Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, Нильпотентные операторы и дискретно вогнутые функции, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:59:31

УДК 512

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой

Нильпотентные операторы и дискретно вогнутые функции

По паре подмодулей модуля над кольцом дискретного нормирования строится функция от двух целочисленных переменных. Показано, что эта функция дискретно вогнута и, обратно, что всякая дискретно вогнутая функция от двух целочисленных переменных строится по модулю и двум его подмодулям.

Библиография: 6 наименований.

§ 1. Введение

Хорошо известно, сколь большую роль в разных областях играют вогнутые (и/или выпуклые) функции. Однако их применение ограничивалось непрерывностью переменных. Естественнo ожидать, что для целочисленных задач (с дискретными переменными) аналогичную роль должна играть какая-то “правильная” модификация понятия вогнутости. Ясно, как определить вогнутую функцию от одной (целочисленной) переменной. Функция f на $\mathbb{Z}$ “вогнута”, если $2f(a) \geq f(a-1) + f(a+1)$. Это же свойство можно выразить как невозрастание первых разностей $f(a) - f(a-1)$, откуда сразу видна связь с так называемыми разбиениями. Хорошо известно, что разбиения параметризуют многие интересные объекты: неприводимые представления $GL(n)$ и симметрических групп, симметрические функции Шура, диаграммы Юнга, конечные абелевы группы и т.п. (см., например, [3]).

В отдельной работе мы развиваем общую теорию дискретной (целочисленной) выпуклости. В настоящей работе рассмотрим дискретно вогнутые функции от двух (целочисленных) переменных. (Можно показать, что в случае двух переменных существует фактически одна теория дискретной выпуклости, поэтому будем в дальнейшем говорить просто о дискретно вогнутых функциях.) В последующих работах покажем, что такие функции имеют самое непосредственное отношение к таким вопросам, как разложение на неприводимые компоненты тензорных произведений неприводимых представлений $GL(n)$, спектр суммы двух эрмитовых матриц, коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона и т.п. В настоящей работе обсудим связь таких функций с модулями над кольцами дискретного нормирования.

Пусть M – модуль конечной длины над кольцом дискретного нормирования A с униформизирующей T . Определим функцию емкости $c(M, \cdot)$ формулой $c(M, a) = l(M/T^a M)$, где l обозначает длину модуля, $a = 0, 1, \dots$. Тогда $c(M, \cdot)$ является

дискретно вогнутой функцией от одной переменной. Вообще, если заданы n подмодулей $N_1, N_2, \dots, N_n$ модуля M , можно образовать функцию емкости $c(M; N_1, \dots, N_n; \cdot)$ от n (целочисленных) переменных $a_1, \dots, a_n$ по правилу

$$c(M; N_1, \dots, N_n; a_1, \dots, a_n) = l(M/(T^{a_1}N_1 + \dots + T^{a_n}N_n)).$$

Можно показать, что она дискретно вогнута (если более точно, то $\mathbb{A}_n$ -вогнута). Таким образом, использование модулей над кольцами дискретного нормирования позволяет строить дискретно вогнутые функции. Основной результат настоящей работы заключается в том, что при $n = 2$ так получаются любые (более точная формулировка содержится в теореме 2) дискретно вогнутые функции. Важную (хотя и промежуточную) роль при построении соответствующих модулей играют конечные частично упорядоченные множества.

§ 2. Модули над кольцом дискретного нормирования

Пусть $A = K[[T]]$ – кольцо формальных степенных рядов над некоторым полем K , хотя почти все дальнейшие рассуждения справедливы для произвольного кольца дискретного нормирования. В этом случае задать A -модуль (конечной длины) – это то же самое, что задать (конечномерное) векторное пространство M над полем K вместе с нильпотентным действием оператора T на нем. *Длиной* такого модуля называется просто размерность его как векторного пространства. В силу нильпотентности T для некоторого целого h выполнено $T^h M = 0$; минимальное такое число $h = h(M)$ называется *высотой* модуля M . Например, нулевой модуль имеет высоту 0; циклический модуль $C(h) = A/T^h A$ имеет высоту h . Модули высоты 1 называются *элементарными*.

Любой A -модуль конечного типа представляется как прямая сумма циклических модулей. (В терминах нильпотентного оператора T это – утверждение о жордановой форме.) Хотя таких разложений $M = \bigoplus_i C(h_i)$ может быть много, набор целых чисел h_i , упорядоченных по убыванию, определяется однозначно и называется *типом* модуля M . Тип является разбиением числа $l(M)$. Однако более удобно рассматривать *функцию емкости* модуля $c = c(M, \cdot)$, заданную на множестве $\mathbb{Z}_+$ натуральных чисел. Для целого $a \geq 0$ выполнено $c(M, a) = l(M/T^a M)$. Так как $l(C(h)/T^a C(h)) = \min(h, a)$, то для модуля $M = \bigoplus_i C(h_i)$ получаем

$$c(M, a) = \sum_i \min(h_i, a).$$

Отсюда видна “дискретная вогнутость” функции c , а также справедливость утверждения об однозначной определенности типа. В самом деле, число факторов h_i , равных некоторому h , равно второй производной (или, более точно, второй разности) функции c в точке h .

Мы называем $c(M, \cdot)$ *функцией емкости* модуля M , так как $c(M, a)$ равно размерности (длине) A -модуля $\text{Hom}_A(C(a), M)$. Это видно из того факта, что

$\text{Hom}(C(a), C(h)) \cong C(\min(a, h))$. Таким образом, $c(M, a)$ измеряет “количество отображений” $C(a)$ в M .

