Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, Групповое представление леса Кэли и его некоторые применения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 21–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/im416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 08:42:10

УДК 517.98+530.1

Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков

Групповое представление леса Кэли и его некоторые применения

Лес и произведения деревьев Кэли порядка $k \geq 1$ представлены как подгруппы группы свободного произведения m ($m > k$) циклических групп второго порядка. Определены группы автоморфизмов этих объектов. Для модели Изинга на лесе Кэли даны полные описания множеств трансляционно-инвариантных и периодических гиббсовских мер. Построен новый класс предельных гиббсовских мер неоднородной модели Изинга на дереве Кэли. Найдены достаточные условия невозвратности случайного блуждания в периодической случайной среде на лесе, когда размеры скачков блуждающей частицы ограничены.

Библиография: 13 наименований.

1. Введение. В настоящее время теория графов стала простым, доступным и мощным средством решения многих задач. В некоторых ситуациях полезно рассматривать помеченные графы, т.е. графы, вершинам которых присвоены некоторые метки, например номера $1, 2, 3, \dots$.

Если граф бесконечен, то помечание графа становится нелегкой задачей.

В некоторых задачах целесообразно то, что метки образуют группу. Например, для описания предельных гиббсовских мер, определенных на графах, необходимо определить групповое представление и автоморфизмы графа (см. [1]–[6]).

В настоящей работе определяются и изучаются некоторые группы преобразований бесконечного леса и произведений бесконечных деревьев Кэли, включая группы автоморфизмов этих объектов.

Под *деревом Кэли* Γ^k *порядка* $k \geq 1$ понимается связный граф без циклов, в котором степень каждой вершины равна $k + 1$.

Любой граф без циклов называется *лесом*.

Если лес содержит счетное число компонент, каждый из которых является деревом Кэли порядка $k \geq 1$, то его назовем *лесом Кэли* и обозначим Λ_k .

Если из каждой вершины дерева Кэли порядка $k \geq 1$ вырастет дерево Кэли порядка k , то полученный граф (дерево) назовем *произведением деревьев Кэли* и обозначим через $\Gamma^k \odot \Gamma^k$ (см. рис. 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k свободного произведения $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно.*

Для полноты изложения кратко приведем описание этого соответствия: произвольной фиксированной вершине $x_0 \in V$ поставим в соответствие единичный

Рис. 1

элемент e группы G_k . Так как рассматриваемый граф без ограничения общности можно считать плоским, занумеруем соседние с x_0 вершины, двигаясь в положительном направлении (см. рис. 2).

Каждой вершине $x_i \in V$ поставим в соответствие образующую a_i , $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Теперь для каждой вершины $x_i \in V$ определим двойную нумерацию x_{ij} соседних вершин x_i . Так как одна из соседних вершин вершины x_i есть x_0 , то положим $x_{ii} = x_0$, и тогда нумерация остальных соседних вершин $x_i \in V$ производится однозначно по приведенному ранее правилу нумерации. Каждой вершине x_{ij} поставим в соответствие слово $a_i a_j$, $i, j = 1, 2, \dots, k + 1$. Так как $x_{ii} = x_0$ и $a_i^2 = e$, то это соответствие согласуется с предыдущим шагом. Далее, для соседних вершин x_{ij} определим тройную нумерацию следующим образом. Так как одна из соседних для x_{ij} вершин есть x_i , то положим $x_{ijj} = x_i$, и тогда нумерация остальных соседних вершин производится однозначно. Каждой вершине x_{ijk} поставим в соответствие слово $a_i a_j a_k$. Это соответствие согласуется с предыдущим шагом, так как $x_{ijj} = x_i$ и $a_i a_j a_j = a_i a_j^2 = a_i$.

Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством вершин дерева Кэли Γ^k и группой G_k . Предложение доказано.

Рис. 2

Представление, построенное выше, называется *правым*, так как в этом случае, если x и y – соседние вершины, а $g, h \in G_k$ – соответствующие им элементы группы, то либо $g = ha_i$, либо $h = ga_j$ для некоторых i и j . Аналогично определяется *левое* представление.

