Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кановей, М. Реекен, Некоторые новые результаты о борелевской несводимости отношений эквивалентности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 59–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:54:44

УДК 510.225

В. Г. Кановей, М. Реекен

Некоторые новые результаты о борелевской несводимости отношений эквивалентности

Доказано, что отношения эквивалентности (кратко, ОЭ), индуцированные генерически турбулентными “польскими” действиями, борелевски несводимы к ОЭ из семейства, включающего “польские” действия группы S_∞ всех перестановок $\mathbb{N}$ и замкнутого относительно произведений Фубини по модулю идеала Fin конечных множеств и некоторых других операций. Показано, что T_2 – отношение эквивалентности, называемое *равенством счетных множеств вещественных чисел*, – борелевски несводимо к другому семейству ОЭ, которое включает непрерывные действия “польских” CLI-групп, борелевские отношения эквивалентности с $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$ -классами, некоторые идеалы и замкнуто относительно произведений Фубини по модулю Fin . Оба эти результата и их следствия усиливают некоторые более ранние теоремы несводимости Хёрта и Кехриса.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Классификационные проблемы для разных типов математических структур были в центре внимания дескриптивной теории множеств в последние 10–15 лет. Предположим, что X – класс математических структур, идентифицированных по модулю отношения эквивалентности E . Это могут быть, например, счетные группы с точностью до изоморфизма, унитарные операторы над фиксированным пространством $\mathbb{C}^n$ с точностью до конъюгации, вероятностные меры на фиксированном “польском” пространстве с точностью до отождествления мер, имеющих одни и те же множества меры 0 или, скажем, вещественные числа по модулю тьюринговой эквивалентности. (Примеры взяты из книги [6] и статьи [12], где приведены многие другие примеры.) Допустим, что Y – другой класс математических структур, идентифицированных с точностью до отношения эквивалентности F . Тогда классификационная проблема состоит в том, чтобы выяснить, существует ли *определимая*, или *эффективная*, инъекция $\Theta: X/E \rightarrow Y/F$. Такое отображение Θ может рассматриваться как классификация объектов класса X в терминах объектов из Y , согласованная с факторизацией по E и F . Существование этого отображения может являться важным результатом, например, когда объекты из Y имеют более простую математическую природу, чем объекты из X .

Результаты этой статьи были частично представлены на конференциях LC'1999 (Утрехт), LC'2000 (Париж), а также на конференции по теории множеств Lumini-2000 и семинарах Калтеха и UCLA и конференции памяти П. С. Новикова (Москва, 2001).

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта DFG 101/10-1.

Во многих случаях оказывается, что классы структур X и Y могут рассматриваться как “польские” (т. е. сепарабельные полные метрические) пространства, и при этом E, F становятся борелевскими или, более общо, аналитическими (как множества пар) отношениями, а на отображения обычно накладывается требование быть борелевскими¹. В этом случае проблема может изучаться методами дескриптивной теории множеств, где она принимает следующую форму: если E, F – борелевские или аналитические отношения эквивалентности на “польских” пространствах X, Y соответственно, то возникает вопрос: существует ли борелевская *редукция* E к F , т. е. борелевское отображение $\vartheta: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее соотношению $x E x' \iff \vartheta(x) F \vartheta(x')$ для всех $x, x' \in X$? Если такое отображение ϑ существует, то говорят, что E *борелевски сводимо* к F . При изучении борелевских и аналитических отношений эквивалентности (кратко: ОЭ) в терминах борелевской сводимости методами дескриптивной теории множеств была вскрыта замечательная структура теорем сводимости и несводимости между ОЭ разных типов (см. обзоры полученных результатов в [2], [5]–[7], [12]). Настоящая статья принадлежит к этому исследовательскому направлению.

Основная теорема 1 доказывает борелевскую несводимость одного большого класса ОЭ к другому. *Класс 1* состоит из ОЭ, индуцированных *генерически турбулентными*² “польскими” действиями. Г. Хьёрт [6] доказал, что ОЭ этого класса борелевски не сводятся к ОЭ *класса 2*, состоящего из ОЭ, индуцированных “польскими” действиями S_∞ – группы всех перестановок $\mathbb{N}$. (Этот результат также известен в следующей формулировке: генерически турбулентные ОЭ не классифицируемы счетными структурами; см. п.3.3.)

Одно из возможных доказательств теоремы Хьёрта состоит в следующем. Во-первых, любое ОЭ, борелевски сводимое к ОЭ класса 2, также борелевски сводимо по крайней мере на котошем (comeager) множестве (т. е. дополнительном к множеству первой категории) к отношению *класса 3*³, состоящего из всех ОЭ, которые можно получить из отношений равенства на “польских” пространствах при помощи итераций операции счетной степени E^∞ . Во-вторых (здесь применяется теория турбулентности Хьёрта), ОЭ класса 1 борелевски несводимы к ОЭ класса 3 даже на котоших множествах. Теорема 1 обобщает вторую часть. Рассматривается *класс 4*, содержащий те ОЭ, которые получаются из равенств на “польских” пространствах операциями:

- 1) счетного объединения (если оно дает ОЭ) данных ОЭ на одном и том же пространстве;
 - 2) произведения Фубини $\prod_{k \in \mathbb{N}} E_k / \text{Fin}$ по модулю идеала Fin всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$;
 - 3) счетной степени E^∞
- (см. точные определения в п. 1.2).

¹Т. е. с борелевскими графами. Также рассматриваются отображения, измеримые по Бэру, и редукции, удовлетворяющие некоторым алгебраическим требованиям [2], а также Δ_2^1 и более сложные редукции [9], [10], однако они не будут рассматриваться в настоящей статье.

²Т. е. все, с точностью до первой категории, орбиты и даже локальные орбиты должны быть где-то плотными (см. определение 5).

³Введенного, по существу, Х. Фридманом [3], [4].

Класс 4, разумеется, включает класс 3, но содержит значительно больше различных ОЭ, в частности, определяемых при помощи произведения Фубини, например все ОЭ, порождаемые обобщенными идеалами Фреше, неразложимыми идеалами и идеалами Вейсса (см. п. 1.2).

ТЕОРЕМА 1. *ОЭ класса 1 борелевски несводимы (даже несводимы функциями, измеримыми по Бэру) к ОЭ класса 4.*

Доказательство (см. §2) использует индукцию по построению ОЭ класса 4 с помощью указанных операций. Доказательство основано на технике теории турбулентности, в частности, ключевым шагом будет проверка того, что ОЭ класса 1 являются генерически эргодическими по отношению к ОЭ класса 4 (теорема 6). Приложением этого результата будет доказательство вышеупомянутой теоремы Хьёрта в результате нескольких достаточно простых рассуждений, проведенных в §3.

Среди элементов класса 1 находятся ОЭ вида $x \mathbf{E}_{\mathcal{I}} y$, когда $x \Delta y \in \mathcal{I}$ для всех $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, где $\mathcal{I}$ – идеал на $\mathbb{N}$. Любой идеал $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ является, очевидно, абелевой группой с симметрической разностью Δ в качестве групповой операции, а $\mathbf{E}_{\mathcal{I}}$ индуцируется сдвиговым действием $\mathcal{I}$ на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ посредством Δ . А. Кехрис [11] показал, что это действие турбулентно в случае, когда $\mathcal{I}$ – борелевский P -идеал⁴ с некоторыми исключениями, указанными ниже. Это позволяет доказать в п. 3.1 следующую теорему как следствие теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\mathcal{I}$ – нетривиальный⁵ борелевский P -идеал на $\mathbb{N}$, то $\mathbf{E}_{\mathcal{I}}$ борелевски несводимо к ОЭ класса 4, кроме случаев, когда идеал $\mathcal{I}$ либо является идеалом конечных множеств Fin , либо тривиальной вариацией Fin , либо изоморфен идеалу $\mathcal{I}_3 = 0 \times \text{Fin}$ через биекцию между базовыми множествами.*

Борелевские P -идеалы образуют интенсивно изучаемый класс, включающий, например, Fin , идеал $\mathcal{I}_3 = 0 \times \text{Fin}$ всех множеств $x \subseteq \mathbb{N}^2$ таких, что каждое сечение $(x)_n = \{k: \langle n, k \rangle \in x\}$ конечно, и *тривиальные вариации* Fin , т.е. идеалы вида $\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}): x \cap W \in \text{Fin}\}$, где $W \subseteq \mathbb{N}$ бесконечно (см. п. 1.3), а также суммируемые идеалы, идеалы плотности и многие другие (см. [2], [15]). Легко видеть, что ОЭ $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{\text{Fin}}$ и $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{\mathcal{I}_3}$, порождаемые идеалами Fin и $\mathcal{I}_3$, и те, которые соответствуют тривиальным вариациям Fin , принадлежат классу 4, так что исключение Fin , $\mathcal{I}_3$ и тривиальных вариаций Fin в теореме 2 необходимо и полностью мотивировано.