Ясно, что любая функция $c : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, которая “вогнута”, равна нулю в нуле и стабилизируется при больших значениях аргумента (отсюда она автоматически монотонна), является емкостью некоторого модуля M . В самом деле, обозначим через Δ^2 оператор второй разности, т.е.

$$\Delta^2 c(a) = 2c(a) - c(a-1) - c(a+1)$$

(конечно, здесь $a \geq 1$, при $a = 0$ оператор Δ^2 неопределен). В силу вогнутости функции c имеем $\Delta^2 c(a) \geq 0$, а из ее стабилизации выполнено $\Delta^2 c(a) = 0$ при больших значениях a . Теперь можно задать нужный модуль M явной формулой:

$$M = \bigoplus_{a \geq 1} C(a)^{\Delta^2 c(a)}.$$

ПРИМЕР 1. Пусть функция c задана таблицей: $c(0) = 0$, $c(1) = 3$, $c(2) = 6$, $c(a) = 7$ при $a \geq 3$. Вторые разности равны $\Delta^2(1) = 0$, $\Delta^2(2) = 2$, $\Delta^2(3) = 1$ и далее равны нулю. Модуль M изоморфен $C(2) \oplus C(2) \oplus C(3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функцию емкости можно определить той же формулой для любого A -модуля M конечного типа. Единственное отличие этого от случая, рассмотренного выше, заключается в том, что функция $c = c(M)$ уже не обязательно стабилизируется при больших значениях аргумента. Такая функция c , начиная с некоторого a , становится аффинной, вида $t_0 + ra$, где r равно числу бесконечных циклических слагаемых $C(\infty)$ в разложении M , а t_0 – константа.

Пусть теперь N – подмодуль A -модуля M (т.е. инвариантное относительно действия T подпространство в M). Довольно легко понять, что $c(N, \cdot) \leq c(M, \cdot)$. Более того, можно показать, что тип N будет подтипом типа M . Аналогичные утверждения верны и для фактормодуля M/N . Однако знание типа подмодуля N еще не позволяет сделать вывод о расположении N в M и даже о дискретных инвариантах этого расположения.

ПРИМЕР 2. Пусть $M = C(3) \oplus C(1)$ с образующими e и f , и пусть N – моногенный подмодуль высоты 2, порожденный элементом $Te + \alpha f$, где $\alpha \in K$. Если $\alpha = 0$, то фактормодуль M/N имеет тип $(1, 1)$. Однако если $\alpha \neq 0$, то тип фактормодуля M/N равен (2) .

Таким образом, тип фактормодуля M/N не определяется типами M и N . Имеется целая серия типов (или диаграмм Юнга), связывающая тип подмодуля N с типом модуля M (последовательность Литтлвуда–Ричардсона [5]). Предлагаем немного иначе (с позиций дискретной вогнутости) и немного более общим образом посмотреть на это в следующем параграфе.

§ 3. Инварианты подмодулей

Пусть M – A -модуль (конечной длины) и даны n его подмодулей $N_1, \dots, N_n$. Для целочисленного вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $N(a) = T^{a_1}N_1 + \dots + T^{a_n}N_n$; это подмодуль модуля M . Пусть $c(M; N_1, \dots, N_n; a) = l(M/N(a))$. Получается некоторая (целозначная) функция $c(M; N_1, \dots, N_n; \cdot)$ на целочисленном ортанте $\mathbb{Z}_+^n$, которую мы называем снова *функцией емкости* модуля M относительно семейства подмодулей $N_1, \dots, N_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Собственно говоря, здесь несущественно предположение о конечности длины M . Главное – чтобы фактормодули $M/N(a)$ имели конечную длину; для этого достаточно было бы предполагать, что модуль M имеет конечный тип, а фактор $M/N(0)$ – конечную длину. Но для простоты будем считать, что M конечной длины.

Например, пусть действие T на пространстве M тривиальное (нулевое, т.е. модуль M элементарный), а подмодули $N_1, \dots, N_n$ – одномерные подпространства. В этом случае функция емкости по существу (с точностью до очевидных преобразований) превращается в ранговую функцию соответствующего (векторного) матрицы.

Будем исследовать свойства этой функции, ограничиваясь в дальнейшем случаем $n = 2$, т.е. случаем пары подмодулей. Можно считать, что это сделано для простоты. Однако есть и более существенная причина. Дело в том, что предположение $n = 2$ существенно для справедливости теоремы 2. Для больших n утверждение теоремы 2 неверно, так как существуют непредставимые матроиды.

Прежде всего, $c(0)$ равно размерности фактормодуля $M/(N_1 + N_2)$. Не теряя общности, можно заменить M на $N_1 + N_2$ (это изменит функцию на константу); как правило, мы будем считать, что $M = N_1 + N_2$. В этом случае $c(0) = 0$.

Имеет место простая формула сдвига:

$$c(M; N_1, N_2; a + b) = c(M; T^{a_1}N_1, T^{a_2}N_2; b).$$

Заметим также, что если S – подмодуль в M , содержащийся в $N(a)$, то функция не изменится для значений аргумента $a' \leq a$ при замене модуля M на его фактормодуль M/S (конечно, нужно заменить N_1 и N_2 на их образы в M/S).