Ниже мы покажем, что множеству вершин леса Λ_k и леса F^k (где F^k состоит из счетного числа связанных компонент $\Gamma^k \odot \Gamma^k$ и Γ^k) можно естественным образом поставить в соответствие некоторую подгруппу G группы G_k , что позволит явно определить группы преобразований Λ_k и F^k .

В работе также рассматриваются следующие задачи:

- 1) описание периодических гиббсовских мер на Λ_k ;
- 2) описание новых (не совпадающих с известными) гиббсовских мер для неоднородной модели Изинга на дереве Кэли с использованием результатов п. 1);
- 3) определение и изучения случайных блужданий в случайной среде на F^k .

2. Описание некоторых свойств подгрупп группы G_k . Пусть G – произвольная подгруппа группы G_k .

Обозначим $I(G) = G \cap \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$. Пусть $G(I)$ – свободное произведение циклических групп $A_i = \{e, a_i\}$, где e – единичный элемент и $a_i \in I(G)$.

Определим на G бинарное отношение $\sim$, положив $x \sim y$ для $x, y \in G$ тогда и только тогда, когда в $G(I)$ существует такое слово z , что $x = yz$. Очевидно, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности и, следовательно, множество G разбивается на классы смежности $G_x = \{y \in G: y = xz, z \in G(I)\}$.

ЛЕММА 1. *Для любого $x \in G$ справедливы следующие импликации:*

- 1) $I(G) = \emptyset \iff G_x = \{x\}$;
- 2) $I(G) = \{a_i\} \iff G_x = \{x, xa_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k+1$;
- 3) $|I(G)| > 1 \iff |G_x| = \infty$, где $|\cdot|$ – число элементов множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $x \in G$, то для того, чтобы $xa_i \in G$, необходимо и достаточно, чтобы $a_i \in G$. Откуда следует доказательство леммы.

Пусть отображение $\nu: G_k \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ определено по формуле $\nu(x) = \nu(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}) = a_{i_n}$ и $\nu(e) \notin I(G)$ – произвольное.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $x \in G$ существует единственное $u(x) \in G_x$ такое, что $u(x)\nu(u(x)) \notin G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование.* Пусть $y \in G_x$; тогда $y = xa_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$, где $a_{i_j} \in I(G)$, $j = 1, 2, \dots, n$. С другой стороны, элемент x можно представить как $x = x^*a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_m}$, где $a_{j_s} \in I(G)$, $s = 1, 2, \dots, m$, и x^* такое, что $x^* \in G$, $\nu(x^*) \notin G$. Действительно, x^* определяется следующим образом: если x удовлетворяет условию $\nu(x) \notin G$, то $x^* = x$; в случае $\nu(x) \in G$ рассмотрим $x_1 = x\nu(x)$ и проверим условие $\nu(x_1) \notin G$; если оно выполняется, то в качестве x^* берем x_1 , в противном случае рассмотрим $x_2 = x_1\nu(x_1)$ и проверим условие $\nu(x_2) \notin G$, и т.д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не выполняется нужное нам условие. Так как $\nu(e) \notin I(G)$, то этот процесс заканчивается, по крайней мере, в случае $x^* = e$ (в случае $x \sim e$). Если x не эквивалентно e , то для определения x^* будет сделано не более $|x|$ шагов.

Из $\nu(x^*) \notin G$ следует, что $x^*\nu(x^*) \notin G$. Таким образом, $u(x) = x^*$.

Единственность. Пусть существуют $u_1(x), u_2(x) \in G_x$. Тогда для любого y имеем

$$y = u_1(x)a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}, \quad y = u_2(x)a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_m},$$

откуда $u_1(x) = u_2(x)a_{j_1} \dots a_{i_1}$. Если $a_{j_1} \dots a_{i_1} = e$, то это противоречит тому, что $u_1(x) \neq u_2(x)$, если $a_{j_1} \dots a_{i_1} \neq e$, то это противоречит тому, что $\nu(u_1(x)) \notin G$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $u(x) \in G_x$, определяемый в теореме 1, назовем *корнем класса* G_x .