Отметим, что более слабая форма теоремы 2, с классом 3 вместо класса 4, по существу доказана А. Кехрисом [11]. Частный результат о том, что ОЭ $\mathbf{E}_{\mathcal{I}_0}$, индуцированное идеалом нулевой плотности $\mathcal{I}_0$, борелевски несводимо к любому ОЭ класса 3, объявлен в [3] (доказательство см. в [4]).

В заключительном §4 сделана попытка получить результаты обратного характера, т.е. что ОЭ класса 4 борелевски несводимы, скажем, к турбулентным или иным ОЭ другой природы. Это сравнительно менее развитая область, и известна,

⁴Идеал $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ называется P -идеалом, если для любой последовательности множеств $x_n \in \mathcal{I}$ имеется множество $x \in \mathcal{I}$ такое, что $x_n \setminus x$ конечно для всех n .

⁵Содержащий все одноэлементные множества $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, и не равный $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

пожалуй, только одна теорема такого типа: Хьёрт [5] доказал, что $O\mathfrak{E} T_2$ на счетных последовательностях вещественных чисел, определенное как $\{x_n\} T_2 \{y_n\}$, если $\{x_n: n \in \mathbb{N}\} = \{y_n: n \in \mathbb{N}\}$ ⁶, борелевски несводимо ни к какому $O\mathfrak{E}$, порожденному непрерывным действием “польской” группы, допускающей полную инвариантную слева метрику (*CLI-группа*, от термина *complete left invariant*; это включает, например, “польские” абелевы группы). Можно ожидать, что T_2 борелевски не сводится даже к борелевским действиям борелевских абелевых групп, но пока это является открытой проблемой, даже по отношению к сдвиговым Δ -действиям борелевских идеалов.

Возможный путь к разрешению этой проблемы связан со следующим требованием к $O\mathfrak{E} E$ (неявно введенным в [5]): *для любого форсинга $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}$ -терма ξ , если $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ вынуждает $\xi_{\text{л}} E \xi_{\text{пр}}$, имеется точка x в исходном универсуме такая, что $\mathbb{P}$ вынуждает $x E \xi$* . Мы называем *приколотыми* все $O\mathfrak{E} E$, удовлетворяющие этому условию. Само T_2 не приколото и борелевски не сводится ни к какому аналитическому приколотому $O\mathfrak{E}$. Докажем в § 4, что:

- 1) все $O\mathfrak{E}$, индуцированные “польскими” действиями CLI-групп, приколоты (наше доказательство упрощает то доказательство, которое дал Хьёрт в [5]);
- 2) борелевские $O\mathfrak{E}$, чьи классы эквивалентности принадлежат $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$, приколоты (это основано на идее, сообщенной нам Хьёртом);
- 3) $O\mathfrak{E}$, порожденные истошающими идеалами последовательностей субмер на $\mathbb{N}$ (не все из них допускают “польскую” топологию, совместимую с Δ), приколоты;
- 4) произведения Фубини аналитических приколотых $O\mathfrak{E}$ по модулю Fin приколоты.

Все эти $O\mathfrak{E}$ борелевски не сводят T_2 . В частности, все $O\mathfrak{E}$, порожденные идеалами Фреше, приколоты и борелевски не сводят T_2 .

§ 1. Базовые определения

Этот параграф содержит обзор основных обозначений, фигурирующих в формулировках и доказательствах теорем 1 и 2.

1.1. Дескриптивная теория множеств. Предполагается некоторое знакомство читателя с теорией борелевских и аналитических множеств в “польских” (т. е. сепарабельных полных метрических) пространствах. Напомним, что *аналитические* множества (также известные как суслинские, A -множества или Σ^1_1) – это непрерывные образы борелевских множеств. Любое борелевское множество является аналитическим, но (в несчетных “польских” пространствах) обратное неверно.

Отображение f (между борелевскими множествами в “польских” пространствах) называется *борелевским*, если его график – борелевское множество, или, что равносильно, если все f -прообразы открытых множеств – борелевские множества. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является *измеримым по Бэру*, когда все f -прообразы открытых множеств в Y имеют свойство Бэра в X (иными словами, совпадают с открытыми множествами с точностью до *тощих* множеств, т. е. множеств первой ка-

⁶ T_2 иногда обозначают F_2 [6] и часто называют *равенством счетных множеств вещественных чисел*; оно входит в класс 3 и является одним из наиболее важных борелевских $O\mathfrak{E}$.

теории). Любое такое отображение непрерывно на плотном $\mathbf{G}_\delta$ -множестве $D \subseteq \mathbb{X}$ (пространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ предполагаются “польскими”).

Суперпозиции борелевских отображений, очевидно, сами являются борелевскими. Это, вообще говоря, не верно для измеримых по Бэру отображений, однако имеется полезный частный результат.

ЛЕММА 3. *Для “польских” пространств $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$, если отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ и $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ являются соответственно измеримым по Бэру и борелевским, суперпозиция $f \circ g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ измерима по Бэру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению g -прообразы открытых подмножеств $\mathbb{Z}$ являются борелевскими в $\mathbb{Y}$, а их f -прообразы – борелевские комбинации множеств со свойством Бэра.

1.2. Отношения эквивалентности и сводимость. Через $D(X)$ обозначается равенство на X , рассматриваемое как ОЭ.

Рассмотрим ОЭ E на множестве X . Тогда $[y]_E = \{x \in X: y E x\}$ называется E -классом элемента $y \in X$. Множество $Y \subseteq X$ называется *попарно E -эквивалентным*, когда $x E y$ выполнено для всех $x, y \in Y$.

Допустим, что E и F – ОЭ на “польских” пространствах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Введем следующие определения:

- (i) $E \leq_B F$ (*борелевская сводимость*; иногда пишут $\mathbb{X}/E \leq_B \mathbb{Y}/F$) означает, что существует борелевское отображение $\vartheta: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ (называемое *редукцией*) такое, что $x E y \iff \vartheta(x) F \vartheta(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$;
- (ii) $E \sim_B F$ означает, что $E \leq_B F$ и $F \leq_B E$ (*двусторонняя сводимость*);
- (iii) $E <_B F$ означает, что $E \leq_B F$, но $F \not\leq_B E$ (*строгая сводимость*).

Рассматриваются следующие операции с отношениями эквивалентности на “польских” пространствах:

(e1) *счетное объединение* (если оно дает ОЭ) и *счетное пересечение* ОЭ на одном и том же пространстве;

(e2) *счетная дизъюнктивная сумма* $F = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} F_k$ данных ОЭ F_k на “польских” пространствах $\mathbb{S}_k$ определяется как ОЭ на $\mathbb{S} = \bigcup_k (\{k\} \times \mathbb{S}_k)$ (с “польской” топологией, порожденной множествами вида $\{k\} \times U$, где $U \subseteq \mathbb{S}_k$ открыто ⁷), именно, $\langle k, x \rangle F \langle l, y \rangle$ выполнено, когда $k = l$ и $x F_k y$;

(e3) *произведение* $P = \prod_k F_k$ данных ОЭ F_k на пространствах $\mathbb{S}_k$ есть ОЭ на $\prod_k \mathbb{S}_k$, определенное так, что $x P y$ выполнено, когда $x_k F_k y_k$ для всех k , в частности, если E, F суть ОЭ на $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, то $P = E \times F$ определяется на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ так, что $\langle x, y \rangle P \langle x', y' \rangle$, когда $x E x'$ и $y F y'$;

(e4) *произведение Фубини* $F = \prod_{k \in \mathbb{N}} F_k / \mathcal{I}$ данных ОЭ F_k на пространствах $\mathbb{S}_k$ по модулю идеала $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ есть ОЭ на произведении пространств $\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_k$, определенное так, что $x F y$ выполнено, когда $\{k: x_k \not F_k y_k\} \in \mathcal{I}$;

(e5) *счетная степень* F^∞ данного ОЭ F на $\mathbb{S}$ есть ОЭ на $\mathbb{S}^\mathbb{N}$, определенное так, что $x F^\infty y$ выполнено, когда $\{[x_k]_F: k \in \mathbb{N}\} = \{[y_k]_F: k \in \mathbb{N}\}$, другими словами,

⁷Если $\mathbb{S}_k$ попарно дизъюнкты и открыты в $\mathbb{S}' = \bigcup_k \mathbb{S}_k$, то можно равносильным образом определить $F = \bigvee_k F_k$ на $\mathbb{S}'$ так, что $x F y$, когда x, y принадлежат одному и тому же $\mathbb{S}_k$ и $x F_k y$.

для всякого k имеется l такое, что выполнено $x_k F y_l$, и для всякого l имеется k такое, что выполнено $x_k F y_l$.

