Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы,
Изв. РАН. Сер. матем., 2003, том 67, выпуск 1, 33–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:03:48

УДК 517.5

Б. И. Голубов

Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы

Доказан двоичный аналог тауберовой теоремы Н. Винера о свертках двух функций. Установлены критерии замкнутости в пространствах $L(\mathbb{R}_+)$ или $L^2(\mathbb{R}_+)$ линейной оболочки множества двоичных сдвигов $\{f(\circ \oplus y) : y \geq 0\}$ заданной функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ или $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. В качестве следствия из этих критериев вытекает, что для заданной функции $f \in L([0, 1])$ (соответственно, $f \in L^2([0, 1])$) линейная оболочка множества двоичных сдвигов $\{f(\circ \oplus y) : 0 \leq y \leq 1\}$ плотна в пространстве $L([0, 1])$ (соответственно, в $L^2([0, 1])$) тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной на $[0, 1]$ системе Уолша отличны от нуля.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Известна следующая теорема Н. Винера о свертках (см. [1] или [2, с. 99]).

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $K_1 \in L(\mathbb{R})$ такова, что ее преобразование Фурье

$$\widehat{K}_1(x) = \int_{\mathbb{R}} K_1(y) \exp(-ixy) dy$$

не обращается в нуль на вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_1(x-y)f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}} K_1(y) dy, \quad (0.1)$$

где f – измеримая по Лебегу ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, а $C(f)$ – постоянная, то для любой функции $K_2 \in L(\mathbb{R})$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_2(x-y)f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}} K_2(y) dy. \quad (0.2)$$

В работе [2] показано, что если $\widehat{K}_1$ имеет нуль на $\mathbb{R}$, то из (0.1) условие (0.2) не следует.

Н. Винер доказал также следующую теорему (см. [2, с. 128]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00428).

ТЕОРЕМА В. *Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество всех сдвигов $\{f(\cdot + y) : y \in \mathbb{R}\}$ функции $f \in L(\mathbb{R})$, была плотна в пространстве $L(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ функции f не обращалось в нуль на $\mathbb{R}$.*

Справедлив и аналог теоремы В для пространства $L^2(\mathbb{R})$ (см. [2, с. 131]).

ТЕОРЕМА С. *Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество всех сдвигов функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, была плотна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ функции f не обращалось в нуль почти всюду на $\mathbb{R}$.*

Теоремы А–С относятся к классическому гармоническому анализу, основными объектами которого являются ряд Фурье и преобразование Фурье. В настоящее время уже фактически сформировался так называемый двоичный гармонический анализ, основными объектами которого являются ряд Фурье–Уолша и преобразование Фурье–Уолша (см. [3], [4]). В двоичном гармоническом анализе установлены естественные аналоги многих важных теорем классического гармонического анализа. В настоящей статье приводятся “двоичные” аналоги теорем А–С и некоторые следствия из них.

На положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ определена операция $\oplus$ поразрядного сложения по mod 2 чисел, заданных в двоичной системе счисления (двоично-рациональные числа задаются конечными двоичными разложениями). С помощью этой операции определяется так называемый двоичный сдвиг $f(\cdot \oplus y)$ функции $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, где $y \in \mathbb{R}_+$. Для функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq 2$, через $\tilde{f}$ обозначим ее преобразование Фурье–Уолша (см. [3, гл. 6] или [4, гл. 9]). Двоичными аналогами теорем А и В являются следующие теоремы 0.1 и 0.2.

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть функция $K_1 \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что ее преобразование Фурье–Уолша $\tilde{K}_1(x)$ при любом $0 < a < +\infty$ удовлетворяет условию $\inf_{x \in [0, a]} |\tilde{K}_1(x)| > 0$. Если существует конечный предел*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K_1(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K_1(y) dy,$$

где f – измеримая по Лебегу ограниченная на $\mathbb{R}_+$ функция, а $C(f)$ – постоянная, то для любой функции $K_2 \in L(\mathbb{R}_+)$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K_2(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K_2(y) dy.$$

ТЕОРЕМА 0.2. *Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество $\{f(\cdot \oplus y) : y \in \mathbb{R}_+\}$ всех двоичных сдвигов функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$, была плотна в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ функции f при любом конечном $a > 0$ удовлетворяло условию $\inf_{x \in [0, a]} |\tilde{f}(x)| > 0$.*

Очевидно, из $x, y \in [0, 1)$ следует, что $x \oplus y \in [0, 1)$. Пусть $\{w_n\}_0^\infty$ – ортонормированная на $[0, 1)$ система Уолша–Пэли (см. [3] или [4, гл. 1]). В качестве следствия из теоремы 0.2 вытекает

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть задана функция $f \in L[0, 1)$. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество $\{f(\cdot \oplus y) : y \in [0, 1)\}$, была плотна в пространстве $L[0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша–Пэли $\{w_n\}_0^\infty$ были отличны от нуля.

Справедливы также следующие аналоги теорем 0.2 и 0.3 для пространств $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $L^2[0, 1)$.

ТЕОРЕМА 0.4. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество всех двоичных сдвигов функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, была плотна в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}(x)$ не обращалось в нуль почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ТЕОРЕМА 0.5. Пусть задана функция $f \in L^2[0, 1)$. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество $\{f(\cdot \oplus y) : y \in [0, 1)\}$, была плотна в пространстве $L^2[0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша–Пэли $\{w_n\}_0^\infty$ были отличны от нуля.

§1. Определения и известные результаты

На положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ определим операцию сложения $\oplus$. С этой целью для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (1.1)$$

где $[a]$ – целая часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Легко видеть, что справедливо равенство

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} x_{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} x_n. \quad (1.2)$$

Это равенство можно рассматривать как представление числа x в двоичной системе счисления. При этом число x_n для натурального n является n -м двоичным разрядом дробной части числа x , а x_{-n} – n -м двоичным разрядом целой части этого числа. Отметим, что $x_{-n} = 0$ для $n \geq n_1(x)$. Если же $x \in \mathbb{R}_+$ двоично-рационально, то и $x_n = 0$ для $n \geq n_2(x)$, т.е. двоично-рациональные числа представляются конечной двоичной дробью.

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ введем операцию сложения $\oplus$, положив $x \oplus y = z$, где число $z \in \mathbb{R}_+$ имеет двоичные разряды

$$z_n = x_n + y_n \pmod{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (1.3)$$

а x_n и x_{-n} вычисляются по правилу (1.1). Операция $\oplus$ коммутативна и ассоциативна.

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$t(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} x_n y_{-n}.$$

Ряд, стоящий справа в этом равенстве, на самом деле является конечной суммой, которая представляет целое неотрицательное число. Легко видеть, что $t(x, y) = t(y, x)$.

Обобщенная функция Уолша $\psi(x, y)$ определяется на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi(x, y) = (-1)^{t(x, y)}, \quad (1.4)$$

а преобразование Фурье–Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ – равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.5)$$

Это преобразование было введено Н. Файном [5] (см. также [4, гл. 9] или [3, гл. 6], где определены и более общие так называемые *мультипликативные преобразования*).

Для функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ преобразование Фурье–Уолша определяется как предел по норме пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ последовательности функций

$$\int_0^{2^n} \psi(x, y) f(y) dy, \quad n = 0, 1, \dots$$

Преобразование Фурье–Уолша имеет свойства, аналогичные свойствам обычного преобразования Фурье (см. [3] или [4]). Например, для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Фурье–Уолша ограничено и $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$. Поэтому из сходимости последовательности f_n к f в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ вытекает, что $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ равномерно на $\mathbb{R}_+$. Справедлив также аналог теоремы Планшереля.

ТЕОРЕМА D. Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, причем $\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$, $F(\tilde{f}) = f$.

Теорема об обращении преобразования Фурье–Уолша справедлива не только для пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$. Чтобы сформулировать ее для пространства $L(\mathbb{R}_+)$, напомним определение W -непрерывности функции. Функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x \oplus y) - f(x)| < \varepsilon$ для $0 < y < \delta$. Отметим, что обобщенная функция Уолша $\psi(x, y)$ является W -непрерывной на $\mathbb{R}_+$ по каждой переменной при фиксированной другой переменной.

ТЕОРЕМА E. Если функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ является W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$ и $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy.$$

Справедлива следующая теорема умножения.

ТЕОРЕМА F. Если $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ или $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\tilde{g}(x) dx$.