Зафиксируем временно вторую координату $a_2 \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим ограничение функции c на “горизонтальную прямую” (a_1, a_2) , $a_1 \in \mathbb{Z}_+$. Пользуясь сказанным выше, можно заменить N_2 на $T^{a_2}N_2$, а M заменить на фактормодуль $M/T^{a_2}N_2$. После этого видно, что

$$c(M; N_1, N_2; (a_1, a_2)) = c(\overline{M}; \overline{N}_1, 0; (a_1, a_2)),$$

где $\overline{M} = M/T^{a_2}N_2$, а $\overline{N}_1$ – образ N_1 в $\overline{M}$, т.е. $\overline{N}_1 = (N_1 + T^{a_2}N_2)/T^{a_2}N_2 = N_1/(N_1 \cap T^{a_2}N_2)$. Окончательно получаем, что

$$c(M; N_1, N_2; (\cdot, a_2)) = l(\overline{M}/\overline{N}_1) + c(\overline{N}_1, \cdot),$$

т.е. ограничение функции c на “горизонтальную прямую” на высоте a_2 совпадает (с точностью до константы $l(M/(N(0, a_2)))$) с функцией емкости модуля $\bar{N}_1 = N_1/(N_1 \cap T^{a_2} N_2)$.

Стоит отметить два частных случая. Первый – когда $a_2 = 0$, т.е. рассматриваем ограничение функции на ось абсцисс. Тогда функция c совпадает (с точностью до константы $l(M/N_1 + N_2)$) с функцией емкости модуля $N_1/(N_1 \cap N_2) = (N_1 + N_2)/N_2$. Если $M = N_1 + N_2$, то c просто совпадает с $c(M/N_2, \cdot)$ – функцией емкости фактормодуля M/N_2 . Второй частный случай – когда a_2 является “большим” числом ($a_2 \geq h(N_2)$). Тогда $T^{a_2} N_2 = 0$ и ограничение функции c на “высокую горизонтальную” прямую совпадает (с точностью до константы $l(M/N_1)$) с функцией емкости модуля N_1 .

Аналогично обстоит дело с ограничением на “вертикальные прямые”. В любом случае для “больших” a (например, когда $a \geq (h(M), h(M))$) функция c стабилизируется на значении $l(M)$. По этой причине часто будем рассматривать функцию c на “квадрате” $\{0, 1, \dots, h(M)\}^2 \subset \mathbb{Z}_+^2$. Итак, при условии $M = N_1 + N_2$ поведение функции схематично показано на рис. 1.

Рис. 1

Полезно отметить, что на диагонали функция c совпадает с функцией емкости модуля M . Стоит также отметить, что при $N_2 = M$ (случай, рассмотренный в [1] и [5]: последовательности Литтлвуда–Ричардсона) функция c на “нижнем основании” тождественно равна нулю.

Конечно, функция c монотонна. Однако главное структурное свойство функции емкости $c(M; N_1, N_2; \cdot)$ заключается в ее “дискретной вогнутости”, которая влечет то, что функцию c можно продолжить до вогнутой функции $\tilde{c}$ на всем положительном квадранте $\mathbb{R}_+^2$. Однако, на самом деле, для *дискретной вогнутости* требуется, чтобы существовало такое вогнутое продолжение $\tilde{c}$, которое является аффинным на каждом симплексе стандартной триангуляции квадранта. Под стандартной триангуляцией мы понимаем триангуляцию $\mathbb{R}^2$, которая получается иссечением плоскости прямыми трех типов: $x_1 = t$, $x_2 = t$ и $x_2 = x_1 + t$, где

m – произвольное целое число. Иначе говоря, двумерные симплексы этой триангуляции являются целыми сдвигами двух треугольников, полученных разбиением квадрата $[0, 1]^2$ диагональю (см. рис. 2).

Рис. 2

Разумеется, дискретную вогнутость можно определить непосредственно в терминах функции s , не обращаясь к ее продолжению. Вообще, пусть f – функция на $\mathbb{Z}_+^2$ (или на $\mathbb{Z}^2$). Будем считать, что она *дискретно вогнута*, если для любой точки $a \in \mathbb{Z}_+^2$ выполнены три типа неравенств (обобщающие в каком-то смысле неравенство $\Delta^2 f \geq 0$ для функций одной переменной):

- 1) $f(a_1, a_2) + f(a_1 + 1, a_2 + 1) \geq f(a_1 + 1, a_2) + f(a_1, a_2 + 1)$;
- 2) $f(a_1, a_2) + f(a_1 + 2, a_2 + 1) \leq f(a_1 + 1, a_2) + f(a_1 + 1, a_2 + 1)$;
- 2') $f(a_1, a_2) + f(a_1 + 1, a_2 + 2) \leq f(a_1, a_2 + 1) + f(a_1 + 1, a_2 + 1)$.

Наглядно эти неравенства соответствуют трем рисункам (см. рис. 3), где разделяющее ребро указывает на пару противоположных вершин с большей (или равной) величиной суммы значений f .

Рис. 3

Отметим, что дискретная вогнутость влечет “вогнутость” ограничения f на горизонтальные, вертикальные и диагональные “прямые”, как показано на рис. 4 (приращение функции вдоль стрелки s не больше приращения вдоль стрелки b , которое, в свою очередь, не больше приращения вдоль стрелки a).