Заметим, что операции (e1), (e2), (e3), (e5) и (e4) с $\mathcal{F} = \text{Fin}$ всегда дают борелевское, соответственно, аналитическое ОЭ, когда все данные ОЭ являются борелевскими или аналитическими.

Операции не являются независимыми. Именно, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$ борелевски сводится к $\prod_k F_k$ отображением $x \mapsto \langle x, x, x, \dots \rangle$, а дизъюнктивная сумма $\bigvee_{k \in \mathbb{N}} F_k$ сводится к $D(\mathbb{N}) \times \prod_k F_k$ отображением $\langle k, x \rangle \mapsto \langle k, x_0, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots \rangle$, где $x_k \in S_k$ – раз и навсегда фиксированные точки. Само же произведение $\prod_{k \in \mathbb{N}} F_k$ выразимо в терминах произведения Фубини по модулю Fin . В самом деле, рассмотрим функцию $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$ такую, что $f^{-1}(n)$ бесконечно для каждого n . Положим $E_k = F_{f(k)}$. Теперь для $x = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle \in \prod_k S_k$ (где S_k – область F_k) пусть $\vartheta(x) = \langle y_0, y_1, y_2, \dots \rangle$, где $y_k = x_{f(k)}$. Тогда ϑ – борелевская редукция $\prod_k F_k$ к $\prod_k E_k / \text{Fin}$. Однако произведение Фубини и счетная степень точно не сводятся друг к другу, и мало что известно о счетном объединении в (e1).

Таким образом, класс 4, упомянутый в теоремах 1 и 2, есть наименьший класс, который содержит равенства $D(S)$ на “польских” пространствах S и замкнут относительно операций (e1)–(e5) (с $\mathcal{F} = \text{Fin}$ в (e4)), а все ОЭ в классе 4 – борелевские на “польских” пространствах.

Существует много интересных ОЭ в классе 4, например, семейство ОЭ T_α , $\alpha < \omega_1$, введенное Х. Фридманом [4], которое начинается с $T_0 = D(\mathbb{N})$ (отношение равенства на $\mathbb{N}$), кроме того, $T_{\alpha+1} = T_\alpha^\infty$ для всех α и $T_\lambda = \bigvee_{\alpha < \lambda} T_\alpha$ для предельных ординалов λ . Таким образом, $\text{dom } T_1 = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и выполнено $x T_1 y$, когда $\text{ran } x = \text{ran } y$ для $x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Отображение $\vartheta(x) = \chi$, где χ – характеристическая функция $\text{ran } x$, свидетельствует, что $T_1 \leq_B D(2^\mathbb{N})$. Чтобы доказать обратное неравенство, для $a \in 2^\mathbb{N}$ определим $\beta(a)$ как единственную возрастающую биекцию $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} |a| = \{k: a(k) = 1\}$, если $|a|$ бесконечно, а если $|a| = \{k_0, \dots, k_n\}$, то положим $\beta(a)(i) = k_i$ для $i < n$ и $\beta(a)(i) = k_n$ для $i \geq n$. Функция β показывает, что $D(2^\mathbb{N}) \leq_B T_1$, значит, $T_1 \sim_B D(2^\mathbb{N})$. Отсюда легко следует, что $T_2 \sim_B D(2^\mathbb{N})^\infty$; здесь правая часть часто рассматривается как определение ОЭ T_2 , которое по этой причине обычно называется *равенством счетных множеств вещественных чисел*.

1.3. Идеалы. Идеалом на множестве A является любое множество $\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$, замкнутое относительно $\cup$ и удовлетворяющее $x \in \mathcal{I} \wedge y \subseteq x \implies y \in \mathcal{I}$. В этом случае $E_{\mathcal{I}}$ есть ОЭ на $\mathcal{P}(A)$, определенное так, что выполнено $X E_{\mathcal{I}} Y$, когда $X \Delta Y \in \mathcal{I}$. Заметим, что $E_{\mathcal{I}}$ – борелевское ОЭ, если $\mathcal{I}$ – борелевский идеал. Многие важные ОЭ имеют вид $E_{\mathcal{I}}$, среди них:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{\text{Fin}}, & \text{где } \text{Fin} &= \{x \subseteq \mathbb{N}: x \text{ конечно}\}; \\ E_1 &= E_{\mathcal{I}_1}, & \text{где } \mathcal{I}_1 &= \text{Fin} \times 0 = \{x \subseteq \mathbb{N}^2: \{k: (x)_k \neq \emptyset\} \in \text{Fin}\}; \\ E_3 &= E_{\mathcal{I}_3}, & \text{где } \mathcal{I}_3 &= 0 \times \text{Fin} = \{x \subseteq \mathbb{N}^2: \forall k ((x)_k \in \text{Fin})\}; \end{aligned}$$

эти три отношения эквивалентности принадлежат классу 4⁸. Идеалы вида $\{x \in$

⁸Чтобы показать, что E_0 принадлежит классу 4, возьмем при любом k в качестве F_k равенство на двухэлементном множестве в (e4). Чтобы показать, что E_3 принадлежит классу 4, возьмем $P_k = E_0$ в (e3).

$\mathcal{P}(\mathbb{N}): x \cap W \in \text{Fin}\}$, где $W \subseteq \mathbb{N}$ бесконечно и кобесконечно, называемые *тривиальными вариациями* Fin , также порождают ОЭ класса 4.

Пишут $\mathcal{I} \leq_B \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \sim_B \mathcal{J}$ и т. д., когда $E_{\mathcal{I}} \leq_B E_{\mathcal{J}}$, $E_{\mathcal{I}} \sim_B E_{\mathcal{J}}$ и т. д.

Произведение Фубини $\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k / \mathcal{I}$ идеалов $\mathcal{I}_k$ на множествах B_k над идеалом $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ – это идеал всех множеств $y \subseteq B = \{(k, b): k \in \mathbb{N} \wedge b \in B_k\}$ таких, что множество $\{k: (y)_k \notin \mathcal{I}_k\}$ принадлежит $\mathcal{I}$, где $(y)_k = \{b: \langle k, b \rangle \in y\}$ – сечение y (ср. с произведением Фубини отношений эквивалентности). В частности, если $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ – идеалы на $\mathbb{N}$, B соответственно, то $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k / \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}_k = \mathcal{J}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, таким образом, $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ – идеал всех множеств $y \subseteq \mathbb{N} \times B$ таких, что $\{k: (y)_k \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}$.

Идеал $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ называется *P-идеалом*, если для любой последовательности множеств $x_n \in \mathcal{I}$ существует множество $x \in \mathcal{I}$ такое, что $x_n \setminus x \in \text{Fin}$ для всех n . Например, Fin и $\mathcal{I}_3$ (но не $\mathcal{I}_1$) – *P-идеалы*.

Этот класс допускает другие характеристики. *Субмерой* на множестве A называется любая функция $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow [0, +\infty]$, удовлетворяющая $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(\{a\}) < +\infty$ для всех a и $\varphi(x) \leq \varphi(x \cup y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. Субмера φ на $\mathbb{N}$ *полунепрерывна снизу*, или, для краткости, l.s.c. (lower semicontinuous), если $\varphi(x) = \sup_n \varphi(x \cap [0, n])$ для всех $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. С. Солецки [15] показал, что борелевские *P-идеалы* – это в точности идеалы вида $\text{Exh}_{\varphi} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}): \varphi_{\infty}(x) = 0\}$, где φ – l.s.c.-субмера на $\mathbb{N}$ и $\varphi_{\infty}(x) = \inf_n \varphi(x \cap [n, \infty))$, а также что все борелевские *P-идеалы* – это то же самое, что и “*полишабельные*” идеалы, т. е. те, которые допускают топологию “польской” группы с Δ в качестве операции.

А. Кехрис [11] доказал, что сдвиговые действия борелевских *P-идеалов* $\mathcal{I}$, кроме Fin , $\mathcal{I}_3$ и тривиальных вариаций Fin , генерически турбулентны, поэтому соответствующие ОЭ $E_{\mathcal{I}}$ принадлежат классу 1.

Семейство Фреше – это наименьшее семейство идеалов Fr , содержащее Fin и замкнутое относительно произведений Фубини $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n / \text{Fin}$. Например, *итерированные идеалы Фреше* $\mathcal{I}_{\alpha}$, определенные индукцией по $\alpha < \omega_1$ так, что $\mathcal{I}_0 = \text{Fin}$, $\mathcal{I}_{\alpha+1} = \text{Fin} \otimes \mathcal{I}_{\alpha}$ для всех α и $\mathcal{I}_{\lambda} = \prod_{\alpha < \lambda} \mathcal{I}_{\alpha} / \text{Fin}_{\lambda}$ для предельных λ , где Fin_{λ} – идеал всех конечных подмножеств λ , принадлежат Fr . (Модификация, принятая в [8], использует на каждом предельном шаге λ фиксированную конфинальную в λ ω -последовательность.)