Положим

$$S_{2^n}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \oplus y) D_{2^n}(y) dy, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.6)$$

где

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq 2^{-n}, \\ 2^n & \text{при } 0 \leq x < 2^{-n}. \end{cases} \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА G. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_{2^n}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$.

Доказательства теорем D–G приведены, например, в книге [4, гл. 9] или [3, гл. 6]. Отметим, что обобщенная функция Уолша удовлетворяет равенствам

$$\psi(x, n) = w_n(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.8)$$

где $\{w_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – система функций Уолша в нумерации Пэли, или просто система Уолша (см. [4, гл. 9]). Эта система функций определяется следующим образом.

Пусть функция $r_0(x)$ равна +1 на $[0, 1/2)$ и равна –1 на $[1/2, 1)$. Продолжим эту функцию на $\mathbb{R}_+$ периодически с периодом 1 и положим

$$r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Функции $r_k(x)$ называются *функциями Радемахера*. С их помощью определяются функции Уолша $w_n(x)$. Положим $w_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$. Если же n натуральное, то представим его в двоичной системе счисления:

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} n_i 2^i, \quad (1.9)$$

где $n_k = 1$, а остальные n_i равны 0 или 1. После этого положим

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^k (r_i(x))^{n_i}. \quad (1.9a)$$

Система $\{w_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ортонормирована на $\Delta_0 = [0, 1)$, ее функции принимают лишь значения +1 или –1 и продолжены с периодом 1 на $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что равенство (1.9) фактически является представлением натурального числа n в виде (1.1) только в других обозначениях. Равенство (1.9) иногда будем записывать в виде $n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i 2^i$, где $n_i = 0$ при $i \geq i(n)$.

На множестве $\mathbb{Z}_+$ определена введенная выше операция $\oplus$, которая паре чисел $m, n \in \mathbb{Z}_+$ сопоставляет такое число $m \oplus n = p \in \mathbb{Z}_+$, что $p_i = m_i + n_i \pmod{2}$ для $i \in \mathbb{Z}_+$.

Известно, что функции Уолша удовлетворяют равенству

$$w_m(x)w_n(x) = w_{m \oplus n}(x), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.10)$$

Отметим также равенство

$$w_n(x)w_n(y) = w_n(x \oplus y), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.11)$$

где $x, y \in \mathbb{R}_+$, а $x \oplus y$ двоично-иррационально. Таким образом, при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ равенство (1.11) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}_+$, кроме счетного множества. Если же y двоично-рационально, то равенство (1.11) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}_+$ (доказательства равенств (1.10) и (1.11) см. в [3, гл. 1]).

Определим *двоичную свертку* функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ или $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ равенством

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \oplus y)g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.12)$$

Двоичная свертка обладает всеми свойствами обычной свертки. Например, если $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\widetilde{(f * g)} = \tilde{f}\tilde{g}, \quad \|f * g\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}\|g\|_{L(\mathbb{R}_+)}. \quad (1.13)$$

Если же $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$, а если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $g \in L(\mathbb{R}_+)$, то $f * g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, причем $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\|g\|_{L(\mathbb{R}_+)}$.

§ 2. Свойства функций из кольца W_n

Пусть фиксировано $n \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим систему функций

$$\{a_m^{(n)}\}_{m=0}^{+\infty}, \quad a_m^{(n)}(x) = 2^{-n/2}\psi(x, 2^{-n}m), \quad x \in \Delta_n \equiv [0, 2^n]. \quad (2.1)$$

Известно, что эта система ортонормирована на Δ_n (см. [3, гл. 1, теорема 1.5.6]). Из результатов работы [6] следует, что система функций (2.1) полна в пространстве $L(\Delta_n)$. Ниже будет доказано, что эта система полна в пространстве $L^p(\Delta_n)$ при любом $1 \leq p \leq \infty$ (см. ниже лемму 5.1). Кольцо функций W_n строится далее на основе системы (2.1). Поэтому начнем с изучения свойств функций этой системы.

Иногда вместо системы (2.1) будем рассматривать систему

$$\{\bar{a}_m^{(n)}\}_{m=0}^{+\infty}, \quad \bar{a}_m^{(n)}(x) = 2^{-n/2}\psi(x, 2^{-n}m)X_{\Delta_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (2.2)$$

где $X_E(x)$ – характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}_+$. В работе [6] доказаны следующие две леммы.

ЛЕММА 2.1. *Для функций системы (2.2) справедливы равенства $\tilde{\bar{a}}_m^{(n)} = 2^{n/2}X_{I(m,n)}$, где*

$$I(m, n) = [2^{-n}m, 2^{-n}(m+1)). \quad (2.3)$$

ЛЕММА 2.2. *Если $n, i \in \mathbb{Z}_+$ и $m = 2^ni + j$, где $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, то*

$$\psi(x, 2^{-n}m) = w_i(x)w_j(2^{-n}x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Пользуясь леммой 2.2, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.3. Если $n, m', m'' \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\psi(x, 2^{-n}m')\psi(x, 2^{-n}m'') = \psi(x, 2^{-n}(m' \oplus m'')), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n, i', i'' \in \mathbb{Z}_+$ и $m' = 2^n i' + j'$, $m'' = 2^n i'' + j''$, где $j', j'' = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Тогда согласно (1.10) и лемме 2.2 имеем

$$\begin{aligned} \psi(x, 2^{-n}m')\psi(x, 2^{-n}m'') &= w_{i'}(x)w_{i''}(x)w_{j'}(2^{-n}x)w_{j''}(2^{-n}x) \\ &= w_{i' \oplus i''}(x)w_{j' \oplus j''}(2^{-n}x) = \psi(x, 2^{-n}m), \quad x \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

где $m = 2^n(i' \oplus i'') + (j' \oplus j'') = m' \oplus m''$. Лемма доказана.

Из (1.11) и леммы 2.2 легко следует равенство

$$\psi(x, 2^{-n}m)\psi(y, 2^{-n}m) = \psi(x \oplus y, 2^{-n}m), \quad (2.5)$$

где $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ двоично-иррационально. Если же y двоично-рационально, то равенство (2.5) справедливо при всех $x \in \mathbb{Z}_+$. На самом деле справедливо и следующее обобщение равенства (2.5):

$$\psi(x, z)\psi(y, z) = \psi(x \oplus y, z), \quad (2.5a)$$

где $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ двоично-иррационально (см. [4, гл. 9]).

Коэффициенты Фурье $\widehat{\varphi}(m)$ функции $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$ по ортонормированной на $\mathbb{R}_+$ системе функций (2.2) определяются равенством

$$\widehat{\varphi}(m) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) \bar{a}_m^{(n)}(x) dx, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть заданы числа $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то функция $\varphi = \tilde{f}X_{I(k,n)}$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье по системе (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\bar{a}_m^{(n)}(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+ \setminus \Delta_n$, то утверждение леммы очевидно, если $I(k,n) \cap \Delta_n = \emptyset$. Однако в доказательстве леммы случаи $I(k,n) \cap \Delta_n = \emptyset$ и $I(k,n) \cap \Delta_n \neq \emptyset$ не разделяются.

Подставляя функцию $\varphi = \tilde{f}X_{I(k,n)}$ в правую часть равенства (2.6) и пользуясь леммой 2.1, равенством из (1.13) и теоремой F, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(m) &= \int_{\mathbb{R}_+} \bar{a}_m^{(n)}(x) \tilde{f}(x) X_{I(k,n)}(x) dx = 2^{-n/2} \int_{\mathbb{R}_+} \bar{a}_m^{(n)}(x) \tilde{f}(x) \bar{a}_k^{(n)}(x) dx \\ &= 2^{-n/2} \int_{\mathbb{R}_+} \bar{a}_m^{(n)}(x) \widetilde{(f * \bar{a}_k^{(n)})}(x) dx = 2^{-n/2} \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\bar{a}}_m^{(n)}(f * \bar{a}_k^{(n)})(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} X_{I(m,n)}(x) (f * \bar{a}_k^{(n)})(x) dx = \int_{I(m,n)} (f * \bar{a}_k^{(n)})(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (2.3), имеем

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(m)| \leq \int_{\mathbb{R}_+} |(f * \bar{a}_k^{(n)})(x)| dx.$$

Поскольку $f, \bar{a}_k^{(n)} \in L(\mathbb{R}_+)$, то $f * \bar{a}_k^{(n)} \in L(\mathbb{R}_+)$ (см. неравенство из (1.13)). Лемма доказана.