ТЕОРЕМА 1. *Функция $s(M; N_1, N_2): \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ емкости модуля относительно пары подмодулей является дискретно вогнутой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить соотношения 1) и 2), так как соотношение 2') проверяется аналогично. В силу формулы сдвига можно считать, что $a = 0$ и $M = N_1 + N_2$. При проверке соотношения 1) можно также считать, что

Рис. 4

модули N_1 и N_2 элементарные, т.е. просто векторные пространства. Тогда соотношение 1) принимает вид

$$l(N_1 + N_2) \geq l(N_1 + N_2/N_1) + l(N_1 + N_2/N_2)$$

или $l(N_1) + l(N_2) \geq l(N_1 + N_2)$, что очевидно.

Рассмотрим теперь соотношение 2). Снова можно считать, что $M = N_1 + N_2$, $TN_2 = 0$ и $T^2N_1 = 0$. Тогда оно имеет вид

$$l(M/TN_1 + N_2) + l(M/TN_1) \geq l(M)$$

или

$$l(M/TN_1 + N_2) \geq l(TN_1).$$

Это неравенство следует из сюръективности гомоморфизма умножения на T :

$$(N_1 + N_2)/(TN_1 + N_2) \longrightarrow TN_1.$$

Сюръективность следует из того, что композиция гомоморфизмов

$$N_1/TN_1 \longrightarrow (N_1 + N_2)/(TN_1 + N_2) \longrightarrow TN_1$$

сюръективна.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогично устанавливается дискретная вогнутость функции емкости для n подмодулей.

Для $n = 2$ докажем обращение теоремы 1. А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: \mathbb{Z}_+^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ – дискретно вогнутая функция, причем $f(0) = 0$ и f стабилизируется при больших значениях аргумента. Тогда существуют модуль M конечной длины и два его подмодуля N_1 и N_2 такие, что $f(\cdot) = c(M; N_1, N_2; \cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На самом деле, два последних условия (равенство нулю в нуле и стабилизация при больших значениях аргумента) не очень существенны. Из доказательства теоремы 2 будет видно, что утверждение остается верным, если использовать модули конечного типа вместо модулей конечной длины. Но мы не будем на это отвлекаться.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 2. Для этого будем явно конструировать требуемые модуль и его подмодули. Сделаем это в три этапа. Сначала проанализируем геометрическую структуру, связанную с дискретно вогнутой функцией, а именно ее паутину. Затем с помощью паутины построим некоторое конечное (частично) упорядоченное множество. Наконец, по упорядоченному множеству и двум его естественным идеалам построим требуемый модуль и пару его подмодулей.

§ 4. Паутина дискретно вогнутой функции

Пусть f – произвольная функция на $\mathbb{Z}_+^2$. Пользуясь введенной в § 3 стандартной триангуляцией Σ квадранта $\mathbb{R}_+^2$, продолжим канонически функцию f на этот квадрант. А именно, на каждый симплекс этой триангуляции продолжим функцию f по аффинности; полученное продолжение обозначим $\tilde{f}$. По построению функция $\tilde{f}$ кусочно линейна, или, точнее, кусочно аффинна. Изломы, т.е. нарушения аффинности, могут находиться лишь над ребрами триангуляции Σ . Присвоив ребрам соответствующие кратности, превращаем Σ во взвешенный граф, который будем называть *паутиной*.

Более подробно, с каждым ребром e (точнее, внутренним ребром, не лежащим на границе квадранта) триангуляции Σ свяжем число $\delta(e)$ – степень излома функции $\tilde{f}$ (или f) вдоль этого ребра. К такому ребру $e = [x, y]$ примыкают ровно два треугольника, скажем $[x, y, z]$ и $[x, y, z']$. Тогда

$$\delta_f(e) = \delta(e) = f(x) + f(y) - f(z) - f(z').$$

(Для граничного ребра степень излома не определена, так как к нему примыкает только один треугольник. Если угодно, можно считать ее равной $+\infty$.) Присваивая ребрам Σ эту кратность, снабжаем одномерный остов Σ структурой взвешенного графа.

Числа $\delta(e)$ не произвольны; для каждой внутренней (не лежащей на границе квадранта) вершины a существует одно соотношение. Рассмотрим шесть ребер триангуляции Σ , выходящие из вершины a , и ориентируем их в направлении от a . Тогда сумма этих шести векторов с учетом кратностей равна нулю. Назовем это утверждение *свойством бездивергентности*.

Доказать это свойство очень просто. Без особого ущерба для общности можно считать, что $a = 0$. Шесть векторов-ребер, выходящие из a , – это векторы $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$ и $(0, -1)$. Рассмотрим вторую координату нашей суммы. Она равна сумме кратностей второго и третьего ребра за вычетом суммы

кратностей пятого и шестого. Первая сумма равна

$$\begin{aligned} f(0,0) + f(1,1) - f(1,0) - f(0,1) + f(0,0) + f(0,1) - f(1,1) - f(-1,0) \\ = 2f(0,0) - f(1,0) - f(-1,0). \end{aligned}$$

Вторая сумма равна

$$\begin{aligned} f(0,0) + f(-1,-1) - f(-1,0) - f(0,-1) + f(0,0) + f(0,-1) \\ - f(-1,-1) - f(1,0) = 2f(0,0) - f(-1,0) - f(1,0), \end{aligned}$$

что то же самое.

Аналогично проверяется соотношение для первой координаты.

