Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Солдаткин, Голоморфная эквивалентность областей Рейнхарта в $\mathbb{C}^2$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 6, 187–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:48:33

УДК 517.5

П. А. Солдаткин

Голоморфная эквивалентность областей Рейнхарта в $\mathbb{C}^2$

Рассмотрен следующий вопрос: всегда ли две голоморфно эквивалентные области Рейнхарта являются алгебраически эквивалентными? В одномерном случае ответ положительный. Получен положительный ответ в двумерном случае, причем никаких ограничений, кроме связности, на области не налагается.

Библиография: 15 наименований.

При изучении специальных областей, таких как области Рейнхарта, трубчатые или круговые области, большой интерес представляет задача о голоморфной эквивалентности. Она ставится следующим образом. Пусть между специальными областями (например, областями Рейнхарта) D_1 и D_2 существует биголоморфное отображение F . Какие ограничения накладывает это условие на области?

Напомним известный пример такой задачи: пусть D_1 и D_2 – голоморфно эквивалентные области Рейнхарта в $\mathbb{C}$; тогда D_1 и D_2 должны быть подобны (инверсию тоже считаем подобием).

В 1978 г. Т. Сунада [1] исследовал голоморфную эквивалентность ограниченных областей Рейнхарта в $\mathbb{C}^n$, содержащих начало координат. Он доказал, что в этом случае между областями D_1 и D_2 существует линейное отображение вида $w_i = r_i z_{\sigma(i)}$, где r_i – константы, а $\sigma(i)$ – некоторая перестановка индексов $i = 1, \dots, n$. Для этого Сунада рассмотрел алгебру Ли группы автоморфизмов таких областей и, в частности, заметил, что группа поворотов образует максимальный тор в группе автоморфизмов. На самом деле, как показали Н. Г. Кружилин [2] и С. Шимицу [3], для решения задачи о голоморфной эквивалентности гиперболических (например, любых ограниченных) областей Рейнхарта именно этот факт является ключевым. Было доказано [2], что если D_1 и D_2 – голоморфно эквивалентные гиперболические области Рейнхарта, то между D_1 и D_2 существует также биголоморфное отображение вида $w_i = r_i z_1^{a_{i1}} \dots z_n^{a_{in}}$, где (a_{ij}) – целочисленная матрица с определителем ± 1 , а r_i – константы, $i, j = 1, \dots, n$. Такое отображение будем называть *мономиальным*.

В настоящей статье основным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть D_1 и D_2 – две произвольные связные биголоморфно эквивалентные области Рейнхарта в $\mathbb{C}^2$. Тогда они мономиально эквивалентны, т.е. между D_1 и D_2 существует биголоморфизм специального вида:

$$R(z_1, z_2) = \begin{cases} w_1 = C_1 z_1^p z_2^q, \\ w_2 = C_2 z_1^r z_2^s, \end{cases} \quad R^{-1}(w_1, w_2) = \begin{cases} z_1 = C_3 w_1^k w_2^l, \\ z_2 = C_4 w_1^m w_2^n, \end{cases}$$

Грант № 00-15-96008 “Программы поддержки ведущих научных школ”.

где $k, l, m, n, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Самое интересное здесь то, что нет никаких ограничений на области D_1 и D_2 , кроме, естественно, связности.

Отметим недавние работы Шимицу [4], [5], относящиеся к трубчатым областям. В первой статье он доказал, что голоморфно эквивалентные трубчатые области с ограниченными базисами аффинно эквивалентны. Во второй были рассмотрены трубчатые области в $\mathbb{C}^2$, базисы которых представляют собой выпуклые области в $\mathbb{R}^2$, не содержащие полных прямых, и была получена голоморфная классификация таких областей. Заметим, что в обоих случаях рассматриваемые области заведомо являются гиперболическими. Так что и у этих результатов тоже может быть обобщение.

Введем следующие обозначения. Биголоморфизм между D_1 и D_2 , существующий по условию, будем обозначать через $F = (f_1, f_2)$. Известно [6], что биголоморфизм любых областей продолжается до биголоморфизма $\tilde{F}: \tilde{D}_1 \rightarrow \tilde{D}_2$ их оболочек голоморфности. Так как это продолжение единственно, то чаще всего мы не будем различать $\tilde{F}$ и F , используя обозначение F .

Назовем *рейнхартовым множеством* X (с центром в 0) такое множество в $\mathbb{C}^2$, что для любой точки $z = (z_1, z_2) \in X$ и любого $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ точка $e^{i\theta}z = (e^{i\theta_1}z_1, e^{i\theta_2}z_2)$ тоже принадлежит X .

Группу $\{e^{i\theta}: \theta \in \mathbb{R}\}$ обозначим через $\mathbf{T}$, ее квадрат $\{e^{i\theta}: \theta \in \mathbb{R}^2\}$ – через $\mathbf{T}^2$.

Открытое рейнхартово множество является областью Рейнхарта.

Пусть $(x, y) = (|z_1|, |z_2|)$. Множество $\mathbf{I} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y \geq 0\}$ (диаграмму Рейнхарта) будем называть *диаграммой*, логарифмическую диаграмму Рейнхарта – *ln-диаграммой*. Множество точек $\{(x, y) \in \mathbf{I}: xy = 0\}$ будем обозначать через $\mathbf{I}_0$. Топология в $\mathbf{I}$ индуцирована из $\mathbb{R}^2$. Если $Y \subset \mathbf{I}$, то изображение множества $Y \cap (\mathbf{I} \setminus \mathbf{I}_0)$ на ln-диаграмме будем обозначать через $\ln Y$.

Пусть множество (необязательно рейнхартово) X принадлежит $\mathbb{C}^2$. Тогда множество точек вида $e^{i\theta}z$, принадлежащих $\mathbf{I}$, где z пробегает все множество X , будем обозначать через $|X| \subset \mathbf{I}$ и называть *изображением* множества X на диаграмме.

Пусть $Y \subset \mathbf{I}$. Тогда рейнхартово множество $X \subset \mathbb{C}^2$ такое, что $|X| = Y$, будем обозначать через $X = [Y]$.

Пусть множество X (необязательно рейнхартово) принадлежит $\mathbb{C}^2$. Тогда рейнхартово множество $[|X|]$ будем называть *рейнхартовой оболочкой* X и обозначать просто $[X]$. Это не противоречит предыдущему определению, поскольку можно считать, что $\mathbf{I} \subset \mathbb{C}^2$.

Если точка z принадлежит $\mathbb{C}^2$, то множество $[z]$ будем называть *тором*. При этом в зависимости от z множество $[z]$ может представлять собой вещественно-двумерный тор, когда $z \notin \mathbf{I}_0$, окружность, когда $z \in \mathbf{I}_0 \setminus \{0\}$, и точку 0, когда $z = 0$.

В § 1 будут встречаться и другие торы – коммутативные связные компактные подгруппы групп автоморфизмов. *Максимальный тор* – максимальная коммутативная связная компактная подгруппа [7].

Инвариантным множеством назовем такое рейнхартово множество X , образ которого $F(X)$ (или $F^{-1}(X)$) – также рейнхартово множество. Чаще всего будут встречаться *инвариантные области* Рейнхарта, *инвариантные* рейнхартовы *гиперповерхности* и *инвариантные* двумерные *торы*.

§ 1. Введение

Напомним [8], что область Рейнхарта $D \subset \mathbb{C}^n$, являющаяся областью голоморфности, обладает двумя характерными свойствами: изображение D на $\ln$ -диаграмме (в нашей терминологии – $\ln |D|$) – выпуклое множество, а сама область D относительно полна, т.е. при каждом $i = 1, \dots, n$ область D либо не пересекается с осью $z_i = 0$, либо вместе с каждой точкой z^0 содержит и все точки z , для которых $|z_i| \leq |z_i^0|$, а остальные координаты те же, что у z^0 . Благодаря этому в § 6 опишем все области Рейнхарта, являющиеся областями голоморфности и разобьем их на 12 классов так, что области из разных классов не могут быть биголоморфны друг другу. Одновременно получим разложения этих областей на целые кривые. При биголоморфизме целая кривая переходит в целую кривую. В тех классах, в которых целые кривые образуют параметризуемые семейства, это позволит провести доказательство теоремы 1 методом униформизации.

Если D_1 и D_2 не являются областями голоморфности, то любой их биголоморфизм F продолжается до биголоморфизма $\tilde{F}$ между оболочками голоморфности $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$. Поэтому наше разбиение на классы автоматически продолжится на все области Рейнхарта (область относится к тому классу, к которому принадлежит его оболочка голоморфности). Внутри каждой из двенадцати получившихся задач мы выделим по две подзадачи: случай областей голоморфности и общий случай. В двух классах из двенадцати области голоморфности Рейнхарта вообще не допускают биголоморфных отображений, отличных от мономиальных, поэтому и в общем случае это тоже верно по теореме единственности. Но в остальных десяти классах группы автоморфизмов областей голоморфности оказываются слишком велики и общий случай уже принципиально отличается от случая областей голоморфности. Если в группе автоморфизмов удастся выделить структуру группы Ли, то это позволяет использовать идею о максимальных торах (она изложена в теореме 2), которую при изучении областей Рейнхарта применили Кружкилин и Шимицу. Чтобы применить максимальные торы в общем случае, необходимо приспособить эту идею к нашей ситуации и, самое главное, научиться выделять саму структуру группы Ли. Первая задача решается теоремами 3 и 4 – это наши главные рабочие инструменты. Для решения второй задачи будем искать инвариантные рейнхартовы множества. Самыми очевидными примерами инвариантных множеств являются D_1 и D_2 , $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$, а наиболее важными для нас: $X_1 = (\tilde{D}_1 \setminus D_1) \setminus (\tilde{D}_1 \setminus D_1)^\circ$ и $X_2 = (\tilde{D}_2 \setminus D_2) \setminus (\tilde{D}_2 \setminus D_2)^\circ$, где $(A)^\circ$ – открытое ядро множества A . Если удастся найти инвариантную гиперболическую область Рейнхарта или инвариантную невырожденную вещественно-аналитическую гиперповерхность, то применение теоремы 3 или 4 завершит доказательство. Оставшиеся случаи либо сводятся к предыдущим, либо настолько просты, что не требуют никакой общей теории и разбираются индивидуально.

Сама процедура выделения инвариантных множеств описана в § 2–5 и завершается теоремой 8. Эти множества находятся с помощью техники дендритов, и именно в этом месте существенно используются особенности двумерной топологии.

В дальнейшем будем использовать фрагменты доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Если в условиях теоремы 1 область D_1 (а тогда и D_2) гиперболична, то D_1 и D_2 мономиально эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G автоморфизмов гиперболической области D – это группа Ли относительно компактно-открытой топологии [9], которая определяется следующим образом. Пусть (K_i, U_i) – любое конечное число пар компактных и открытых множеств в D . Тогда множества

$$W = W(K_1, K_2, \dots, K_c; U_1, U_2, \dots, U_c) = \{\varphi \in G: \varphi(K_i) \subset U_i, i = 1, \dots, c\}$$

образуют базу этой топологии.

В группе $G_1 = \text{Aut}(D_1)$ есть подгруппа T_1 , состоящая из поворотов $z \rightarrow e^{i\theta}z$. Эта подгруппа образует максимальный тор в G_1 (см. [2], [3]). То же можно сказать и об аналогичной группе $T_2 \subset G_2 = \text{Aut}(D_2)$. Если F – заданный биголоморфизм, φ – элемент группы G_1 , то $\varphi \rightarrow F \circ \varphi \circ F^{-1}$ – изоморфизм G_1 и G_2 . Легко проверить, что это изоморфизм групп Ли (он переводит базу топологии в базу топологии). Тогда $F \circ T_1 \circ F^{-1}$ – некоторый максимальный тор в G_2 . Хорошо известно, что максимальные торы в связной компактной группе Ли сопряжены [7]. Но сами максимальные связные компактные подгруппы сопряжены в любой группе Ли. Для полупростых групп Ли это доказал Э. Картан, в общем случае – А. И. Мальцев [10]. Отсюда следует сопряженность максимальных торов в любой группе Ли, т.е. $F \circ T_1 \circ F^{-1} = \phi \circ T_2 \circ \phi^{-1}$ для некоторого $\phi \in G_2$. Значит, существует отображение $R = \phi^{-1} \circ F$ такое, что $R \circ T_1 \circ R^{-1} = T_2$ или $R(T_1) = T_2(R)$.

Фиксируем точку $z^0 \in D_1$, $z^0 \notin [\mathbf{I}_0]$, и пусть $w^0 = R(z^0)$. Тогда для любого элемента $e^{i\theta} \in T_1$ существует элемент $e^{i\psi} \in T_2$ такой, что $R(e^{i\theta}z^0) = e^{i\psi}w^0$, или покомпонентно:

$$r_1(e^{i\theta_1}z_1^0, e^{i\theta_2}z_2^0) = e^{i\psi_1}w_1^0, \quad r_2(e^{i\theta_1}z_1^0, e^{i\theta_2}z_2^0) = e^{i\psi_2}w_2^0.$$

Так как T_1 и T_2 сопряжены и изоморфны $\mathbf{T}^2$, то r_1 и r_2 – это характеры $\mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}$, т.е. произведения характеров $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, а любой такой характер имеет вид $z \rightarrow z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbf{T}$. Поэтому на двумерном торе $[z^0]$ функции r_1 и r_2 имеют вид $Cz_1^k z_2^l$. По формуле Лорана и теореме единственности r_1 и r_2 всюду имеют такой вид. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – биголоморфное отображение между областями Рейнхарта D_1 и D_2 , и пусть F (возможно, $\tilde{F}$) осуществляет также биголоморфное отображение некоторых гиперболических областей Рейнхарта D'_1 и D'_2 . Тогда D_1 и D_2 мономимально эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G'_1, G'_2, G_1 и G_2 – группы автоморфизмов областей D'_1, D'_2, D_1 и D_2 , и пусть $S_1 = G_1 \cap G'_1$ и $S_2 = G_2 \cap G'_2$. Очевидно, что $T_1 \subset S_1$, $T_2 \subset S_2$, $F \circ G'_1 \circ F^{-1} = G'_2$ – изоморфизм групп Ли, а $F \circ G_1 \circ F^{-1} = G_2$ – изоморфизм абстрактных групп.

Рассмотрим множество элементов в S_1 , которые можно соединить с e непрерывным (в топологии G'_1) путем, проходящим по элементам S_1 . Обозначим это множество H_1 . Очевидно, H_1 – подгруппа в G'_1 и тор $T_1 \subset H_1$. По теореме Кураниши–Ямабе [11], [7] H_1 и H_2 – виртуальные подгруппы Ли [5] в G'_1 и G'_2 .

Так как $F \circ G'_1 \circ F^{-1} = G'_2$ – изоморфизм групп Ли, то он сохраняет непрерывность путей. Учитывая равенство $F \circ G_1 \circ F^{-1} = G_2$, получаем, что

$F \circ H_1 \circ F^{-1} = H_2$ – изоморфизм абстрактных групп. Известно [7], что две виртуальные подгруппы Ли, совпадающие как подмножества, несут одну и ту же структуру группы Ли. Поэтому H_1 и H_2 изоморфны как группы Ли.

Тор T_1 максимален в G'_1 , и так как $i: H_1 \rightarrow G'_1$ – непрерывное отображение, то T_1 – максимальный тор и в H_1 . Теперь можно так же, как в теореме 2, показать, что D_1 и D_2 мономиально эквивалентны. Теорема доказана.

Следующую лемму можно считать очевидной.

ЛЕММА 1. Пусть $W = (w_1(z_1, z_2), w_2(z_1, z_2))$ – биголоморфное отображение, определенное на некоторой области Рейнхарта и коммутирующее со всеми поворотами $z \rightarrow e^{i\theta} z$. Тогда $w_1 = Az_1$, $w_2 = Bz_2$, $A, B \in \mathbb{C}$.