По определению если $\mathcal{I} \in \text{Fr}$, то $E_{\mathcal{I}}$ есть ОЭ класса 4.

Через $\text{otp } X$ обозначается порядковый тип $X \subseteq \text{Ord}$. Для любых $\alpha, \gamma < \omega_1$ множество

$$\mathcal{I}_{\alpha}^{\gamma} = \{A \subseteq \alpha: \text{otp } A < \omega^{\gamma}\}$$

(оно нетривиально только при $\alpha \geq \omega^{\gamma}$) есть идеал (так как ординалы вида ω^{γ} не являются суммами пары меньших ординалов); эти идеалы, в частности, в случае, когда $\alpha = \omega^{\gamma}$, называются *неразложимыми*. Мы не знаем, является ли каждый идеал $\mathcal{I}_{\alpha}^{\gamma}$ действительно изоморфным идеалу из Fr , однако можно доказать, что каждый $\mathcal{I}_{\alpha}^{\gamma}$ борелевски сводится к идеалу из Fr . Аналогично, *идеалы Вейсса*

$$\mathcal{W}_{\alpha}^{\gamma} = \{A \subseteq \alpha: |A|_{\text{CB}} < \omega^{\gamma}\}$$

(нетривиальные только при $\alpha \geq \omega^{\omega^{\gamma}}$), где $|X|_{\text{CB}}$ – ранг Кантора–Бендиксона множества $X \subseteq \text{Ord}$ (см. [2, п. 1.14]), борелевски сводимы к идеалам из Fr .

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 использует следующие вспомогательные понятия. Пусть E, F – ОЭ на “польских” пространствах X, Y соответственно. Отображение $\vartheta: X \rightarrow Y$ называется:

- (i) (E, F) -инвариантным, когда $x E y \implies \vartheta(x) F \vartheta(y)$ для всех $x, y \in X$;
- (ii) генерически ⁹ (E, F) -инвариантным, если имеем $x E y \implies \vartheta(x) F \vartheta(y)$ для всех x, y из некоторого множества $X \subseteq X$;
- (iii) генерической F -константой, когда $\vartheta(x) F \vartheta(y)$ выполнено для всех x, y на некотором подмножестве пространства X .

Наконец, ОЭ E называется генерически F -эргодическим (см. [6, п. 3.1]), если каждая измеримая по Бэру (E, F) -инвариантная функция является генерической F -константой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. (i) Если E генерически F -эргодично и не имеет котовых классов эквивалентности, то E не сводится к F при помощи измеримого по Бэру отображения.

(ii) Если E генерически F -эргодично, то даже каждая измеримая по Бэру генерически (E, F) -инвариантная функция является генерической F -константой.

Покажем ниже, что любое ОЭ, индуцированное “польским” турбулентным действием, является генерически F -эргодическим для каждого ОЭ F из класса 4.

2.1. Локальные орбиты и турбулентность. Действием группы G на X называется любое отображение $a: G \times X \rightarrow X$, обычно записываемое как $a(g, x) = g \cdot x$, такое, что 1) $e \cdot x = x$ и 2) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Тогда $\langle X; a \rangle$, а также само X называются G -пространством. Непрерывное действие “польской” группы ¹⁰ G на “польском” пространстве X называется “польским” действием, а само X называется “польским” G -пространством.

Любое действие a группы G на X индуцирует “орбитальное” ОЭ $E_a^X = E_G^X$, определенное на X так, что выполнено $x E_G^X y$, когда имеется $g \in G$, удовлетворяющее равенству $y = g \cdot x$; его классы эквивалентности

$$[x]_G = [x]_{E_G^X} = \{y: \exists g \in G (g \cdot x = y)\}$$

– G -орбиты. Индуцированные ОЭ “польских” действий – аналитические (как множества пар), иногда даже борелевские [1, § 7].

Допустим, что группа G действует на пространстве X . Если $G \subseteq G$ и $X \subseteq X$, то положим

$$R_G^X = \{\langle x, y \rangle \in X^2: \exists g \in G (x = g \cdot y)\},$$

и пусть $\sim_G^X$ обозначает ОЭ-оболочку R_G^X , т.е. $\subseteq$ -наименьшее ОЭ на X такое, что $x R_G^X y \implies x \sim_G^X y$. В частности, $\sim_G^X = E_G^X$, но, вообще говоря, $\sim_G^X \subsetneq E_G^X \upharpoonright X$. Пусть $\mathcal{O}(x, X, G) = [x]_{\sim_G^X} = \{y \in X: x \sim_G^X y\}$ для $x \in X$ – локальная орбита x . В частности, $[x]_G = [x]_{E_G^X} = \mathcal{O}(x, X, G)$ – полная G -орбита $x \in X$.

⁹В работах в этой области, термин “генерически” означает то, что свойство выполнено на котовой области.

¹⁰Т.е. топологической группы, чье базовое множество есть “польское” пространство, а групповая операция и отображение, дающее обратный элемент, непрерывны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (вариант Кехриса [13, § 8]). Допустим, что $\mathbb{X}$ – “польское” пространство и $\mathbb{G}$ – “польская” группа, непрерывно действующая на $\mathbb{X}$. Тогда:

1) точка $x \in \mathbb{X}$ *турбулентна*, когда для любого открытого непустого множества $X \subseteq \mathbb{X}$, содержащего x , и любой окрестности $G \subseteq \mathbb{G}$ элемента $1_{\mathbb{G}}$ (G – необязательно подгруппа) локальная орбита $\mathcal{O}(x, X, G)$ где-то плотна (т.е. не является нигде не плотным множеством) в $\mathbb{X}$;

2) орбита $[x]_{\mathbb{G}}$ *турбулентна*, если точка x турбулентна (тогда все точки $y \in [x]_{\mathbb{G}}$ турбулентны);

3) действие $(\mathbb{G}$ на $\mathbb{X})$ *турбулентно*, а $\mathbb{X}$ – *турбулентное* “польское” $\mathbb{G}$ -пространство, если все орбиты плотны и тощи; действие *генерически турбулентно*, а $\mathbb{X}$ – *генерически турбулентное* “польское” $\mathbb{G}$ -пространство, если объединение всех плотных турбулентных тощих орбит $[x]_{\mathbb{G}}$ является котошим множеством.

ОЭ, индуцированные генерически турбулентными “польскими” действиями, составляют класс 1 из теоремы 1. Чтобы доказать теорему 1, покажем, что все ОЭ в классе 1 генерически F -эргодичны для каждого F класса 4. Метод доказательства использует индукцию по построению ОЭ класса 4. Некоторым неудобством является то, что мы должны рассмотреть чуть более сильное свойство в рамках индуктивной схемы.

Допустим, что F – ОЭ на “польском” пространстве. Действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$ называется *наследственно генерически F -эргодическим*, если $\mathcal{O} \sim_X^{\mathbb{G}}$ генерически F -эргодично всякий раз, когда $X \subseteq \mathbb{X}$ – непустое открытое множество, $G \subseteq \mathbb{G}$ – непустое открытое множество, содержащее $1_{\mathbb{G}}$, и локальные орбиты $\mathcal{O}(x, X, G)$ плотны в X для котошего (в X) множества точек $x \in X$. Это, очевидно, влечет генерическую F -эргодичность, если действие генерически турбулентно.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathbb{G}$ – “польская” группа, а $\mathbb{X}$ – генерически турбулентное “польское” $\mathbb{G}$ -пространство. Тогда отношение $E_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ наследственно генерически F -эргодично, значит, согласно предложению 4 оно не сводимо ни к какому ОЭ F класса 4 измеримым по Бэру отображением.

2.2. Предварительный материал к доказательству теоремы 6. Сформулируем два достаточно простых технических факта, относящихся к турбулентности.