Так как $\bigcup_{k=0}^{2^{2n}-1} I(k,n) = \Delta_n$ и слагаемые в левой части этого равенства не пересекаются, то из леммы 2.4 вытекает

ЛЕММА 2.5. Если $n \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то функция $\varphi = \tilde{f}X_{\Delta_n}$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье по системе (2.2).

Обозначим через W_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, множество всех функций $f: \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}_+$, представимых в виде

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \psi(x, 2^{-n}m), \quad x \in \Delta_n, \quad (2.7)$$

где $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| < +\infty$. Легко видеть, что это множество линейно. Введем в нем норму равенством

$$\|f\| = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|. \quad (2.8)$$

Тогда W_n будет полным нормированным пространством. Легко проверить, что произведение fg двух функций $f, g \in W_n$ также принадлежит W_n . Действительно, пусть для функции f имеет место представление (2.7), а

$$g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m \psi(x, 2^{-n}m), \quad x \in \Delta_n, \quad (2.9)$$

где $\sum_{m=0}^{+\infty} |b_m| < +\infty$. Тогда из представлений (2.7) и (2.9), пользуясь равенством (2.4), получим

$$f(x)g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_m b_k \psi(x, 2^{-n}(m \oplus k)) = \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\sum_{m \oplus k=s} a_m b_k \right) \psi(x, 2^{-n}s). \quad (2.10)$$

Известно, что при любом фиксированном $m \in \mathbb{Z}_+$ операция двоичного сдвига $\cdot \oplus m$ переводит множество $\mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{Z}_+$ взаимно однозначно, причем из $k \oplus m = s$ следует $k = s \oplus m$ (см. [4, гл. 1]). Поэтому из (2.10) и определения (2.8) нормы в кольце W_n имеем

$$\begin{aligned} \|fg\| &= \sum_{s=0}^{+\infty} \left| \sum_{k \oplus m=s} a_m b_k \right| = \sum_{s=0}^{+\infty} \left| \sum_{m=0}^{+\infty} a_m b_{m \oplus s} \right| \leq \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m b_{m \oplus s}| \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \sum_{s=0}^{+\infty} |b_{m \oplus s}| = \|f\| \|g\|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тем самым доказано, что произведение двух функций $f, g \in W_n$ также принадлежит W_n . Более того, неравенство (2.11) означает, что W_n является *нормированным кольцом* (см. [7, гл. 1]). Это кольцо, очевидно, коммутативно, а его единицей является функция $\psi(x, 0) \equiv 1$, $x \in \Delta_n$. *Образующими кольца W_n* являются функции $\psi(x, 2^{k-n})$, $x \in \Delta_n$, $k = 0, 1, \dots$.

Действительно, если натуральное число m представлено в виде $m = \sum_{i=0}^k m_i 2^i$, где $m_k = 1$, а остальные m_i равны 0 или 1, то на основании леммы 2.3 легко проверить, что

$$\psi(x, 2^{-n}m) = \prod_{i=0}^k (\psi(x, 2^{i-n}))^{m_i}, \quad x \in \Delta_n. \quad (2.12)$$

Это представление аналогично представлению (1.9а) функций Уолша через функции Радемахера и переходит в последнее при $n = 0$.

Отметим, что функции Уолша непрерывны в двоично-иррациональных точках, непрерывны справа в двоично-рациональных точках и могут иметь в них разрывы первого рода. Это же справедливо и для функций $f \in W_n$, что легко следует из леммы 2.2 и определения кольца W_n .

Построим теперь кольцо W_n^* , состоящее из функций, определенных на множестве Δ_n^* , которое получается из Δ_n раздвоением каждой двоично-рациональной точки $0 < x < 2^n$ и добавлением точки $2^n - 0$. С этой целью каждую двоично-рациональную точку $0 < x < 2^n$ заменим парой точек $x - 0$, $x + 0$. Будем считать, что точке $x - 0$ соответствует разложение числа x в *бесконечную двоичную дробь* (т.е. в разложении (1.2) $x_n = 1$ при $n \geq n(x)$), а точке $x + 0$ — ее разложение в *конечную двоичную дробь* (т.е. в разложении (1.2) $x_n = 0$ при $n \geq n(x)$). Кроме того, к множеству Δ_n^* отнесем точку $2^n - 0$, которой соответствует бесконечное разложение в двоичную дробь. Точку $x = 0$, для которой возможно лишь конечное разложение в двоичную дробь, отождествим с точкой $+0$. Наконец, элементами множества Δ_n^* являются по определению и все двоично-иррациональные точки $0 < x < 2^n$.

Элементы множества Δ_n^* упорядочим следующим образом. Будем считать, что $x - 0 < x + 0$, если $0 < x < 2^n$, а число x двоично-рационально. Далее, будем считать, что $x + 0 < y$, если $x \in \Delta_n$ двоично-рационально, а $y \in \Delta_n$ двоично-иррационально и $x < y$. Кроме того, будем считать, что $y < x - 0$, если $y \in \Delta_n$ двоично-иррационально, а $x \in \Delta_n$ двоично-рационально и $y < x$. Элементы множества Δ_n^* будем обозначать также символами $x^*, y^*, \dots$. При этом считаем, что $+0 < x^*$, если $x^* \in \Delta_n^*$ и $x^* \neq +0$, а также $x^* < 2^n - 0$, если $x^* \in \Delta_n^*$ и $x^* \neq 2^n - 0$.

После указанного упорядочения можно говорить об отрезках $[x^*, y^*] = \{z^* : x^* \leq z^* \leq y^*\}$.

Согласно сказанному выше каждому элементу $x^* \in \Delta_n^*$ сопоставлено взаимно однозначно некоторое разложение числа $0 \leq x \leq 2^n$ в двоичную дробь (конечную или бесконечную). Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством Δ_n^* и множеством всех рядов вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} x_{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} x_k, \quad (2.13)$$

где $x_{-k} = 0$ при $k > n$, а x_{-k} при $k \leq n$ и x_k при $k \geq 1$ принимают значения 0 или 1. Мы будем отождествлять элемент $x^* \in \Delta_n^*$ с последовательностью из 0 и 1 вида

$$(\dots, x_{-k}, \dots, x_{-2}, x_{-1}; x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), \quad (2.14)$$

где $x_{-k} = 0$ при $k > n$.

Каждой функции $f \in W_n$ сопоставим функцию $f^* \in W_n^*$, заданную на Δ_n^* следующим образом. Если $x \in \Delta_n$ двоично-иррационально, то положим $f^*(x^*) = f(x)$, x^* — последовательность (2.14), соответствующая двоичному разложению (2.13) числа x . Далее, если $0 \leq x < 2^n$ двоично-рационально, то для элемента

$x + 0 \in \Delta_n^*$ положим $f^*(x + 0) = f(x)$. Если же $0 < x \leq 2^n$ двоично-рационально, то для элемента $x - 0 \in \Delta_n^*$ положим $f^*(x - 0) = \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y)$. Последний предел существует и конечен, так как в двоично-рациональной точке $0 < x \leq 2^n$ существует предел $\lim_{y \rightarrow x, y < x} \psi(y, 2^{-n}m) = \pm 1$ при $m \in \mathbb{Z}_+$, а ряд в правой части равенства (2.7) для функций $f \in W_n$ сходится равномерно на Δ_n .

Таким образом, определен класс W_n^* функций, заданных на Δ_n^* . Легко видеть, что каждая функция $f^* \in W_n^*$ представима в виде

$$f^*(x^*) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \psi^*(x^*, 2^{-n}m), \quad x^* \in \Delta_n^*,$$

где $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| < +\infty$. Класс W_n^* , очевидно, линейен. Если в нем ввести норму равенством

$$\|f^*\| = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|,$$

то он, как и W_n , превращается в коммутативное нормированное кольцо. Единицей кольца W_n^* является функция $\psi^*(x^*, 0) \equiv 1$, $x^* \in \Delta_n^*$, а образующими – функции $\psi^*(x^*, 2^{k-n})$, $x^* \in \Delta_n^*$, $k = 0, 1, \dots$.