В дальнейшем запись G_x означает, что x – корень класса G_x .

ТЕОРЕМА 2. Любая подгруппа $G \subset G_k$ имеет счетное число корневых элементов, если $G \neq G(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 существует хотя бы одно корневое слово u . Заметим, что $y = xu$ также является корневым, где $x \in G$. Так как G – счетное множество, то отсюда следует доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая подгруппа G ($G \neq G(I)$) разбивается на счетное число классов эквивалентных элементов.

Обозначим через $K(G)$ множество всех корней G . Очевидна следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $u \in K(G)$. Тогда:

- 1) $ua_i \notin K(G)$ для любого $i = 1, 2, \dots, k+1$;
- 2) если $e \neq u \in K(G)$, то для того, чтобы $a_i u \in K(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $a_i \in G$.

Определим на $G \subset G_k$ структуру графа следующим образом: вершины, соответствующие словам $x, y \in G$, назовем *ближайшими соседями* и соединим ребром, если либо $x = ya_i$, либо $y = xa_j$ для некоторого i или j .

Нетрудно убедиться в том, что определенный таким образом граф образует лес деревьев Кэли порядка $|I(G)| - 1$, т.е. $\Lambda_{|I(G)|-1}$.

3. Групповое представление леса Кэли. Пусть Λ_k – лес Кэли и G – подгруппа группы G_m , где $m > k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $|I(G)| = k+1$, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин Λ леса Кэли Λ_k и подгруппой G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Λ_k содержит счетное число компонентов и G – счетное число классов эквивалентных элементов, то существует естественное взаимно однозначное соответствие между классами G_x , $x \in K(G)$, и компонентами $\Lambda_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, леса Λ_k . В силу предложения 1 существует однозначное соответствие между множеством вершин $\Lambda_k^{(i)}$ и элементами класса G_x . Предложение доказано.

Представление, построенное выше, назовем *правым*, так как в этом случае если x, y – соседние вершины, а $g, h \in G$ – соответствующие им элементы группы, то либо $g = ha_i$, либо $h = ga_j$ для некоторого i или j . Аналогично определяется *левое* представление.

4. Групповое представление леса F^k . Пусть $G \subset G_m$ – подгруппа такая, что $|I(G)| = k + 1$, где $m > k$. Определим на $K(G) \setminus \{e\}$ структуру графа следующим образом: вершины, соответствующие словам $u, v \in K(G) \setminus \{e\}$, назовем *ближайшими соседями* и соединим ребром, если либо $u = a_i v$, либо $v = a_j u$ для некоторого i или j . В силу леммы 2 заметим, что определенный таким образом граф образует лес Кэли порядка $|I(G)| - 1$, но с левым представлением $K(G) \setminus \{e\}$, которое, вообще говоря, не является группой.

Структуру графа на G определим, как в п. 2, и каждому корню добавим ребра, которые построены на $K(G) \setminus \{e\}$. Тогда полученный граф является F^k .

Таким образом, G с ранее определенной на нем структурой графа является групповым представлением F^k .

5. Определения некоторых автоморфизмов подгруппы G группы G_k . Рассмотрим на группе G следующие преобразования.

1) Преобразования *левого (правого) сдвига*, определяемые следующим образом: для $g_0 \in G$ положим

$$T_{g_0}(h) = g_0 h \quad (T_{g_0}^*(h) = h g_0) \quad \text{для любого } h \in G.$$

Совокупность всех левых (правых) сдвигов на G изоморфна группе G .

2) Преобразование G , определенное следующим образом: для $g_0 \in G$

$$T_{g_0}(h) = g_0^{-1} h g_0 \quad \text{для любого } h \in G,$$

называется *внутренним автоморфизмом группы G* .

Ясно, что любое преобразование S группы G индуцирует преобразование S^* на множестве вершин Λ_k и F^k .