ЛЕММА 7. В условиях теоремы 6 пусть непустое множество $X \subseteq \mathbb{X}$ открыто, $G \subseteq \mathbb{G}$ – окрестность $1_{\mathbb{G}}$ и $\mathcal{O}(x, X, G)$ плотно в X для X -котошего множества точек $x \in X$. Тогда если $U, U' \subseteq X$ открыты и непусты, а $D \subseteq X$ котошее в X , то существуют точки $x \in D \cap U$ и $x' \in D \cap U'$ такие, что $x \sim_G^X x'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В наших предположениях найдутся точки $x_0 \in U$ и $x'_0 \in U'$, удовлетворяющие соотношению $x_0 \sim_G^X x'_0$, т.е. $x'_0 = g_n g_{n-1} \dots g_1 \cdot x_0$ для набора элементов $g_1, \dots, g_n \in G$ таких, что $g_k \dots g_1 \cdot x_0 \in X$ для всех $k \leq n$. Поскольку рассматриваемое действие непрерывно, найдется окрестность $U_0 \subseteq U$ точки x_0 такая, что $g_k \dots g_1 \cdot x \in X$ и $g_n g_{n-1} \dots g_1 \cdot x \in U_2$ для всех $x \in U_0$. Поскольку D котошее, ясно, что существует точка $x \in U_0 \cap D$, удовлетворяющая $x' = g_n g_{n-1} \dots g_1 \cdot x \in U' \cap D$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *В условиях теоремы 6 для любых открытых непустых множеств $U \subseteq \mathbb{X}$ и $G \subseteq \mathbb{G}$, $1_G \in G$, имеется открытое непустое множество $U' \subseteq U$ такое, что локальные орбиты $\theta(x, U', G)$ плотны в U' для U' -котошего множества $x \in U'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\text{Int } \overline{X}$ обозначается внутренность замыкания X . Если $x \in U$ и множество $\theta(x, U, G)$ где-то плотно (в U), то множество $U_x = U \cap \text{Int } \overline{\theta(x, U, G)} \subseteq U$ открыто и $\sim_G^U$ -инвариантно (наблюдение, сделанное, например, в [13, доказательство 8.4]), кроме того, $\theta(x, U, G) \subseteq U_x$, так что $\theta(x, U, G) = \theta(x, U_x, G)$. Из инвариантности орбит следует, что множества U_x попарно дизъюнкты, а вследствие турбулентности их объединение плотно в U . Рассмотрим любое непустое U_x в качестве искомого U' . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6 проводится индукцией по определению ОЭ в классе 4 операциями, упомянутыми в п. 1.2, в нескольких последующих пунктах. Начнем с базы индукции: докажем, что в предположениях теоремы $\mathbf{E}_G^{\mathbb{X}}$ является наследственно генерически $D(\mathbb{N})$ -эргодическим. Пусть $X \subseteq \mathbb{X}$ и $G \subseteq \mathbb{G}$ – непустые открытые множества, $1_G \in G$, и локальные орбиты $\theta(x, X, G)$ плотны в X для X -котошего множества точек $x \in X$. Докажем, что отношение $\sim_G^X$ генерически $D(\mathbb{N})$ -эргодично.

Рассмотрим измеримое по Бэру генерически $(\sim_G^X, D(\mathbb{N}))$ -инвариантное отображение $\vartheta: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{N}$. Пусть, напротив, ϑ не является генерической $D(\mathbb{N})$ -константой. Тогда существуют открытые непустые множества $U_1, U_2 \subseteq X$, числа $\ell_1 \neq \ell_2$ и котошее множество $D \subseteq X$ такие, что $\vartheta(x) = \ell_1$ для всех $x \in D \cap U_1$ и $\vartheta(x) = \ell_2$ для всех $x \in D \cap U_2$. Согласно лемме 7 найдется пара точек $x_1 \in U_1 \cap D$ и $x_2 \in U_2 \cap D$, удовлетворяющих соотношению $x_1 \sim_G^X x_2$. Противоречие.

2.3. Индуктивный шаг счетной степени. Рассмотрим генерически турбулентное “польское” $\mathbb{G}$ -пространство $\mathbb{X}$ и борелевское ОЭ F на “польском” пространстве $\mathbb{Y}$. Предполагая, что действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$ наследственно генерически F -эргодично, докажем, что это действие наследственно генерически F^∞ -эргодично. Фиксируем непустое открытое множество $X_0 \subseteq \mathbb{X}$ и окрестность G_0 элемента 1_G в $\mathbb{G}$ такие, что $\theta(x, X_0, G_0)$ плотно в X_0 для X_0 -котошего множества точек $x \in X_0$. Покажем, что любая заданная измеримая по Бэру $(\sim_{G_0}^{X_0}, F^\infty)$ -инвариантная функция $\vartheta: X_0 \rightarrow \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ – генерическая F^∞ -константа. По определению имеем

$$\text{для } x, x' \in X_0: x \sim_{G_0}^{X_0} x' \implies \forall k \exists l (\vartheta_k(x) F \vartheta_l(x')), \quad (1)$$

где $\vartheta_k(x) = \vartheta(x)(k)$.

Заметим, что ϑ непрерывна на плотном $\mathbf{G}_\delta$ -множестве $D \subseteq X_0$.

ЛЕММА 9. *Для всякого числа k и любого открытого непустого множества $U \subseteq X_0$ существует открытое непустое множество $W \subseteq U$ такое, что ϑ_k есть генерическая F -константа на W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя рассуждения, связанные с категорией и соотношением (1), получаем число l , открытые непустые множества $W \subseteq U$, $Q \subseteq G_0$ и плотное в $W \times Q$ множество $P \subseteq W \times Q$ класса $\mathbf{G}_\delta$ такое, что $\vartheta_k(x) F \vartheta_l(g \cdot x)$ выполнено для всех пар $\langle x, g \rangle \in P$. Можно считать, что $\langle x, g \rangle \in P \implies x \in D$.

Поскольку Q открыто, существуют элемент $g_0 \in Q$ и окрестность $G \subseteq G_0$ элемента 1_G , $G^{-1} = G$, такие, что $g_0 G \subseteq Q$.

Продолжение доказательства использует метод форсинга¹¹.

Фиксируем счетную транзитивную модель $\mathcal{M}$ теории ZFHC, т. е. ZFC без аксиомы степени, но с аксиомой, постулирующей, что каждое множество наследственно счетно. Можно предполагать, что $\mathbb{X}$ имеет код в $\mathcal{M}$ в том смысле, что существует множество $D_{\mathbb{X}} \in \mathcal{M}$, являющееся плотным (счетным) подмножеством $\mathbb{X}$, и $d_{\mathbb{X}} \upharpoonright D_{\mathbb{X}}$ (функция расстояния $\mathbb{X}$, ограниченная на $D_{\mathbb{X}}$) также принадлежит $\mathcal{M}$. Предполагается, что $\mathbb{G}$, $\mathbb{Y}$, действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$, множества G , $D_{\mathbb{X}}$, P и отображение $\vartheta \upharpoonright D_{\mathbb{X}}$ имеют коды в $\mathcal{M}$ в аналогичном смысле.

Рассмотрим форсинг Коэна $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ для $\mathbb{X}$, состоящий из рациональных шаров с центрами в фиксированном плотном счетном подмножестве $\mathbb{X}$, и форсинг Коэна $\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ для $\mathbb{G}$, определенный аналогично. Как обычно, $U \subseteq V$ означает, что U – более сильное “вынуждающее условие”. В наших допущениях понятие генерической по Коэну над $\mathcal{M}$ точки $\mathbb{X}$ или $\mathbb{G}$ имеет смысл, а множество всех генерических по Коэну над $\mathcal{M}$ точек $\mathbb{X}$ есть плотное $\mathbf{G}_{\delta}$ -подмножество $\mathbb{X}$, включенное в D .

УТВЕРЖДЕНИЕ 10 (ключевой момент турбулентности). *Если точки $x, x' \in W$ являются $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ -генерическими над $\mathcal{M}$ и $x \sim_G^W x'$, то $\vartheta_k(x) F \vartheta_k(x')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство индукцией по числу $n(x, x')$, равному наименьшему n такому, что имеются элементы $g_1, \dots, g_n \in G$, удовлетворяющие соотношению

$$x' = g_n g_{n-1} \dots g_1 \cdot x \text{ и } g_k \dots g_1 \cdot x \in W \quad \text{для всех } k \leq n. \quad (2)$$

Пусть $n(x, x') = 1$, т. е. $x = h \cdot x'$ для некоторого $h \in G \cap \mathcal{M}[x, x']$ ¹². Рассмотрим любой $\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ -генерический над $\mathcal{M}[x, x']$ элемент $g \in Q$, достаточно близкий к g_0 для того, чтобы $g' = gh^{-1}$ принадлежало Q . Пара $\langle x, g \rangle$ является $(\mathbf{C}_{\mathbb{X}} \times \mathbf{C}_{\mathbb{G}})$ -генерической над $\mathcal{M}$ по теореме о произведении форсингов, откуда $\langle x, g \rangle \in P$ (ибо P – плотное $\mathbf{G}_{\delta}$ -множество с кодом в $\mathcal{M}$) и $\vartheta_k(x) F \vartheta_l(g \cdot x)$ по выбору P . Более того, элемент g' сам $\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ -генеричен над $\mathcal{M}[x']$, откуда $\vartheta_k(x') F \vartheta_l(g' \cdot x')$ выводится по тем же соображениям. Однако $g' \cdot x' = gh^{-1}(h \cdot x) = g \cdot x$.

