V_3)) = Z_3(V_3)$ и проекция $p_3: \Gamma_3(V_3) \rightarrow Z_3(V_3)$ является биекцией. Следовательно,

$$\dim q_3(\Gamma_3(V_3)) \leq \dim \Gamma_3(V_3) = \dim Z_3(V_3) \leq \dim P(W_{2m+3}(V_3)) = 2m + 2. \quad (12.12)$$

Рассмотрим график инциденции

$$\Pi_3(V_3) = \{(U, V_m) \in q_3(\Gamma_3(V_3)) \times \Sigma_3(V_3) \mid U \subset V_m\}$$

с проекциями $q_3(\Gamma_3(V_3)) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_3(V_3) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_3(V_3)$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq G(m-3, H_{2m+1}^\vee/U) \quad (12.13)$$

над произвольной точкой $U \in q_3(\Gamma_3(V_3))$ (ср. (12.4)). Проекция $\Pi_3(V_3) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_3(V_3)$ сюръективна ввиду (12.11). Поэтому, используя (12.12), получаем

$$\begin{aligned} \dim \Sigma_3(V_3) &\leq \dim \Pi_3(V_3) = \dim q_3(\Gamma_3(V_3)) + \dim G(m-3, H_{2m+1}^\vee/U) \\ &\leq 2m+2 + (m-3)(m+1) = m^2 - 1. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (12.7) и предположения $m \geq 3$ имеем $\dim \Sigma_3 \leq m^2 + 2 = \dim G + 2 - m < \dim G$, т. е. (12.3) выполнено для $r = 3$.

Перед тем как перейти к рассмотрению случая $r = 2$, необходимо сделать небольшое отступление, касающееся свойств прямых кратного подскока расслоения E . Эти свойства будут сформулированы в лемме 12.3, которой мы воспользуемся ниже. Введем обозначения. Для данной прямой $l \subset \mathbb{P}^3$ имеем $E|l \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$, где d – корректно определенное неотрицательное целое число, называемое *подскоком расслоения $E|l$* и обозначаемое также $d_E(l)$; соответственно, прямая l называется *прямой подскока d расслоения E* . Пусть $G_{2,4} := G(2, V^\vee)$ и $J_k(E) := \{l \in G_{2,4} \mid d_E(l) \geq k\}$, $J_k^*(E) := J_k(E) \setminus J_{k+1}(E)$, $k \geq 0$. По полунепрерывности $h^0(E|l)$ как функции от $l \in G_{2,4}$ получаем, что $J_k(E)$ (соответственно, $J_k^*(E)$) – замкнутое (соответственно, локально замкнутое) подмножество в $G_{2,4}$, $k \geq 0$. Более того, согласно известной теореме Грауэрта–Мюлиха [21, гл. II, п. 2.1.4, следствие 2] получаем, что $J_0^*(E)$ – открытое плотное подмножество в $G_{2,4}$. Далее, поскольку $E \in I'_{2m+1}$, имеем

$$J_{2m+1}(E) = \emptyset, \quad (12.14)$$

так что

$$J_{2m-1}(E) = J_{2m-1}^*(E) \sqcup J_{2m}^*(E). \quad (12.15)$$

Далее мы будем пользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 12.3. Пусть $E \in I'_{2m+1}$. Тогда:

- 1) $\dim J_{2m-1}(E) \leq 1$;
- 2) $\dim J_k^*(E) \leq 3$ для $1 \leq k \leq 2m-2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. пусть $\dim J_{2m-1}(E) \geq 2$. Рассмотрим произвольную неприводимую поверхность $S \subset J_{2m-1}(E)$, и пусть D – степень поверхности S относительно пучка $\mathcal{O}_{G_{2,4}}(1)$. Зафиксируем целое число $r \geq 5$ и возьмем неприводимую кривую C из линейного ряда $|\mathcal{O}_{G_{2,4}}(r)|_S|$. Тогда степень $\deg C$ кривой C относительно пучка $\mathcal{O}_{G_{2,4}}(1)$ равна Dr , а значит, $\deg C \geq 5$. Поэтому ввиду [22, лемма 6] существуют две различные прямые, скажем $l_1, l_2 \in C$, которые пересекаются в $\mathbb{P}^3$. Пусть $\mathbb{P}^2$ – проективная плоскость в $\mathbb{P}^3$, содержащая l_1 и l_2 . Из точной тройки $0 \rightarrow E(-2)|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E|_{l_1 \cup l_2} \rightarrow 0$ следует, что точна последовательность

$$H^0(E|_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^0(E|_{l_1 \cup l_2}) \rightarrow H^1(E(-2)|_{\mathbb{P}^2}). \quad (12.16)$$

Далее, поскольку $[E] \in I_{2m+1}$, имеем $h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = 0$, так что точная тройка

$$0 \rightarrow E(-2) \rightarrow E(-1) \rightarrow E(-1)|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow 0$$