Известно, что функции $\psi^*(x^*, 2^{-n}m)$ непрерывны на Δ_n^* , если топология в Δ_n^* задается системой окрестностей вида $[a + 0, b - 0]$, где $0 \leq a < b \leq 2^n$, а a и b двоично-рациональны (см. [4, гл. 9] или [3, гл. 1], где этот факт обосновывается лишь для $n = 0$, т.е. для функций Уолша $w_m^*(x^*)$, $x^* \in \Delta_0^*$). Отсюда следует, что каждая функция $f^* \in W_n^*$ непрерывна на Δ_n^* , если в Δ_n^* введена указанная топология.

Отметим, что Δ_n^* с указанной топологией является компактным топологическим пространством. Найдем общий вид нетривиального линейного непрерывного мультипликативного функционала на кольце W_n^* , т.е. функционала $F: W_n^* \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} F(c_1 f_1^* + c_2 f_2^*) &= c_1 F(f_1^*) + c_2 F(f_2^*), & F(f_1^* f_2^*) &= F(f_1^*) F(f_2^*), \\ |F(f^*)| &\leq \|f^*\|, & F(e) &= 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $e = \psi^*(x^*, 0)$ – единица кольца W_n^* . Для этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ – произвольная последовательность, члены которой принимают лишь значения $+1$ или -1 . Тогда существует единственная точка $\xi^* \in \Delta_n^*$ такая, что справедливы равенства $f_k^*(\xi^*) = \varepsilon_k$, где $f_k^*(x^*) = \psi^*(x^*, 2^{k-n})$, $k = 0, 1, \dots$, – система образующих кольца W_n^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.2 для $k = 0, 1, \dots, n-1$ справедливы равенства

$$\psi(x, 2^{k-n}) = w_{2^k}(2^n x) = r_k(2^{-n}x), \quad x \in \Delta_n.$$

Следовательно, $f_k^*(x^*) = r_k^*((2^{-n}x)^*)$. Пусть δ_0^* – тот из отрезков $[+0, 2^{n-1} - 0]$ и $[2^{n-1} + 0, 2^n - 0]$, принадлежащих Δ_n^* , на котором $f_0^*(x^*) = r_0^*((2^{-n}x)^*) = \varepsilon_0$.

Далее, обозначим через δ_1^* ту из двух половинок отрезка δ_0^* , на которой $f_1^*(x^*) = r_1^*((2^{-n}x)^*) = \varepsilon_1$. Продолжая таким же образом, найдем отрезок δ_{n-1}^* , на котором $f_{n-1}^*(x^*) = r_{n-1}^*((2^{-n}x)^*) = \varepsilon_{n-1}$. Заметим, что отрезок δ_{n-1}^* имеет вид $[m + 0, (m + 1) - 0]$, где $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Согласно лемме 2.2 для $k \geq n$ справедливы равенства

$$\psi(x, 2^{k-n}) = w_{2^{k-n}}(x) = r_{k-n}(x), \quad x \in \Delta_n.$$

Следовательно, $f_k^*(x^*) = r_{k-n}^*(x^*)$, $x^* \in \Delta_n^*$. Функция $f_n^*(x^*) = r_0^*(x^*)$ принимает значение ε_n на одной из половинок отрезка $\delta_{n-1}^* = [m + 0, (m + 1) - 0]$. Обозначим ее через δ_n^* . Продолжая этот процесс, построим последовательность вложенных отрезков δ_k^* , $k = 0, 1, \dots$, содержащихся в Δ_n^* , причем $\text{mes } \delta_k^* \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, где символом mes обозначена мера Хаара на подгруппе Δ_n^* двоичной группы F , элементами которой являются последовательности из нулей и единиц (см. ниже § 6 или [4, гл. 1]). В силу компактности пространства Δ_n^* существует единственная точка $\xi^* \in \Delta_n^*$, принадлежащая всем отрезкам δ_k^* , $k = 0, 1, \dots$. В этой точке справедливы равенства $f_k^*(\xi^*) = \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \dots$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. *Для любого нетривиального линейного мультипликативного функционала $F: W_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ существует такая точка $\xi^* \in \Delta_n^*$, что для любой функции $f^* \in W_n^*$ имеем*

$$F(f^*) = f(\xi^*). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как образующими кольца W_n^* являются функции

$$f_k^*(x^*) = \psi^*(x^*, 2^{k-n}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.17)$$

достаточно доказать равенство (2.16) для случая, когда в качестве функции $f^* \in W_n^*$ берется произвольная образующая из (2.17).

Поскольку $\|f_k^*\| = 1$, то $|F(f_k^*)| \leq \|f_k^*\| = 1$. А так как $[f_k^*(x^*)]^2 \equiv 1$ на Δ_n^* , то $[F(f_k^*)]^2 = 1$. Следовательно, $F(f_k^*) = \varepsilon_k$, где ε_k равно либо $+1$, либо -1 . Но для последовательности $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ согласно лемме 2.6 существует единственная точка $\xi^* \in \Delta_n^*$ такая, что $f_k^*(\xi^*) = \varepsilon_k$, $k = 0, 1, \dots$. Поэтому $F(f_k^*) = f_k^*(\xi^*)$, $k = 0, 1, \dots$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. *Пусть задано $n \in \mathbb{Z}_+$ и функция $f_0^* \in W_n^*$ такова, что $f_0^*(\xi^*)$ не равно нулю для любой точки $\xi^* \in \Delta_n^*$. Тогда $\frac{1}{f_0^*} \in W_n^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F: W_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольный нетривиальный линейный мультипликативный функционал, т.е. удовлетворяющий условиям (2.15). Согласно лемме 2.7 существует такая точка $\xi^* \in \Delta_n^*$, что для любой функции $f^* \in W_n^*$ справедливо равенство (2.16). Применяя это равенство для функции $f^* = f_0^*$ и учитывая предположение леммы, получим $F(f_0^*) \neq 0$. Поскольку функционал F , удовлетворяющий условиям (2.15), произволен, то из полученного неравенства следует, что элемент f_0^* кольца W_n^* регулярен, т.е. $\frac{1}{f_0^*} \in W_n^*$ (см. [7, с. 31]). Лемма доказана.

Отметим, что для $n = 0$ леммы 2.6–2.8 доказаны в работе [8].

Из леммы 2.8 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2.9. Пусть задано $n \in \mathbb{Z}_+$ и функция $f_0 \in W_n$ такова, что $\inf_{x \in \Delta_n} |f_0(x)| > 0$. Тогда $\frac{1}{f_0} \in W_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть некоторая функция $f_0 \in W_n$ удовлетворяет условию $\inf_{x \in \Delta_n} |f_0(x)| > 0$. Тогда соответствующая ей функция $f_0^* \in W_n^*$ удовлетворяет условию: $f_0^*(x^*) \neq 0$ для любой точки $x^* \in \Delta_n^*$. Поэтому согласно лемме 2.8 $\frac{1}{f_0^*} \in W_n^*$, т.е. справедливо представление

$$\frac{1}{f_0(x^*)} = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m a_m^{(n)}(x^*),$$

где $x^* \in \Delta_n^*$, причем $\sum_{m=0}^{+\infty} |b_m| < \infty$. Но тогда $\frac{1}{f_0(x)} = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m a_m^{(n)}(x)$, где $x \in \Delta_n$. Следовательно, $1/f_0 \in W_n$. Лемма доказана.

§ 3. Леммы для доказательства теорем 0.1–0.3

Доказательство теоремы 0.1 опирается на лемму 2.9, а также на доказываемые ниже леммы 3.5 и 3.7. Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть Σ – некоторый класс функций $K_1 \in L(\mathbb{R}_+)$. Назовем L -расширением класса Σ класс $\varepsilon(\Sigma)$ всех таких функций $K_2 \in L(\mathbb{R}_+)$, что если условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K_1(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K_1(y) dy \quad (3.1)$$

выполняется для некоторой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ и всех функций $K_1 \in \Sigma$, то выполняется и условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K_2(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K_2(y) dy. \quad (3.2)$$

Следующие две леммы очевидны.

ЛЕММА 3.1. Справедливо равенство $\varepsilon(\varepsilon(\Sigma)) = \varepsilon(\Sigma)$.