Теперь докажем аналог теоремы 3 для гиперповерхностей.

ТЕОРЕМА 4. Пусть F – биголоморфное отображение между областями Рейнхарта D_1 и D_2 , и пусть F (возможно, $\tilde{F}$) осуществляет также биголоморфное отображение некоторых выпуклых по Леви рейнхартовых гиперповерхностей $[L_1]$ и $[L_2]$. Тогда D_1 и D_2 мономиально эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группы CR -преобразований вещественно аналитических невырожденных гиперповерхностей являются группами Ли [12]. Рассмотрим их в качестве групп Ли G'_1 и G'_2 и повторим дословно доказательство теоремы 3. Приведем элементарное доказательство максимальности тора T_1 в группе G'_1 , не опирающееся на общую теорию. Из леммы 1 следует, что только линейные отображения коммутируют со всеми поворотами. Если мы покажем, что гиперповерхность $[L_1]$ не выдерживает линейных отображений, то отсюда будет следовать, что T_1 максимален. По условию кривая $\ln L_1$ на $\ln$ -диаграмме не содержит точек перегиба, т.е. выпукла в одну сторону. Рассмотрим настолько малую дугу $\ln M$ кривой $\ln L_1$, что она не является полным оборотом спирали (хорда не имеет пересечений с дугой, кроме своих концов). Действие линейного отображения выглядит на $\ln$ -диаграмме как параллельный перенос. Если бы группе G'_1 принадлежало некоторое линейное отображение, то принадлежала бы и любая его степень (как элемент группы). Под действием такого отображения дуга $\ln M$ перейдет в свою параллельную копию $\ln M'$, причем можно добиться того, чтобы это было без пересечения. Соединить $\ln M$ и $\ln M'$ аналитической кривой без точек перегиба можно, но при этом обязательно получится виток спирали. Итак, $\ln L_1$ обязательно содержит спираль. Но аналогично соединить этот виток с его параллельной копией без точек перегиба уже невозможно. Доказательство этого элементарно. Противоречие. Теорема доказана.

§ 2. Торы и дендриты

В этом параграфе введем в рассмотрение дендриты – один из самых простых видов канторовых кривых (плоских континуумов без внутренних точек). Сначала они естественно возникают как изображения на диаграмме Рейнхарта образов торов при отображении F (или F^{-1}), потом от дендритов остаются лишь дуги. С помощью дендритов выделим впоследствии необходимые нам инвариантные множества.

Итак, $F: D_1 \leftrightarrow D_2$, $F: \tilde{D}_1 \leftrightarrow \tilde{D}_2$. Пусть D_1 и D_2 не являются областями голоморфности. Тогда рейнхартовы множества $\tilde{D}_1 \setminus D_1$ и $\tilde{D}_2 \setminus D_2$ непусты и тоже эквивалентны.

Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 2. Пусть X – рейнхартово множество. Тогда его замыкание $\overline{X}$, открытое ядро X° , компонента связности и линейно связная компонента – тоже рейнхартовы множества.

У множеств $\tilde{D}_j \setminus D_j$ могут быть (одновременно) открытые ядра, переходящие при F друг в друга. Если хотя бы одна компонента такого ядра – гиперболическая область, то можно использовать теорему 3, потому что эта компонента будет областью Рейнхарта, ее образ – тоже компонента, значит, область Рейнхарта. Но в общем случае открытого ядра может не быть. Рассмотрим поэтому множества

$$X_1 = (\tilde{D}_1 \setminus D_1) \setminus (\tilde{D}_1 \setminus D_1)^\circ \quad \text{и} \quad X_2 = (\tilde{D}_2 \setminus D_2) \setminus (\tilde{D}_2 \setminus D_2)^\circ.$$

Тогда F осуществляет взаимно однозначное отображение между X_1 и X_2 .

ЛЕММА 3. Множества X_j , $j = 1, 2$, являются непустыми рейнхартовыми, нигде не плотными в $\mathbb{C}^2$. Если $z \in X_j$ – произвольная точка, то $z \notin D_j$, но в любой окрестности точки z есть точки, принадлежащие D_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку D_j не является областью голоморфности, то X_j непусто. Все остальное очевидно.

Для множества X_j рассмотрим его изображение на диаграмме, т.е. $|X_j|$. Это – плоское множество без внутренних точек, необязательно замкнутое (множество X_j может выходить на ∂D_j).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть *граничными кривыми* на диаграмме Рейнхарта кривые двух типов:

- 1) простую замкнутую кривую в $\mathbf{I}$;
- 2) дугу $pq \in \mathbf{I}$ такую, что ее концы p, q принадлежат $\mathbf{I}_0$, а все остальные точки дуги не принадлежат $\mathbf{I}_0$.

Рассмотрим два случая:

- а) $|X_1|$ или $|X_2|$ содержат хотя бы одну граничную кривую;
- б) $|X_j|$ не содержат граничных кривых.

Случай а). Пусть существует граничная кривая $Y_1 \subset |X_1|$ (случай граничной кривой $Y_2 \subset |X_2|$ разбирается точно так же и приводит к тем же выводам).

Из теоремы Жордана легко следует, что существует ограниченная область Рейнхарта U_1 такая, что $|\partial U_1| = Y_1$. Как следствие, $\partial U_1 \subset X_1$. Пусть $U'_1 = \tilde{D}_1 \setminus \overline{U}_1$. Область D_1 связна и поэтому или целиком находится в U_1 , или целиком в U'_1 . Если $D_1 \subset U_1$, то D_1 – ограничена и можно применить теорему 2. Если же $D_1 \subset U'_1$, то U_1 – линейно связная компонента ядра $(\tilde{D}_1 \setminus D_1)^\circ$. Действительно, $\partial U_1 \subset X_1$, а $X_1 \subset \tilde{D}_1$, поэтому $U_1 \subseteq \tilde{D}_1$ (стирание компактных особенностей). В таком случае можно применить теорему 3.

Итак, в случае а) применяется либо теорема 2, либо теорема 3. Весь дальнейший материал статьи, касающийся областей, не являющихся областями голоморфности, посвящен более сложному случаю б). А в тех ситуациях, когда будут появляться граничные кривые в смысле определения 1, сразу будем ссылаться на § 2, случай а) и завершать доказательство.

Случай б). Он подразумевает, что среди компонент $(\tilde{D}_j \setminus D_j)^\circ$ нет гиперболических областей, а в $|X_j|$ нельзя выделить ни одной граничной кривой в смысле определения 1. Устройство множества X_j может быть сколь угодно сложным. Чтобы получить необходимую информацию, понадобятся некоторые понятия и результаты из топологии [13], [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [13]. Топологическое пространство называется *локально связным в точке p* , если всякая открытая окрестность O точки p содержит некоторую ее связную окрестность U . Если пространство метрическое, то это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует связная окрестность U точки p такая, что $\delta(U) < \varepsilon$. Топологическое пространство локально связно, если оно локально связно в каждой своей точке.

Компактное связное хаусдорфово пространство называется *континуумом*. В случае континуума удобнее пользоваться следующим эквивалентным определением локальной связности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [14]. *Континуум K локально связан в точке p* , если для любой открытой окрестности O точки p существует открытая окрестность $U \subset O$ точки p такая, что любую точку q из U можно соединить с p континуумом $K_{q,p} \subset O$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [13]. Локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых, называется *дендритом*.

Зафиксируем произвольную точку $a \in |X_1|$. Тор $[a]$ – локально связный континуум (в топологии из $\mathbb{C}^2$).

ЛЕММА 4. *Множество $|F([a])| \subset \mathbf{I}$ – дендрит.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что это континуум, очевидно. Если бы он содержал простые замкнутые кривые, то тогда и $|X_2| \supset |F([a])|$ содержало бы те же кривые, а это – уже разобранный случай а) § 2. Надо доказать только локальную связность. Для этого воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 5 [13]. *Пусть A и B – два хаусдорфова пространства, а отображение $h: A \rightarrow B$ непрерывно и сюръективно. Если A – локально связный континуум, то таковым является и B .*

Для доказательства леммы 4 в качестве A возьмем тор $[a]$, B – континуум $|F([a])| \subset \mathbf{I}$ с топологией из $\mathbf{I}$, $h = |F|$. Лемма 4 доказана.

Обозначим получившийся дендрит $E_2 \subset |X_2|$ (подразумевается, что $E_1 = a$).

Рассмотрим множество $[E_2]$. Для каждой точки $[E_2]$ легко найти связную (даже линейно связную) окрестность из определения 2, поэтому $[E_2]$ – локально связный континуум. Теперь рассмотрим множество $|F^{-1}([E_2])| \subset |X_1|$. Из леммы 5 снова следует, что это дендрит. Обозначим этот дендрит E_3 .

Продолжая этот процесс, получаем дендриты $E_4 = |F([E_3])|$, $E_5 = |F^{-1}([E_4])|$ и т.д. Очевидно, $a = E_1 \subset E_3 \subset E_5 \subset E_7 \subset \dots \subset |X_1|$; $E_2 \subset E_4 \subset E_6 \subset E_8 \subset \dots \subset |X_2|$.

У дендритов много хороших свойств, например любую пару точек $p \neq q$ в дендрите можно соединить единственной дугой pq , имеющей в качестве концов эти точки [13]. Приведем далее те их свойства, которые нам понадобятся.

§ 3. Свойства дендритов

Главный результат этого параграфа – теорема 5 – заключается в том, что в окрестности точки ветвления конечного порядка n дендрит делит плоскость на n частей. Может быть, этот факт уже известен, но найти его в литературе не удалось, а очевидным его все-таки нельзя считать. Затем будет рассмотрен случай дендрита на **I** (см. лемму 14).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [13]. Если $\mathbf{n} \leq \text{const}$ – кардинальное число или $\mathbf{n}$ – порядковое число ω , то говорят, что топологическое пространство Y имеет порядок $\leq \mathbf{n}$ в точке p : $\text{ord}_p Y \leq \mathbf{n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество O такое, что $p \in O$, $\delta(O) < \varepsilon$ и $\#(\partial O) \leq \mathbf{n}$. Равенство $\text{ord}_p Y = \mathbf{n}$ означает, что $\text{ord}_p Y \leq \mathbf{n}$, но $\text{ord}_p Y \leq \mathbf{m}$ не имеет места ни при каком $\mathbf{m} < \mathbf{n}$.

ЛЕММА 6 [13]. Дендрит – регулярный континуум, т.е. $\text{ord}_p E \leq \omega$ для любой точки p дендрита E . Всякий подконтинуум дендрита – дендрит.

В частности, из первого утверждения леммы следует, что $\#(\partial O)$ из определения 5 конечно для любой точки дендрита и любого ε , но может стремиться к бесконечности при уменьшении ε (в случае $\text{ord}_p E = \omega$).

ЛЕММА 7 [13]. Если E – дендрит, то множество точек “ветвления” $\{p : \text{ord}_p E \geq 3\}$ не более чем счетно.

Для доказательства теоремы 5 (см. далее) нам понадобятся следующие понятия и результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [13]. Множество C разделяет пространство Y между множествами A и B (является *разделителем* между A и B), если существуют множества M и N такие, что $A \subset M$, $B \subset N$, $Y \setminus C = M \cup N$ и $(\overline{M} \cap N) \cup (\overline{N} \cap M) = \emptyset$. Разделитель называется *неприводимым*, если любое его подмножество уже не разделитель.

В дендритах разделяющими являются все точки, кроме точек порядка 1 [13]. Такие точки еще называются *концевыми*. Из теоремы Мура, которая утверждает, что в любом континууме, содержащем более одной точки, существует по крайней мере две точки, не являющиеся его разделителями, элементарно выводится, что дендрит без точек ветвления является дугой.

ЛЕММА 8 [13]. Пусть E – локально связный континуум. Если $\text{ord}_p E \geq n$, то существуют n дуг $pq_1, pq_2, pq_3, \dots, pq_n \subset E$, которые попарно не пересекаются, за исключением точки p .

ЛЕММА 9 [13]. Если D – область в локально связном пространстве Y , а H – компонента множества $Y \setminus \overline{D}$, то ∂H – неприводимый разделитель между каждой парой точек $a \in D$, $b \in H$.

ЛЕММА 10 [13]. Пусть C – некоторое замкнутое множество в локально связном пространстве Y , A и B – две различные компоненты множества $Y \setminus C$, и пусть $a \in A$, $b \in B$. Множество C – неприводимый разделитель между a и b тогда и только тогда, когда $\partial A = \partial B = C$.

Мы будем применять леммы 9 и 10 в случае $Y = \mathbb{R}^2$.

ЛЕММА 11 [13]. Всякий локально связный континуум E , разделяющий двумерную сферу S^2 между двумя точками, содержит простую замкнутую кривую, разделяющую S^2 между этими точками.

Так как континуум ограничен, а компактификация $\mathbb{R}^2$ – это сфера, то лемма 11 подтверждает интуитивно очевидный факт: если дендрит $E \subset \mathbb{R}^2$, то он не разделяет плоскость, т.е. $\mathbb{R}^2 \setminus E$ связно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [15]. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область. Жорданов полуинтервал – это непрерывный взаимно однозначный образ интервала $[0, 1)$, лежащий в D , предельное множество которого в 1 состоит из одной граничной точки. Каждый жорданов полуинтервал в D определяет достижимую точку границы. Два жордановых полуинтервала α_1 и α_2 определяют одну и ту же достижимую точку границы тогда и только тогда, когда α_1 и α_2 имеют общий конец $\xi \in \partial D$ и существует жорданов полуинтервал α_3 , имеющий тот же конец ξ и имеющий общие точки как с α_1 , так и с α_2 в любой окрестности ξ .

ЛЕММА 12 [15]. При конформном отображении области D на единичный круг U все жордановы полуинтервалы, определяющие одну и ту же достижимую точку границы ∂D , преобразуются в жордановы полуинтервалы, имеющие общий конец на ∂U , а различным достижимым точкам ∂D соответствуют различные точки ∂U .

Отметим, что лемма 8 – это теорема Менгера (“ n -Beinsatz”), леммы 9 и 10 принадлежат Куратовскому, лемма 11 доказана Уилдером, лемма 12 – это теорема Каратеодори.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$ – дендрит и $\text{ord}_p E = n < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует односвязная область $V' \subset \mathbb{R}^2$ такая, что $p \in V'$, $\delta(V') < \varepsilon$ и $V' \setminus E$ состоит ровно из n компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Менгера существует n точек $q_1, q_2, \dots, q_n$, из которых выходят дуги в точку p . Возьмем открытое множество O из определения 5 такое, что $\delta(O) < \varepsilon < \min_i(\text{dist}(p, q_i))$. Очевидно, что тогда $\#(\partial O) = n$.

Топология на дендрите индуцирована из $\mathbb{R}^2$, значит, для множества $O \subset E$ существует открытое множество O' в $\mathbb{R}^2$ такое, что $O = O' \cap E$; O' определяется, конечно, неоднозначно.

На рис. 1 дендрит E изображен сплошной линией, причем множество $O \subset E$ выделено жирной линией, таким же пунктиром изображена граница некоторого

Рис. 1

соответствующего ему множества O' в $\mathbb{R}^2$, $O = O' \cap E$, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ — это точки ∂O .

Будем считать, что $\delta(O') < \varepsilon$, в противном случае перейдем от O' к $O' \cap \{z : \text{dist}(p, z) < \varepsilon\}$.