влечет

$$H^0(E(-1)|_{\mathbb{P}^2}) = 0. \quad (12.17)$$

Теперь предположим, что $h^0(E|_{\mathbb{P}^2}) > 0$. Тогда сечение $0 \neq s \in H^0(E|_{\mathbb{P}^2})$ определяет сечение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{s} E|_{\mathbb{P}^2}$. Этот инъективный морфизм и (12.17) показывают, что схема нулей Z сечения s является 0-мерной и сечение s продолжается до тройки $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{s} E|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{I}_{Z, \mathbb{P}^2} \rightarrow 0$. Отсюда имеем

$$h^0(E|_{\mathbb{P}^2}) \leq 1. \quad (12.18)$$

Более того, из равенства (12.17), теоремы Римана–Роха и двойственности Серра для векторного расслоения $E(-1)|_{\mathbb{P}^2}$ следует, что $h^1(E(-2)|_{\mathbb{P}^2}) = 2m + 1$. Отсюда в силу (12.16) и (12.17) получаем

$$h^0(E|_{l_1 \cup l_2}) \leq 2m + 2. \quad (12.19)$$

С другой стороны, пусть $x := l_1 \cap l_2$. Поскольку по построению $l_1, l_2 \in J_{2m-1}(E)$, то из (12.15) следует, что либо

$$E|_{l_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2m-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1-2m),$$

либо

$$E|_{l_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2m),$$

откуда $h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_i}) \geq 2m - 1$, $i = 1, 2$. Это очевидным образом влечет неравенства

$$h^0(E|_{l_1 \cup l_2}) \geq h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_1 \cup l_2}) \geq h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_1}) + h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_2}) = 4m - 2.$$

Сравнивая их с (12.19), получаем неравенство $2m + 2 \geq 4m - 2$, т. е. $m \leq 2$. Это противоречит предположению $m \geq 3$. Отсюда следует утверждение 1).

Утверждение 2) немедленно следует из теоремы Грауэрта–Мюлиха.

Лемма доказана.

Случай $r = 2$. В этом случае наши обозначения и рассуждения параллельны приведенным выше для случая $r = 3$. Рассмотрим морфизм

$$f_2: Z_2 \rightarrow G_{2,4}, \quad x \mapsto V_2(x),$$

где пара 2-мерных пространств $(U_2(x), V_2(x))$ таких, что $U_2(x) \subset H_{2m+1}^\vee$ и $V_2(x) \subset V^\vee$, определена однозначно по точке x посредством условия $x \in P(U_2(x) \otimes V_2(x))$, поскольку $\text{rk}(x) = 2$ (см. лемму 12.2).

В соответствии с (12.14) мы можем считать, что $l \in J_k^*(E)$ для некоторого $0 \leq k \leq 2m$, т. е.

$$h^0(E|l) = 2, \quad h^1(E|l) = 0, \quad l \in J_0^*(E),$$

соответственно,

$$h^0(E|l) = k + 1, \quad h^1(E|l) = k - 1, \quad l \in J_k^*(E), \quad 1 \leq k \leq 2m. \quad (12.20)$$

Теперь для $1 \leq k \leq 2m$ и данного подпространства $V_2 \in J_k^*$ положим

$$\Sigma_{2,k}(V_2) = \{V_m \in G \mid V_m \supset U_2(x) \text{ для некоторой точки } x \in f_2^{-1}(V_2)\}. \quad (12.21)$$

Тогда по аналогии с (12.6) имеем

$$\Sigma_2 = \bigcup_{k=0}^{2m} \bigcup_{V_2 \in J_k^*} \Sigma_{2,k}(V_2).$$

Следовательно, в силу леммы 12.3 получаем

$$\dim \Sigma_2 \leq \max_{\substack{V_2 \in J_k^* \\ 0 \leq k \leq 2m}} (\dim \Sigma_{2,k}(V_2) + \dim J_k^*). \quad (12.22)$$

Теперь получим оценку размерности множества $\Sigma_{2,k}(V_2)$ для всякого 2-мерного подпространства $V_2 \in J_k^*$, $0 \leq k \leq 2m$. Это подпространство определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) & \xrightarrow{s} & \Omega_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & V'_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_l & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & \mathcal{O}_l \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (12.23)$$

где $V'_2 := V^\vee/V_2$, $l = P((V'_2)^\vee)$ — прямая в $\mathbb{P}^3$, а $F := \text{сокер } s$. Переходя к когомологиям в диаграмме (12.23), подкрученной на E , получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & H^0(E|l) & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & W_{4m+4}^\vee & \xlongequal{\quad} & H^1(E \otimes F) & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_2 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V'_2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{mult} & & \downarrow \varepsilon_2 \\ H^0(E|l) & \longrightarrow & H^1(E \otimes \mathcal{I}_l) & \longrightarrow & H_{4m}^\vee & \xrightarrow{\varepsilon_1} & H^1(E|l) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array} \quad (12.24)$$

Предположим сначала, что $1 \leq k \leq 2m$. (Случай $k = 0$ будет рассмотрен далее.) В этом случае (12.20) и диаграмма (12.24) приводят к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & W_{k+1}(V_2) & \longrightarrow & W_{4m+4}^\vee & \longrightarrow & \ker \varepsilon_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_2 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_2' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{mult} & & \downarrow \varepsilon_2 \\
 0 & \longrightarrow & \ker \varepsilon_1 & \longrightarrow & H_{4m}^\vee & \xrightarrow{\varepsilon_1} & H^1(E|l) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