Очевидно, что если функция $\tilde{f}$ вогнута (т.е. исходная функция f дискретно вогнута), то кратности всех ребер неотрицательны. Верно и обратное, но нам это не понадобится. Более того, паутина функции однозначно определяет функцию с точностью до прибавления аффинной функции. Таким образом, паутина несет в себе существенную информацию о функции. А если функция к тому же принимает целые значения (как функция емкости $c(M; N, N; \cdot)$), то кратности (веса) ребер – целые неотрицательные числа. Наглядно представим такую (целочисленную) паутину, проводя k близких параллельных отрезков вместо ребра кратности k .

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию f на $\mathbb{Z}_+^2$, заданную таблицей

...	...	...	...	...	...
2	4	6	7	7	...
2	4	6	7	7	...
2	4	5	6	6	...
1	3	4	4	4	...
0	1	2	2	2	...

Фактически она задана на “квадрате” $\{0, 1, 2, 3\}^2 \subset \mathbb{Z}_+^2$, а дальше продолжается по монотонности. Легко понять, что ее паутина имеет вид, изображенный на рис. 5.

Рис. 5

В окрестности каждой (внутренней) вершины паутины можно понимать как наложение нескольких локальных картинок одного из пяти типов, представленных на рис. 6.

Рис. 6

Ребра паутины делятся на три группы: горизонтальные, вертикальные и диагональные (или h -ребра, v -ребра и d -ребра). Диагональные ребра, как мы увидим, будут играть особую роль, что объясняется следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для точки $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ выполнено равенство

$$f(x) = D(x) + f(x_1, 0) + f(0, x_2) - f(0, 0),$$

где $D(x)$ – суммарное число d -ребер паутины функции f , попавших в область $x - \mathbb{R}_+^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, это равенство верно для точек на границе квадранта $\mathbb{R}_+^2$. Пусть теперь точка x находится строго внутри квадранта. Рассмотрим три вспомогательные точки: $x_h = x - (1, 0)$, $x_v = x - (0, 1)$ и $x_d = x - (1, 1)$. Так как они находятся строго ниже x , для них по индукции формула верна. После этого остается только показать, что степень излома функции D вдоль ребра $e = [x_d, x]$ совпадает с $\delta_f(e)$. Но степень излома D вдоль e равна сумме числа d -ребер, расположенных ниже x , и числа d -ребер, расположенных ниже x_d , за вычетом числа d -ребер, расположенных ниже x_h , и числа d -ребер, расположенных ниже x_v , что равно числу d -ребер в квадрате $[x, x_v, x_d, x_h]$, т.е. равно $\delta_f(e)$.

Для дальнейшего рассуждения удобно представить слагаемые $f(x_1, 0)$ и $f(0, x_2)$ в аналогичном виде. Для этого добавим к паутине функции f несколько диагональных ребер, расположенных за пределами квадранта. Рассмотрим, например, целую точку $a = (a_1, 0)$ на горизонтальной грани квадранта. Свяжем с этой точкой целое число $\varepsilon(a)$, равное числу (с учетом, конечно, кратностей) v -ребер и d -ребер паутины, смежных a . Соединим точку a с точкой $a' = (0, -a_1)$ отрезком d -типа с кратностью $\varepsilon(a)$, и такую процедуру сделаем с каждой целой точкой на горизонтальной грани квадранта. Аналогично поступаем с точками на вертикальной грани квадранта: каждую точку $a = (0, a_2)$ соединим с точкой $a' = (-a_2, 0)$ d -отрезком с кратностью, равной числу h -ребер и d -ребер, смежных a .

Полученное образование будем называть *расширенной паутиной* функции f .

ПРИМЕР 4. Рассмотрим функцию (дискретно вогнутую, как можно непосредственно проверить), заданную следующей таблицей:

...	...	...	...	...	...
4	7	10	11	12	...
4	7	10	11	11	...
4	7	9	10	10	...
4	6	7	8	8	...
2	4	5	5	5	...
0	1	2	2	2	...

Конечно, здесь указаны только начальные значения. На рис. 7 изображена расширенная паутина этой функции.

Рис. 7

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1'. Пусть f – дискретно вогнутая функция, стабилизирующаяся при больших значениях аргумента. Тогда справедливо соотношение

$$f(x) = \tilde{D}(x) + f(0),$$

где $\tilde{D}(x)$ – число d -ребер расширенной паутины функции f , попавших в область $x - \mathbb{R}_+^2$.

Так, в примере 4 возьмем точку $x = (1, 2)$. Как видно из рис. 7, ниже нее расположены шесть d -ребер расширенной паутины, что совпадает со значением $f(1, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через f_1 ограничение f на горизонтальную ось, $f_1(y) = f(y, 0)$ для $y \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что

$$f_1(\cdot) = f_1(0) + \sum_k \Delta^2 f_1(k) \min(k, \cdot).$$

С другой стороны, $\Delta^2 f_1(k)$ равно $\varepsilon(k, 0)$ – числу v -ребер и d -ребер паутины, смежных точке $(k, 0)$. Наконец, $\min(k, y)$ – это число расположенных левее y ребер на отрезке, выходящем из точки $(k, 0)$, расширенной паутины. Суммируя все сказанное выше, получаем нужное соотношение.

§ 5. Частично упорядоченное множество $\mathbb{P}(f)$

Пусть $f: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – стабилизирующаяся дискретно вогнутая функция, равная нулю в нуле. Из предложения 1' видно, что функция f восстанавливается по d -ребрам расширенной паутины функции f . Естественнo ожидать, что нужные для теоремы 2 модули должны строиться с помощью таких d -ребер. Однако предварительно построим некоторое (конечное) частично упорядоченное множество (иначе называемое *poset* (poset)) $\mathbb{P} = \mathbb{P}(f)$.