Если O' несвязно, заменим его на компоненту связности, содержащую точку p , получившееся множество обозначим O'' . Для области O'' по-прежнему $\#(\partial(O'' \cap E)) = n$, так как точки $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ находятся вне O'' . Применим лемму 9 к области $D = O''$ и компоненте H множества $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, содержащей ∞ (и точки $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$). Как открытая компонента H линейно связна, ∂H неприводимо разделяет точки p и ∞ . Теперь применим лемму 10, где примем $C = \partial H$, $B = H$ и A — компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$, содержащая точку p . Очевидно, $O'' \subset A$, $\partial A = \partial H \subset \partial O''$. Область A связна, ее граница неприводима, точки $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ находятся вне области, значит, по-прежнему $\#(\partial(A \cap E)) = n$. На самом деле,

$$\partial(A \cap E) = \partial(O'' \cap E) = \partial(O' \cap E) = \partial O.$$

Действительно, $\partial A \subset \partial O'' \subset \partial O'$, а $\partial(D \cap E) = \partial D \cap E$ для любого открытого множества D . Покажем, что область A односвязна, иначе в A есть нестягиваемая простая замкнутая кривая. Внутри нее должны быть точки $\partial A = \partial B$. Это противоречит линейной связности B , ведь B содержит бесконечно удаленную точку. Первая часть теоремы доказана, $V' = A$ построено.

Докажем теперь, что дендрит делит V' на n компонент. Рассмотрим множество $V = V' \cap E$ и покажем, что замыкание V — дендрит. Очевидно, $\overline{V}$ принадлежит дендриту E . Из леммы 6 следует, что достаточно показать линейную связность $\overline{V}$. Но каждую точку $\overline{V}$ можно соединить с точкой p дугой в E . При этом выйти за пределы $\overline{V}$ можно, только пройдя через точку из $\partial(A \cap E)$, а каждая из этих точек $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ соединена с точкой p дугой в $\overline{V}$, значит, $\overline{V}$ линейно связно.

Теперь покажем, что две дуги ar_i и br_i дендрита $\overline{V}$, оканчивающиеся в одной точке r_i , определяют одну и ту же достижимую точку границы $\partial V'$. Поскольку дендрит не содержит замкнутых кривых, то дуги ar_i и br_i или не имеют общих точек, кроме r_i , или совпадают, начиная с некоторой точки.

Второй случай очевиден, а в первом случае соединим точки a и b какой-нибудь дугой ab в V' . Из дуги ab выделим дугу xy такую, что $x \in ar_i$ и $y \in br_i$, а других пересечений с ar_i и br_i у дуги xy нет. Дуги xr_i , yr_i и xy ограничивают жорданову область в V' . Из $\partial V' = \partial B$ и линейной связности B следует, что внутри этой жордановой области нет точек $\partial V'$. Теперь утверждение уже очевидно.

Выполним конформное отображение ψ области V' на единичный круг U . Леммы 12 и 5 гарантируют, что образом дендрита $\bar{V}$ будет дендрит. Докажем, что $U \setminus \psi(\bar{V})$ состоит из n компонент, тогда и V' будет делиться дендритом E на n частей. Действительно, рассмотрим один из n криволинейных треугольников Δ_i , образованный дугами дендрита $\psi(pq_i)$, $\psi(pq_{i+1})$ и дугой единичной окружности $\psi(q_i)\psi(q_{i+1})$. Внутри получившейся жордановой области находится одно из n открытых множеств $U_i \subset U \setminus \psi(\bar{V})$, надо лишь показать его связность. Из леммы 11 следует, что любые две точки U_i можно соединить жордановым путем в $\mathbb{R}^2$, не пересекая при этом дендрита. Возможно, этот путь пересечет дугу окружности $\psi(q_i)\psi(q_{i+1})$. Пусть g – первая, а h – последняя точка этого пересечения. Дуга gh и дендрит $\psi(\bar{V})$ – два непересекающихся компакта, значит, у них есть непересекающиеся окрестности. Тогда наш жорданов путь можно замкнуть, не выходя за пределы U . Связность U_i , а тем самым и теорема 5 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом последнем этапе доказательства теоремы 5 можно показать, что найдется область V' с жордановой границей. Проще всего для этого воспользоваться следующей теоремой Шенфлиса.

ЛЕММА 13 [13]. Пусть E – замкнутое локально связное множество на сфере S^2 , H – компонента $S^2 \setminus E$. Тогда каждая точка $q \in \partial H$ достижима из H , более точно, $H \cup q$ локально связно.

Достаточно построить жорданову область для дендрита $\psi(\bar{V})$ внутри единичного круга, а в качестве V' взять ее прообраз. Для этого возьмем на каждой из дуг $\psi(pq_1), \psi(pq_2), \dots, \psi(pq_n)$ по внутренней точке $d_1, d_2, \dots, d_n$. В каждой из n компонент, на которые дендрит $\psi(\bar{V})$ делит круг, возьмем по точке $e_1, e_2, \dots, e_n$. Следуя определению 3, легко показать, что $\psi(\bar{V}) \cup \partial U$ локально связно. Рассмотрим это множество в качестве E . По лемме 13 можно построить жордановы пути в U , соединяющие точки $e_1, e_2, \dots, e_n$ через $d_1, d_2, \dots, d_n$. Эти жордановы пути будут ограничивать нужную нам область.

Возвратимся от общей ситуации дендрита на плоскости к нашей задаче, где дендрит находится в $\mathbf{I}$. Если $p \notin \mathbf{I}_0$ и $\text{ord}_p E = n < \infty$, то достаточно малая окрестность точки p (не имеющая пересечения с $\mathbf{I}_0$), полученная в теореме 5, действительно делится дендритом на n частей. Если же $p \in \mathbf{I}_0$, то, применяя теорему 5, получим следующую лемму.

ЛЕММА 14. Пусть $p \in \mathbf{I}_0$, $\text{ord}_p E = n < \infty$. Тогда могут быть лишь следующие случаи:

- 1) если в окрестности p на $\mathbf{I}_0$ нет дуг дендрита, то окрестность (в $\mathbf{I}$) делится на $n + 1$ частей;
- 2) если в окрестности p на $\mathbf{I}_0$ лежит одна дуга дендрита, то окрестность (в $\mathbf{I}$) делится на n частей;
- 3) если в окрестности p на $\mathbf{I}_0$ лежат две дуги дендрита, то окрестность (в $\mathbf{I}$) делится на $n - 1$ частей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже исключили из рассмотрения случай а) § 2. Поэтому из $p \in \mathbf{I}_0$ и предположения, что $q \in \mathbf{I}_0$, $q \neq p$, следует, что вся дуга pq принадлежит $\mathbf{I}_0$, из чего следует утверждение леммы.

Теорема 5 и лемма 14 доказывают существование специальных окрестностей у точек дендрита конечного порядка. Эти окрестности можно выбирать сколь угодно малого размера и считать, что их границы жордановы. Будем далее называть эти окрестности *специальными*, указывая только их размер и точки, к которым они относятся.

Если $E \subset \mathbb{R}^2$ и $\text{ord}_p E = \omega$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует круг $V' \subset \mathbb{R}^2$ с центром в точке p такой, что $\delta(V') < \varepsilon$ и $V' \setminus E$ состоит не менее чем из ста компонент. Поэтому даже если точка p принадлежит $\mathbf{I}_0$, ее специальная окрестность все равно делится не менее чем на 99 частей. Как выяснится далее, проблем с этими точками не будет.

§ 4. Дендриты и дуги

В этом параграфе покажем, что изображение на диаграмме Рейнхарта образа тора из инвариантного множества X_j , на самом деле, не абстрактный дендрит, а простая дуга или точка. Доказательство основано на том, что тор, изображение которого на диаграмме является точкой ветвления, должен перейти в тор (теорема 7). Нас интересуют дендриты именно той последовательности, которая была построена в § 2, и поэтому мы оставили те же обозначения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть E_k и E_{k+1} , $k \geq 2$, — дендриты, $E_{k+1} = |F([E_k])|$ или $E_{k+1} = |F^{-1}([E_k])|$, $m \in E_k$, $l \in E_{k+1}$, причем $\text{ord}_m E_k \geq 3$. Если существуют точки (в $\mathbb{C}^2$) $w \in [m]$, $z \in [l]$ такие, что $F: z \leftrightarrow w$, то обязательно и $\text{ord}_l E_{k+1} \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для случая $m \in E_2$, $l \in E_3$; тогда $F(z) = w$. Доказательство для других индексов точно такое же, а обозначения более громоздкие. Предположим противное: есть такие l, m , что $\text{ord}_m E_2 \geq 3$, но $\text{ord}_l E_3 \leq 2$.

Рассмотрим крайний случай $\text{ord}_m E_2 = 3$, $\text{ord}_l E_3 = 2$; если $\text{ord}_m E_2 > 3$ и (или) $\text{ord}_l E_3 < 2$, то доказательство еще проще.

Заметим, что если $m \notin \mathbf{I}_0$, то, уменьшая, если необходимо, ε , можно считать, что V' не пересекается с $\mathbf{I}_0$ (см. обозначения из теоремы 5). Используя лемму 14, изобразим схематически на рис. 2 все возможные комбинации и покажем, что все они невозможны.

Рассмотрим окрестность $W = [V']$ точки w в $\mathbb{C}^2$, где V' — специальная окрестность точки $m \in E_2$. Множество $[E_2]$ делит W на три (случаи А3 и В3), четыре (случай Б3) или две (случай Г3) части (см. рис. 2).

а) Покажем, что случай А2→А3 невозможен. Пусть $B_R \subset \mathbb{C}^2$ — шаровая окрестность точки z такого малого радиуса R , что $B_R \subset F^{-1}(W)$. Построим окрестность $Z \subset \mathbb{C}^2$ точки z следующего вида: $Z = B_R \cap [V'']$, где V'' — специальная окрестность (построенная в предыдущем параграфе) точки $l \in E_3$ размера меньше R . Очевидно, что множество $[E_3]$ делит Z на две части. Возьмем три точки из разных компонент $W \setminus [E_2]$, настолько близкие к w , что их прообразы попадут в Z .

Рис. 2

Можно также считать, что эти прообразы не попадают на $[E_3]$, такой выбор точек возможен, так как компоненты $W \setminus [E_2]$ – открытые множества. Какие-нибудь два прообраза попадут в одну компоненту $Z \setminus [E_3]$, и их можно соединить жордановым путем в этой компоненте без пересечения с $[E_3]$. Так как по построению $F^{-1}([E_2]) \subseteq [E_3]$, то образ этого жорданова пути будет соединять две компоненты $W \setminus [E_2]$ без пересечения с $[E_2]$, что невозможно.

б) Теперь рассмотрим случай Б2→А3, когда $Z \setminus [E_3]$ и $W \setminus [E_2]$ имеют по три компоненты. Пусть N_1, N_2, N_3 – компоненты $W \setminus [E_2]$, а M_1, M_2, M_3 – компоненты $Z \setminus ([r_1 l] \cup [r_2 l])$. Так же, как в п. а), можно показать, что точки x_i из разных компонент N_i не могут иметь прообразы $F^{-1}(x_i)$ в одной и той же компоненте $Z \setminus [E_3]$. Поэтому точки из одной компоненты N_i не могут иметь прообразы в разных компонентах $Z \setminus [E_3]$. Учитывая, что прообраз N_i должен быть открыт, и так как не исключена возможность, что $F^{-1}(x_i) \in [E_3]$, сделаем уточнение: $F^{-1}(N_i) \subseteq M_i$. Это слабое утверждение, но нам достаточно и его.

Итак, в случае Б2 существуют две компоненты M_i , пересечение границ которых принадлежит тору $[l]$, одномерному или нульмерному. А в случае А3 точки пересечения границ двух любых компонент N_i образуют вещественно-трехмерное многообразие, и оно не может отобразиться внутрь множества $[l]$ меньшей размерности.

в) Разберем случай Б2→В3. В случае В3 существует дуга γ дендрита E_2 , лежащая на $\mathbf{I}_0$ (см. рис. 2). Покажем, что существует точка $y \in [\gamma] \setminus [m]$ такая, что $F^{-1}(y) \in ([r_1 l] \cup [r_2 l]) \setminus [l]$. Очевидно, можно найти точку $y_0 \in [\gamma] \setminus [m]$ такую, что $F^{-1}(y_0) \notin [l]$. Точку y_0 можно соединить путем $S \subset ([\gamma] \setminus [m]) \cup w$ с точкой w , $F^{-1}(S)$ будет соединять $F^{-1}(y_0)$ и z , и наступит момент $t_0 \in S$, $t_0 \neq w$, такой, что $F^{-1}(t_0) \in ([r_1 l] \cup [r_2 l]) \setminus [l]$, иначе порядок l был бы больше двух. В качестве y тогда можно взять t_0 .

Рассмотрим достаточно малую окрестность найденной точки y в $\mathbb{C}^2$. Эта окрестность содержит точки только одной компоненты $W \setminus [E_2]$, а прообраз этой окрестности содержит точки двух компонент $Z \setminus [E_3]$. Таким образом, две компоненты

$Z \setminus [E_3]$ уже “заняты”, и для точек двух других компонент $W \setminus [E_2]$ осталась только одна компонента $Z \setminus [E_3]$. Рассуждая, как в п. а), приходим к противоречию.

г) Рассмотрим случай $B2 \rightarrow \Gamma 3$. Рассуждая, как в п. в), найдем $y_1 \in [\gamma_1] \setminus [m]$, $y_2 \in [\gamma_2] \setminus [m]$ такие, что $F^{-1}(y_i) \in ([r_1 l] \cup [r_2 l]) \setminus [l]$. Если $F^{-1}(y_i)$ принадлежат одной $[r_j l]$, то в компонентах $Z \setminus [E_3]$, общей границей которых является $[r_j l]$, существуют прообразы точек из обеих компонент $W \setminus [E_2]$, и мы можем применить п. а). Если $F^{-1}(y_i)$ принадлежат разным $[r_j l]$, то в компоненте $Z \setminus [E_3]$, граница которой содержит $[r_j l]$, есть прообразы точек из обеих компонент $W \setminus [E_2]$, и мы снова применим п. а).

Случаи $B2 \rightarrow A3$, $\Gamma 2 \rightarrow A3$, $A2 \rightarrow B3$, $B2 \rightarrow B3$, $B2 \rightarrow B3$, $\Gamma 2 \rightarrow B3$, $A2 \rightarrow B3$, $B2 \rightarrow B3$, $\Gamma 2 \rightarrow B3$, $\Gamma 2 \rightarrow \Gamma 3$ разбираются аналогично п. а), случай $A2 \rightarrow \Gamma 3$ – аналогично п. в), случай $B2 \rightarrow \Gamma 3$ – аналогично п. г). Теорема доказана.

Итак, точки из “торов ветвления” могут переходить только в точки из “торов ветвления”.

ТЕОРЕМА 7. Пусть в обозначениях теоремы 6 $w', w'' \in [m]$ – произвольные точки, $\text{ord}_m E_k \geq 3$, $F: w' \leftrightarrow z'$, $w'' \leftrightarrow z''$. Тогда z' и z'' принадлежат одному тору $[l]$, $l \in E_{k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим точки w' и w'' путем в торе $[m]$. Если бы z' и z'' попадали в разные торы ветвления $[l_1]$ и $[l_2]$, то соединяющий l_1 и l_2 путь в дендрите E_{k+1} состоял бы по теореме 6 из одних торов ветвления, а это противоречит лемме 7.

Далее нам потребуется следующий результат (его можно считать очевидным, а можно вывести из теоремы Брауэра).

ЛЕММА 15. Пусть $[l] \in \tilde{D}_1$ и $[m] \in \tilde{D}_2$ – торы одинаковой размерности, и пусть $F([l]) \subset [m]$ или $F^{-1}([m]) \subset [l]$. Тогда F осуществляет гомеоморфизм торов $[m]$ и $[l]$.

Из теоремы 7 и леммы 15 сразу следует, что двумерный “тор ветвления” является инвариантным тором.