где мы полагаем $W_{k+1}(V_2) := H^0(E|l)$. Здесь в соответствии с (12.20) имеем $\dim W_{k+1}(V_2) = k + 1$, $\dim \ker \varepsilon_1 = 4m - k + 1$, $\dim \ker \varepsilon_2 = 4m - k + 3$. Эта диаграмма дает соотношение (ср. (12.10))

$$W_{k+1}(V_2) = H_{2m+1}^\vee \otimes V_2 \cap W_{4m+4}^\vee, \quad (12.25)$$

где пересечение берется в $H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee$. Положим

$$Z_{2,k}(V_2) := \{x \in P(W_{k+1}(V_2)) \mid \text{rk}(x) = 2\}.$$

Соотношение (12.25) и лемма 12.2 влекут биекцию

$$Z_{2,k}(V_2) \xrightarrow{\sim} f_2^{-1}(V_2). \quad (12.26)$$

Рассмотрим график инциденции $\Gamma_{2,k}(V_2) := \{(x, U) \in Z_{2,k}(V_2) \times G(2, H_{2m+1}^\vee) \mid U = U_2(x)\}$ с проекциями $Z_{2,k}(V_2) \xleftarrow{p_2} \Gamma_{2,k}(V_2) \xrightarrow{q_2} G(2, H_{2m+1}^\vee)$. По построению $p_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) = Z_{2,k}(V_2)$ и проекция $p_2: \Gamma_{2,k}(V_2) \rightarrow Z_{2,k}(V_2)$ биективна. Следовательно,

$$\dim q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) \leq \dim \Gamma_{2,k}(V_2) = \dim Z_{2,k}(V_2) \leq \dim P(W_{k+1}(V_2)) = k. \quad (12.27)$$

Рассмотрим график инциденции

$$\Pi_{2,k}(V_2) = \{(U, V_m) \in q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) \times \Sigma_{2,k}(V_2) \mid U \subset V_m\}$$

с проекциями $q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_{2,k}(V_2) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_{2,k}(V_2)$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq G(m-2, H_{2m+1}^\vee/U)$$

над произвольной точкой $U \in q_2(\Gamma_{2,k}(V_2))$ (ср. (12.4) и (12.13)). Проекция $\Pi_{2,k}(V_2) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_{2,k}(V_2)$ сюръективна ввиду (12.26). Отсюда, используя соотношение (12.27), получаем

$$\begin{aligned}
 \dim \Sigma_{2,k}(V_2) &\leq \dim \Pi_{2,k}(V_2) = \dim q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) + \dim G(m-2, H_{2m+1}^\vee/U) \\
 &\leq k + (m-2)(m+1) = m^2 - m - 2 + k \\
 &= \dim G - (2m - k + 2), \quad 1 \leq k \leq 2m.
 \end{aligned} \quad (12.28)$$

Теперь рассмотрим случай $k = 0$. В этом случае имеем $h^0(E|l) = 2$ и, соответственно, $\dim q_2(\Gamma_{2,0}(V_2)) \leq \dim \Gamma_{2,0}(V_2) = \dim Z_{2,0}(V_2) \leq \dim P(W_1(V_2)) = 1$ вместо (12.27). Следовательно, по аналогии с изложенным выше получаем для $k = 0$

$$\dim \Sigma_{2,0}(V_2) \leq 1 + (m-2)(m+1) = m^2 - m - 1 = \dim G - (2m+1).$$

Последнее неравенство вместе с (12.28), (12.22), леммой 12.3 и предположением $m \geq 3$ влечет $\dim \Sigma_2 < \dim G$, т. е. (12.3) верно для $r = 2$.

Случай $r = 1$. Здесь наши обозначения и рассуждения аналогичны приведенным выше для случаев $r = 4, 3, 2$. Рассмотрим проекцию $f_1: Z_1 \rightarrow P(V^\vee) = (\mathbb{P}^3)^\vee$, $x \mapsto V_1(x)$, где пара 1-мерных пространств $(U_1(x), V_1(x))$, $U_1(x) \subset H_{2m+1}^\vee$ и $V_1(x) \subset V^\vee$, однозначно определена точкой x в силу условия $x \in P(U_1(x) \otimes V_1(x))$, поскольку $\text{rk}(x) = 1$ (см. лемму 12.2). Теперь для данного подпространства $V_1 \in (\mathbb{P}^3)^\vee$ положим

$$\Sigma_1(V_1) := \{V_m \in G \mid V_m \supset U_1(x) \text{ для некоторой точки } x \in f_1^{-1}(V_1)\}.$$

Тогда по аналогии с (12.6) имеем

$$\Sigma_1 = \bigcup_{V_1 \in (\mathbb{P}^3)^\vee} \Sigma_1(V_1). \quad (12.29)$$

Следовательно,

$$\dim \Sigma_1 \leq \dim \Sigma_1(V_1) + 3. \quad (12.30)$$

Теперь получим оценку размерности множества $\Sigma_1(V_1)$ для произвольного 1-мерного подпространства V_1 в $V^\vee$. Подпространство V_1 определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \Omega_{\mathbb{P}^3} & \xlongequal{\quad} & \Omega_{\mathbb{P}^3} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & V_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & V_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (12.31)$$