6. Полное описание периодических гиббсовских мер модели Изинга на Λ_k . Пусть G – групповое представление леса Λ_k и $A \subset G$ – конечное подмножество. Обозначим через $\mathbb{V}_A = \{-1, 1\}^A$ пространство конфигураций на множестве A , т.е. множество всевозможных функций, определенных на A и принимающих два значения: $-1, 1$.

В модели Изинга на Λ_k гамильтониан $H: \mathbb{V}_A \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x) \sigma(y),$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$ и $J \in \mathbb{R}$.

Для каждого слова $x \in G$ обозначим через $|x|$ его длину, т.е. число букв в несократимой записи x . Введем обозначения:

$$W_n = \{x \in G: |x| = n\}, \quad V_n = \{x \in G: |x| \leq n\}, \quad L_n = \{\langle x, y \rangle: x, y \in V_n\}.$$

Пусть h_x – действительная функция, $x \in G$. Для каждого $n > 0$ рассмотрим меру на $\mathbb{V}_{V_n}$, определенную формулой

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ J \beta \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x) \sigma(y) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{1}{T}$ ($T > 0$ – температура), $\sigma_n = \{\sigma(x) : x \in V_n\} \in \vee_{V_n}$ и Z_n – нормирующий делитель.

Условия согласования для $\mu_n(\sigma_n)$, $n > 0$, определяются равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (2)$$

где $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x) : x \in W_n\}$.

Обозначим $S(x) = \{y \in W_{|x|+1} : \langle x, y \rangle\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы меры (1) удовлетворяли условию (2), необходимо и достаточно, чтобы для h_x , $x \in G$, выполнялось равенство*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y; \theta), \quad (3)$$

где $-1 < \theta = \text{th}(h\beta) < 1$, $f(x; \theta) = \text{arch}(\theta \text{th } x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя формулу (1) в (2), заметим, что равенства (2) и (3) эквивалентны.

Очевидны следующие свойства функции f :

- (a) $f(-x; \theta) = -f(x; \theta)$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x; \theta) = \text{arch } \theta$;
- (c) $f'_x(0; \theta) = \theta$, $f'_x(x; \theta) \leq |\theta|$;
- (d) $f''_{xx}(x; \theta) < 0$, если $x > 0$, $\theta > 0$.

Таким образом, в силу теоремы Колмогорова из теоремы 3 следует, что каждой совокупности величин $\{h_x; x \in G\}$, удовлетворяющей (3), соответствует единственная предельная мера μ на $\vee_G$ такая, что $\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность чисел $\{h_x; x \in G\}$ назовем H_0 -периодической (где H_0 – нормальный делитель группы G), если $h_x = h_{yx}$ для любых $x \in G$ и $y \in H_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мету, соответствующую H_0 -периодической совокупности величин, назовем H_0 -периодической. G -периодическая мера называется *трансляционно-инвариантной*.

Пусть H_0 – нормальный делитель индекса r группы G и $G/H_0 = \{H_0, H_1, \dots, H_{r-1}\}$ – факторгруппа. Введем обозначения:

$$q_i(x) = |S(x) \cap H_i|, \quad i = 0, 1, \dots, r-1; \quad N(x) = |\{j : q_j(x) \neq 0\}|,$$

где $|\cdot|$ – число элементов множества,

$$Q(x) = (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r-1}(x)).$$

Заметим (см. [5]), что для любого $x \in G$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(x)$ такая, что

$$\pi_x Q(e) = Q(x). \quad (4)$$

Из равенства (4) следует, что $N(x) = N(e)$ для любого $x \in G$.