Теперь допустим, что (2) выполнено для некоторого $n \geq 2$. Возьмем $\mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ -генерический над $\mathcal{M}[x, x']$ элемент $g'_1 \in G$, достаточно близкий к g_1 , чтобы $g'_2 = g_2 g_1 g'^{-1}_1$ принадлежало G , а точка $x^* = g'_1 \cdot x$ принадлежала W . Тогда точка x^* $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ -генерична над $\mathcal{M}$ (произведение форсингов) и $n(x^*, x') \leq n - 1$, ибо $g'_2 \cdot x^* = g_2 g_1 \cdot x$. Утверждение доказано.

Итак, доказано, что функция ϑ_k является генерически $(\sim_G^W, F)$ -инвариантной на W (т. е. инвариантной на котошем подмножестве W). Можно также предположить в силу леммы 8, что орбита $\theta(x, W, G)$ плотна в W для W -котошего множества точек $x \in W$. Тогда в силу наследственной генерической F -эргодичности

¹¹Предполагается некоторое знакомство читателя с методом форсинга. Лемма может быть доказана и чисто топологически, но при этом рассуждения теряют прозрачность.

¹²Здесь $\mathcal{M}[x, x']$ определяется не как генерическое расширение $\mathcal{M}$, а как любая (счетная транзитивная) модель ZFHC, содержащая x , x' и все множества из $\mathcal{M}$. Модель $\mathcal{M}[x, x']$ может содержать больше ординалов, чем $\mathcal{M}$, но это для нас не так важно.

ϑ_k является генерической F -константой на W , что и требовалось доказать. Лемма 9 доказана.

Согласно доказанной лемме 9 существуют котошее в X_0 множество $Z \subseteq X_0$ и счетное множество $Y = \{y_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Y}$ такие, что для любого k и любого $x \in Z$ имеется j такое, что $\vartheta_k(x) F y_j$. Положим $\eta(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{j : \vartheta_k(x) F y_j\}$. Тогда для любой пары $x, x' \in Z$ соотношение $\vartheta(x) F^\infty \vartheta(x')$ равносильно $\eta(x) = \eta(x')$, так что согласно инвариантности ϑ имеем

$$x \sim_{G_0}^{X_0} x' \implies \eta(x) = \eta(x') \quad \text{для всех } x, x' \in Z. \quad (3)$$

Остается доказать, что η – константа на котошем подмножестве Z .

Предположим, что, напротив, существуют два непустых открытых множества $U_1, U_2 \subseteq X_0$, число $j \in \mathbb{N}$ и котошее множество $Z' \subseteq Z$ такие, что $j \in \eta(x_1)$ и $j \notin \eta(x_2)$ для всех $x_1 \in Z' \cap U_1$ и $x_2 \in Z' \cap U_2$. Теперь лемма 7 противоречит соотношению (3), что доказывается так же, как в конце п. 2.2.

2.4. Индуктивный шаг произведения Фубини. Пусть $\mathbb{X}$ – генерически турбулентное “польское” $\mathbb{G}$ -пространство. Докажем, что действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$ наследственно генерически F -эргодично, где $F = \prod_k F_k / \text{Fin}$, F_k – борелевские ОЭ на “польских” пространствах $\mathbb{Y}_k$ и действие наследственно генерически F_k -эргодично для каждого k . Фиксируем открытое непустое множество $X_0 \subseteq \mathbb{X}$ и окрестность G_0 элемента $1_{\mathbb{G}}$ в $\mathbb{G}$ такие, что $\mathcal{O}(x, X_0, G_0)$ плотно в X_0 для X_0 -котошего множества точек $x \in X_0$. Докажем, что любая $(\sim_{G_0}^{X_0}, F)$ -инвариантная измеримая по Бэру функция $\vartheta : X_0 \rightarrow \mathbb{Y}$ есть генерическая F -константа на X_0 . По определению

$$\text{для } x, y \in X_0: x \sim_{G_0}^{X_0} y \implies \exists k_0 \forall k \geq k_0 (\vartheta_k(x) F_k \vartheta_k(y)), \quad (4)$$

где $\vartheta_k(x) = \vartheta(x)(k)$.

Заметим, что ϑ непрерывна на плотном $\mathbf{G}_\delta$ -множестве $D \subseteq X_0$.

ЛЕММА 11. *Для всякого открытого непустого множества $U \subseteq X_0$ найдутся число k_0 и открытое непустое множество $W \subseteq U$ такие, что ϑ_k есть генерическая F -константа на W для всех $k \geq k_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение (4), легко находим число k_0 , открытые непустые множества $W \subseteq U$, $Q \subseteq G_0$ и плотное в $W \times Q$ множество $P \subseteq W \times Q$ класса $\mathbf{G}_\delta$ такие, что $\vartheta_k(x) F \vartheta_k(g \cdot x)$ выполнено для всех $k \geq k_0$ и всех пар $\langle x, g \rangle \in P$. Можно считать, что $\langle x, g \rangle \in P \implies x \in D$. Поскольку Q открыто, существуют элемент $g_0 \in Q$ и окрестность $G \subseteq G_0$ элемента $1_{\mathbb{G}}$, $G^{-1} = G$, такие, что $g_0 G \subseteq Q$.

Пусть модель $\mathfrak{M}$ такова, как в доказательстве леммы 9. Аналогично утверждению 10 докажем, что если точки $x, x' \in W$ являются $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ -генерическими над $\mathfrak{M}$, $k \geq k_0$ и $x \sim_G^W x'$, то $\vartheta_k(x) F_k \vartheta_k(x')$, иными словами, каждая функция ϑ_k , $k \geq k_0$, генерически $(\sim_G^W, F_k)$ -инвариантна на W . Можно предполагать согласно лемме 8, что некоторое W -котошее множество орбит $\mathcal{O}(x, W, G)$ плотно в W . Теперь в силу наследственно генерической F_k -эргодичности все отображения ϑ_k , $k \geq k_0$, являются генерическими F_k -константами на W , что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Понятно, что если W выбрано так же, как в лемме 11, то ϑ есть генерическая F -константа на W . Остается показать, что эти константы F -эквивалентны друг другу. Пусть, напротив, существуют два непустых открытых множества $W_1, W_2 \subseteq X_0$ и пара точек $y \neq y'$ в Y такие, что $\vartheta(x) F y$ и $\vartheta(x') F y'$ для котоших множеств $x \in W_1$ и $x' \in W_2$. Противоречие получается тем же методом, что и в конце п. 2.3.

2.5. Остальные индуктивные шаги. Теперь рассматриваются операции (e1), (e2), (e3) из п. 1.2.

Для рассмотрения счетного объединения предположим, что $F_1, F_2, F_3, \dots$ – борелевские ОЭ на “польском” пространстве Y , $F = \bigcup_k F_k$ является ОЭ, а “польское” и генерически турбулентное действие G на X наследственно генерически F_k -эргодично для каждого k , и докажем, что действие остается наследственно генерически F -эргодическим.

Фиксируем непустое открытое множество $X_0 \subseteq X$ и окрестность G_0 элемента 1_G в G такие, что X_0 -котошее множество орбит $\mathcal{O}(x, X_0, G_0)$, $x \in X_0$, плотны в U_0 . Рассмотрим $(\sim_{G_0}^{X_0}, F)$ -инвариантную измеримую по Бэру функцию $\vartheta: X_0 \rightarrow Y$, непрерывную на плотном G_δ -множестве $D \subseteq X_0$. Из инвариантности ϑ следует, что для всякого открытого непустого множества $U \subseteq X_0$ найдутся число k и открытые непустые множества $W \subseteq U$, $Q \subseteq G_0$ такие, что $\vartheta(x) F_k \vartheta(g \cdot x)$ выполнено для любой $(C_{\mathbb{X}} \times C_{\mathbb{G}})$ -генерической над $\mathcal{M}$ пары $\langle x, g \rangle \in W \times Q$. Можно найти элемент $g_0 \in Q \cap \mathcal{M}$ и окрестность $G \subseteq G_0$ элемента 1_G такие, что $g_0 G \subseteq Q$. Как и в доказательстве утверждения 10, мы имеем $\vartheta(x) F_k \vartheta(x')$ для всех $C_{\mathbb{X}}$ -генерических над $\mathcal{M}$ точек $x, x' \in W$, удовлетворяющих $x \sim_G^W x'$. Следовательно, в силу эргодичности, ϑ есть генерическая F_k -константа, значит, и генерическая F -константа на W . То, что эти F -константы F -эквивалентны друг другу, демонстрируется тем же методом, как в конце п. 2.3. Операция счетного пересечения рассматривается аналогично.

Мы видели в п. 1.2, что операция счетного произведения сводится к произведению Фубини, однако имеется и простое независимое рассуждение. Если F_k – ОЭ на пространствах Y_k , то $F = \prod_k F_k$ – ОЭ на пространстве $Y = \prod_k Y_k$. Отображение $\vartheta: X \rightarrow Y$ (E, F) -инвариантно (где E – любое ОЭ на X), если и только если каждое координатное отображение $\vartheta_k(x) = \vartheta(x)(k)$ (E, F_k) -инвариантно, из чего немедленно следует искомый результат.