Заметим, что точке $V_1 \in (\mathbb{P}^3)^\vee$ соответствует проективная плоскость $P(V_1)$ в $\mathbb{P}^3$, и положим $B(E) := \{V_1 \in (\mathbb{P}^3)^\vee \mid h^0(E|_{P(V_1)}) \neq 0\}$. Известно, что $\dim B(E) \leq 2$ для $m \geq 1$ (см. [3]). Более того, ввиду (12.18) имеем

$$h^0(E|_{P(V_1)}) = 1, \quad V_1 \in B(E). \quad (12.32)$$

Переходя к когомологиям в диаграмме (12.31), подкрученной на E , и используя равенство $h^0(E) = 0$ для $[E] \in I_{2m+1}$, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & H^0(E|_{P(V_1)}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & W_{4m+4}^\vee & \xlongequal{\quad} & W_{4m+4}^\vee & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_1 & \xrightarrow{\lambda} & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \text{mult} & & \downarrow \\
 H^0(E|_{P(V_1)}) & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee & \longrightarrow & H_{4m}^\vee & \longrightarrow & H^1(E|_{P(V_1)}) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (12.33)$$

Пусть $V_1 \in B(E)$. Полагая $W(V_1) := \ker(\text{mult} \circ \lambda) = H^0(E|_{P(V_1)})$, где $\dim W_1(V_1) = 1$ согласно (12.32), получим из (12.33) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & W_1(V_1) & \longrightarrow & W_{4m+4}^\vee & \longrightarrow & W_{4m+4}^\vee / W_1(V_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_1 & \xrightarrow{\lambda} & H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee \otimes V_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \text{mult} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m+1}^\vee / W_1(V_1) & \longrightarrow & H_{4m}^\vee & \longrightarrow & H^1(E|_{\mathbb{P}^2(V_1)}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

и, тем самым, соотношение

$$W_1(V_1) = H_{2m+1}^\vee \otimes V_1 \cap W_{4m+4}^\vee, \quad (12.34)$$

где пересечение берется в $H_{2m+1}^\vee \otimes V^\vee$. Положим

$$Z_1(V_1) := \begin{cases} \emptyset, & \text{если } V_1 \neq B(E), \\ P(W_1(V_1)) = \{\text{pt}\}, & \text{если } V_1 \in B(E). \end{cases}$$

Соотношение (12.34) и лемма 12.2 влекут биекцию

$$Z_1(V_1) \xrightarrow{\cong} f_1^{-1}(V_1), \quad V_1 \in (\mathbb{P}^3)^\vee. \quad (12.35)$$

Рассмотрим график инциденции $\Gamma_1(V_1) := \{(x, U) \in Z_1(V_1) \times P(H_{2m+1}^\vee) \mid U = U_1(x)\}$ с проекциями $Z_1(V_1) \xleftarrow{p_1} \Gamma_1(V_1) \xrightarrow{q_1} P(H_{2m+1}^\vee)$. По построению

$p_1(\Gamma_1(V_1)) = Z_1(V_1)$ и проекция $p_4: \Gamma_1(V_1) \rightarrow Z_1(V_1)$ биективна. Поэтому

$$\dim q_1(\Gamma_1(V_1)) \leq \dim \Gamma_1(V_1) = \dim Z_1(V_1) \leq 0. \quad (12.36)$$

Рассмотрим график инциденции

$$\Pi_1(V_1) = \{(U, V_m) \in q_1(\Gamma_1(V_1)) \times \Sigma_1(V_1) \mid U \subset V_m\}$$

с проекциями $q_1(\Gamma_1(V_1)) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_1(V_1) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_1(V_1)$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq G(m-1, H_{2m+1}^\vee/U)$$

над произвольной точкой $U \in q_1(\Gamma_1(V_1))$. Проекция $\Pi_1(V_1) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_1(V_1)$ сюръективна ввиду (12.35). Поэтому, используя (12.36), имеем

$$\begin{aligned} \dim \Sigma_1(V_1) &\leq \dim \Pi_1(V_1) = \dim q_1(\Gamma_1(V_1)) + \dim G(m-1, H_{2m+1}^\vee/U) \\ &\leq 0 + (m-1)(m+1) = m^2 - 1. \end{aligned}$$

Отсюда, из (12.30) и предположения $m \geq 3$ следует, что $\dim \Sigma_1 \leq m^2 + 2 = \dim G + 2 - m < \dim G$, т.е. (12.3) верно для $r = 1$. Теорема 4.1 доказана.