ЛЕММА 3.2. Если $K', K'' \in \Sigma$, то $c'K' + c''K'' \in \varepsilon(\Sigma)$ для любых постоянных $c', c'' \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 3.3. Если $a \in \mathbb{R}_+$ и $K \in \Sigma$, то $K(\cdot \oplus a) \in \varepsilon(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K^a(x) = K(x \oplus a)$. Тогда, пользуясь ассоциативностью операции $\oplus$, имеем

$$(K^a * f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} K((y \oplus a) \oplus x) f(y) dy = (K * f)(x \oplus a).$$

Из этого равенства на основании определения 3.1 вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 3.4. Если $K \in \Sigma$ и $Q \in L(\mathbb{R}_+)$, то $K * Q \in \varepsilon(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы на основании (1.12) имеем $K * Q \in L(\mathbb{R}_+)$. Пусть для функции $K \in \Sigma$ и некоторой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ выполнено условие (3.1). Тогда в силу леммы 3.3 имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} Q(t) \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K((x \oplus t) \oplus y) f(y) dy \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} Q(t) \left[C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K(t \oplus y) dy \right] dt = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} (K * Q)(y) dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

причем последний интеграл сходится. Так как $K \in L(\mathbb{R}_+)$ и $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\sup_{x, t \in \mathbb{R}_+} \left| \int_{\mathbb{R}_+} K((x \oplus t) \oplus y) f(y) dy \right| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \|K\|_{L(\mathbb{R}_+)}. \quad (3.4)$$

Поэтому по теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла из (3.3) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} Q(t) \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K((x \oplus t) \oplus y) f(y) dy \right] dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} Q(t) \left[\int_{\mathbb{R}_+} K((x \oplus t) \oplus y) f(y) dy \right] dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (K * Q)(x \oplus y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как левые части равенств (3.3) и (3.5) совпадают, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} (K * Q)(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} (K * Q)(y) dy.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3.5. Если $K_n \in \Sigma$ для $n \in \mathbb{Z}_+$ и последовательность K_n при $n \rightarrow +\infty$ сходится к функции K , то $K \in \varepsilon(\Sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|K - K_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0$, то для любой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ последовательность функций

$$\int_{\mathbb{R}_+} [K(x \oplus y) - K_n(x \oplus y)] f(y) dy$$

при $n \rightarrow +\infty$ равномерно сходится к функции, тождественно равной нулю на $\mathbb{R}_+$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K(x \oplus y) f(y) dy &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K_n(x \oplus y) f(y) dy \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K_n(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K(y) dy. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогично получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K(y) dy. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K(y) dy.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. *Для того чтобы функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ принадлежала классу $\varepsilon(\Sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы включение $S_{2^n}(f) \in \varepsilon(\Sigma)$ выполнялось для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $S_{2^n}(f) \in \varepsilon(\Sigma)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда на основании теоремы G и лемм 3.6 и 3.1 имеем $f \in \varepsilon(\varepsilon(\Sigma)) = \varepsilon(\Sigma)$.

Необходимость. Пусть $f \in \varepsilon(\Sigma)$. Тогда на основании (1.6), (1.7) и лемм 3.4 и 3.1 заключаем, что $S_{2^n}(f) = f * D_{2^n} \in \varepsilon(\varepsilon(\Sigma)) = \varepsilon(\Sigma)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 3.7. *Пусть для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$ в классе Σ существует такая функция $K \in L(\mathbb{R}_+)$, что $\inf_{x \in \Delta_n} |\tilde{K}(x)| > 0$, а функция $K_n \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что $\tilde{K}_n(x) = 0$ для $x \geq 2^n$. Тогда функция K_n принадлежит $\varepsilon(\Sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{K}_n(x)}{\tilde{K}(x)} & \text{для } x \in \Delta_n, \\ 0 & \text{для } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \Delta_n = [2^n, +\infty). \end{cases} \quad (3.8)$$

Согласно лемме 2.5 сужение каждой из функций $\tilde{K}(x)$ и $\tilde{K}_n(x)$ на $\Delta_n = [0, 2^n)$ принадлежит кольцу W_n , а так как по условию $\inf_{x \in \Delta_n} |\tilde{K}(x)| > 0$, то по лемме 2.9 функция $g(x) = \frac{1}{\tilde{K}(x)}$, $x \in \Delta_n$, также принадлежит W_n . Но поскольку W_n – кольцо, то сужение функции $k(x)$ на Δ_n также принадлежит классу W_n .

Докажем, что $\tilde{k} \in L(\mathbb{R}_+)$. Действительно, так как $k(x) = 0$ для $x \geq 2^n$, то

$$\tilde{k}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} k(y) \psi(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}_+} k(y) \psi(x, y) X_{\Delta_n}(y) dy. \quad (3.9)$$

В частности, $\tilde{k}(2^{-n}m) = 2^{n/2} \hat{k}(m)$, где через $\hat{k}(m)$ обозначаются коэффициенты Фурье функции $k \in L(\mathbb{R}_+)$ по системе (2.2). Поскольку сужение функции k на Δ_n принадлежит кольцу W_n , то

$$k(x) = 2^{-n/2} \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{k}(m) \psi(x, 2^{-n}m), \quad x \in \Delta_n, \quad (3.10)$$

где

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |\hat{k}(m)| = 2^{-n/2} \sum_{m=0}^{+\infty} |\tilde{k}(2^{-n}m)| < +\infty. \quad (3.11)$$

Из (3.9) и (3.10), учитывая, что $k(x) = 0$ для $x \geq 2^n$, на основании леммы 2.1 имеем

$$\tilde{k}(x) = 2^{-n/2} \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{k}(m) \int_{\Delta_n} \psi(y, 2^{-n}m) \psi(y, x) dy = 2^{n/2} \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{k}(m) X_{I(m,n)}(x).$$

Отсюда и из (3.11) получаем

$$\|\tilde{k}\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq 2^{-n/2} \sum_{m=0}^{+\infty} |\hat{k}(m)| < +\infty.$$

Итак, доказано, что $\tilde{k} \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда согласно лемме 3.4 $K * \tilde{k} \in \varepsilon(\Sigma)$. На основании (1.13) и (3.8) имеем $(K * \tilde{k}) = \tilde{K}k = \tilde{K}_n$. Отсюда, принимая во внимание, что $\tilde{K}_n \in L(\mathbb{R}_+)$, согласно теореме Е заключаем, что $K_n = K * k \in \varepsilon(\Sigma)$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 0.2 потребуется следующая

ЛЕММА 3.8. Пусть заданы две функции $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, причем $g(x) = 0$ при $x \geq 2^m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда двоичная свертка $f * g$ может быть аппроксимирована в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ с любой степенью точности линейными комбинациями двоичных сдвигов функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $g(x) = 0$ для $x \geq 2^m$, то для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ при $h = 2^{-n}$ имеем

$$(f * g)(x) = \int_0^{2^m} f(x \oplus t) g(t) dt = \sum_{k=0}^{2^{m+n}-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x \oplus t) g(t) dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left\| (f * g)(x) - \sum_{k=0}^{2^{m+n}-1} f(x \oplus kh) \int_{kh}^{(k+1)h} g(t) dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{2^{m+n}-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \{f(x \oplus t) - f(x \oplus kh)\} g(t) dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^{m+n}-1} \left\| \int_{kh}^{(k+1)h} |f(x \oplus t) - f(x \oplus kh)| |g(t)| dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \\ &= \sum_{k=0}^{2^{m+n}-1} \int_{kh}^{(k+1)h} |g(t)| dt \int_{\mathbb{R}_+} |f(x \oplus t) - f(x \oplus kh)| dx \\ &\leq \|g\|_{L(\mathbb{R}_+)} \dot{\omega}(2^{-n}, f)_{L(\mathbb{R}_+)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\dot{\omega}(\delta, f)_{L(\mathbb{R}_+)} = \sup_{0 < t \leq \delta} \|f(\cdot \oplus t) - f(\cdot)\|_{L(\mathbb{R}_+)}$$

– двоичный модуль непрерывности функции f в метрике $L(\mathbb{R}_+)$. При $n \rightarrow +\infty$ последний член неравенства (3.12) стремится к нулю. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 0.3 потребуется следующая

ЛЕММА 3.9. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что $f(x) = 0$ для $x \geq 1$. Тогда для $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, справедливы равенства $\tilde{f}(x) = \hat{f}(n)$, где

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(y) w_n(y) dy \quad (3.13)$$