Операция дизъюнктивной суммы сводится к произведению (см. п. 1.2).

Таким образом, теорема 6 и теорема 1 доказаны.

§3. Приложения

Этот параграф содержит два приложения теоремы 6. Одно из них – это теорема 2. Другое показывает, как теорема Хьёрта, упомянутая во введении (о том, что “турбулентные” ОЭ борелевски несводимы к “польским” действиям группы S_∞ всех перестановок $\mathbb{N}$), может быть получена из теоремы 6 достаточно простыми рассуждениями.

3.1. Доказательство теоремы 2. Фиксируем нетривиальный, как в теореме 2, борелевский P -идеал $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Согласно теореме Солецки (см. п.1.3) су-

существует l.s.c-субмера φ на $\mathbb{N}$ такая, что $\mathcal{X} = \{x \subseteq \mathbb{N} : \varphi_\infty(x) = 0\}$. Положим $r_k = \varphi(\{k\})$.

ЛЕММА 12 [11]. *Если $\mathcal{X}$ отлично от Fin , не является тривиальной вариацией Fin и не изоморфно $\mathcal{I}_3 = 0 \times \text{Fin}$, то найдется множество $W \notin \mathcal{X}$ такое, что $\{r_k\}_{k \in W} \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_n = \{k : r_k \leq \frac{1}{n}\}$ и $U_0 = \mathbb{N}$, таким образом, $U_{n+1} \subseteq U_n$ для всех n . Мы утверждаем, что $\inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi(U_m) > 0$. Иначе любое множество $x \subseteq \mathbb{N}$ принадлежит $\mathcal{X}$, если и только если $x \setminus U_n$ конечно для каждого n . Если множество $N = \{n : U_n \setminus U_{n+1} \text{ бесконечно}\}$ пусто, то, очевидно, $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Если $N \neq \emptyset$ конечно, то $\mathcal{X}$ есть либо Fin (если $U_n = \emptyset$ для почти всех n), либо тривиальная вариация Fin (если U_n непусто для всех n). Наконец, если N бесконечно, то $\mathcal{X}$ изоморфно $0 \times \text{Fin}$ (например, если все множества $D_n = U_n \setminus U_{n+1}$ бесконечны, то $x \in \mathcal{X}$, когда $x \cap D_n$ конечно для всех n). Итак, мы имеем во всех случаях противоречие с предположениями леммы.

Значит, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi(U_m) > \varepsilon$ для всех m . Поскольку φ является l.s.c-субмерой, можно определить возрастающую последовательность чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ и для каждого l конечное множество $w_l \subseteq U_{n_l} \setminus U_{n_{l+1}}$ такое, что $\varphi(w_l) > \varepsilon$. Тогда $W = \bigcup_l w_l \notin \mathcal{X}$ и, очевидно, $\{r_k\}_{k \in W} \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Поскольку $E_{\mathcal{X}|W} \leq_B E_{\mathcal{X}}$, то теперь для теоремы 2 достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 13. *Если $\mathcal{X}$, φ , r_k – такие же, как и выше, и $\{r_k\} \rightarrow 0$, то сдвиговое действие $\mathcal{X}$ на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ генерически турбулентно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathcal{X}$ – “польская” группа (с операцией Δ) в топологии τ , индуцированной метрикой $r(x, y) = \varphi(x \Delta y)$. Действие $\mathcal{X}$ операцией Δ на пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (рассматриваемом с топологией произведения через идентификацию с $2^{\mathbb{N}}$) непрерывно. Остается проверить турбулентность.

Пусть $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Легко видеть, что орбита $[x]_{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \Delta x$ плотна и является множеством первой категории, так что остается проверить, что x – турбулентная точка. Рассмотрим открытое множество $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, содержащее x , и τ -окрестность G нейтрального элемента $\emptyset$ группы $\mathcal{X}$; можно предполагать, что для некоторого k выполнено $X = \{y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : y \cap [0, k] = u\}$, где $u = x \cap [0, k]$, и $G = \{g \in \mathcal{X} : \varphi(g) < \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Докажем, что локальная орбита $\theta(x, X, G)$ где-то плотна (т.е. не является нигде не плотной) в X .

Возьмем число $l \geq k$, достаточно большое для $r_n < \varepsilon$ при всех $n \geq l$. Пусть $v = x \cap [0, l]$; покажем, что орбита $\theta(x, X, G)$ плотна во множестве $Y = \{y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : y \cap [0, l] = v\}$. Рассмотрим открытое множество $Z = \{z \in Y : z \cap [l, j] = w\}$, где $j \geq l$, $w \subseteq [l, j]$. Через z обозначим единственный элемент Z , $z \cap [j, +\infty) = x \cap [j, +\infty)$; тогда $x \Delta z = \{l_1, \dots, l_m\} \subseteq [l, j]$. Каждое $g_i = \{l_i\}$ принадлежит G по выбору l (в самом деле, $l_i \geq l$). Более того, элемент $x_i = g_i \Delta g_{i-1} \Delta \dots \Delta g_1 \Delta x = \{l_1, \dots, l_i\} \Delta x$ принадлежит X для каждого $i = 1, \dots, m$ и $x_m = z$, значит, $z \in \theta(x, X, G)$, что и требовалось доказать.

Лемма и теорема 2 доказаны.

3.2. Несводимость к действиям группы перестановок $\mathbb{N}$. Напомним, что S_∞ – группа всех перестановок $\mathbb{N}$, т.е. взаимно однозначных функций из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$ с суперпозицией в качестве групповой операции. Совместимая “польская” метрика на S_∞ может быть определена через $D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$, где d – обычная “польская” метрика $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, т.е. $d(x, y) = 2^{-m-1}$, где m – наименьшее число, $x(m) \neq y(m)$.

Г. Хьёрт доказал в 1995 г., что турбулентные ОЭ борелевски несводимы к индуцированным “польскими” действиями S_∞ . Доказательство (как, например, в [6], [13]) достаточно сложно, в частности, используются некоторые теоретико-модельные факты и методы, включая анализ Скотта. Мы решили привести упрощенное доказательство, основанное на следующей теореме. Это будет все-таки довольно длинное рассуждение, так как мы даем наброски доказательств некоторых вспомогательных результатов, чтобы сделать изложение более доступным для читателя, не знакомого со специальными вопросами теории действий групп и теории моделей.

ТЕОРЕМА 14. *Любое ОЭ E , индуцированное “польским” действием и сводимое измеримой по Бэру функцией к ОЭ, индуцированному “польским” действием S_∞ , также сводимо измеримой по Бэру функцией¹³ к одному из ОЭ T_γ . Таким образом, по теореме 1 такое ОЭ E не индуцируется генерически турбулентным “польским” действием.*

3.3. Классифицируемость счетными структурами. Отношения изоморфизма разных классов счетных структур относятся к тем, которые индуцированы “польскими” действиями S_∞ . В самом деле, пусть $\mathcal{L} = \{R_i\}_{i \in I}$ – счетный реляционный язык, т.е. $\text{card } I \leq \aleph_0$, и каждое R_i есть m_i -арный реляционный символ. Пусть¹⁴ $\text{Mod } \mathcal{L} = \prod_{i \in I} \mathcal{P}(\mathbb{N}^{m_i})$ – пространство $\mathcal{L}$ -структур на $\mathbb{N}$ как базовом множестве. Логическое действие $j_{\mathcal{L}}$ группы S_∞ на $\text{Mod } \mathcal{L}$ определяется так: если $x = \{x_i\}_{i \in I} \in \text{Mod } \mathcal{L}$ и $g \in S_\infty$, то $y = j_{\mathcal{L}}(g, x) = g \cdot x = \{y_i\}_{i \in I} \in \text{Mod } \mathcal{L}$, откуда имеем

$$\langle k_1, \dots, k_{m_i} \rangle \in x_i \iff \langle g(k_1), \dots, g(k_{m_i}) \rangle \in y_i$$

для всех $i \in I$ и $\langle k_1, \dots, k_{m_i} \rangle \in \mathbb{N}^{m_i}$. Тогда $\langle \text{Mod } \mathcal{L}; j_{\mathcal{L}} \rangle$ – “польское” S_∞ -пространство, а $j_{\mathcal{L}}$ -орбиты в $\text{Mod } \mathcal{L}$ – это в точности классы изоморфизма $\mathcal{L}$ -структур, что является причиной того, чтобы обозначить индуцированное отношение эквивалентности $E_{j_{\mathcal{L}}}^{\text{Mod } \mathcal{L}}$ через $\cong_{\mathcal{L}}$. Все ОЭ вида $\cong_{\mathcal{L}}$ являются, конечно, аналитическими.