12.2. Доказательство предложения 7.3. Перед тем как доказать предложение 7.3, нам потребуются некоторые предварительные аргументы. Для любой точки $B \in \mathbf{S}_{m+1}$ через $\hat{B}: S^2 H_{m+1} \rightarrow \wedge^2 V^\vee$ обозначим индуцированный гомоморфизм. Рассмотрим морфизм аффинных многообразий

$$\mathbf{b}: H_{m+1} \times \mathbf{S}_{m+1} \rightarrow \wedge^2 V^\vee, \quad (h, B) \mapsto \hat{B}(h \otimes h). \quad (12.37)$$

Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3, e_4 в V . Тогда точка $B \in \mathbf{S}_{m+1}$, рассматриваемая как гомоморфизм $B: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$, может быть представлена кососимметрической блочной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.38)$$

где $A_{ij} \in S^2 H_{m+1}^\vee$, $1 \leq i < j \leq 4$. Здесь мы рассматриваем A_{ij} как квадратичные формы

$$H_{m+1} \rightarrow \mathbf{k}, \quad x \mapsto A_{ij}(x), \quad 1 \leq i < j \leq 4, \quad (12.39)$$

в H_{m+1} . Соответственно, в проективном пространстве $P(H_{m+1}) \simeq \mathbb{P}^m$ определены квадрики

$$Q_{ij}(B) := \{\langle x \rangle \in P(H_{m+1}) \mid A_{ij}(x) = 0\}, \quad 1 \leq i < j \leq 4. \quad (12.40)$$

Пусть $K \subset \wedge^2 V^\vee$ – конус разложимых тензоров, причем $K = \{w \in \wedge^2 V^\vee \mid \text{rk}(w: V \rightarrow V^\vee) \leq 2\}$, и для $m \geq 1$ положим

$$M_{m+1} := \{B \in \mathbf{S}_{m+1} \mid \mathbf{b}(H_{m+1} \times \{B\}) \subset K\}. \quad (12.41)$$

По построению множество M_{m+1} является замкнутым подмножеством в $\mathbf{S}_{m+1}$, и мы рассматриваем его как приведенную подсхему в $\mathbf{S}_{m+1}$.

Рассмотрим сначала случаи $m = 0, 1, 2$. Прямое вычисление показывает, что:

(i) M_1 , M_2 и M_3 неприводимы и, более того,

$$M_1 = K, \quad M_{m+1} \subset \mathbf{S}_{m+1} \setminus (\mathbf{S}_{m+1})^0, \quad \text{codim}_{\mathbf{S}_{m+1}} M_{m+1} = 2, \quad m = 1, 2; \quad (12.42)$$

(ii) $M_3^* := \{B \in M_3 \mid Y_3(B) := Q_{13}(B) \cap Q_{23}(B) - \text{четверка различных точек в проективной плоскости } P(H_3)\}$ является открытым подмножеством в M_3 .

Теперь рассмотрим случай $m \geq 3$. В этом случае обозначим

$$\mathbf{S}_{m+1}^* := \{B \in \mathbf{S}_{m+1} \mid Y_{m+1}(B) := Q_{13}(B) \cap Q_{23}(B) \text{ является целой схемой коразмерности 2 в проективном пространстве } P(H_{m+1})\}. \quad (12.43)$$

Поскольку $m \geq 3$, то $\mathbf{S}_{m+1}^*$ является плотным открытым подмножеством в $\mathbf{S}_{m+1}$.

ЛЕММА 12.4. Для $m \geq 3$ пусть $B \in \mathbf{S}_{m+1}^* \cap M_{m+1}$. Тогда $B \notin \mathbf{S}_{m+1}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим точку $B \in \mathbf{S}_{m+1}^* \cap M_{m+1}$ матрицей (12.38). Тогда в обозначениях (12.39) для произвольной точки $x \in H_{m+1}$ получим косимметрическую (4×4) -матрицу с элементами из $\mathbf{k}$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}(x) & A_{13}(x) & A_{14}(x) \\ -A_{12}(x) & 0 & A_{23}(x) & A_{24}(x) \\ -A_{13}(x) & -A_{23}(x) & 0 & A_{34}(x) \\ -A_{14}(x) & -A_{24}(x) & -A_{34}(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.44)$$

Условие $B \in M_{m+1}$ по определению означает, что матрица $B(x)$ вырождена, т. е. ее пфаффиан тождественно равен нулю как полиномиальная функция на H_{m+1} :

$$A_{12}(x)A_{34}(x) - A_{13}(x)A_{24}(x) + A_{14}(x)A_{23}(x) \equiv 0, \quad x \in H_{m+1}. \quad (12.45)$$

Поскольку $B \in \mathbf{S}_{m+1}^*$, из (12.40) и (12.43) следует, что квадррики $Q_{13}(B)$ и $Q_{23}(B)$ являются неприводимыми и их пересечение $Y := Y_{m+1}(B)$ является целой схемой коразмерности 2 в $P(H_{m+1})$. В этом случае из (12.45) следует, что либо $Q_{12}(B) \supset Y$, либо $Q_{34}(B) \supset Y$. Пусть, скажем, $Q_{34}(B) \supset Y_{m+1}(B)$. Это означает, что $A_{34}(x) \in H^0(\mathcal{I}_{Y, \mathbb{P}^m}(2))$. Переходя теперь к сечениям в точной тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-2) \rightarrow 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m} \xrightarrow{A_{13}(x), A_{23}(x)} \mathcal{I}_{Y, \mathbb{P}^m}(2) \rightarrow 0,$$

получаем, что $A_{34}(x) = \alpha A_{13}(x) + \beta A_{23}(x)$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$. Подставляя это равенство в (12.45), получаем соотношение

$$A_{13}(x)(\alpha A_{12}(x) - A_{24}(x)) + A_{23}(x)(\beta A_{12}(x) + A_{14}(x)) \equiv 0.$$

Поскольку Q_{13} и Q_{23} – неприводимые квадррики, из последнего соотношения следует одно из двух:

- (i) $A_{23} = \lambda A_{13}$, $A_{24} - \alpha A_{12} = \lambda(\beta A_{12} + A_{14})$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{k}$;
- (ii) $\beta A_{12} + A_{14} = \mu A_{13}$, $A_{24} - \alpha A_{12} = \mu A_{23}$ для некоторого $\mu \in \mathbf{k}$.