H_0 -периодическая совокупность величин имеет следующий вид:

$$\{h_x = h_i, \text{ если } x \in H_i, \ i = 0, 1, \dots, r-1\}.$$

В силу теоремы 3 и равенства (4) величины h_m удовлетворяют системе уравнений

$$h_m = \sum_{j=1}^{N(e)} q_{i_j}(e) f(h_{\pi_m(i_j)}; \theta) - f(h_{\pi_m(i_{j_0})}; \theta), \quad (5)$$

где $m = \overline{0, r-1}$, $j_0 = \overline{1, N(e)}$, $N(e) = |\{i_1, i_2, \dots, i_{N(e)}\}|$. Пусть $\tilde{G}$ – подгруппа группы G , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $\tilde{G}$ является подгруппой индекса два.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого нормального делителя конечного индекса H_0 всякая H_0 -периодическая мера Гиббса совпадает либо с трансляционно-инвариантной, либо с $\tilde{G}$ -периодической мерой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (5) получим

$$f(h_{\pi_m(i_1)}; \theta) = f(h_{\pi_m(i_2)}; \theta) = \dots = f(h_{\pi_m(i_{N(e)})}; \theta).$$

Отсюда имеем

$$h_{\pi_m(i_1)} = h_{\pi_m(i_2)} = \dots = h_{\pi_m(i_{N(e)})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_x &= h_y = h_1, \text{ если } x, y \in \tilde{S}(z), \ z \in \tilde{G}, \\ h_x &= h_y = h_2, \text{ если } x, y \in \tilde{S}(z), \ z \in G \setminus \tilde{G}, \end{aligned}$$

где $\tilde{S}(z)$ – множество ближайших соседей точки $z \in G$. Следовательно, если $h_1 = h_2$, то меры будут трансляционно-инвариантными, если $h_1 \neq h_2$, то меры являются $\tilde{G}$ -периодическими. Теорема доказана.

Пусть H_0 – нормальный делитель конечного индекса группы G . Возникает вопрос: при каком условии на H_0 всякая H_0 -периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной? Пусть $I(H_0) = H_0 \cap \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если $I(H_0) \neq \emptyset$, то всякая H_0 -периодическая мера Гиббса для модели Изинга является трансляционно-инвариантной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $x \in H_0$, то для того, чтобы $xa_i \in H_0$, необходимо и достаточно, чтобы $a_i \in H_0$. Так как $I(H_0) \neq \emptyset$, то существует $a_i \in H_0$. Следовательно, H_0 содержит подмножество $H_0a_i = \{xa_i : x \in H_0\}$. В силу теоремы 4 имеем $h_x = h_1$ и $h_{xa_i} = h_2$, но так как x и xa_i принадлежат классу H_0 , получим $h_x = h_{xa_i} = h_1 = h_2$. Таким образом, всякая H_0 -периодическая мера Гиббса является трансляционно-инвариантной. Теорема доказана.

В силу теорем 4, 5 задача описания H_0 -периодических гиббсовских мер при $I(H_0) \neq \emptyset$ сводится к описанию неподвижных точек отображения

$$h = (|I(H_0)| - 1)f(h; \theta) \quad (6)$$

и при $I(H_0) = \emptyset$ сводится к описанию решения системы

$$\begin{aligned} h_1 &= (|I(H_0)| - 1)f(h_2; \theta), \\ h_2 &= (|I(H_0)| - 1)f(h_1; \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Из свойств (а)–(д) функции f следует, что уравнение (6) имеет единственное решение $h = 0$, если $|\theta| < \frac{1}{|I(H_0)|-1}$, и три решения $h = 0, \pm h_*$ ($h_* > 0$), если $1 > |\theta| \geq \frac{1}{|I(H_0)|-1}$.

Система (7) имеет единственное решение $(0, 0)$, если $|\theta| < \frac{1}{|I(H_0)|-1}$, три решения $(0, 0), (-h_*, -h_*), (h_*, h_*)$, если $1 > \theta \geq \frac{1}{|I(H_0)|-1}$, и три решения $(0, 0), (-h_*, h_*), (h_*, -h_*)$, если $-1 < \theta \leq -\frac{1}{|I(H_0)|-1}$.

Обозначим через μ^+, μ^-, μ^0 (или $\mu^\pm, \mu^\mp, \mu^0$) меры Гиббса, соответствующие совокупностям $\{h_x = h_*, x \in G\}$, $\{h_x = -h_*, x \in G\}$, $\{h_x = 0, x \in G\}$ (или

$$\begin{aligned} h_x &= \begin{cases} h_*, & \text{если } x \in \tilde{G}, \\ -h_*, & \text{если } x \in G \setminus \tilde{G}, \end{cases} \\ h_x &= \begin{cases} -h_*, & \text{если } x \in \tilde{G}, \\ h_*, & \text{если } x \in G \setminus \tilde{G}, \end{cases} \end{aligned}$$

$\{h_x = 0, x \in G\}$).