Как множество посет $\mathbb{P}$ содержит столько элементов, сколько имеется d -ребер (с учетом кратностей) в расширенной паутине функции f . Элемент посета $\mathbb{P}$, соответствующий ребру $[a, a + (1, 1)]$ расширенной паутины, будем располагать над точкой a . Тем самым получаем отображение $\pi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Z}^2$. (Над точкой $a \in \mathbb{Z}_+^2$ располагается ровно $\delta(e)$ элементов посета $\mathbb{P}$, где $e = [a, a + (1, 1)]$. Аналогично можно определить число прообразов π над остальными точками.) Предложение 1' утверждает, что $f(x)$ равно числу элементов посета $\mathbb{P}$, расположенных строго ниже точки x .

Структуру частичного порядка в $\mathbb{P}$ введем, пользуясь структурой частичного порядка в $\mathbb{Z}^2$. А именно, для элементов p и q из $\mathbb{P}$ будем считать, что $q < p$ (и проводить стрелку из p в q), если обе координаты точки $\pi(q)$ строго больше, чем координаты точки $\pi(p)$. Так, для примера 4 соответствующий посет приведен на

Рис. 8

рис. 8, где изображены только “существенные” стрелки, остальные получаются по транзитивности.

То обстоятельство, что координаты увеличиваются вдоль стрелок, позволяет рассмотреть несколько естественных идеалов в $\mathbb{P}$. (Идеалом в частично упорядоченном множестве называется подмножество, которое с каждым элементом содержит все меньшие элементы.) Идеал I_1 состоит из всех элементов с неотрицательной первой координатой. Обозначим через $I_1(k)$, $k \geq 0$, идеал элементов p таких, что первая координата точки $\pi(p)$ не меньше k . Ясно, что $I_1 = I_1(0)$. Аналогично введем идеалы $I_2(k)$, $k \geq 0$, элементов со второй координатой, не меньшей k ; $I_2 = I_2(0)$. В этих терминах предложение 1' принимает следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1''. Для точки $x \in \mathbb{Z}_+^2$ значение $f(x)$ равно числу элементов во множестве $\mathbb{P} \setminus (I_1(x_1) \cup I_2(x_2))$.

Эта формула напоминает формулу для емкости: $c(x) = l(M/(T^{x_1}N_1 + T^{x_2}N_2))$. Роль модуля M играет посет $\mathbb{P}$, роль подмодуля N_i – идеал I_i , а роль подмодуля $T^k N_i$ – идеал $I_i(k)$. Остается только придать этой аналогии точный смысл, что и будет сделано в следующем параграфе.

§ 6. Частично упорядоченные множества и нильпотентные операторы

Пусть $\mathbb{P}$ – конечное частично упорядоченное множество (посет). Для наглядности проведем стрелки из больших элементов в меньшие. Если воспринимать эти стрелки как действие оператора T , то получим нильпотентный оператор (или модуль над кольцом $A = K[[T]]$; более точная формулировка будет дана ниже). В

частности, можно говорить о типе этого модуля, т.е. о соответствующей диаграмме Юнга. Интересно, что первоначально по посету была построена именно диаграмма Юнга (в работе [4], см. также [2]). И лишь позднее, в [6], была введена промежуточная конструкция пространства с нильпотентным действием. Опишем кратко эту конструкцию, отсылая за подробностями к упомянутым работам.

Итак, пусть $\mathbb{P} = (P, >)$ – конечное частично упорядоченное множество. Рассмотрим векторное пространство $M = K \otimes P$ с базисом из выражений $[p] = 1 \otimes p$, $p \in P$. Зададим на M нильпотентное действие T , пользуясь структурой порядка $>$. Несомненно, что $T[p]$ должно представляться линейной комбинацией $[q]$ с $q < p$, но какой? Видимо, правильнее всего считать, что эти коэффициенты должны быть алгебраически независимыми; в частности, поле K должно быть “большим”. Поступим поэтому следующим образом. Для каждой пары элементов p и q , $p > q$, возьмем независимую переменную X_{pq} , а в качестве поля K рассмотрим поле $\mathbb{F}(X_{pq}, p > q)$ рациональных функций над некоторым вспомогательным базисным полем $\mathbb{F}$. Действие T зададим формулой

$$T[p] = \sum_{q < p} X_{pq}[q].$$

Заданный этой формулой A -модуль M будем обозначать $K \otimes \mathbb{P}$.

Например, если $\mathbb{P}$ – тривиальное частично упорядоченное множество, в котором все элементы несравнимы между собой, то $K \otimes \mathbb{P}$ – элементарный модуль. Напротив, если $\mathbb{P}$ – цепь (т.е. $\mathbb{P}$ изоморфно естественно упорядоченному множеству $\{1, 2, \dots, n\}$), то $K \otimes \mathbb{P}$ – циклический модуль $C(n)$ с образующей $[n]$. Вообще, если $\mathbb{P}$ – несвязная сумма частично упорядоченных множеств $\mathbb{P}_i$, $\mathbb{P} = \coprod_i \mathbb{P}_i$ (значит, элементы из разных $\mathbb{P}_i$ несравнимы между собой), то модуль $K \otimes \mathbb{P}$ – прямая сумма модулей $K \otimes \mathbb{P}_i$.