Подставляя соотношения (i) в (12.38) и обозначая $\gamma = \alpha + \lambda\beta$, получаем

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ -A_{12} & 0 & \lambda A_{13} & \gamma A_{12} + \lambda A_{14} \\ -A_{13} & -\lambda A_{23} & 0 & \gamma A_{13} \\ -A_{14} & -\gamma A_{12} - \lambda A_{14} & -\gamma A_{13} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.46)$$

Прибавляя первый столбец блоков матрицы B , умноженный на λ , к ее четвертому столбцу блоков и затем проводя аналогичную операцию со строками блоков, получаем матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ -A_{12} & 0 & \lambda A_{13} & \lambda A_{14} \\ -A_{13} & -\lambda A_{13} & 0 & 0 \\ -A_{14} & -\lambda A_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.47)$$

которая вырождена. Следовательно, B также вырождена. Аналогичное вычисление с соотношениями (ii) также дает вырожденность матрицы B . Лемма доказана.

Из леммы 12.4 следует, что для любой неприводимой компоненты M'_{m+1} в M_{m+1}

$$1 \leq \text{codims}_{\mathbf{S}_{m+1}} M'_{m+1} \leq 2, \quad m \geq 3. \quad (12.48)$$

Действительно, из этой леммы получаем, что $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap \mathbf{S}_{m+1}^0 \cap M_{m+1} = \emptyset$. Поскольку $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap \mathbf{S}_{m+1}^0$ – открытое плотное подмножество в $\mathbf{S}_{m+1}$, то $M_{m+1} \neq \mathbf{S}_{m+1}$, т. е. $1 \leq \text{codims}_{\mathbf{S}_{m+1}} M_{m+1}$. С другой стороны, так как K – непустой дивизор в $\wedge^2 V^\vee$, то $\mathbf{b}_{m+1}^{-1}(K)$ – непустой дивизор в $H_{m+1} \times \mathbf{S}_{m+1}$. Поскольку M_{m+1} непусто (в самом деле, $\{0\} \in M_{m+1}$), вычисление размерностей слоев естественной проекции $\mathbf{b}_{m+1}^{-1}(K) \rightarrow \mathbf{S}_{m+1}$ показывает, что для любой неприводимой компоненты M'_{m+1} в M_{m+1} верно неравенство $\text{codims}_{\mathbf{S}_{m+1}} M'_{m+1} \leq 2$. Отсюда вытекает (12.48).

ЛЕММА 12.5. *Для $m \geq 3$ пусть M'_{m+1} – произвольная неприводимая компонента в M_{m+1} . Тогда $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap M'_{m+1} \neq \emptyset$. Тем самым, $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap M'_{m+1}$ является плотным открытым подмножеством в M'_{m+1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала рассмотрим случай $m = 3$. Выберем координаты $x_1, \dots, x_4$ в H_4 , и пусть H_1 и H_3 – подпространства в H_4 , определяемые уравнениями $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $x_4 = 0$ соответственно. Разложение H_4 в прямую сумму: $H_4 = H_1 \oplus H_3$, индуцирует включение прямого слагаемого $\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_3 \hookrightarrow \mathbf{S}_4$. Рассматривая это включение как вложение аффинного пространства $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3 \hookrightarrow \mathbf{S}_4$, получаем из (12.42) и определения (12.41), что

$$M_3 = (\{0\} \times \mathbf{S}_3) \cap M_4, \quad K = (\mathbf{S}_1 \times \{0\}) \cap M_4. \quad (12.49)$$

Отсюда, из (12.48) и неприводимости M_3 (см. выше свойство (i)) следует, что для любой неприводимой компоненты M'_4 в M_4

$$M_3 = (\{0\} \times \mathbf{S}_3) \cap M'_4, \quad K = (\mathbf{S}_1 \times \{0\}) \cap M'_4. \quad (12.50)$$

Заметим, что из (12.42) и (12.48) следует равенство

$$\text{codims}_{\mathbf{S}_4} M'_4 = 2. \quad (12.51)$$

Возьмем произвольную точку $B' \in M_3^*$, и пусть $A_{i3}(B')(x_1, x_2, x_3)$ – квадратичные формы на H_3 , соответствующие элементам $A_{i3}(B')$, $i = 1, 2$, матрицы B' . Тогда множество $Y_3(B')$ задается в проективном пространстве $P(H_3)$ уравнениями $\{A_{i3}(B')(x_1, x_2, x_3) = 0, i = 1, 2\}$. Теперь возьмем произвольную точку $B'' \in \mathbf{S}_1 \simeq \wedge^2 V^\vee$ и в соответствии с (12.38) рассмотрим B'' как