Построения, которые проводились до сих пор, относились к произвольной фиксированной точке $a \in |X_1|$. Разберем теперь частные случаи.

ЛЕММА 16. Если $a \notin \mathbf{I}_0$, то либо $F([a])$ – двумерный тор, либо $E_2 = |F([a])|$ – простая дуга, имеющая более одной точки. Если $a \in \mathbf{I}_0$, то $|F([a])|$ – либо точка, либо простая дуга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $a \notin \mathbf{I}_0$, второй случай разбирается аналогично. Очевидно, что $|F([a])|$ – дендрит. Если этот дендрит состоит из одной точки, то эта точка не принадлежит $\mathbf{I}_0$, поскольку двумерный тор не “поместится” в одномерном (или нульмерном) торе. Тогда по лемме 15 $F([a])$ совпадает со всем соответствующим тором.

Пусть теперь дендрит нетривиальный. Докажем, что у него нет точек ветвления. Предположим, что такая точка есть. Если бы эта точка не принадлежала $\mathbf{I}_0$, то по теореме 7 и лемме 15 следовало бы, что у дендрита E_2 нет других точек, вопреки предположению. Если бы точка ветвления находилась в 0, то, выколов ее,

мы бы разбили дендрит E_2 на части. Но если в двумерном торе $[a]$ выколоть всего одну точку, он останется связным. Противоречие.

Пусть $m \in \mathbf{I}_0$ – точка ветвления, $m \neq 0$, тор $[m]$ – окружность на плоскости. Если выколоть из множества $F([a])$ все точки $[m]$, то получившееся множество станет несвязным, причем компонент связности будет не менее 3 (m – точка ветвления). Покажем, что если выколоть из $[a]$ прообразы точек $[m]$, то получившееся множество будет иметь не более двух компонент. Если $[m] \not\subset F([a])$, то получившееся множество будет связным. В случае $[m] \subset F([a])$ сойдемся на следующий простой факт.

ЛЕММА 17. Пусть $\mathbf{T}^2$ – двумерный тор, а $C \subset \mathbf{T}^2$ – замкнутая жорданова кривая. Тогда $\mathbf{T}^2 \setminus C$ состоит из не более чем двух компонент.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. До сих пор, чтобы избежать путаницы, мы строго следовали тому порядку, в котором были даны определения дендритов E_i в § 2. Однако в формулировке леммы 16 понятие дендритов отсутствует и формулировка имеет вид, не зависящий ни от каких вспомогательных построений. Очевидно, что этот результат верен не только для $a \in |X_1|$, но и для $a \in |X_2|$.

Далее будем считать, что $a \notin \mathbf{I}_0$, т.е. начальный тор $[a]$ двумерный, потому что этого нам будет достаточно.

§ 5. Дуги и гиперповерхности

Ситуацию, при которой все торы X_j инвариантны или хотя бы все двумерные торы X_j инвариантны, будем рассматривать позднее, при этом не обойтись без перебора вариантов (довольно простого). В этом параграфе рассмотрим ситуацию, когда $[a]$ – двумерный неинвариантный тор. Тогда по лемме 16 дендрит $|F([a])| = E_2$ является дугой и процесс построения дендритов E_i не закикливается после первого же шага.

Введем следующие множества: $L_1 = \bigcup_{n=2k+1} E_n$ и $L_2 = \bigcup_{n=2k} E_n$ (см. обозначения в § 2). Отображение F осуществляет гомеоморфизм множеств $[L_1]$ и $[L_2]$. Докажем по индукции, что эти множества вообще не содержат инвариантных торов, так как множество $[E_1] = [a]$ не является инвариантным тором по предположению. Если множество $[E_n]$ не содержит инвариантных торов, то и множество $[E_{n+1}]$ их не содержит. Действительно, каждый тор из $[E_{n+1}]$ обязательно содержит точку, прообраз которой принадлежит тору из $[E_n]$ (неинвариантному). Кроме того, множества L_1 и L_2 не зависят от начальной точки a , мы могли взять в качестве начальной любую другую точку $b \in L_1$ (даже $b \in \mathbf{I}_0$) и получить те же множества. Действительно, $[b]$ – тоже неинвариантный тор, и процедура построения дендритов, начатая с точки b , приведет к каким-то множествам $L_1(b) \subset L_1$ и $L_2(b) \subset L_2$. Отображение F осуществляет гомеоморфизм между множествами $[L_1(b)]$ и $[L_2(b)]$. Если $a \in L_1(b)$, то, очевидно, $L_1(b) = L_1$; если $a \notin L_1(b)$, то невозможно попасть ни в одну точку $L_1(b)$, начав с точки a , а это противоречит построению. Легко показать, что процесс не может закикливаться и после второго шага. Действительно, предположим это произошло, тогда L_1 и L_2 – дендриты, причем $[L_1]$ и $[L_2]$ гомеоморфны. Так как мы исключили случай а) § 2 и $[a] \subset [L_1]$ – двумерный тор, то все концевые точки L_1 не могут лежать на $\mathbf{I}_0$. Возьмем концевую точку c дендрита L_1 , не лежащую на $\mathbf{I}_0$. Все точки тора $[c]$ должны переходить

в точки концевых торов, это легко показать методом доказательства теоремы 6, п. а). Из линейной связности L_2 следует, что это будет один концевой тор. Тогда этот тор (и $[c]$) будет инвариантным, что противоречит предыдущим замечаниям.

ЛЕММА 18. Пусть $[a]$ – двумерный неинвариантный тор. Тогда все дендриты E_i , $i \geq 2$, являются дугами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что дендрит E_i не имеет точек ветвления. Доказательство проведем по индукции.

1°. E_2 является дугой по лемме 16.

2°. Пусть все E_i , $i \leq n-1$, являются дугами; докажем, что E_n – дуга. Предположим противное: $h \in E_n$ – точка ветвления. Разберем три случая.

а) $h \notin \mathbf{I}_0$. Из теоремы 7 и леммы 15 сразу следует, что $[h]$ – инвариантный тор. Противоречие.

б) $h = 0$. Тогда существует точка $x \in [E_{n-1}]$ такая, что $F: x \leftrightarrow h$. Если $x = 0$, то $[x]$ (и $[h]$) – инвариантный тор. Если $x \neq 0$, то $[E_{n-1}] \setminus x$ связно, а $E_n \setminus h$ имеет не менее трех компонент. Противоречие.

в) $h \in \mathbf{I}_0 \setminus 0$. Из теоремы 7 следует, что все точки $[h]$ перейдут в один тор $[m]$ (будем считать, что действует F , а не F^{-1}), $m \in E_{n+1} \cap E_{n-1}$.

Если $[m]$ – одномерный тор, то по лемме 15 он инвариантный. Если же тор $[m]$ двумерный, то по лемме 17 $[m] \setminus F([h])$ состоит не более чем из двух компонент, а множество $[E_{n-1}] \setminus F([h])$ даже будет связным. Действительно, любые две точки $b, c \neq m$ дендрита E_{n-1} можно соединить дугой. Если жорданова дуга bc проходит через точку m , то любую точку из $[b]$ и любую точку из $[c]$ можно соединить дугой без пересечения с $F([h])$ потому, что одномерное множество $F([h])$ не разделяет трехмерное в окрестности $[m]$ множество $[bc]$; если bc не проходит через m , то, тем более, такое соединение возможно. В то же время $[E_n] \setminus [h]$ имеет не менее трех компонент. Противоречие. Лемма доказана.

Покажем, что $[L_1]$ и $[L_2]$ – связные вещественно-аналитические гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$. Будем использовать независимость $[L_1]$ и $[L_2]$ от начальной точки a . Рассмотрим начальный тор $[a]$; $|F([a])|$ – простая дуга, пересечение которой с $\mathbf{I}_0$ либо пусто, либо состоит из одной точки (можно показать, что тогда это будет концевая точка дуги). Действительно, пусть существуют хотя бы две точки пересечения – p и q . Тогда вся дуга pq принадлежит $\mathbf{I}_0$, в противном случае из этой дуги можно было бы выделить граничную кривую в смысле определения 1. Окрестность некоторой точки на торе $[a]$ (т.е. вполне вещественное многообразие) должна перейти (при биголоморфном отображении) в плоскую область, что невозможно. Пусть теперь $K \subset [a]$ – замкнутое множество точек таких, что $|F(K)| \subset \mathbf{I}_0$. Множество $[a] \setminus K$ открыто и непусто. Так как $[a]$ – неинвариантный тор, то, очевидно, множество $|F([a] \setminus K)|$ содержит аналитическую дугу β . Пусть b – внутренняя точка β . Тогда в окрестности $[b]$ множество $[L_2]$ – 3-мерное вещественно-аналитическое многообразие. Так как $[L_1]$ и $[L_2]$ не зависят от начальной точки, можно считать, что начальная точка – это b . По построению структура вещественно-аналитической гиперповерхности распространяется на все точки $[L_1]$ и $[L_2]$.

Рассмотрим изображения множеств $[L_1]$ и $[L_2]$ на $\ln$ -диаграмме: $\ln L_1$ и $\ln L_2$. Это аналитические кривые и на них можно рассмотреть кривизну. Так как выпуклость на $\ln$ -диаграмме означает локальную псевдовыпуклость, а это свойство

сохраняется при биголоморфных отображениях, то рейнхартовы гиперповерхности, соответствующие участкам положительной, отрицательной и нулевой кривизны, инвариантны, как и соединяющие их торы, соответствующие точкам перегиба. Так как у нас по построению не может быть инвариантных торов, то $[L_j]$ либо плоская по Леви в целом, либо выпуклая по Леви в целом поверхность. В итоге мы пришли к следующему результату.

ТЕОРЕМА 8. В случае б) §2 рейнхартовы множества

$$X_j = (\tilde{D}_j \setminus D_j) \setminus (\tilde{D}_j \setminus D_j)^\circ$$

можно разложить на объединения непересекающихся рейнхартовых множеств: $X_j = \text{Inv}_j \cup C_j \cup P_j \cup I_j$, где Inv_j – множество, состоящее из инвариантных торов различных размерностей, C_j состоит из инвариантных 3-мерных выпуклых по Леви гиперповерхностей, P_j состоит из 3-мерных инвариантных плоских по Леви гиперповерхностей и I_j состоит из плоских инвариантных областей (на $[I_0]$). Некоторые из этих составляющих могут оказаться пустыми множествами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества C_j и P_j состоят из гиперповерхностей $[L]$, построенных в начале этого параграфа. Множества I_j выделим следующим более простым способом. Как уже было показано, множества Inv_j , C_j и P_j попарно не пересекаются, инвариантны и включают в себя все точки X_j , не лежащие на $[I_0]$. Так как X_j – сами инвариантны, то $X_j \setminus (\text{Inv}_j \cup C_j \cup P_j)$ тоже инвариантны и целиком принадлежат I_0 . Это рейнхартовы плоские множества. Связное рейнхартово плоское множество – это либо круг, либо кольцо, либо окружность, либо точка 0. Очевидно, границы этих множеств инвариантны и принадлежат Inv_j . Поэтому $I_j := X_j \setminus (\text{Inv}_j \cup C_j \cup P_j)$ – плоские области. Теорема доказана.

Если множество C_j в этом разложении непусто, то применение теоремы 4 сразу завершает доказательство теоремы 1.

Кроме теоремы 8, для нахождения инвариантных множеств будем использовать следующую лемму.

ЛЕММА 19. Пусть F – биголоморфизм областей Рейнхарта $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$, который переводит двумерные торы $[a]$ и $[b]$ в торы $[c]$ и $[d]$ соответственно. Тогда множество в $\mathbb{C}^2$, которое на $\ln$ -диаграмме изображается отрезком, соединяющим $\ln a$ и $\ln b$ (такие множества далее будем называть $\ln$ -отрезками), перейдет в $\ln$ -отрезок, соединяющий $\ln c$ и $\ln d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство областей голоморфности $D_1(s)$, обладающих следующими свойствами: каждая область из $D_1(s)$ содержится в $\tilde{D}_1$ и содержит $[a]$ и $[b]$. Очевидно, каждая область из $D_1(s)$ включает $\ln$ -отрезок, соединяющий a и b , и других общих точек семейства $D_1(s)$ не существует. Утверждение леммы следует из того, что семейству $D_1(s)$ соответствует аналогичное семейство $D_2(s)$ в $\tilde{D}_2$ с теми же свойствами.

Например, из этой леммы и теоремы 3 следует, что если удалось найти три двумерных инвариантных тора, не лежащих на одной $\ln$ -прямой, то теорему 1 для такой ситуации можно считать доказанной.

§ 6. Классификация областей Рейнхарта

Рассмотрим множество рейнхартовых областей голоморфности и выделим два подмножества: **A** – те области, $\ln$ -диаграмма которых занимает все $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0\}$, $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$, $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$), **B** – все остальные области.

Изображением области из **B** на $\ln$ -диаграмме является выпуклая фигура, оно не заполняет все $\mathbb{R}^2$. Поэтому должны быть опорные прямые, хотя бы одна. Каждой опорной прямой можно сопоставить ограниченную на области плюрисубгармоническую функцию – линейную комбинацию функций $\ln |z_1|$, $\ln |z_2|$, $\ln \left| \frac{1}{z_1} \right|$ и $\ln \left| \frac{1}{z_2} \right|$ с неотрицательными коэффициентами. Всего существует восемь вариантов взаимного расположения прямой и изображения области. Мы не будем приводить соответствующие рисунки и формулы ввиду их очевидности.

Запишем уравнения опорных прямых для получающихся на $\ln$ -диаграмме выпуклых фигур в виде $y = kx + c$, где $x = \ln |z_1|$, $y = \ln |z_2|$ (для случая с вертикальной опорной прямой все последующие построения очевидны).

Разобьем множество **B** на два: множество **B1** будет состоять из областей, у которых все опорные прямые на $\ln$ -диаграмме параллельны, а множество **B2** – остальные области (т.е. имеющие по крайней мере две непараллельные опорные прямые). В частности, во множество **B2** попадают все ограниченные области.

Множество **B1** снова разобьем на два: **B1И** – те области, у которых коэффициент наклона k иррационален, и **B1Р** – те области, у которых коэффициент рационален (или опорные прямые вертикальны).

В областях из множества **B1** легко найти целые (голоморфные) кривые. А именно, пусть целая кривая не вырождается в точку и имеет вид

$$\{z_1 = f(t), \quad z_2 = g(t), \quad t \in \mathbb{C}\}.$$

Тогда будет выполнено соответствующее этой области неравенство для ПСГ-функции, например

$$\ln |f(t)| + k \ln |g(t)| < c, \quad k > 0.$$

Получается ограниченная сверху ПСГ-функция на $\mathbb{C}$, т.е. константа (или $-\infty$). В нашем случае это означает, что $|f(t)| \cdot |g(t)|^k = \text{const}$. Если $\text{const} = 0$, то $f(t) \times g(t) \equiv 0$ на всем $\mathbb{C}$. Кривые, соответствующие этому случаю, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{z_1 \equiv 0, \quad z_2 \in \mathbb{C}\}, \quad \{z_1 \equiv 0, \quad z_2 \in \mathbb{C} \setminus 0\}, \\ \{z_1 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \equiv 0\}, \quad \{z_1 \in \mathbb{C} \setminus 0, \quad z_2 \equiv 0\}. \end{aligned}$$

Если $\text{const} \neq 0$, то f и g – целые функции без нулей, поэтому эти целые кривые имеют следующий вид:

$$\{z_1 = K e^{-kr(t)}, \quad z_2 = e^{r(t)}, \quad t \in \mathbb{C}\},$$

где $r(t)$ – целая функция такая, что $g(t) = e^{r(t)}$, $K \in \mathbb{C} \setminus 0$. Это множество совпадает с множеством

$$\{z_1 = K e^{-kt}, \quad z_2 = e^t, \quad t \in \mathbb{C}\}. \quad (1)$$

Такие же рассуждения можно провести и в оставшихся семи случаях.