– коэффициенты Фурье–Уолша функции f , рассматриваемой на $[0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обобщенной функции Уолша $\psi(x, y)$ справедливо равенство

$$\psi(x, y) = \psi(x, [y])\psi([x], y), \quad x, y \in \mathbb{R}_+$$

(см. [4, с. 421]). Поэтому если $f(x) = 0$ для $x \geq 1$, то для $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \psi(x, y) dy = \int_0^1 f(y) \psi(x, [y]) \psi([x], y) dy \\ &= \psi(x, 0) \int_0^1 f(y) \psi(n, y) dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Так как $\psi(x, 0) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$, а $\psi(n, y) = \psi(y, n) = w_n(y)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то из (3.13) и (3.14) следует равенство $\tilde{f}(x) = \hat{f}(n)$ для $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теорем 0.1–0.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Пусть функция $K \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что при любом $0 < a < +\infty$ выполняется условие $\inf_{x \in [0, a]} |\tilde{K}(x)| > 0$. Это равносильно тому, что $\inf_{x \in \Delta_n} |\tilde{K}(x)| > 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\Delta_n = [0, 2^n)$. Пусть для некоторой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K(y) dy. \quad (4.1)$$

Возьмем произвольную функцию $\overline{K} \in L(\mathbb{R}_+)$ и докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \overline{K}(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} \overline{K}(y) dy, \quad (4.2)$$

где постоянная $C(f)$ – та же, что и в условии (4.1). Положим

$$K_n(x) = S_{2^n}(\overline{K})(x) = (\overline{K} * D_{2^n})(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.3)$$

где $S_{2^n}(f)(x)$ и $D_{2^n}(x)$ определяются равенствами (1.6) и (1.7). Отсюда, поскольку $\tilde{D}_{2^n} = X_{\Delta_n}$ (см. [4, гл. 9]), имеем $\tilde{K}_n = \tilde{K}\tilde{D}_{2^n} = \tilde{K}X_{\Delta_n}$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$. Функция K_n удовлетворяет условию леммы 3.7. Поэтому, применяя эту лемму в случае, когда класс Σ состоит из одной функции $K \in L(\mathbb{R}_+)$, для которой $\inf_{x \in \Delta_n} |\tilde{K}(x)| > 0$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$, из (4.1) заключаем, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} K_n(x \oplus y) f(y) dy = C(f) \int_{\mathbb{R}_+} K_n(y) dy. \quad (4.4)$$

Но согласно теореме G из соотношения (4.3) имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\bar{K} - K_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда и из (4.4) на основании леммы 3.5 следует равенство (4.2). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Достаточность. Пусть функция $K \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что при любом $a > 0$ выполняется условие $\inf_{x \in [0, a]} |\tilde{K}(x)| > 0$. Возьмем произвольную функцию $\bar{K} \in L(\mathbb{R}_+)$ и число $\varepsilon > 0$. Используя теорему G, найдем такое $n = n(\varepsilon, \bar{K})$, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\bar{K} - K_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon/2, \quad (4.6)$$

где функция K_n определяется равенством (4.3). Но при доказательстве леммы 3.7 было доказано, что функцию K_n можно представить в виде $K_n = K * \tilde{k}$, где $\tilde{k} \in L(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, неравенство (4.6) можно представить в виде

$$\|\bar{K} - K * \tilde{k}\|_{L(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon/2. \quad (4.7)$$

Так как справедливо неравенство $\|f * g\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)} \|g\|_{L(\mathbb{R}_+)}$, то функцию $\tilde{k}$ в неравенстве (4.7) можно заменить такой финитной функцией $G \in L(\mathbb{R}_+)$, чтобы было справедливо неравенство

$$\|\bar{K} - K * G\|_{L(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon. \quad (4.8)$$

Отсюда на основании леммы 3.8 вытекает, что функцию $\bar{K}$ можно приблизить в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ с точностью до 2ε линейными комбинациями двоичных сдвигов функции K .

Необходимость. Пусть для функции $K \in L(\mathbb{R}_+)$ найдется такое $0 < a < +\infty$, что $\inf_{x \in [0, a]} |\tilde{K}(x)| = 0$. Выберем последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{+\infty}$ точек отрезка $[0, a]$ так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{K}(x_m) = 0. \quad (4.9)$$

Так как последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{+\infty}$ ограничена, то, не ограничивая общности, можно считать, что эта последовательность сходится. Обозначим ее предел через x_0 . Так как $x_0 \in \mathbb{R}_+$, то при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ найдется такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что $x_0 \in I(k, n) = [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))$. Далее будем считать, что $n \in \mathbb{Z}_+$ фиксировано. Так как члены последовательности $\{x_m\}_{m=1}^{+\infty}$ неотрицательны и эта последовательность сходится к x_0 , то $x_m \in I(k, n)$ при достаточно больших m . Не ограничивая общности, можно считать, что это включение выполняется при всех натуральных m .

Покажем, что функция

$$\overline{K}(x) = 2^{-n}\psi(x, 2^{-n}k)X_{\Delta_n}(x), \quad (4.10)$$

которая, очевидно, суммируема на $\mathbb{R}_+$, не принадлежит замыканию линейной оболочки всех двоичных сдвигов функции K . Действительно, поскольку обобщенная функция Уолша $\psi(x, y)$ принимает лишь значения $+1$ или -1 , то для любых конечных последовательностей $\{c_i\}_{i=1}^N$ и $\{y_i \geq 0\}_{i=1}^N$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \overline{K} - \sum_{i=1}^N c_i K(\cdot \oplus y_i) \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} &\geq \left| \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \overline{K}(x) - \sum_{i=1}^N c_i K(x \oplus y_i) \right\} \psi(x, x_m) dx \right| \\ &= \left| \widetilde{\overline{K}}(x_m) - \sum_{i=1}^N c_i \psi(y_i, x_m) \widetilde{K}(x_m) \right|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Однако для функции (4.10) согласно лемме 2.1 справедливо равенство $\widetilde{\overline{K}}(x) = X_{I(k, n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Поскольку $x_m \in I(k, n)$ для всех натуральных m , то из (4.11) следует, что

$$\left\| \overline{K} - \sum_{i=1}^N c_i K(\cdot \oplus y_i) \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \geq \left| 1 - \sum_{i=1}^N c_i \psi(y_i, x_m) \widetilde{K}(x_m) \right|.$$

Отсюда на основании (4.9) получаем неравенство

$$\left\| \overline{K} - \sum_{i=1}^N c_i K(\cdot \oplus y_i) \right\|_{L(\mathbb{R}_+)} \geq 1.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Пусть задана функция $f \in L[0, 1)$. Продолжим ее на $\mathbb{R}_+$, положив $f(x) = 0$ при $x \geq 1$. Для продолженной таким образом функции f в силу леммы 3.9 условие $\inf_{x \in [0, a]} |\hat{f}(x)| > 0$ для любого $a > 0$ равносильно условию $\hat{f}(n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому теорема вытекает из теоремы 0.2.

§ 5. Доказательство теорем 0.4 и 0.5

Теорема 0.4 может быть сформулирована в следующей форме.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть функция $K_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что

$$\tilde{K}_1(x) \neq 0 \quad \text{н. в. на } \mathbb{R}_+. \quad (5.1)$$

Тогда для любой функции $K_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $N \in \mathbb{Z}_+$ и такие конечные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^N$, $\{y_i \geq 0\}_{i=0}^N$, что

$$\left\| K_2 - \sum_{i=0}^N a_i K_1(\cdot \oplus y_i) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Обратно, пусть $K_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и для любой функции $K_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $N \in \mathbb{Z}_+$ и такие конечные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^N$, $\{y_i \geq 0\}_{i=0}^N$, что выполняется неравенство (5.2). Тогда функция K_1 удовлетворяет условию (5.1).