Таким образом, применяя теоремы 4, 5 и учитывая анализ решений уравнений (6), (7), мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Для модели Изинга на лесе Кэли относительно любого нормального делителя конечного индекса H_0 при $1 > \theta \geq \frac{1}{|I(H_0)|-1}$ ($-1 < \theta \leq -\frac{1}{|I(H_0)|-1}$) существуют только три периодические меры Гиббса μ^+, μ^-, μ^0 ($\mu^\pm, \mu^\mp, \mu^0$). Более того, меры μ^+, μ^-, μ^0 являются трансляционно-инвариантными и меры $\mu^\pm, \mu^\mp$ являются $\tilde{G}$ -периодическими.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полное описание периодических гиббсовских мер означает описание таких мер относительно любого нормального делителя конечного индекса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя периодические меры, полученные в теореме 6, можно построить несчетное число непериодических гиббсовских мер. Аналогичные результаты для некоторых моделей на дереве Кэли получены в работах [3], [5]–[7], а наш результат получен для модели Изинга на лесе Кэли.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если мы выберем на каждой компоненте леса Кэли некоторые периодические меры (которые существуют на дереве Кэли, см. [1], [3], [5]–[9]) и если хотя бы две компоненты этих мер различны, то полученная комбинационная мера на лесе уже не будет периодической, так как при сдвиге по нормальным делителям с одной компоненты на другую значения функции h_x не совпадают.

7. Новые меры Гиббса неоднородной модели Изинга на дереве Кэли. Неоднородная модель Изинга на дереве Кэли задается гамильтонианом

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle} J_{\langle x, y \rangle} \sigma(x) \sigma(y),$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle$ и $J_{\langle x, y \rangle} \in \mathbb{R}$. Неоднородная модель Изинга изучена в работах [5], [6], [8], где дано полное описание периодических гиббсовских мер и изучены крайние точки множества предельных гиббсовских мер.

В этом пункте, используя результаты предыдущих пунктов, построим новые предельные гиббсовские меры неоднородной модели Изинга.

По построению лес Кэли является подграфом дерева Кэли.

Пусть лес Кэли Λ_k состоит из деревьев Кэли Γ_i^k , $i = 1, 2, \dots$, и $\Lambda_k^{(i)}$ – их множество вершин соответственно.

На $\Lambda_k^{(i)}$ рассмотрим гамильтониан

$$H_i(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle} J_i \sigma(x) \sigma(y),$$

где суммирование ведется по всем парам ближайших соседей $\langle x, y \rangle \in \Lambda_k^{(i)}$ и $J_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$. На Λ_k рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(\sigma). \quad (8)$$

Обозначим через ω число различных J_i в (8).

Заметим, что для однородной модели Изинга $\omega = 1$.

Пусть теперь для модели (8) $\omega > 1$. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что $J_1, J_2, \dots, J_\omega$ различны. Обозначим $\theta_i = \text{th}(J_i \beta)$, $i = 1, 2, \dots, \omega$.

ТЕОРЕМА 7. Если выполняются условия $\frac{1}{|I(G)|-1} \leq \theta_i < 1$ ($-1 < \theta_i \leq -\frac{1}{|I(G)|-1}$), $i = \overline{1, \omega}$, то для каждого $(t_1, t_2, \dots, t_\omega) \in D^\omega$ (где $D = \{(x, y) \in [0; 1]^2 : x \leq y\}$) существует единственная гиббсовская мера $\mu(t_1, t_2, \dots, t_\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии теоремы существует континуум мер Гиббса на Γ_i^k , а именно для каждого $(x, y) \in D$ существует мера Гиббса $\mu(x, y)$ [10]. С помощью мер $\mu(x, y)$ аналогично методам работ [6], [7], [10] можно построить $\mu(t_1, t_2, \dots, t_\omega)$. Теорема доказана.