кососимметрическую матрицу $(a_{ij}(B''))$. Тогда точка $B := (B', B'') \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3$ определяет схему $Y_4(B)$ (см. (12.43)), которая задается в проективном пространстве $P(H_4)$ уравнениями

$$A_{i3}(B')(x_1, x_2, x_3) - a_{i3}(B'')x_4^2 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (12.52)$$

Рассмотрим множества $U' = \{(B', B'') \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3 \mid Y_3(B') = Q_{13}(B') \cap Q_{23}(B') - \text{четверка различных точек в плоскости } P(H_3)\}$ и $U'' = \{(B', B'') \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3 \mid a_{i3}(B'') \neq 0, i = 1, 2\}$. Эти множества являются плотными открытыми подмножествами в $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3$, и из (12.50) и свойства (ii) вытекает, что $M_4'' := M_4' \cap U' \cap U''$ – плотное открытое подмножество в M_4' . Теперь для любой точки $B = (B', B'') \in M_4''$ уравнения (12.52) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &:= A_{13}(B')(x_1, x_2, x_3)a_{23}(B'') - A_{23}(B')(x_1, x_2, x_3)a_{13}(B'') = 0, \\ A_{13}(B')(x_1, x_2, x_3) - a_{13}(B'')x_4^2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.53)$$

Рассмотрим конику $C(B) = \{A(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ в $\mathbb{P}^2$. Тогда $M_4''' = \{B \in M_4'' \mid C(B) - \text{целая схема}\}$ – плотное открытое подмножество в M_4'' . По построению множество $\{A_{13}(B')(x_1, x_2, x_3) = 0\} \cap C(B)$ совпадает с множеством $Y_3(B')$, которое по определению есть четверка различных точек в $\mathbb{P}^2$. Поэтому уравнения (12.53), определяющие $Y_4(B)$, показывают, что $Y_4(B)$ является двойным накрытием коники $C(B)$, разветвленным в $Y_3(B')$, а значит, $Y_4(B)$ есть целая эллиптическая кривая степени 4 в $\mathbb{P}^3$. Другими словами, $B \in \mathbf{S}_4^* \cap M_4'$. Это означает, что $M_4''' \subset \mathbf{S}_4^* \cap M_4'$, так что $\mathbf{S}_4^* \cap M_4'$ открыто и плотно в M_4' .

2) Рассуждение в случае $m \geq 4$ аналогично предыдущему. Выберем координаты $x_1, \dots, x_{m+1}$ в H_{m+1} , и пусть H_{m-3} и H_4 – подпространства в H_{m+1} , заданные уравнениями соответственно $x_1 = \dots = x_4 = 0$ и $x_5 = \dots = x_{m+1} = 0$. Разложение H_{m+1} в прямую сумму: $H_{m+1} = H_{m-3} \oplus H_4$ – индуцирует включение прямого слагаемого $\mathbf{S}_4 \hookrightarrow \mathbf{S}_{m+1}$. Рассматривая это включение как вложение одного из аффинных пространств $\mathbf{S}_4 \hookrightarrow \mathbf{S}_{m+1}$, из определения (12.41) по аналогии с (12.50) получаем

$$M_4 = \mathbf{S}_4 \cap M_{m+1}. \quad (12.54)$$

Пусть теперь M_{m+1}' – произвольная неприводимая компонента в M_{m+1} . Из (12.48), (12.51) и (12.54) следует, что для любой неприводимой компоненты M_4' в $\mathbf{S}_4 \cap M_{m+1}'$ множество $(M_4')^* = \mathbf{S}_4^* \cap M_4'$ является плотным открытым подмножеством в M_4' . По определению произвольная точка $B \in (M_4')^*$ такова, что $Y_4(B)$ – целая неприводимая кривая степени 4 в $\mathbb{P}^3$. Из конструкции вложения $\mathbf{S}_4 \hookrightarrow \mathbf{S}_{m+1}$ теперь вытекает, что для этой точки B , рассматриваемой как точка в M_{m+1}' , схема $Y_{m+1}(B)$ есть конус в $P(H_{m+1})$ над $Y_4(B)$. Поэтому $Y_{m+1}(B)$ – целая подсхема коразмерности 2 в $P(H_{m+1})$, т.е. $B \in \mathbf{S}_{m+1}^*$. Это означает, что $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap M_{m+1}'$ – плотное открытое подмножество в M_{m+1}' .