Пользуясь двоичным аналогом теоремы Планшереля для преобразования Фурье–Уолша (см. теорему D из § 1) и равенством

$$(\tilde{f}(\cdot \oplus y))(x) = \psi(x, y) \tilde{f}(x)$$

(см. [3, гл. 6]), теорему 5.4 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

ТЕОРЕМА 5.4а. Если функция $k_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $k_1(x) \neq 0$ н. в. на $\mathbb{R}_+$, то для любой функции $k_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $N \in \mathbb{Z}_+$ и такие конечные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^N$, $\{y_i \geq 0\}_{i=0}^N$, что выполняется неравенство

$$\left\| k_2(\cdot) - \sum_{i=0}^N a_i \psi(\cdot, y_i) k_1(\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Обратно, пусть задана функция $k_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и для любой функции $k_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $N \in \mathbb{Z}_+$ и такие конечные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^N$, $\{y_i \geq 0\}_{i=0}^N$, что выполняется неравенство (5.3). Тогда $k_1(x) \neq 0$ н. в. на $\mathbb{R}_+$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая

ЛЕММА 5.1. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leq p \leq \infty$ система функций (2.1) полна в пространстве $L^p(\Delta_n)$, т. е. если для некоторой функции $f \in L^p(\Delta_n)$ выполняются равенства

$$\int_{\Delta_n} f(x) \psi(x, 2^{-n} m) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5.4)$$

то $f(x) = 0$ н. в. на Δ_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для некоторой функции $f \in L^p(\Delta_n)$ выполняются равенства (5.4). Согласно лемме 2.2 система равенств (5.4) равносильна совокупности двух систем равенств

$$\int_{\Delta_n} f(x) w_m(2^{-n}x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad (5.5)$$

и

$$\int_{\Delta_n} f(x) w_i(x) w_m(2^{-n}x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Известно (см. [3, гл. 1]), что при $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ функция $w_m(x)$ на отрезке $I_k^n = [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))$ принимает постоянное значение, равное +1 или -1. Обозначим это значение через $w_{m,k}^n$. Тогда система равенств (5.5) пишется в виде

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} w_{m,k}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, 2^n - 1. \quad (5.7)$$

Но матрица $\|2^{-n/2} w_{m,k}^n\|$, $m, k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ является симметричной и ортогональной (см. [3, гл. 1]). Поэтому из (5.7) имеем

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1. \quad (5.8)$$

Подобным же образом из системы равенств (5.6) получаются равенства

$$\int_k^{k+1} f(x) w_i(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Но так как система Уолша полна в пространстве $L[k, k+1)$, причем $w_0(x) \equiv 1$, то из (5.9) следует, что $f(x) = c_k$ п.в. на $[k, k+1)$ для $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, где c_k – постоянные. Тогда из (5.8) следует, что $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Следовательно, $f(x) = 0$ п.в. на Δ_n . Лемма доказана.

Так как из полноты системы функций в пространстве $L^p(\Delta_n)$, $1 < p < \infty$, вытекает ее замкнутость в сопряженном пространстве $L^q(\Delta_n)$, $1/p + 1/q = 1$ (см. [9, гл. 6]), то из леммы 5.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Система функций (2.1) замкнута в пространстве $L^q(\Delta_n)$ при $1 < q < \infty$, т.е. линейная оболочка, натянутая на систему функций (2.1), плотна в пространстве $L^q(\Delta_n)$.

Отметим, что утверждение следствия 5.1 справедливо и для $q = 1$ (см. [6, лемма 4]).

Утверждение следствия 5.1 понадобится нам лишь для $q = 2$. В этом случае это утверждение можно получить и как следствие из результатов Н.Я. Виленкина (см. [9, дополнения]).

Прежде чем доказывать теорему 5.4а, введем следующие обозначения для функции $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и положительных чисел A, B :

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq B, \\ B, & \text{если } f(x) > B, \\ -B, & \text{если } f(x) < -B, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$_A f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0, A), \\ 0, & \text{если } x \geq A. \end{cases} \quad (5.11)$$

Кроме того, положим

$$_A f_B(x) = _A(f_B)(x). \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4а. Пусть функция $k_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $k_1(x) \neq 0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$. Возьмем произвольную функцию $k_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и любое $\varepsilon > 0$. Подберем такое число $A > 0$, что

$$\left(\int_A^{+\infty} k_2^2(x) dx \right)^{1/2} < \varepsilon. \quad (5.13)$$

Учитывая, что $k_1(x) \neq 0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$, положим

$$f(x) = \frac{k_2(x)}{k_1(x)}. \quad (5.14)$$

Учитывая обозначение (5.10), имеем

$$F_B(x) \equiv f_B(x)k_1(x) - k_2(x) = \begin{cases} 0, & |f(x)| \leq B, \\ Bk_1(x) - k_2(x), & f(x) > B, \\ -Bk_1(x) - k_2(x), & f(x) < -B. \end{cases} \quad (5.15)$$

Поскольку функция (5.14) конечна п.в. на $\mathbb{R}_+$, то из (5.15) следует, что

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} F_B(x) = 0 \text{ п.в. на } \mathbb{R}_+. \quad (5.16)$$

При этом в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$, в которой имеет место равенство (5.11), т.е. почти всюду на $\mathbb{R}_+$, функция $|F_B(x)|$ стремится к нулю монотонно, т.е. $|F_{B''}(x)| \leq |F_{B'}(x)|$ для $B' < B''$. Поскольку $k_1, k_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $F_B \in L^2(\mathbb{R}_+)$ для любого $B > 0$. Поэтому $\lim_{B \rightarrow +\infty} \|F_B\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0$. Следовательно, существует такое $B > 0$, что

$$\|F_B\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|f_B k_1 - k_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \varepsilon. \quad (5.17)$$

Отметим, что $|f_B(x)| \leq |f(x)|$ для $x \in \mathbb{R}_+$ (см. (5.10)). Поэтому из (5.13) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \left(\int_A^{+\infty} |f_B(x)k_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_A^{+\infty} |f(x)k_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_A^{+\infty} k_2^2(x) dx \right)^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из (5.17) и (5.18), учитывая обозначение (5.12), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} |k_2(x) - {}_A f_B(x) k_1(x)|^2 dx &= \int_0^A |k_2(x) - f_B(x) k_1(x)|^2 dx \\ &+ \int_A^{+\infty} k_2^2(x) dx < 2\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

причем

$$|{}_A f_B(x)| \leq B, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (5.20)$$

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $2^n > A$, и пусть $g_n(x) = {}_A f_B(x)$, $0 \leq x < 2^n$. Продолжим эту функцию на $\mathbb{R}_+$ с периодом 2^n . Учитывая, что $|g_n(x)| \leq B$ для $x \in \mathbb{R}_+$ и $k_1, k_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} |({}_A f_B(x) - g_n(x)) k_1(x)|^2 dx &= \int_{2^n}^{+\infty} |g_n(x) k_1(x)|^2 dx \\ &\leq B^2 \int_{2^n}^{+\infty} k_1^2(x) dx < \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (5.21)$$

если $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее неравенству $2^n > A$, достаточно велико. Из (5.19)–(5.21) имеем

$$\begin{aligned} \|k_2 - g_n k_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} &\leq \|k_2 - {}_A f_B k_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|{}_A f_B k_1 - g_n k_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &< (\sqrt{2} + 1)\varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Так как система функций (2.1) ортонормирована на $\Delta_n = [0, 2^n)$ и замкнута в пространстве $L^2(\Delta_n)$ (см. следствие 5.1), то

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Delta_n} [g_n(x) - S_m(g_n)(x)]^2 dx = 0, \quad (5.23)$$

где

$$S_m(\varphi)(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \psi(x, 2^{-n}i), \quad a_i = 2^{-n} \int_{\Delta_n} \varphi(x) \psi(x, 2^{-n}i) dx.$$

В частности, соотношение (5.23) имеет место и в том случае, если предел в левой части берется по подпоследовательности $\{2^m\}_{m=0}^{+\infty}$. Поэтому найдется такая подпоследовательность $\{S_{2^{m_i}}(g_n)\}_{i=0}^{+\infty}$, что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} S_{2^{m_i}}(g_n)(x) = g_n(x) \quad (5.24)$$

почти всюду на Δ_n . Но так как функции системы (2.1) имеют период 2^n (см. лемму 2.2) и функция g_n обладает этим же свойством, то равенство (5.24) справедливо п.в. на $\mathbb{R}_+$.

Учитывая неравенство $|g_n(x)| \leq B$, $x \in \mathbb{R}_+$, с помощью равенств (1.6) и (1.7) получим

$$|S_{2^m}(g_n)(x)| \leq B \int_{\mathbb{R}_+} D_{2^m}(y) dy = B, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Следовательно,

$$|S_{2^m}(g_n)(x) - g_n(x)| \leq 2B, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.25)$$

Учитывая, что $k_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$, из соотношений (5.24) и (5.25) имеем

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|[S_{2^{m_i}}(g_n) - g_n]k_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0. \quad (5.26)$$

Поэтому из (5.22) и (5.26) следует, что существует такое $i \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\|k_2 - S_{2^{m_i}}(g_n)k_1\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < 4\varepsilon. \quad (5.27)$$

Учитывая, что

$$S_{2^m}(g_n)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \psi(x, 2^{-n}j), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

из (5.27) получаем утверждение первой части теоремы 5.4а.