Если $k \in \mathbb{Q}$, то точки (1) заполняют аналитическое множество.

Если $k \notin \mathbb{Q}$, то множество таких точек не принадлежит никакому собственному аналитическому подмножеству.

Теперь рассмотрим область D из **Б2** подробнее. Она имеет по крайней мере две непараллельные опорные прямые на $\ln$ -диаграмме, пересекающиеся в некоторой точке A . Очевидно, что прямые, проходящие через A и имеющие промежуточные коэффициенты наклона, либо сами будут опорными (если A принадлежит границе изображения D), либо будут параллельны опорным прямым. Из получившегося диапазона можно выбрать бесконечно много опорных прямых с рациональными коэффициентами наклона. Рассмотрим на D полуметрики Каратеодори c_D и Кобаяси k_D . Пусть p, q – точки D , $p \neq q$, такие, что $k_D(p, q) = 0$. Так как $k_D(p, q) \geq c_D(p, q)$, то $c_D(p, q) = 0$ и для любой ограниченной голоморфной на D функции f_i будет выполнено $f_i(p) = f_i(q)$. Каждой опорной прямой на $\ln$ -диаграмме с рациональным коэффициентом наклона отвечает подобная функция вида $z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Поскольку таких прямых бесконечно много, можно выписать переопределенную систему уравнений вида

$$z_1^{\alpha_i}(p)z_2^{\beta_i}(p) = z_1^{\alpha_i}(q)z_2^{\beta_i}(q). \quad (2)$$

Если $z_1(p) \neq 0$, $z_2(p) \neq 0$, $z_1(q) \neq 0$, $z_2(q) \neq 0$, то из этой системы легко следует, что $p = q$. Таким образом, если область D не пересекается с координатными плоскостями, то она гиперболическая. Если D включает целую кривую (уже ясно, что это может быть только одно из множеств $\{z_1 \equiv 0, z_2 \in \mathbb{C}\}$ или $\{z_1 \equiv 0, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, $\{z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \equiv 0\}$, $\{z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z_2 \equiv 0\}$), то, конечно, D не гиперболическая. Но в этом случае можно доказать следующее: область D' , которая получается, если исключить из D имеющиеся в ней целые кривые (одну или две), является гиперболической. Действительно, пусть D' имеет точки, лежащие на координатной плоскости $z_1 = 0$ (эти точки образуют круг или кольцо, может быть, неограниченное), а на координатной плоскости $z_2 = 0$ точек не имеет. Система (2), очевидно, пригодна для поиска точек $p \neq q$ таких, что $c_{D'}(p, q) = 0$. В силу относительной полноты D к соотношению (2) можно добавить уравнение $z_2(p) = z_2(q)$, если его там не было, откуда легко следует, что $p = q$. Другие случаи еще проще: если D' не имеет точек на координатных плоскостях, то она гиперболическая, если пересекается с обоими координатными осями по кругам или кольцам, то в системе будут уравнения $z_1(p) = z_1(q)$ и $z_2(p) = z_2(q)$.

Итак, область D из **Б2** является либо гиперболической, либо объединением гиперболической и одной или двух целых кривых (координатных плоскостей).

ЛЕММА 20. Пусть D – произвольная рейнхартова область голоморфности. Тогда она принадлежит одному из следующих классов:

1) $\mathbb{C}^2$;	4) области из Б2 ;
2) $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0\}$ или $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$;	5) области из Б1Р ;
3) $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$;	6) области из Б1И .

Область, попавшая в один из этих классов, не может быть биголоморфно эквивалентна области из другого класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В любой области из **Б1Р** есть много целых кривых, и все они – аналитические множества. В областях из **Б1И** тоже много целых кривых, но они не являются аналитическими множествами, за исключением, возможно, координатных плоскостей. В областях из **Б2** целых кривых нет, кроме, быть может, двух. В областях из **А** есть много целых кривых, и являющихся аналитическими множествами, и не являющихся аналитическими. Так как при биголоморфных отображениях аналитические множества переходят в аналитические (например, по теореме Реммерта), а целые кривые – в целые кривые, то лемма доказана.

Проведем теперь более подробную классификацию областей из **Б1Р**.

Этот класс мы поделим на два: **Б1Р1** включает области, $\ln$ -диаграмма которых ограничена с одной стороны, а **Б1Р2** состоит из областей, $\ln$ -диаграмма которых ограничена с двух сторон (параллельными прямыми). Рассмотрим область из **Б1Р2**. Ее можно записать как $\{0 < K_1 < |z_1|^p |z_2|^q < K_2\}$, где p и q – взаимно простые целые числа. Если p и q не равны нулю, то существуют числа p_1 и q_1 такие, что $pp_1 + qq_1 = 1$.

Тогда мономиальное отображение

$$\{u = z_1^p z_2^q, \quad v = z_1^{q_1} z_2^{-p_1}\} \quad (3)$$

(обратное отображение $\{z_1 = u^{p_1} v^q, \quad z_2 = u^{q_1} v^{-p}\}$) переводит область в “бездонное кольцо” $\{K_1 < |u| < K_2, |v| > 0\}$. Если $p = 0$ или $q = 0$, то к этому типу областей добавятся “обычные кольца” $\{K_1 < |u| < K_2\}$.

Предварительно выделим в классе **Б1Р** следующие восемь подклассов:

$$\begin{aligned} a - \{|u|^q < |v|^p, \quad p, q > 0\}, & \quad б - \{|u| < 1\}, \\ в - \{0 < |u| < 1\}, & \quad з - \{|u| < 1, |v| > 0\}, \\ д - \{0 < |u| < 1, |v| > 0\}, & \quad е - \{|v|^p |u|^q < 1, \quad p, q > 0\}, \\ ж - \{0 < c < |u| < 1\}, & \quad з - \{0 < k < |u| < 1, |v| > 0\} \end{aligned}$$

($ж$ и $з$ – подклассы класса **Б1Р2**).

В фигурных скобках указаны представители этих классов, будем называть их *стандартными областями* – это нормированные области голоморфности. Каждая область голоморфности из **Б1Р** биголоморфно эквивалентна какой-нибудь стандартной области. Важно, что в качестве биголоморфизма всегда можно использовать мономиальное отображение, подробные вычисления не будем здесь приводить, скажем только, что надо использовать линейные отображения, переименования переменных, инверсию или преобразование типа (3). Поэтому, если теорема 1 будет доказана для стандартных областей какого-то класса, она будет доказана для всех областей голоморфности этого класса.

Окончательное разбиение **Б1Р** оказывается немного другим.

ЛЕММА 21. *Каждая область Рейнхарта из класса **Б1Р** принадлежит одному из следующих семи классов:*

$$1) a \cup з; \quad 2) б; \quad 3) в; \quad 4) д; \quad 5) е; \quad 6) ж; \quad 7) з.$$

Области из разных классов не могут быть биголоморфно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказать надо только второе утверждение. Область из класса a может быть гомеоморфна областям из классов ϑ , z , $\mathcal{J}$. Однако в классах ϑ и $\mathcal{J}$ все целые кривые эквивалентны $\mathbb{C}$, а в a кривая $\{u = 0\}$ эквивалентна $\mathbb{C} \setminus 0$. Поэтому область из класса a может быть биголоморфна только области из классов a или z .

Область из класса b может быть гомеоморфна области из класса e . Но в классе e есть две пересекающиеся целые кривые ($v = 0$ и $u = 0$), а в b пересекающихся кривых нет. Поэтому класс b и класс e изолированы от остальных классов.

Область из класса ϑ может быть гомеоморфна областям из классов a , z , $\mathcal{J}$. Но с областями из классов a и z не может быть биголоморфизма, потому что в этих областях целые кривые типа $\mathbb{C} \setminus 0$, а области из класса ϑ имеют целые кривые типа $\mathbb{C}$. Докажем, что область из класса ϑ и область из класса $\mathcal{J}$ не могут быть биголоморфны. Действительно, при биголоморфизме целая прямая переходит в целую прямую, а это значит, что отображение F имеет вид $\{w_1 = f_1(z_1, z_2), w_2 = f_2(z_2)\}$, где f_2 должно осуществлять биголоморфное отображение проколотого круга $\{0 < |z_2| < 1\}$ на кольцо $\{0 < c_1 < |w_2| < c_2\}$. Очевидно, что такого отображения не существует.

Аналогично доказывается, что область из класса d и область из класса z не могут быть биголоморфны.

Область из класса z может быть гомеоморфна областям из классов a , ϑ , $\mathcal{J}$. Но область из z не может быть биголоморфна ни ϑ , ни $\mathcal{J}$ — у них разные типы целых кривых. Лемма доказана.

Результатом лемм 20 и 21 является следующее разбиение на классы множества рейнхартовых областей голоморфности:

1) $\mathbb{C}^2$;	2) $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0\}$ или $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$;	3) $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$;
4) область из B2 ;	5) область из B1И ;	6) область из $a \cup z$;
7) область из b ;	8) область из ϑ ;	9) область из d ;
10) область из e ;	11) область из $\mathcal{J}$;	12) область из z .

Продолжим это разбиение (сохраняя названия классов) на все множество областей Рейнхарта, область будет относиться к тому классу, к которому относится ее оболочка голоморфности. Каждое из двенадцати указанных выше множеств, включающее и области голоморфности, и области, не являющиеся областями голоморфности, назовем *классом*.

Используя то, что любой автоморфизм проколотого круга $U^* = \{0 < |u| < 1\}$ имеет вид Au , где $|A| = 1$, а любой автоморфизм $\mathbb{C} \setminus 0$ имеет вид Au или A/u , докажем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 22. *Стандартные области имеют следующие группы автоморфизмов:*

- b – автоморфизмы $u_n = H(u)$, $v_n = B(u)v + C(u)$, где $H(u)$ – автоморфизм единичного круга, $B(u)$, $C(u)$ – голоморфные функции в круге, $B(u) \neq 0$;
- ϑ – автоморфизмы $u_n = Au$, $|A| = 1$, $v_n = B(u)v + C(u)$, где $B(u)$, $C(u)$ – голоморфные функции в U^* , $B(u) \neq 0$;

g – автоморфизмы $u_n = H(u)$, $v_n = B(u)v$ или $v_n = B(u)/v$, где $B(u)$ – голоморфная функция в круге, $B(u) \neq 0$, $H(u)$ – автоморфизм единичного круга;

d – автоморфизмы $u_n H = Au$, $|A| = 1$, $v_n = B(u)v$ или $v_n = B(u)/v$, где $B(u)$ – голоморфная функция в U^* , $B(u) \neq 0$;

$ж$ – автоморфизмы $u_n = Au$ или $u_n = A/u$, $A \neq 0$, $v_n = B(u)v + C(u)$, где $B(u)$, $C(u)$ – голоморфные функции в кольце, $B(u) \neq 0$;

$з$ – автоморфизмы $u_n = Au$ или $u_n = A/u$, $A \neq 0$, $v_n = B(u)v$ или $v_n = B(u)/v$, где $B(u)$ – голоморфная функция в кольце, $B(u) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму только для случая d , остальное или очевидно, или доказывается аналогично. Целые кривые в d имеют вид $\mathbb{C} \setminus 0$ и при биголоморфизме переходят друг в друга. Значит, по координате u получается автоморфизм проколотого круга Au . На каждой целой кривой действует автоморфизм Bv или B/v множества $\mathbb{C} \setminus 0$. Константа $B \neq 0$ зависит от кривой, т.е. от u . Одновременно оба вида автоморфизмов кривых не могут встретиться. Докажем это от противного.

Пусть автоморфизм Aut на подмножестве $U_1 \subset U^*$ имеет вид $B_1(u)v$, а на подмножестве $U_2 = U^* \setminus U_1$ имеет вид $B_2(u)/v$. Если будет доказано, что U_1 и U_2 открыты, то одно из этих множеств будет обязательно пусто, так как U^* – связное множество.

Докажем, что множество U_1 открыто. Предположим противное. Пусть L – некоторая целая кривая из U_1 , а $\{K_n\}$ – последовательность кривых из множества U_2 , сходящаяся к L . Рассмотрим на L точки x_0 и y_0 такие, что $|v(x_0)| = 100$, $|v(y_0)| = 1$. Отождествим здесь L и $\mathbb{C} \setminus 0$. Тогда $|v(\text{Aut}(x_0))| > |v(\text{Aut}(y_0))|$. Возьмем шаровые непересекающиеся окрестности W_1 и W_2 точек $\text{Aut}(x_0)$ и $\text{Aut}(y_0)$. В прообразах $\text{Aut}^{-1}(W_1)$ и $\text{Aut}^{-1}(W_2)$ возьмем (если нужно) окрестности V_1 и V_2 точек x_0 и y_0 такие, что $|v(x)|$ для любой точки x из V_1 строго больше $|v(y)|$ для любой точки y из V_2 . Образ V_1 лежит целиком внутри W_1 , а образ V_2 – внутри W_2 . Но среди точек V_1 и V_2 есть точки K_n , на которых действуют преобразования, которые, наоборот, переводят точки с меньшими модулями первой координаты в точки с большими модулями, т.е. меняют порядок. Это противоречие с непрерывностью. Открытость второго множества доказывается аналогично. Лемма доказана.

§ 7. Класс Б2

Пусть F – биголоморфное отображение между областями D_1 и D_2 , оболочки голоморфности $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ которых принадлежат **Б2**. Так как при биголоморфизме $F: \tilde{D}_1 \rightarrow \tilde{D}_2$ целые кривые (если они есть) переходят в целые кривые, а оставшиеся области по доказанному в предыдущем параграфе гиперболичны, то можно применить теорему 3.

§ 8. Класс Б1И

Пусть F – биголоморфное отображение между областями голоморфности D_1 и D_2 из **Б1И**, причем коэффициент наклона опорной прямой на $\ln$ -диаграмме области D_1 равен k_1 , а области D_2 равен k_2 . Пусть Γ_1 и Γ_2 – две эквивалентные голоморфные кривые вида (1) (кривых другого вида или совсем нет, или максимум

две: координатные плоскости, поэтому какая-то кривая вида (1) перейдет в такую же). Так как $k_1, k_2 \notin \mathbb{Q}$, то отображение $A = \{z_1 = c_1 e^{-k_1 x}, z_2 = e^x\}$ взаимно однозначно отображает комплексную плоскость $\mathbb{C}_x$ на кривую Γ_1 , а отображение $B = \{w_1 = c_2 e^{-k_2 y}, w_2 = e^y\}$ взаимно однозначно отображает комплексную плоскость $\mathbb{C}_y$ на кривую Γ_2 . Отображение $B^{-1} \circ F \circ A$ голоморфно и взаимно однозначно переводит $\mathbb{C}_x$ на $\mathbb{C}_y$. С другой стороны, автоморфизм $\mathbb{C}$ – это линейная функция. Получаем диаграмму, изображенную на рис. 3. Пусть l_1 – фиксированная вертикальная прямая в $\mathbb{C}_x$. Ее образ $A(l_1)$ целиком лежит в торе $|z_1| = |c_1| e^{-k_1 \operatorname{Re} x_0}$, $|z_2| = e^{\operatorname{Re} x_0}$. Линейная функция переведет l_1 в прямую l_2 . Докажем, что l_2 тоже вертикальна. Действительно, на l_1 существуют сколь угодно далекие от x_0 точки, образы которых в D_1 сколь угодно близки к $A(x_0)$. Если же l_2 не вертикальна, то чем дальше точка от $y_0 = \frac{x_0 - b}{a}$, тем дальше ее образ в D_2 от $B(y_0)$. Получим противоречие с непрерывностью F .