СЛЕДСТВИЕ 12.6. Для любого $m \geq 0$ имеем $M_{m+1} \subset \mathbf{S}_{m+1} \setminus \mathbf{S}_{m+1}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m \leq 2$ это утверждение следует из (12.42). Пусть $m \geq 3$, и пусть M_{m+1}' – произвольная неприводимая компонента в M_{m+1} . По лемме 12.4 имеем $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap M_{m+1}' \subset \mathbf{S}_{m+1} \setminus \mathbf{S}_{m+1}^0$. Поскольку $\mathbf{S}_{m+1} \setminus \mathbf{S}_{m+1}^0$ – замкнутое неприводимое подмножество в $\mathbf{S}_{m+1}$, а по лемме 12.5 множество $\mathbf{S}_{m+1}^* \cap M_{m+1}'$ является плотным открытым подмножеством неприводимого множества M_{m+1}' , то $M_{m+1}' \subset \mathbf{S}_{m+1} \setminus \mathbf{S}_{m+1}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.3. Пусть $D \in (\mathbf{S}_{m+1}^\vee)^0$, т. е. D – невырожденный гомоморфизм, $D: H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee \rightarrow H_{m+1} \otimes V$. Предположим, что для любого мономорфизма $j: H_m^\vee \hookrightarrow H_{m+1}^\vee$ композиция $j_D := j^\vee \circ D \circ j: H_m^\vee \otimes V^\vee \rightarrow H_m \otimes V$ вырождена. Покажем, что последнее ведет к противоречию. Для этого рассмотрим j двойственным образом, как мономорфизм $j_k: k \hookrightarrow H_{m+1}$. Рассмотрим невырожденный гомоморфизм $B := D^{-1}: H_{m+1} \otimes V \rightarrow H_{m+1}^\vee \otimes V^\vee$ и индуцированный кососимметрический гомоморфизм $j_B := j_k^\vee \circ B \circ j_k: V \simeq k \otimes V \rightarrow k^\vee \otimes V^\vee \simeq V^\vee$. Тогда вырожденность j_D равносильна вырожденности j_B . Как и выше, гомоморфизм B представляется кососимметрической матрицей (12.38). В этих обозначениях невырожденность гомоморфизма j_B для произвольного мономорфизма $j_k: k \hookrightarrow H_{m+1}$ в точности означает, что для любого вектора $x \in H_{m+1}$ кососимметрическая (4×4) -матрица $B(x)$ в (12.44) вырождена, т. е. по определению имеем $B \in M_{m+1}$. Тогда по следствию 12.6 матрица B вырождена. Это противоречие доказывает предложение.

Список литературы

1. W. Böhmer, G. Trautmann, “Special instanton bundles and Poncelet curves”, *Singularities, representation of algebras, and vector bundles* (Lambrecht, 1985), Lecture Notes in Math., **1273**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 325–336.
2. Th. Nüssler, G. Trautmann, “Multiple Koszul structures on lines and instanton bundles”, *Internat. J. Math.*, **5**:3 (1994), 373–388.
3. W. Barth, “Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$ ”, *Math. Ann.*, **226**:2 (1977), 125–150.
4. R. Hartshorne, “Stable vector bundles of rank 2 on P_3 ”, *Math. Ann.*, **238**:3 (1978), 229–280.
5. G. Ellingsrud, S. A. Strømme, “Stable rank-2 vector bundles on P_3 with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$ ”, *Math. Ann.*, **255**:1 (1981), 123–135.
6. W. Barth, “Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and $c_2 = 4$ ”, *Math. Ann.*, **258**:1 (1981), 81–106.
7. I. Coandă, A. Tikhomirov, G. Trautmann, “Irreducibility and smoothness of the moduli space of mathematical 5-instantons over P_3 ”, *Internat. J. Math.*, **14**:1 (2003), 1–45.
8. A. N. Tjurin, “The instanton equations for $(n+1)$ -superpositions of marked $\text{ad } T\mathbf{P}^3 \oplus \text{ad } T\mathbf{P}^3$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 131–146.
9. A. N. Tjurin, “On the superpositions of mathematical instantons”, *Arithmetic and geometry*, v. II, Progr. Math., **36**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, 433–450.
10. M. Skiti, “Sur une famille de fibrés instantons”, *Math. Z.*, **225**:3 (1997), 373–394.
11. V. Beorchia, D. Franco, “On the moduli space of ’t Hooft bundles”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **47** (2001), 253–268.
12. C. Bănică, O. Forster, “Multiplicity structures on space curves”, *Algebraic geometry. Lefschetz centennial conference, Part I* (Mexico City, 1984), Contemp. Math., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 47–64.
13. D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **31**, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.
14. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
15. Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, London, 1970.

16. Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1966.
17. S. L. Kleiman, "Relative duality for quasicoherent sheaves", *Compositio Math.*, **41**:1 (1980), 39–60.
18. H. Lange, "Universal families of extensions", *J. Algebra*, **83**:1 (1983), 101–112.
19. R. Hartshorne, "Complete intersections and connectedness", *Amer. J. Math.*, **84**:3 (1962), 497–508.
20. T. G. Room, *The geometry of determinantal loci*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1938.
21. К. Оконек, М. Шнейдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Математика. Новое в зарубежной науке, **36**, Мир, М., 1984; пер. с англ.: С. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progr. Math., **3**, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.
22. I. Coandă, "On Barth's restriction theorem", *J. Reine Angew. Math.*, **428** (1992), 97–110.

А. С. Тихомиров (А. S. Тіхоніров)

Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского

E-mail: astikhomirov@mail.ru

Поступило в редакцию

18.02.2010

30.03.2012