Опишем теперь новые предельные гиббсовские меры неоднородной модели Изинга на дереве Кэли, а именно докажем, что можно выбрать $J_{x, y}$, $x, y \in V$, так, что множество предельных гиббсовских мер будет эквивалентно множеству D^ω , $\omega = 1, 2, 3, \dots$.

ТЕОРЕМА 8. *Для неоднородной модели Изинга на дереве Кэли при любом $\omega = 1, 2, \dots$ можно выбрать $J_{x,y}$, $x, y \in V$, так, что для любого $(t_1, t_2, \dots, t_\omega) \in D^\omega$ существует единственная предельная гиббсовская мера $\mu(t_1, t_2, \dots, t_\omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_k – групповое представление дерева Кэли и G ($|I(G)| > 2$) – некоторая подгруппа группы G_k такая, что $G \neq G(I)$. Заметим, что G представляет лес $\Lambda_{|I(G)|-1} = \{\Gamma_1^{|I(G)|-1}, \Gamma_2^{|I(G)|-1}, \dots\}$. Пусть

$$J_{xy} = \begin{cases} J_i, & \text{если } \langle x, y \rangle \in \Gamma_i^{|I(G)|-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{если } \langle x, y \rangle \in G_k/G. \end{cases} \quad (9)$$

В силу теоремы 7 для модели Изинга на дереве Кэли с параметрами (9) существуют меры $\mu(t_1, t_2, \dots, t_\omega)$, $(t_1, t_2, \dots, t_\omega) \in D^\omega$. Теорема доказана.

8. Случайные блуждания в случайной среде на F^k . Пусть F^k представляется подгруппой G ; тогда $|I(G)| = k + 1$. Зафиксируем i и j такие, что $a_i, a_j \in I(G)$. Рассмотрим отображения:

$$1) \pi_{ij}(a_m) = \begin{cases} a_m, & \text{если } m = i, j, \\ e, & \text{если } m \neq i, j, \end{cases}$$

где e – единичный элемент группы G ;

2) $f_{ij}(x) = f_{ij}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = \pi_{ij}(a_{i_1}) \pi_{ij}(a_{i_2}) \dots \pi_{ij}(a_{i_n})$, где $n = |x|$ называется длиной слова $x \in G$;

$$3) g_{ij}(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x = a_i a_j a_i a_j \dots, \\ -|x|, & \text{если } x = a_j a_i a_j a_i \dots, \\ 0, & \text{если } x = e; \end{cases}$$

$$4) \phi_{ij}(x) = g_{ij}(f_{ij}(x)).$$

Легко доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При произвольных i, j*

1) *если $x, y \in G$ – соседние вершины, то $\phi_{ij}(x)$ и $\phi_{ij}(y)$ либо являются соседними (т.е. $\phi_{ij}(x) = \phi_{ij}(y) \pm 1$), либо $\phi_{ij}(x) = \phi_{ij}(y)$;*

2) $|\phi_{ij}(x)| \leq |x|$ для любого $x \in G$.

Для любого $\varepsilon > 0$ будем рассматривать совокупность векторов $\{p(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_{k+1}(x)), x \in G\}$, удовлетворяющую условиям: $\sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) = 1$, $p_i(x) \geq \varepsilon$ для всех $x \in G$.

Эту совокупность будем называть *средой* и обозначать символом A .

Случайным блужданием в среде A называется однородная цепь Маркова $\{x(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ с матрицей переходных вероятностей $M = \{p(x, y); x, y \in G\}$, заданной следующим образом:

$$p(x, y) = \begin{cases} p_i(x), & \text{если } y = xa_i, \quad i = 1, \dots, k+1, \quad x \notin K(G), \\ 0.5p_i(x), & \text{если } y = xa_i \text{ или } y = a_i x, \quad x \in K(G), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Известно, что случайному блужданию в среде A соответствует вероятностная мера P_A на пространстве X траекторий блужданий с σ -алгеброй F , порожденной цилиндрическими подмножествами X .