Рис. 3

Так как l_2 вертикальна, ее образ $B(l_2)$ является плотной обмоткой тора

$$|w_1| = |c_2| e^{-k_2 \operatorname{Re} y_0}, \quad |w_2| = e^{\operatorname{Re} y_0}.$$

Итак, существуют два тора со всюду плотными обмотками, переходящими друг в друга. Из непрерывности отображения F следует, что тор переходит в тор.

Рассмотрим взаимодействие отображения F и групповой структуры торов. Точка $z^0 = A(x_0)$ из обмотки первого тора при F переходит в точку $w^0 = B(y_0)$ из обмотки второго тора. Для любого элемента $e^{i\theta} \in \mathbf{T}^2$ существует элемент $e^{i\psi} \in \mathbf{T}^2$ такой, что $F(e^{i\theta} z^0) = e^{i\psi} w^0$. Получается взаимно однозначное отображение $\mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$, причем единица переходит в единицу. Докажем, что это – изоморфизм, т.е. проверим равенство

$$F(e^{i(\theta' + \theta'')} z^0) = e^{i(\psi' + \psi'')} w^0.$$

Пусть сначала точки $e^{i\theta'} z^0$ и $e^{i\theta''} z^0$ принадлежат обмотке первого тора. Их прообразы на прямой l_1 пусть имеют координаты $x_0 + iq_1$ и $x_0 + iq_2$. Легко проверить, что точка $e^{i(\theta' + \theta'')} z^0$ имеет прообраз $x_0 + i(q_1 + q_2)$ на l_1 . Значит, эта

точка тоже принадлежит обмотке. Точки $F(e^{i\theta'} z^0)$, $F(e^{i\theta''} z^0)$, $F(e^{i(\theta'+\theta'')} z^0)$ тогда принадлежат обмотке второго тора, и эти точки имеют прообразы в l_2 . Так как между l_1 и l_2 действует линейное отображение $x = ay + b$, то равенство $F(e^{i(\theta'+\theta'')} z^0) = e^{i(\psi'+\psi'')} w^0$ верно для всех точек обмотки. По непрерывности это верно для всех точек тора. Изоморфизм доказан, поэтому, повторяя рассуждения, приведенные в конце теоремы 2, можно заключить, что

$$F(z_1, z_2) = \{w_1 = C_1 z_1^p z_2^q, \quad w_2 = C_2 z_1^r z_2^s\}.$$

Получается, что биголоморфно эквивалентные области голоморфности из класса **Б1И** вообще не допускают других отображений, кроме мономиальных. По теореме единственности это верно для всех областей из класса **Б1И**.

§9. Класс e

Докажем теорему 1 для областей из класса e .

Пусть D_1 и D_2 – две области голоморфности из e , между которыми существует биголоморфное отображение F . Нужно предъявить какое-нибудь мономиальное отображение между этими областями.

Обе области имеют по две пересекающиеся целые кривые (все остальные не пересекаются). Поэтому ясно, что эти две исключительные кривые (координатные оси) перейдут в исключительные (точка их пересечения есть 0, значит, 0 перейдет в 0). Будем считать, что $z_1 = 0$ переходит в $w_1 = 0$, а $z_2 = 0$ – в $w_2 = 0$. В противном случае поменяем обозначения, при этом поменяются местами p_2 и q_2 . Области, оставшиеся после удаления из D_1 и D_2 исключительных кривых, будут мономиально эквивалентны стандартной области d и биголоморфны друг другу. Обозначим эти области D_1^+ и D_2^+ . Получим диаграмму, изображенную на рис. 4.

Рис. 4

Отображение F должно иметь вид $\{w_1 = Mz_1 + k(z_1, z_2), w_2 = Nz_2 + l(z_1, z_2)\}$, где в тейлоровское разложение k и l входят только положительные степени z_1 и z_2 , а M, N – константы, не равные нулю, Aut – автоморфизм стандартной области ∂ , который по лемме 22 имеет вид $\{u_2 = Au_1, v_2 = B(u_1)v_1\}$ или $\{u_2 = Au_1, v_2 = B(u_1)/v_1\}$; R_1 – мономиальное отображение $\{z_1 = u_1^S v_1^{-q_1}, z_2 = u_1^T v_1^{p_1}\}$ с обратным отображением $\{u_1 = z_1^{p_1} z_2^{q_1}, v_1 = z_1^{-T} z_2^S\}$; R_2 – мономиальное отображение $\{w_1 = u_2^P v_2^{-q_2}, w_2 = u_2^Q v_2^{p_2}\}$ с обратным отображением $\{u_2 = w_1^{p_2} w_2^{q_2}, v_2 = w_1^{-Q} w_2^P\}$.

Здесь p_1 и q_1, p_2 и q_2 взаимно просты и положительны, а S, T, P, Q – такие числа, что $p_1 S + q_1 T = 1$, $p_2 P + q_2 Q = 1$. Все отображения на диаграмме (см. рис. 4) взаимно однозначны. Рассмотрим целые кривые $I = \{u_1 = C\}$ и $J = F((R_1(I)))$. Пусть Aut таково, что в соответствующей формуле $v_2 = B(u_1)v_1$. Диаграмма позволяет получить w_1 на кривой J двумя способами:

$$w_1 = (AC)^P (B(C)v_1)^{-q_2}, \quad w_1 = MC^S v_1^{-q_1} + k(C^S v_1^{-q_1}, C^T v_1^{p_1}). \quad (4)$$

Подробнее, второе выражение имеет вид

$$MC^S v_1^{-q_1} + a_{11} C^{S+T} v_1^{p_1-q_1} + a_{12} C^{S+2T} v_1^{2p_1-q_1} + a_{21} C^{2S+T} v_1^{p_1-2q_1} + \dots$$

Соберем здесь одинаковые степени v_1 в группы:

$$v_1^{-q_1} \left(\sum \dots \right) + v_1^{p_1-q_1} \left(\sum \dots \right) + v_1^{2p_1-q_1} \left(\sum \dots \right) + \dots$$

Рассмотрим коэффициент при $v_1^{-q_1}$; он имеет вид

$$MC^S + \sum_{jp_1 - iq_1 = -q_1} a_{ij} C^{iS+jT}.$$

Заметим, что коэффициент при C^S ненулевой. Действительно, $M \neq 0$, а все слагаемые из суммы имеют другую степень. Это следует из того, что система

$$\begin{cases} jp_1 - iq_1 = -q_1 \\ S = iS + jT \\ p_1 S + q_1 T = 1 \end{cases}$$

несовместна. Так как два ряда Лорана одной функции совпадают по коэффициентам, а в первое уравнение (4) v_1 входит только в степени $-q_2$, то $q_1 = q_2 = q$.

Если же Aut таково, что в соответствующей формуле $v_2 = B(u_1)/v_1$, то такие же рассуждения приводят к условию $-q_1 = q_2$. Значит, этот вариант не реализуется, так как по предположению q_i больше нуля.

Применяя те же рассуждения к координате w_2 , получим, что $p_1 = p_2 = p$. Таким образом, области оказались одинаковыми. Более того, из равенства

$$u_2 = Az_1^p z_2^q = (Mz_1 + k(z_1, z_2))^p (Nz_2 + l(z_1, z_2))^q$$

следует, что k и l тождественно равны нулю, значит, не существует отображений, кроме мономиальных $\{z_2 = Mz_1, w_2 = Nw_1, |M|^p|N|^q = 1\}$ (заметим аналогию с результатом Сунады [1]).

Теорема 1 доказана для областей голоморфности из класса e . Из последней формулы и теоремы единственности следует, что она верна для всего класса.

§ 10. Класс $a \cup z$

В этом параграфе рассматривается задача для самого сложного класса $a \cup z$.

Пусть $F = (f_1, f_2)$ – биголоморфное отображение между стандартной областью $D_1 = \{|z_2|^q < |z_1|^p, p, q > 0\}$ из класса a и стандартной областью $D_2 = \{|w_2| < 1, |w_1| > 0\}$ из класса z . Заметим, что область $D_0 = \{|u| < 1, |v| > 0\}$ (тоже из z) можно голоморфно, но не взаимно однозначно (кроме случая $q = 1$) отобразить на D_1 с помощью отображения $R_1 = \{z_1 = v^q, z_2 = uv^p\}$.

Отображение R_1 переводит D_0 на D_1 , причем целая кривая $z_2 = 0$ накрывается q -кратно целой кривой $u = 0$. Другие целые кривые $u = \text{const} \neq 0$ взаимно однозначно отображаются на кривые $\{z_2^q = Kz_1^p\}$, $K \neq 0$, причем в каждую кривую переходят q различных кривых таких, что $u = \sqrt[q]{K}$.

Рассмотрим в D_0 подобласть D^+ – прямое произведение $\mathbb{C} \setminus 0$ на сектор $\{|u| > 0, 2\pi/q > \text{Arg } u > 0\}$. Область D^+ расслаивается на целые кривые. Сквозное отображение $F(R_1)$ уже взаимно однозначно отобразит D^+ на некоторое открытое множество D^F в D_2 . Очевидно, D^F тоже расслаивается на целые кривые. Отображение $F(R_1)$, ограниченное на целую кривую, имеет вид $w_1 = Bv$ или $w_1 = B/v$. Будем говорить, что оно имеет соответственно степень 1 или степень -1 . Можно показать так же, как в лемме 22, что $F(R_1)$ на всех целых кривых из D^+ имеет одинаковую степень. Рассмотрим вариант, когда $w_1 = B(u)v$.

Получаем

$$w_1 = f_1(v^q, uv^p) = B(u)v \quad (5)$$

на D^+ . По непрерывности следует, что на кривой $z_2 = 0$ функция f_1 имеет вид $w_1 = Ez_1$, $E \neq 0$ (а не $w_1 = E/z_1$). Поэтому $w_1 = f_1(v^q, 0) = Ev^q$ на кривой $u = 0$. Рассмотрим разложение Лорана сквозной голоморфной функции $w_1 = h(v, u)$ в окрестности точки $(0, 0)$. С одной стороны, там есть только члены первой степени по v (это следует из (5)), с другой стороны, есть член Ev^q . Значит, $q = 1$.

Вариант, когда $w_1 = B(u)/v$, дает тот же результат: $q = 1$. Значит, это – необходимое условие биголоморфности области D и стандартной области из z . Но в этом случае можно предъявить и мономиальное отображение $\{w_1 = z_1, w_2 = z_2 z_1^{-p}\}$.

Пусть теперь D_1 и D_2 – области голоморфности из класса a . Как и в предыдущем случае, введем отображения $R_1 = \{z_1 = v_1^{q_1}, z_2 = u_1 v_1^{p_1}\}$ и $R_2 = \{w_1 = v_2^{q_2}, w_2 = u_2 v_2^{p_2}\}$ из стандартных областей z_1 и z_2 на области D_1 и D_2 соответственно.

Рассмотрим случай, когда целая кривая $z_2 = 0$ не переходит в целую кривую $w_2 = 0$.

Тогда существует другая целая кривая $L = \{z_2^{q_1} z_1^{-p_1} = K \neq 0\}$, переходящая в кривую $w_2 = 0$ (см. рис. 5).

Выберем одну (из q_1 возможных) целую кривую $G = \{u_1 = C\}$ в стандартной области z_1 (см. рис. 5) такую, что $R_1(G) = L$. Как и в предыдущем случае, выберем область D^+ – произведение кругового сектора раствора не более $2\pi/q_1$ на

Рис. 5

$\mathbb{C} \setminus 0$, содержащую кривую G и не содержащую кривую $u_1 = 0$. Сквозное отображение $F(R_1)$ взаимно однозначно отображит D^+ на $D^F \subset D_2$, причем D^F содержит кривую $w_2 = 0$. Рассмотрим теперь в стандартной области z_2 область D^{++} – произведение кругового сектора раствора не более $2\pi/q_2$ на $\mathbb{C} \setminus 0$, не содержащую кривую $u_2 = 0$. Если радиус сектора для D^{++} выбрать достаточно малым, то $R_1^{-1}(F^{-1}(R_2))$ взаимно однозначно отображит D^{++} в D^+ . Обозначим этот образ через $D^0 \subset D^+$. Очевидно, D^0 тоже расслаивается на целые кривые (типа $\mathbb{C} \setminus 0$). Пользуясь связностью D^{++} и рассуждая, как в лемме 22, получаем, что $R_1^{-1}(F^{-1}(R_2))$ на всех целых кривых из D^{++} имеет одинаковую степень. Тогда Aut – отображение D^0 в D^{++} вида

$$\{u_2 = H(u_1), \quad v_2 = B(u_1)v_1\} \quad \text{или} \quad \{u_2 = H(u_1), \quad v_2 = B(u_1)/v_1\}.$$

Вычислим голоморфную функцию $w_1 = f_1(R_1)$: на D^0 получаем $w_1 = (B(u_1)v_1)^{q_2}$ или $w_1 = (B(u_1)/v_1)^{q_2}$, на G получаем $w_1 = Ev_1$ или $w_1 = E/v_1$ соответственно.

Стандартным образом получается, что $q_2 = 1$. Если рассмотреть отображение F^{-1} , то получим $q_1 = 1$. Но тогда и D_1 , и D_2 можно отобразить на стандартную область z с помощью мономиального отображения, как было показано выше. Значит, D_1 и D_2 мономиально эквивалентны.

Рассмотрим случай, когда $z_2 = 0$ переходит в $w_2 = 0$. Тогда отображение F имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= Mz_1 + k(z_1, z_2) \quad \text{или} \quad f_1(z) = M/z_1 + k(z_1, z_2), \\ f_2(z) &= l(z_1, z_2), \end{aligned} \tag{6}$$

причем в k и l входят только строго положительные степени z_2 .

Области $D_1 \setminus \{z_2 = 0\}$ и $D_2 \setminus \{w_2 = 0\}$ мономиально эквивалентны стандартной области ∂ . Получаем коммутативную диаграмму (см. рис. 6), на которой Aut –

автоморфизм стандартной области ∂ : $\{u_2 = Au_1, v_2 = B(u_1)v_1\}$ или $\{u_2 = Au_1, v_2 = B(u_1)/v_1\}$, где $|A| = 1$, а $B(u_1)$ – голоморфная функция в U^* , $B(u_1) \neq 0$, R_1 – мономиальное отображение $\{z_1 = u_1^{-S}v_1^{q_1}, z_2 = u_1^T v_1^{p_1}\}$ с обратным отображением $\{u_1 = z_1^{-p_1}z_2^{q_1}, v_1 = z_1^T z_2^S\}$; R_2 – мономиальное отображение $\{w_1 = u_2^{-P}v_2^{q_2}, w_2 = u_2^Q v_2^{p_2}\}$ с обратным отображением $\{u_2 = w_1^{-p_2}w_2^{q_2}, v_2 = w_1^Q w_2^P\}$; S, T, P, Q – такие целые числа, что $p_1S + q_1T = 1$, $p_2P + q_2Q = 1$.

Легко показать, что $v_2 = B(u_1)v_1$ соответствует случаю $f_1 = Mz_1 + \dots$, а $v_2 = B(u_1)/v_1$ – случаю $f_1 = M/z_1 + \dots$.

Рис. 6

Действительно, если $f_1 = Mz_1 + \dots$, то точки целой кривой $z_2 = 0$ с большими значениями $|z_1|$ переходят в точки целой кривой $w_2 = 0$ с большими значениями $|w_1|$. То же самое происходит на кривых, близких к $z_2 = 0$ (и даже на всех кривых). Мономиальные отображения, использованные нами, также не меняют этого взаимного расположения. Поэтому и Aut не должен менять этот порядок, значит, возможно только $v_2 = B(u_1)v_1$.

Разберем случай $v_2 = B(u_1)v_1$. Другой случай аналогичен.