Отметим, что предыдущая конструкция не совсем функториальна и морфизмы частично упорядоченных множеств не продолжают до гомоморфизмов соответствующих модулей. Однако если $\mathbb{I}$ – идеал в $\mathbb{P}$, то модуль $K \otimes \mathbb{I}$ естественным образом реализуется как подмодуль модуля $K \otimes \mathbb{P}$.

Каждое (конечное) частично упорядоченное множество обладает канонической фильтрацией, состоящей из идеалов. Введем следующее понятие. *Глубиной* элемента p назовем максимальную длину цепочки $p_0 > p_1 > \dots > p_n = p$ в частично упорядоченном множестве $\mathbb{P}$. На самом верш (на глубине 0, т.е. “на поверхности”) располагаются максимальные элементы $\mathbb{P}$, на глубине 1 – максимальные элементы $\mathbb{P} \setminus \max(\mathbb{P})$ и так далее. Для целого $k \geq 0$ обозначим через $\mathbb{P}(k)$ множество элементов глубины не меньше k . Оно является идеалом в $\mathbb{P}$, и мы получаем (глубинную) фильтрацию идеалов

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(0) \supset \mathbb{P}(1) \supset \dots$$

Соответственно мы получаем *глубинную* фильтрацию модуля $M = K \otimes \mathbb{P}$:

$$M = M(0) \supset M(1) \supset \dots,$$

где $M(k) = K \otimes \mathbb{P}(k)$. Эта фильтрация похожа на T -адическую; во всяком случае, всегда имеет место включение $M(k+1) \supset TM(k)$. В общем случае равенства здесь нет; например, для посета из трех элементов: $p < q > r$. Существует, однако, важный класс частично упорядоченных множеств, для которых глубинная фильтрация совпадает с T -адической.

Представим, что частично упорядоченное множество является несвязным объединением нескольких цепей. Такой посет $\mathbb{P}$ назовем *банальным*. Очевидно, что для соответствующего модуля $K \otimes \mathbb{P}$ глубинная фильтрация совпадает с T -адической. Конечно, это малоинтересный случай. Более интересно, что некоторые усиления банальных посетов также обладают этим свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathbb{P}_0 = (P, >_0)$ и $\mathbb{P} = (P, >)$ – два частичных порядка на одном и том же множестве P и порядок $>$ сильнее, чем $>_0$ (это означает, что $p >_0 q$ влечет $p > q$). Скажем, что $\mathbb{P}$ – *несущественное усиление* $\mathbb{P}_0$, если $p > q$ влечет, что $\mathbb{P}_0$ -глубина q строго больше, чем $\mathbb{P}_0$ -глубина p .

Другими словами, новые стрелки в посете $\mathbb{P}$ направлены только в большую глубину. На рис. 9 изображен посет $\mathbb{P}_0$ и два его усиления: несущественное $\mathbb{P}$ и существенное $\mathbb{P}'$.

Рис. 9

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbb{P}$ – усиление $\mathbb{P}_0$. Это усиление несущественно тогда и только тогда, когда функция глубины одна и та же.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d: P \rightarrow \mathbb{Z}$ – функция глубины посета $\mathbb{P}$, а d_0 – посета $\mathbb{P}_0$. Так как $\mathbb{P}$ сильнее $\mathbb{P}_0$, то $d \geq d_0$.

Предположим, что $\mathbb{P}$ – несущественное усиление, и покажем, что глубина не возрастает. Пусть $p_0 > p_1 > \dots > p_k = p$ – одна из цепочек в посете $\mathbb{P}$. Так как $0 \leq d_0(p_0) < d_0(p_1) < \dots < d_0(p_k) = d_0(p)$, то $d_0(p) \geq k$, откуда $d_0(p) \geq d(p)$.

Доказательство обратного утверждения столь же просто. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Несущественное усиление банального посета назовем *ручным* посетом.

На рис. 10 изображены ручной и неручной посеты.

Ручной посет

Неручной посет

Рис. 10

Очевидно, что для ручного посета $\mathbb{P}$ все его глубинные идеалы $\mathbb{P}(k)$, $k = 0, 1, \dots$, также являются ручными.

Основной результат о ручных посетах состоит в том, что для ассоциированных модулей глубинная и T -адическая фильтрации совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathbb{P}$ – ручное частично упорядоченное множество. Тогда для любого целого $k \geq 0$ выполнено $T^k(K \otimes \mathbb{P}) = K \otimes \mathbb{P}(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку идеалы $\mathbb{P}(k)$ также являются ручными, достаточно доказать утверждение для $k = 1$. Более того, факторизуя по $K \otimes \mathbb{P}(2)$, можно считать, что $\mathbb{P}$ имеет высоту 2, т.е. $\mathbb{P}(2)$ пусто. Остается показать, что гомоморфизм векторных пространств

$$T: K \otimes P_0 \rightarrow K \otimes P_1$$

(где P_i – элементы высоты i) сюръективен. Применяя “обратную инъекцию” $\phi_0: P_1 \rightarrow P_0$, можно заменить P_0 на $\phi_0(P_1)$. Отображение T задается формулой $T[p] = \sum_{q < p} X_{pq}[q]$, где $p \in P_0$, а $q \in P_1$. Остается проверить, что определитель отображения T в этом базисе отличен от нуля. Но этот определитель является суммой мономов вида $\prod_q X_{pq}$, где $p > q$. Разные мономы не могут сократиться, и поэтому нужно показать, что имеется хотя бы один моном указанного вида. Существование такого монома снова обеспечивает инъекция ϕ_0 ; достаточно рассмотреть моном $\prod_q X_{\phi_0(q)q}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathbb{P}_0$ – банальный посет, а $\mathbb{P}$ – его несущественное усиление, то модули $K \otimes \mathbb{P}_0$ и $K \otimes \mathbb{P}$ изоморфны.