Докажем утверждение второй части этой теоремы. Пусть функция $k_1 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $k_1(x) = 0$ для $x \in E_1 \subset \mathbb{R}_+$, причем $\text{mes } E_1 > 0$, где $\text{mes } E$ обозначает меру Лебега множества E . Пусть E_2 – измеримое по Лебегу подмножество множества E_1 , имеющее конечную положительную меру. Тогда $X_{E_2} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, но для любых конечных последовательностей $\{a_i\}_{i=0}^N$, $\{y_i \geq 0\}_{i=0}^N$ справедливо неравенство

$$\left\| X_{E_2} - k_1 \sum_{j=0}^N a_j \psi(\cdot, y_j) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \geq \int_{E_2} dx = \text{mes } E_2 > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 0.5 вытекает из теоремы 0.4 на основании леммы 3.9.

§ 6. Групповые аналоги теорем 0.1–0.5

Доказанные выше теоремы 0.1–0.5 имеют естественные аналоги для случая, когда рассматриваются функции, заданные на локально компактной двоичной группе F . Элементами этой группы являются последовательности

$$x = (\dots, x_{-k}, \dots, x_{-2}, x_{-1}; x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), \quad (6.1)$$

где x_n равно 0 или 1 для $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, причем $x_n = 0$ для $n \leq n(x) < +\infty$. Групповая операция в F обозначается символом $\oplus$ и определяется равенством $x \oplus y = z$, где

$z_n = x_n + y_n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Нулем группы F является элемент (6.1), для которого $x_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Положим

$$|x| = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} x_{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} x_n. \quad (6.2)$$

С помощью равенства (6.2) группа F отображается на $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ взаимно однозначно с точностью до счетного множества. Действительно, если число $|x| \in \mathbb{R}_+$ двоично-иррационально, то у него есть лишь один прообраз в F , определяемый равенством (6.2).

Каждому элементу $y \in F$ можно сопоставить функцию $\psi_y(\cdot) \equiv \psi(\cdot, y)$, заданную на F , с помощью равенства

$$\psi(x, y) = (-1)^{t(x, y)}, \quad (6.3)$$

где $t(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} x_n y_{-n}$. Ряд справа в этом равенстве на самом деле является конечной суммой, которая представляет целое неотрицательное число. Легко видеть, что $t(x, y) = t(y, x)$.

Как показано в книге [4, гл. 9], функции $\psi_y(\cdot)$ непрерывны на F и удовлетворяют равенству

$$\psi_y(x' \oplus x'') = \psi_y(x') \psi_y(x''), \quad x', x'' \in F, \quad (6.4)$$

т.е. являются характерами группы F .

Для $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через Δ_n^* множество всех тех $x \in F$, для которых $x_{-k} = 0$ при $k > n$, $k \neq 0$. (Для $n \in \mathbb{Z}_+$ эти множества уже рассматривались в § 2.) Легко видеть, что каждое множество Δ_n^* является подгруппой группы F , причем $\Delta_{n+1}^* \supset \Delta_n^*$, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_n^* = \theta$, где θ — нуль группы F . Будем рассматривать $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ как систему окрестностей нуля в F . Так как группа F локально компактна, то по теореме Хаара существует единственная мера Хаара μ , определенная на борелевской σ -алгебре из F и нормированная условием $\mu(\Delta_0^*) = 1$ (см. [10, гл. 11]). Дополнив эту меру, получим меру Лебега на F , которую мы также будем обозначать символом μ . С помощью этой меры определяется интеграл Лебега для функций, заданных на F , а также пространства $L_\mu^p(F) \equiv L^p(F)$, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой

$$\|f\|_{L^p(F)} = \left(\int_F |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Для функций $f \in L(F) \equiv L^1(F)$ преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ определяется равенством

$$\tilde{f}(x) = \int_F f(y) \psi(x, y) d\mu(y).$$

Если же $f \in L^2(F)$, то преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ определяется как предел по норме пространства $L^2(F)$ последовательности $\int_{\Delta_n^*} f(y) \psi(x, y) d\mu(y)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Преобразование Фурье–Уолша для функций $f \in L(F)$ или $f \in L^2(F)$ обладает всеми свойствами, отмеченными в §1 для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ или $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. [4, гл. 9]).

Свертка двух функций $f, g \in L(F)$ или $f, g \in L^2(F)$ определяется равенством

$$(f * g)(x) = \int_F f(x \oplus y)g(y) d\mu(y), \quad x \in F.$$

Она также обладает всеми свойствами, отмеченными в §1 для сверток функций, заданных на $\mathbb{R}_+$.

Сформулируем аналоги теорем 0.1–0.5 для функций, заданных на группе F .

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть функция $K_1 \in L(F)$ такова, что $\tilde{K}_1(x) \neq 0$ для любого $x \in F$. Если для некоторой функции $f \in L^\infty(F)$ существует предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_F K_1(x \oplus y)f(y) d\mu(y) = C(f) \int_F K_1(y) d\mu(y), \quad (6.5)$$

где $C(f)$ – постоянная, то существует и предел

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_F K_2(x \oplus y)f(y) d\mu(y) = C(f) \int_F K_2(y) d\mu(y) \quad (6.6)$$

для любой функции $K_2 \in L(F)$ и той же постоянной $C(f)$.

ТЕОРЕМА 6.2. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество $\{f(\cdot \oplus y) : y \in F\}$ всех сдвигов функции $f \in L(F)$, была плотна в пространстве $L(F)$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ функции f не обращалось в нуль на F .

Из $x, y \in \Delta_0^*$ следует, что $x \oplus y \in \Delta_0^*$. Пусть $\{w_n^*\}_0^\infty$ – ортонормированная на Δ_0^* система Уолша–Пэли (см. [3] или [4, гл. 1]). В качестве следствия из теоремы 0.2 вытекает

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть задана функция $f \in L(\Delta_0^*)$. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество $\{f(\cdot \oplus y) : y \in \Delta_0^*\}$, была плотна в пространстве $L(\Delta_0^*)$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша–Пэли $\{w_n^*\}_0^\infty$ были отличны от нуля.

ТЕОРЕМА 6.4. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество всех сдвигов функции $f \in L^2(F)$, была плотна в пространстве $L^2(F)$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}(x)$ функции f не обращалось в нуль почти всюду на F .

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть задана функция $f \in L^2(\Delta_0^*)$. Для того чтобы линейная оболочка, натянутая на множество $\{f(\cdot \oplus y) : y \in \Delta_0^*\}$, была плотна в пространстве $L^2(\Delta_0^*)$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша–Пэли $\{w_n^*\}_0^\infty$ были отличны от нуля.

Отметим, что теоремы А–С Винера были обобщены на функции, заданные на локально компактных абелевых группах (см. [11, гл. 7]). Поскольку группа F является локально компактной и абелевой, то теоремы 6.1, 6.2 и 6.4 могут быть получены как следствия из этих общих результатов. Группа Δ_0^* является компактной и абелевой, поэтому теоремы 6.3 и 6.5 также являются следствиями из более общих результатов о функциях, заданных на компактных абелевых группах (см. [12, гл. 11]).

Отметим также, что абелева группа $\mathbb{R}_+$ с групповой операцией $\oplus$ не является локально компактной, если топология в ней порождена базой окрестностей нуля, состоящих из двоичных отрезков вида $[0, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому доказанные выше теоремы 0.1–0.5 не вытекают из результатов, содержащихся в книгах [11] и [12].

Список литературы

1. Wiener N. Tauberian theorems // Annals of Math. 1932. V. 33. P. 1–100.
2. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963.
3. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
4. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990.
5. Fine N. The generalized Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. P. 66–77.
6. Голубов Б. И. Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №3. С. 3–14.
7. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилев Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
8. Агаев Г. Н. Теорема типа Винера для рядов по функциям Уолша // ДАН СССР. 1962. Т. 142. №4. С. 751–753.
9. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
10. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
11. Rudin W. Fourier analysis on groups. N. Y.–London: Interscience Publishers, 1962.
12. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
E-mail: golubov@mail.mipt.ru

Поступило в редакцию
15.III.2002