Вычисляем w_1 двумя способами:

$$w_1 = Mu_1^{-S}v_1^{q_1} + k(u_1^{-S}v_1^{q_1}, u_1^T v_1^{p_1}), \quad w_1 = (Au_1)^{-P}(B(u_1)v_1)^{q_2}.$$

Применяя тот же метод, что и для класса e , получаем $q_1 = q_2 = q$. Но это условие не является еще достаточным для биголоморфности D_1 и D_2 .

Действительно, $u_2 = Az_1^{-p_1}z_2^q = (Mz_1 + k(z_1, z_2))^{-p_2}(l(z_1, z_2))^q$. Перепишем это тождество следующим образом:

$$A(Mz_1 + k(z_1, z_2))^{p_2}z_2^q = z_1^{p_1}(l(z_1, z_2))^q.$$

Учитывая, что k и l имеют только слагаемые со строго положительными степенями z_2 , раскроем здесь скобки.

В левой части минимальная степень по z_2 равна q , и таким свойством обладает только один член – это $AM^{p_2}z_1^{p_2}z_2^q$. Чтобы в правой части тоже было такое слагаемое, необходимо, чтобы в l минимальная степень по z_2 была равна единице. Перепишем l в форме $l = g_1(z_1)z_2 + g_2(z_1)z_2^2 + \dots$, тогда $AM^{p_2}z_1^{p_2}z_2^q = z_2^q(g_1(z_1))^q z_1^{p_1}$, т.е. $AM^{p_2}z_1^{p_2-p_1} = (g_1(z_1))^q$ для $z_1 \in \mathbb{C} \setminus 0$. Из этого равенства следует, что на самом деле разложение g_1 в ряд состоит только из одного члена.

Получается, что $p_2 - p_1 \in q\mathbb{Z}$ (в случае $v_2 = B(u_1)/v_1$ получится $p_2 + p_1 \in q\mathbb{Z}$). Можно предъявить мономимальное отображение

$$\begin{aligned} \{w_1 = az_1, \quad w_2 = bz_1^k z_2, \quad |a|^{p_2} = |b|^q\} \\ (\{w_1 = az_1^{-1}, \quad w_2 = bz_1^{-k} z_2, \quad |a|^{p_2} = |b|^q\}). \end{aligned} \quad (7)$$

Итак, пусть $q_1 = q_2$, $p_2 - p_1 \in q\mathbb{Z}$ (или $p_2 + p_1 \in q\mathbb{Z}$). Далее потребуется следующее уточнение.

ЛЕММА 23. *В ситуации, описанной выше, можно построить диаграмму, на которой $B(u_1)$ – голоморфная функция в полном круге U , $B(u_1) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в (6) $f_1 = Mz_1 + \dots$, что соответствует случаю $v_2 = B(u_1)v_1$. Поскольку мономимальные отображения в описанной выше ситуации можно выбирать разными способами, то можно получать и различные коммутативные диаграммы. Мы хотим лишь показать, что среди этих диаграмм есть диаграмма с голоморфным во всем круге коэффициентом $B(u_1)$. Рассмотрим диаграмму с такими числами S, T, P, Q , что $P = S > 0$ (это можно сделать потому, что $q_1 = q_2$, $p_2 - p_1 \in q\mathbb{Z}$).

Рассмотрим множество $N_1 = \{|z_1| = 1, 0 \leq |z_2| \leq 0.5\}$ (см. рис. 6). Его образом в D_2 будет компактное множество N_2 , которое можно “зажать” между множествами $N' = \{|w_1| = \text{const}_1, 0 \leq |w_2| \leq \alpha\}$ и $N'' = \{|w_1| = \text{const}_2, 0 \leq |w_2| \leq \beta\}$, $0 < \text{const}_1 < \text{const}_2$, значения α и β не очень важны (см. рис. 6). Образом N_1 в ∂_1 будет кривая $|u_1| = |v_1|^{q/S}$, образами N' и N'' – кривые той же степени $|u_2| = \text{const}_3 |v_2|^{q/S}$ и $|u_2| = \text{const}_4 |v_2|^{q/S}$. Отсюда следует, что $B(u_1)$ при $u_1 \rightarrow 0$ ограничена и отделена от нуля. Случай $B(u_1)/v_1$ разбирается так же, только надо брать $P = -S$. Лемма доказана.

Случай областей голоморфности из класса $a \cup g$ разобран. Пусть теперь D_1 и D_2 не являются областями голоморфности, $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ – их оболочки голоморфности.

Пусть сначала $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ – стандартные области g или такие области из a , которые можно биголоморфно (тогда и мономимально, это показано в начале параграфа) отобразить на стандартную область g . Докажем теорему 1 в этом случае.

Итак, будем считать, что $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ – стандартные области g .

Следующее рассуждение будет с некоторыми деталями повторяться еще не один раз.

Рассмотрим инвариантные множества $X_1 = (\tilde{D}_1 \setminus D_1) \setminus (\tilde{D}_1 \setminus D_1)^\circ$ и $X_2 = (\tilde{D}_2 \setminus D_2) \setminus (\tilde{D}_2 \setminus D_2)^\circ$. По теореме 8 их можно разложить на меньшие инвариантные множества: $X_j = \text{Inv}_j \cup C_j \cup P_j \cup I_j$. Если множество C_j в этом разложении непусто, то применение теоремы 4 сразу завершает доказательство теоремы 1. Если X_j целиком находится в $[I_0]$, то открытое ядро множества $\tilde{D}_1 \setminus D_1$ пусто и $X_j = \tilde{D}_j \setminus D_j$. В этом случае задача превращается в одномерную: плоскость $z_2 = 0$, содержащая

множество X_1 , является целой кривой и должна перейти в целую кривую $w_2 = 0$, потому что именно она содержит X_2 . Мономиальное отображение, очевидно, существует.

Пусть $X_j \not\subset [\mathbf{I}_0]$. Докажем, что тогда в разложении $X_j = \text{Inv}_j \cup P_j \cup I_j$ обязательно присутствуют двумерные инвариантные торы. Пусть это не так и все множество $X_j \setminus [\mathbf{I}_0]$ состоит только из In -плоских гиперповерхностей $P_j(s)$. Тогда, учитывая связность D_j , можно показать, что $P_j(s)$ на In -диаграмме выглядят как открытые интервалы или лучи, но не как прямые. Концевые точки этих интервалов или лучей изображают двумерные торы: они, очевидно, инвариантны. Рассмотрим отображение $\tilde{F}$ как автоморфизм стандартной области $\mathcal{Z}$. Нам известны все такие автоморфизмы, и инвариантность двумерного тора приводит к очень сильным ограничениям на них: $H(u) = e^{i\theta}u$, $B(u) = \text{const}$ (обозначения из леммы 22). Первое ограничение очевидно, докажем второе. Коэффициент растяжения (инверсии) $|B(u)|$ – константа на окружности $|u| = r < 1$, соответствующей инвариантному тору. Так как $B(u) \neq 0$, то по принципу аргумента $B(u)$ – константа. Значит, F – мономиальное отображение.

Теперь разберем случай, когда $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ – области класса a , которые нельзя отобразить в область $\mathcal{Z}$.

При отображении таких областей, как было замечено, координатная прямая $z_2 = 0$ обязательно переходит в $w_2 = 0$. Если $X_1 \subset [\mathbf{I}_0]$, подходящее мономиальное отображение можно выбрать из (7). В этом случае $X_1 = \tilde{D}_1 \setminus D_1$ и надо лишь обеспечить нужный коэффициент растяжения (или инверсии) на $z_2 = 0$. А в серии (7) есть растяжения и инверсии с любыми ненулевыми коэффициентами.

Если $X_1 \not\subset [\mathbf{I}_0]$, то после повтора рассуждений, приведенных чуть ранее, остается рассмотреть случай, когда X_1 содержит двумерный инвариантный тор $[x]$. По лемме 23 можно выписать представление $F = R_2 \circ \text{Aut} \circ R_1^{-1}$, где R_1 и R_2 – мономиальные отображения, а Aut – отображение вида $\{u_2 = Au_1, v_2 = B(u_1)v_1\}$ или $\{u_2 = Au_1, v_2 = B(u_1)/v_1\}$, где $B(u_1)$ – голоморфная функция в единичном круге, $B(u_1) \neq 0$. Разложение действует на открытом множестве, и если мы покажем, что $B(u_1)$ – константа, то по теореме единственности F – мономиальное отображение. Отображение Aut переводит двумерный тор $R_1^{-1}([x])$ в двумерный тор $R_2^{-1}(F([x]))$, поэтому $|B(u_1)|$ – константа на некоторой окружности $|u_1| = r < 1$. Так как $B(u_1) \neq 0$, то по принципу аргумента $B(u_1)$ – константа.

§ 11. Классы ∂ , $\mathcal{Z}$ и $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$

Теорема 1 для двух областей голоморфности из класса $\mathcal{Z}$ доказывается легко: мономиальные отображения представляются в явном виде. Действительно, отображение F имеет вид $\{w_1 = f_1(z_1, z_2), w_2 = f_2(z_2)\}$, где f_2 осуществляет биголоморфное отображение кольца $\{0 < s < |z_2| < 1\}$ на кольцо $\{0 < c < |w_2| < 1\}$, f_2 продолжается до $(\mathbb{C} \setminus 0)$ -автоморфизма, т.е. $w_2 = f_2(z_2) = Az_2$ или $w_2 = A/z_2$. Отсюда уже следует основная теорема для $\mathcal{Z}$: можно предъявить мономиальное отображение $\{w_1 = z_1, w_2 = Az_2\}$ или $\{w_1 = z_1, w_2 = A/z_2\}$. Области ∂ и $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$ – единственные стандартные области в своих классах, так что здесь доказывать нечего.

Рассмотрим теперь области из классов ∂ , $\mathcal{Z}$ или $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$, не являющиеся областями голоморфности. Области ∂ , $\mathcal{Z}$ и $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$ не имеют пересечений с

$[I_0]$, поэтому инвариантные множества $X_1 = (\tilde{D}_1 \setminus D_1) \setminus (\tilde{D}_1 \setminus D_1)^\circ$ и $X_2 = (\tilde{D}_2 \setminus D_2) \setminus (\tilde{D}_2 \setminus D_2)^\circ$ не содержат в разложениях плоские области I_j .

ЛЕММА 24. Пусть F – биголоморфизм областей Рейнхарта $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$ и $\mathbb{C}^2 \setminus \{w_1 w_2 = 0\}$, и пусть $[L] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$ – множество, которое на $\ln$ -диаграмме изображается прямой (такие множества далее будем называть $\ln$ -прямыми). Если образ некоторого открытого подмножества $H \subset [L]$ принадлежит некоторой $\ln$ -прямой $[M]$, то вся $[L]$ перейдет в $[M]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\ln$ -прямые $[L]$ и $[M]$ расслаиваются на целые кривые. В общем случае это целые кривые, имеющие вид (1), $\ln$ -прямую $[M]$ запишем в виде $\ln |w_1| + B \ln |w_2| = C$. Разберем только этот случай, потому что исключения разбираются точно так же.

Итак, рассмотрим функцию $h(t) = \ln |f_1| + B \ln |f_2|$ на целой кривой $\{z_1 = K e^{-kt}, z_2 = e^t, t \in \mathbb{C}\}$. Это гармоническая функция, так как f_1 и f_2 нигде не обращаются в нуль. Из теоремы единственности для гармонических функций следует, что $h(t) \equiv C$. Лемма доказана.

В частности, отсюда и из леммы 19 следует, что если F переводит двумерные торы $[a]$ и $[b]$ в торы $[c]$ и $[d]$, то $\ln$ -прямая, проходящая через $\ln a$ и $\ln b$, перейдет в $\ln$ -прямую, проходящую через $\ln c$ и $\ln d$.

Рис. 7

Итак, пусть D_1 и D_2 – биголоморфные области Рейнхарта, не являющиеся областями голоморфности. Рассмотрим случай класса ∂ , для случая $\mathcal{Z}$ рассуждения те же. По теореме 8 множества X_1 и X_2 можно разложить на непересекающиеся части: $X_1 = \text{Inv}_1 \cup C_1 \cup P_1$, $X_2 = \text{Inv}_2 \cup C_2 \cup P_2$, переходящие при отображении F друг в друга. Присутствие в разложении гиперповерхностей C_j по теореме 4 сразу приведет к завершению доказательства. Поэтому дальше мы будем считать, что $X_1 = \text{Inv}_1 \cup P_1$, $X_2 = \text{Inv}_2 \cup P_2$. Связные плоские по Леви гиперповерхности, из которых состоят P_j , будем обозначать $P_j(s)$. Рассмотрим два случая:

- а) все точки множества X_1 принадлежат множеству $K = \{|z_2| = \text{const}\}$;
- б) существуют по крайней мере два множества $K_1 = \{|z_2| = \text{const}_1\}$ и $K_2 = \{|z_2| = \text{const}_2\}$, содержащих точки X_1 (см. рис. 7).

Заметим, если открытое ядро множества $\tilde{D}_1 \setminus D_1$ непусто, то случай а) невозможен. Поэтому в случае а) множеству K принадлежат все точки $\tilde{D}_1 \setminus D_1$, но они не заполняют K целиком, потому что область D_1 связна. Из леммы 22 следует, что и в D_2 та же ситуация: все точки $\tilde{D}_2 \setminus D_2$ принадлежат множеству $K' = \{|w_2| = \text{const}\}$, но не заполняют его целиком. Множество $P_1(s_0)$ выглядит на диаграмме как открытый интервал или луч. Конечная предельная точка

этого множества изображает инвариантный тор. Если P_1 пусто, то, тем более, все торы X_1 будут инвариантными. Рассмотрим отображение F (точнее, его продолжение) как автоморфизм стандартной области ∂ . Тогда в обозначениях леммы 22 $|B(z_2)| = \text{const}_3$ на множестве K (это следует из того, что инвариантный тор переходит в инвариантный тор). Мономиальное отображение $\{w_1 = \text{const}_3 \cdot z_1, w_2 = z_2\}$ или $\{w_1 = \text{const}_3 / z_1, w_2 = z_2\}$ имеет на множестве K тот же коэффициент растяжения (инверсии), что и F , поэтому тоже переводит D_1 в D_2 ($\text{const}_3 \cdot z_1$ или const_3 / z_1 выбирается в зависимости от F). Это, конечно, не значит, что само отображение F обязательно было мономиальным.

Переходим к случаю б). Так как для автоморфизмов стандартной области ∂ выполняется требование $u_n = Au$, $|A| = 1$, то любая построенная в теореме 8 гиперповерхность $P_1(s)$ может находиться только в некотором множестве $K_s = \{|z_2| = \text{const}_s\}$, и, как мы видели выше, тогда во множестве K_s будут присутствовать и инвариантные торы. Итак, и на K_1 , и на K_2 в любом случае найдутся инвариантные торы. Соединим их $\ln$ -отрезком. Получится гиперболическая (даже ограниченная) область Рейнхарта D'_1 (см. рис. 7). Она перейдет в гиперболическую область Рейнхарта. Это следует из леммы 19 и свойства $u_n = Au$, $|A| = 1$, автоморфизмов стандартной области из класса ∂ . В этой ситуации можно применить теорему 3.

Разберем случай, когда $\tilde{D}_1 = \{\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}\}$ (соответственно, $\tilde{D}_2 = \{\mathbb{C}^2 \setminus \{w_1 w_2 = 0\}\}$). Опять рассмотрим два варианта:

а) все точки множества X_1 принадлежат одной $\ln$ -прямой $[L]$;

б) нельзя провести одну $\ln$ -прямую, чтобы на нее попали все точки X_1 , должны быть по крайней мере две $\ln$ -прямые $[L_1]$ и $[L_2]$, содержащих точки X_1 .