Рассмотрим среду как реализацию некоторого случайного процесса. Тогда A зависит также от параметра ω , изменяющегося на вероятностном пространстве (Ω, B, μ) .

Среда $A(\omega) = \{p(x) = p_\omega(x), x \in G\}$ называется *случайной средой*.

УСЛОВИЕ П. Для любого $x \in G$ и $y \in H_{ij} = \{x \in G: f_{ij} = e\}$ среда A удовлетворяет равенству $p(x) = p(yx)$.

Заметим, что это условие есть условие периодичности среды относительно нормального делителя H_{ij} .

В силу предложения 3 и условия П функция ϕ_{ij} индуцирует случайное блуждание $\{x^*(t), t = 0, 1, \dots\}$ с пространством состояний Z , начальным состоянием 0 и матрицей переходных вероятностей $M^* = \{p^*(x, y); x, y \in Z\}$, заданной следующим образом:

$$p^*(x, y) = \begin{cases} p_i^*(x), & \text{если } y = x + 1, \\ p_j^*(x), & \text{если } y = x - 1, \\ q_{ij}^*(x), & \text{если } y = x, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $q_{ij}^*(x) = 1 - p_i^*(x) - p_j^*(x)$ и $p_m^*(x) = \sum_{l: \phi_{ij}(xa_l) = \phi_{ij}(xa_m)} p_l(x)$, $m = i, j$.

Обозначим $D_{ij} = E_\mu \ln \frac{p_i^*(x)}{p_j^*(x)}$, где E_μ – математическое ожидание по мере μ .

ТЕОРЕМА 9. Если существуют такие i, j , для которых выполняется условие П, то

1) при $D_{ij} \neq 0$

$$P_A \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)| = +\infty \right\} = 1 \quad (\mu\text{-н.в.});$$

2) при $D_{ij} = 0$

$$P_A \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} |x(n)| = +\infty \right\} = 1 \quad (\mu\text{-н.в.}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения ϕ_{ij} в силу предложения 3 ясно, что для любого $n = 0, 1, \dots$

$$|x^*(n)| \leq |x(n)|. \quad (10)$$

Но для $x^*(n)$ теорема верна (см. [12], [13]), следовательно, в силу (10) получаем утверждения 1) и 2). Теорема доказана.

Список литературы

1. Ганиходжаев Н. Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // ДАН РУз. 1994. №4. С. 3–5.
2. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. I // ТМФ. 1975. Т. 25. №3. С. 369–378.
3. Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли // ТМФ. 1997. Т. 111. №1. С. 109–117.
4. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. II // ТМФ. 1976. Т. 26. №1. С. 61–76.
5. Розиков У. А. Структура разбиений группового представления дерева Кэли и их применения для описания периодических распределений Гиббса // ТМФ. 1997. Т. 112. №1. С. 170–176.
6. Розиков У. А. Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // ТМФ. 1999. Т. 118. №1. С. 95–104.
7. Розиков У. А. Описание предельных гиббсовских мер λ -моделей на решетке Бете // СМЖ. 1998. Т. 39. №2. С. 427–435.
8. Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. О неупорядоченных фазах некоторых моделей на дереве Кэли // Матем. сб. 1999. Т. 190. №2. С. 31–42.
9. Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A. On disordered phase of ferromagnetic Potts model on the Bethe lattice // Osaka J. of Math. 2000. V. 37. № 2. P. 373–383.
10. Блехер П. М., Ганиходжаев Н. Н. О чистых фазах модели Изинга на дереве Кэли // ТВП. 1990. Т. 35. №2. С. 920–930.
11. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
12. Летчиков А. В. Критерий применимости центральной предельной теоремы к однородным случайным блужданиям в случайных средах // ТВП. 1992. Т. 32. №3. С. 576–580.
13. Solomon F. Random walks in random environment // Ann. Prob. 1975. V. 3. № 1. P. 1–31.

E-mail: root@im.tashkent.su

Поступило в редакцию
27.VI.2001