В самом деле, оба эти модуля имеют одну и ту же функцию емкости (см. § 2), а именно $c(k+1) = |P_0| + \dots + |P_k|$ для каждого целого неотрицательного k .

§ 7. Доказательство теоремы 2

Пусть $f: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – дискретно вогнутая функция, равная нулю в нуле и стабилизирующаяся при больших значениях аргумента. В § 5 мы построили посет $\mathbb{P} = \mathbb{P}(f)$ и два его идеала $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$. Положим теперь $M = K \otimes \mathbb{P}$ и $N_i = K \otimes \mathbb{I}_i$,

$i = 1, 2$. Мы утверждаем, что функции $f(\cdot)$ и $c(M, N_1, N_2; \cdot)$ совпадают. В силу предложений 1'' и 2 это вытекает из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Посеты $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ ручные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь впервые мы воспользуемся тем, что функция f дискретно вогнута. Будем проверять, что посет $\mathbb{I}_1$ ручной; проверка для $\mathbb{I}_2$ аналогична.

Элементы посета $\mathbb{I}_1$ расположены над точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ с неотрицательными первыми координатами (т.е. над правой полуплоскостью). Как легко понять, глубина элемента – это в точности его первая координата. Обозначим через P_k элементы посета $\mathbb{I}_1$ с абсциссой k . Необходимо показать, что существует инъективное отображение P_k в P_{k-1} , которое строго понижает вторую координату (ординату). Приведем два рассуждения, доказывающие это ключевое утверждение.

1. Напомним, что элементы посета – это, по существу, d -ребра (расширенной) паутины функции f . Ранее мы говорили, что эта паутина представляет наложение локальных картинок, изображенных на рис. 6. Пользуясь такой распутанной паутиной, можно связать с каждым d -ребром, “выходящим” из точки с абсциссой k , некоторое “свое” d -ребро, “входящее” в точку с абсциссой k , лежащее строго ниже. Делается это следующим образом. Если это d -ребро имело вид, соответствующий рис. 6, c , то к нему подходит снизу d -ребро, которое будем ассоциировать с исходным. Если же d -ребро соответствует рис. 6, d , то от него вниз идет вертикальная “нитка” паутины. Эта “нитка” либо заканчивается нужным d -ребром, как показано на рис. 6, e , либо она продолжается до оси абсцисс (т.е. до горизонтальной грани квадранта), и тогда из этой граничной точки “выходит” нужное “добавленное” d -ребро расширенной паутины.

2. Зафиксируем k ; интересующий нас вопрос об инъективности отображения связан с d -ребрами из вертикальной полосы $k \leq x_1 \leq k+1$ (это элементы P_k) и d -ребрами из вертикальной полосы $k-1 \leq x_1 \leq k$. Существование нужной инъекции из P_k в P_{k-1} будет установлено, если мы докажем следующее утверждение. Пусть $Z(k, h)$ для целого h означает число d -ребер расширенной паутины, расположенных в вертикальной полосе $k \leq x_1 \leq k+1$ и ниже h . Утверждение состоит в том, что справедливо неравенство

$$Z(k, h) \leq Z(k-1, h-1).$$

В самом деле, в силу этого утверждения известно, что для самых нижних d -ребер из полосы $k \leq x_1 \leq k+1$ имеется по крайней мере столько же d -ребер из предыдущей полосы, расположенных в ней строго ниже. Поэтому можно их как-то соединить. Поднимаясь на ступеньку выше, мы видим, что для новых d -ребер также можно найти достаточное количество нужных d -ребер, и так далее.

Теперь докажем утверждение. Снова, как легко понять, число $Z(k, h)$ равно приращению функции f на отрезке $[(k, h), (k+1, h)]$, т.е.

$$Z(k, h) = f(k+1, h) - f(k, h).$$

Аналогично,

$$Z(k-1, h-1) = f(k, h-1) - f(k-1, h-1).$$

Разность $Z(k-1, h-1) - Z(k, h)$ является степенью излома f вдоль v -ребра $[(k, h-1), (k, h)]$, и поэтому неотрицательна. (Точнее, она неотрицательна при $h \geq 1$ в силу дискретной вогнутости f . Для $h \leq 0$ справедливость равенства $Z(k-1, h-1) = Z(k, h)$ видна из построения расширенной паутины.)

Итак, теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Berenstein A. D., Zelevinsky A. V.* Triple multiplicities for $sl(r+1)$ and the spectrum of the exterior algebra of adjoint representation // J. of Algebraic Combinatorics. 1992. V. 1. P. 7–22.
2. *Britz T., Fomin S.* Finite posets and Ferrers Shapes // Advances in Mathematics. 2001. V. 158. P. 86–127.
3. *Fulton W.* Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus // Bull. of the Amer. Math. Soc. 2000. V. 37. P. 209–249.
4. *Green C., Kleitman D. J.* The structure of Sperner k -families // J. Combin. Theory. Ser. A. 1976. V. 20. P. 41–68.
5. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.
6. *Saks M.* Dilworth numbers, incidence maps and product partial orders // SIAM J. Algebraic Discrete Math. 1980. V. 1. P. 211–215.

Поступило в редакцию
10.IX.2001