Вариант а). Как и раньше, открытое ядро множества $\tilde{D}_1 \setminus D_1$ пусто в этом случае. Если X_1 (тогда и X_2) состоит из единственного тора, то, очевидно, подходящее мономиальное (даже линейное) отображение можно предъявить в явном виде. Если X_1 состоит не из одного тора, то либо имеется $P_1(s) \subset [L]$ (с обязательным концевым инвариантным тором), либо несколько инвариантных торов. По леммам 19 и 24 отображение F переводит всю $\ln$ -прямую $[L]$ в некоторую $\ln$ -прямую $[M]$. Если наклон $\ln L$ (по отношению к координатам $\ln |z_1|$, $\ln |z_2|$) иррационален, то выделяются инвариантные области Рейнхарта класса **БИ**, а в этом случае нет других отображений, кроме мономиальных (см. § 8). Если наклон рационален, то после мономиальных отображений вида (3) можно считать, что изображения $\ln$ -прямых $\ln L$ и $\ln M$ вертикальны. Попадаем в ситуацию, аналогичную случаю с классом ∂ : после мономиальных отображений, отображения F , нормировки и, возможно, инверсии A/w_1 стандартная область ∂ перейдет в стандартную область ∂ . Обязательное наличие двумерного инвариантного тора накладывает дополнительные ограничения на этот автоморфизм, и мы получаем тот же результат, что и в случае а) класса ∂ .

Вариант б). Если имеется $P_1(s_1)$, будем считать $P_1(s_1) \subset [L_1]$; если P_1 пусто, будем считать, что $[L_1]$ – та $\ln$ -прямая, которая содержит не менее двух торов (инвариантных). Такая $\ln$ -прямая должна быть, иначе можно было бы обойтись одной $\ln$ -прямой (вариант а)). Образом $[L_1]$ по лемме 24 будет некоторая $\ln$ -прямая $[M_1]$. Так же, как раньше, из связности D_1 следует, что в любом случае $[L_1]$ будет содержать инвариантный тор, обозначим его изображение на $\ln$ -диаграмме через $\ln x$. Если $[L_2]$ содержит $P_1(s_2)$ и ее изображение $\ln L_2$ на $\ln$ -диаграмме непарал-

лельно изображению $[L_1]$, то любой из четырех углов, на которые $\ln L_1$ и $\ln L_2$ делят $\ln$ -диаграмму, является изображением гиперболической (класса **Б2**) инвариантной области. Теорема 3 завершает доказательство. Если $[L_2]$ содержит $P_1(s_2)$, но $\ln L_2$ параллельно $\ln L_1$, то найдется инвариантный тор $\ln y \notin \ln L_1$. Если $[L_2]$ не содержит никакой $P_1(s)$, то, тем более, такой тор найдется. Полоса, ограниченная $\ln L_1$, $\ln L_2$ и отрезком $[\ln x, \ln y]$, изображает инвариантную (по леммам 19 и 24) область класса **Б2**. Снова можно применить теорему 3.

§ 12. Классы ϑ , $\mathcal{J}$

Если D_1 и D_2 – области голоморфности, то утверждение теоремы 1 очевидно.

Рассмотрим общий случай, когда $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ принадлежат классу ϑ , случай $\mathcal{J}$ ничем от него не отличается.

Посмотрим на отображение F (его продолжение) как на автоморфизм стандартной области ϑ . Так как по лемме 22 $u_n = Au$, $|A| = 1$, то любая гиперповерхность $P_1(s)$, построенная в теореме 8, принадлежит некоторому $K_s = \{|z_2| = \text{const}_s\}$ (если P_1 непусто). По этой же причине выпуклые по Леви гиперповерхности просто отсутствуют в разложении X_j . Из связности D_1 опять следует, что на каждом множестве $K = \{|z_2| = \text{const}\}$ таком, что $K \cap X_1$ непусто и $K \cap X_1 \not\subset [\mathbf{I}_0]$, есть двумерный инвариантный тор: либо предельный тор $P_1(s)$, либо, вообще, любой.

Если таких множеств K не менее двух, то, соединяя какие-нибудь два их инвариантных тора $\ln$ -отрезком, получаем гиперболическую (даже ограниченную) область Рейнхарта D'_1 , переходящую в такую же область, и применяем теорему 3.

Если множество K с такими свойствами всего одно, то открытое ядро множества $\tilde{D}_1 \setminus D_1$ пусто и $X_1 = \tilde{D}_1 \setminus D_1$ находится на $K \cup [\mathbf{I}_0]$. Вспомним, что автоморфизм ϑ должен иметь вид $w_1 = B(z_2)z_1 + C(z_2)$, где $B(z_2)$, $C(z_2)$ – голоморфные функции в U^* , $B(z_2) \neq 0$. Поскольку двумерный инвариантный тор принадлежит K , то возникает следующее ограничение: $|B(z_2)| \equiv \text{const}_4$, $C(z_2) \equiv 0$ на K . Поэтому мономиальное отображение

$$\{w_1 = \text{const}_4 \cdot z_1, \quad w_2 = z_2\} \quad (8)$$

тоже переводит D_1 в D_2 .

Если же такие множества K отсутствуют в $\tilde{D}_1$, то и в $\tilde{D}_2$ их тоже нет. Множество $X_1 = \tilde{D}_1 \setminus D_1$ находится тогда на $[\mathbf{I}_0] = \{z_1 = 0, 0 < |z_2| < 1\}$, множество $X_2 = \tilde{D}_2 \setminus D_2$ – на $[\mathbf{I}_0] = \{w_1 = 0, 0 < |w_2| < 1\}$. Отображение (8) подходит и в этом случае, только $\text{const}_4 \neq 0$ можно брать любую.

§ 13. Класс $\mathcal{B}$

Для областей голоморфности из класса $\mathcal{B}$ теорема 1 очевидна.

Разберем общий случай: $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ принадлежат классу $\mathcal{B}$, и пусть $X_1 \not\subset [\mathbf{I}_0]$. Предположим, что X_1 не содержит двумерных инвариантных торов. Тогда все двумерные торы неинвариантны и по теореме 8 $X_1 = \text{Inv}_1 \cup C_1 \cup P_1 \cup I_1$, причем $C_1 \cup P_1$ непусто. Если существует выпуклая по Леви гиперповерхность (из C_1), применяем теорему 4. Если все гиперповерхности плоские по Леви, то их изображения на $\ln$ -диаграмме – интервалы или лучи (опять используется связность D_1).

Концевые точки этих лучей и интервалов будут представлять двумерные инвариантные торы. Таким образом, можно или применить теорему 4, или найти двумерный инвариантный тор. Он является остовом поликруга и его границей Шиловой. Поэтому если тор переходит в тор, то поликруг переходит в поликруг. Можно применить теорему 3.

В случае $X_1 \subset [I_0]$ открытое ядро $(\tilde{D}_1 \setminus D_1)^\circ$ пусто и $X_1 = \tilde{D}_1 \setminus D_1$. Тогда легко выписать линейное отображение. Это можно показать, зная автоморфизмы стандартной области b : $u_n = H(u)$, $v_n = B(u)v + C(u)$, где $H(u)$ – автоморфизм единичного круга, $B(u)$, $C(u)$ – голоморфные функции в круге, $B(u) \neq 0$. Также мы используем следующее наблюдение, сильно упрощающее перебор случаев: все целые кривые в $\tilde{D}_1$ можно разделить на три типа:

- 1) кривая, имеющая в пересечении с X_1 более одной точки (если такая есть, то это только кривая $\{z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \equiv 0\}$);
- 2) имеющие в пересечении с X_1 одну точку (лежащую на $z_1 = 0$);
- 3) целые кривые, не имеющие пересечений с X_1 .

В области $\tilde{D}_2$ кривые делятся на точно такие же типы и кривые из одного типа могут переходить только в аналогичные. Если присутствуют кривые типа 1), то сразу же $H(0) = 0$, и поэтому $w_2 = H(z_2) = e^{i\theta} z_2$, по второй координате подходит отображение $w_1 = Bz_1$, где B – константа, зависящая только от расположения X_1 и X_2 на этих двух кривых. Если кривые типа 1) отсутствуют, то задача становится одномерной. Все рейнхартово множество X_1 расположено на круге $\{z_1 \equiv 0, |z_2| < 1\}$, но не заполняет его целиком. Значит, есть граничная окружность – одномерный инвариантный тор (инвариантность, очевидно, следует из нашего разделения кривых на типы). Автоморфизм круга, переводящий центральную окружность в центральную, линеен. Все доказано.

§ 14. Класс $\mathbb{C}^2$

Область голоморфности в классе $\mathbb{C}^2$ только одна, поэтому сразу переходим к общему случаю.

Если $X_1 \not\subset [I_0]$, то доказательство дословно повторяет рассуждения, приведенные в начале предыдущего параграфа.

Если $X_1 \subset [I_0]$, то $X_1 = \tilde{D}_1 \setminus D_1$. Рейнхартовы множества X_1 и X_2 , лежащие на $\{z_1 z_2 = 0\}$ и $\{w_1 w_2 = 0\}$, но не заполняющие их целиком, переходят друг в друга. Но тогда и сами множества $\{z_1 z_2 = 0\}$ и $\{w_1 w_2 = 0\}$ переходят друг в друга. Действительно, пусть X_1 содержит, например, окружность $\{|z_1| = \text{const} \neq 0, z_2 \equiv 0\}$. Тогда вся целая кривая $\{z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \equiv 0\}$ переходит во множество $w_1 w_2 = 0$ (это следует из принципа максимума, примененного к функции $w_1 w_2 = f_1 f_2$ на множестве $\{|z_1| \leq \text{const}, z_2 \equiv 0\}$, и теоремы единственности), т.е. в одну из целых кривых, составляющих это множество. Итак, отображение F переводит друг в друга X_1 и X_2 вместе с координатными плоскостями, на которых они лежат. Теперь легко заменить F линейным отображением.

§ 15. Класс $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0\}, \mathbb{C}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$

В этом классе две области голоморфности. Они переводятся друг в друга перестановкой переменных. Переходим к общему случаю. Пусть $\tilde{D}_1 = \{\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0\}\}$ и $\tilde{D}_2 = \{\mathbb{C}^2 \setminus \{w_1 = 0\}\}$. Как и в случаях $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$, $\mathbb{C}^2$, группы преобразова-

ний слишком велики и ими нельзя воспользоваться. Доказательство облегчается следующей леммой.

Рис. 8

ЛЕММА 25. Если в нашей ситуации двумерный тор $[x] = \{|z_1| = a, |z_2| = b\}$ переходит в двумерный тор, то семейство дисков $U = \{z_1 = \text{const}, |z_2| \leq b, |\text{const}| = a\}$ переходит в аналогичное семейство (см. рис. 8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим один из дисков семейства U , т.е. диск $U(c) = \{z_1 = \text{const}, |z_2| \leq b\}$. Голоморфная функция $w_1 = f_1(z_2)$ на $U(c)$ не обращается в нуль и ее модуль постоянен на $\partial U(c)$, значит, $w_1 = \text{const}_2$. Лемма доказана.

Случай $X_1 \subset [\mathbf{I}_0]$ в этом параграфе сводится к одномерному. Действительно, плоские рейнхартовы множества X_1 и X_2 состоят из колец и окружностей. Если они состоят только из одной окружности, то можно подобрать линейное отображение. Если же они содержат кольца или хотя бы две окружности, то по теореме единственности вся плоскость $\{z_1 \in \mathbb{C} \setminus 0, z_2 \equiv 0\}$ перейдет в плоскость $\{w_1 \in \mathbb{C} \setminus 0, w_2 \equiv 0\}$, тогда обязательно или $w_1 = f_1 = Az_1$, или $w_1 = f_1 = A/z_1$ на этой плоскости. По второй координате можно взять отображение $w_2 = z_2$.

Пусть $X_1 \not\subset [\mathbf{I}_0]$. По теореме 8 $X_1 = \text{Inv}_1 \cup C_1 \cup P_1 \cup I_1$. Если C_1 непусто, применяем теорему 4 и завершаем доказательство. Все плоские по Леви гиперповерхности $P_1(s)$, если они есть, на $\ln$ -диаграмме выглядят как интервалы или лучи (используется связность D_1). Концевые (предельные) точки этих лучей и интервалов будут представлять двумерные инвариантные торы.

Если один из этих лучей или интервалов, изображающих гиперповерхность $P_1(s_0)$, на $\ln$ -диаграмме не вертикален, применим лемму 25 и выделим инвариантную гиперболическую область Рейнхарта класса **Б2** (см. рис. 8, а), или инвариантную ограниченную, если гиперповерхность имеет два концевых тора (см. рис. 8, б). После этого применим теорему 3.

Пусть теперь нет наклонных $P_1(s)$: либо все принадлежат вертикальным прямым на $\ln$ -диаграмме, т.е. $P_1(s) \subset K_s = \{|z_1| = \text{const}_s\}$, либо P_1 пусто. На каждом множестве K_s , содержащем точки $X_1 \setminus [\mathbf{I}_0]$, есть двумерный инвариантный тор – концевой тор $P_1(s)$, а если P_1 пусто – любой тор $X_1 \setminus [\mathbf{I}_0]$. Соединяя инвариантные торы $\ln$ -отрезком и применяя лемму 25, снова получаем инвариантную ограниченную область Рейнхарта.

Остается разобрать случай, когда вертикальная прямая всего одна, т.е. $X_1 \subset [I_0] \cup K$, $K = \{|z_1| = \text{const}\}$. На K существует двумерный инвариантный тор: либо концевой тор гиперповерхности, либо, вообще, любой тор из $X_1 \setminus [I_0]$. По лемме 25 и теореме единственности все множество K перейдет в аналогичное “вертикальное” множество в $\tilde{D}_2$. Выделяются две стандартные области класса $\mathfrak{v}$ (после нормировки). Мы попадаем в ситуацию, аналогичную ситуации класса $\mathfrak{v}$: после отображения F , нормировки и, возможно, инверсии A/w_1 стандартная область $\mathfrak{v}$ перейдет в стандартную область $\mathfrak{v}$. Наличие двумерного инвариантного тора накладывает дополнительные ограничения на автоморфизмы, и случай можно считать разобранным (детали см. в § 12).

Разобраны все случаи. Теорема 1 доказана.

В заключение я хочу выразить глубокую признательность Н. Г. Кружилину за помощь и руководство работой.

Список литературы

1. *Sunada T.* Holomorphic equivalence problem for bounded Reinhardt domains // Math. Ann. 1978. V. 235. № 2. P. 111–128.
2. *Кружилин Н. Г.* Автоморфизмы гиперболических областей Рейнхарта // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 16–40.
3. *Shimizu S.* Automorphisms of bounded Reinhardt domains // Japan J. Math. 1989. V. 15. P. 385–414.
4. *Shimizu S.* Automorphisms and equivalence of tube domains with bounded base // Math. Ann. 1999. V. 315. P. 295–320.
5. *Shimizu S.* A classification of two-dimensional tube domains // Amer. J. of Math. 2000. V. 122. P. 1289–1308.
6. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
7. *Винберг Э. Б., Омицик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: УРСС, 1995.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 2. М.: Наука, 1985.
9. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.
10. *Мальцев А. И.* On the theory of the Lie groups in the large. I. II. // Матем. сб. 1945. Т. 16(58). № 2. С. 163–189; 1946. Т. 19(61). № 3. С. 523.
11. *Yamabe H.* On an arcwise connected subgroups of a Lie groups // Osaka Math. J. 1950. V. 2. P. 13–14.
12. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. № 3–4. P. 219–271.
13. *Кураатовский К.* Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
14. *Урысон П. С.* О локально связных континуумах // Труды по топологии и другим областям математики. Т. 2. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
15. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.

E-mail: noiser@mailru.com

Поступило в редакцию
7.VIII.2001