Г. Хьёрт [6, п. 2.38] дал определение: ОЭ E классифицируемо счетными структурами, если есть счетный реляционный язык $\mathcal{L}$ такой, что $E \leq_B \cong_{\mathcal{L}}$.

ТЕОРЕМА 15 [1]. *Любое ОЭ, индуцированное “польским” действием S_∞ , классифицируемо счетными структурами.*

¹³Здесь нельзя утверждать наличие борелевской сводимости, поскольку все ОЭ, борелевски сводимые к ОЭ вида T_γ , сами борелевские (так как все ОЭ T_γ борелевские), а с другой стороны, даже ОЭ вида $\cong_{\mathcal{L}}$, вообще говоря, не борелевские (хотя и аналитические).

¹⁴ $X_{\mathcal{L}}$ часто используется вместо $\text{Mod } \mathcal{L}$.

Итак, все ОЭ, индуцированные “польскими” действиями S_∞ (на самом деле, даже любой замкнутой подгруппы S_∞), борелевски сводимы к весьма специальному виду действий S_∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [6, п. 6.19]. Рассмотрим “польское” S_∞ -пространство $\mathbb{X}$ с базисом $\{U_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ и язык $\mathcal{L}$ с символами отношений R_{lk} арности k . Для $x \in \mathbb{X}$ определим $\vartheta(x) \in \text{Mod}_{\mathcal{L}}$ так, что $\vartheta(x) \models R_{lk}(s_0, \dots, s_{k-1})$ в том случае, когда $s_i \neq s_j$ при $i < j < k$ и $g^{-1} \cdot x \in U_l$ всякий раз, когда $g \in S_\infty$ удовлетворяет $\langle s_0, \dots, s_{k-1} \rangle \subset g$. Теперь ϑ сводит $E_{S_\infty}^\mathbb{X}$ к $\cong_{\mathcal{L}}$. Теорема доказана.

3.4. Редукция к счетным графам. Можно было бы ожидать, что более сложные языки $\mathcal{L}$ индуцируют более сложные ОЭ $\cong_{\mathcal{L}}$. Однако этого не происходит: оказывается, что одно бинарное отношение может кодировать структуры любого счетного языка. Через $\mathcal{G}$ обозначим язык (ориентированных бинарных) графов, т.е. $\mathcal{G}$ содержит единственный бинарный предикат, скажем $R(\cdot, \cdot)$.

ТЕОРЕМА 16. *Если $\mathcal{L}$ – счетный реляционный язык, то $\cong_{\mathcal{L}} \leq_{\mathbf{B}} \cong_{\mathcal{G}}$.*

Г. Беккер и А. Кехрис [1, п. 6.1.4] дают доказательство, основанное, в отличие от нашего рассуждения, на кодировке в терминах решеток, хотя на самом деле идея доказательства может быть одна и та же.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{HF}(\mathbb{N})$ – множество всех наследственно конечных множеств над $\mathbb{N}$, причем элементы $\mathbb{N}$ рассматриваются как атомы, а ε – соответствующая “принадлежность” (все $n \in \mathbb{N}$ не имеют ε -элементов, $\{0, 1\}$ не совпадает с 2 и т.д.). Через $\simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})}$ обозначим $\text{HF}(\mathbb{N})$ -версию $\cong_{\mathcal{G}}$, т.е. если $P, Q \subseteq \text{HF}(\mathbb{N})^2$, то $P \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})} Q$ означает, что существует биекция b множества $\text{HF}(\mathbb{N})$ на себя такая, что $Q = b \cdot P = \{\langle b(s), b(t) \rangle : \langle s, t \rangle \in P\}$. Очевидно, $(\cong_{\mathcal{G}}) \sim_{\mathbf{B}} (\simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})})$; таким образом, следует доказать, что $\cong_{\mathcal{L}} \leq_{\mathbf{B}} \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})}$ для любого языка $\mathcal{L}$.

Действие $\circ$ группы S_∞ на $\text{HF}(\mathbb{N})$ определяется так: $g \circ n = g(n)$ для $n \in \mathbb{N}$ и по ε -индукции $g \circ (\{a_1, \dots, a_n\}) = \{g \circ a_1, \dots, g \circ a_n\}$ для всех $a_1, \dots, a_n \in \text{HF}(\mathbb{N})$. Ясно, что если $g \in S_\infty$, то $a \mapsto g \circ a$ – ε -изоморфизм $\text{HF}(\mathbb{N})$.

ЛЕММА 17. *Если $X, Y \subseteq \text{HF}(\mathbb{N})$ – ε -транзитивные подмножества $\text{HF}(\mathbb{N})$, множества $\mathbb{N} \setminus X$ и $\mathbb{N} \setminus Y$ бесконечны и $\varepsilon \upharpoonright X \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})} \varepsilon \upharpoonright Y$, то существует перестановка $f \in S_\infty$ такая, что $Y = f \circ X = \{f \circ s : s \in X\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположения $\varepsilon \upharpoonright X \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})} \varepsilon \upharpoonright Y$ следует, что существует ε -изоморфизм $\pi: X \xrightarrow{\text{на}} Y$. Легко видеть, что $\pi \upharpoonright (X \cap \mathbb{N})$ – биекция $X_0 = X \cap \mathbb{N}$ на $Y_0 = Y \cap \mathbb{N}$, значит, имеется $f \in S_\infty$ такое, что $f \upharpoonright X_0 = \pi \upharpoonright X_0$, и тогда выполнено $f \circ s = \pi(s)$ для каждого $s \in X$. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 16, сначала покажем, что имеет место $\cong_{\mathcal{G}(m)} \leq_{\mathbf{B}} \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})}$ для каждого $m \geq 3$, где $\mathcal{G}(m)$ – язык с единственным m -арным предикатом. Заметим, что $\langle i_1, \dots, i_m \rangle \in \text{HF}(\mathbb{N})$ всякий раз, когда $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$. Положим $\Theta(x) = \{\vartheta(s) : s \in x\}$ для каждого $x \in \text{Mod}_{\mathcal{G}(m)} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$, где $\vartheta(s) = \text{TC}_\varepsilon(\{\langle 2i_1, \dots, 2i_m \rangle\})$ для всех $s = \langle i_1, \dots, i_m \rangle \in \mathbb{N}^m$, и, наконец, для $X \subseteq \text{HF}(\mathbb{N})$ пусть $\text{TC}_\varepsilon(X)$ – наименьшее из тех ε -транзитивных множеств $T \subseteq \text{HF}(\mathbb{N})$, которые удовлетворяют $X \subseteq T$. Из леммы 17 легко следует, что $x \cong_{\mathcal{G}(m)} y$ равносильно $\varepsilon \upharpoonright \Theta(x) \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})} \varepsilon \upharpoonright \Theta(y)$, что завершает доказательство соотношения $\cong_{\mathcal{G}(m)} \leq_{\mathbf{B}} \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})}$.

Остается вывести $\cong_{\mathcal{L}'} \leq_B \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})}$, где $\mathcal{L}'$ – язык с бесконечным числом бинарных предикатов. В этом случае $\text{Mod}_{\mathcal{L}'} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)^{\mathbb{N}}$, так что можно предположить, что каждое $x \in \text{Mod}_{\mathcal{L}'}$ имеет вид $x = \{x_n\}_{n \geq 1}$, где $x_n \subseteq (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ для всех n . Пусть $\Theta(x) = \{s_n(k, l) : n \geq 1 \wedge \langle k, l \rangle \in x_n\}$ для каждого такого x , где $s_n(k, l) = \text{TC}_\varepsilon(\{\{\dots\{k, l\}\dots\}, 0\})$ с $n + 2$ парами скобок $\{, \}$. Тогда Θ есть непрерывная редукция $\cong_{\mathcal{L}'} \text{ к } \simeq_{\text{HF}(\mathbb{N})}$. Теорема доказана.

3.5. Доказательство теоремы 14. Доказательство (являющееся вариантом рассуждения, приведенного в [4]) основано на анализе Скотта.

Определим семейство борелевских бинарных отношений $\equiv_{st}^\alpha$ на $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, где $\alpha < \omega_1$ и $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, следующим образом:

- (i) $A \equiv_{st}^0 B$, когда $A(s_i, s_j) \iff B(t_i, t_j)$ для всех $i, j < \text{lh } s = \text{lh } t$;
- (ii) $A \equiv_{st}^{\alpha+1} B$, когда $\forall k \exists l (A \equiv_{s \wedge k, t \wedge l}^\alpha B)$ и $\forall l \exists k (A \equiv_{s \wedge k, t \wedge l}^\alpha B)$;
- (iii) если $\lambda < \omega_1$ пределен, то $A \equiv_{st}^\lambda B$, когда $A \equiv_{st}^\alpha B$ для всех $\alpha < \lambda$.

Определим $\langle s, A \rangle \equiv^\alpha \langle t, B \rangle$, если $A \equiv_{st}^\alpha B$; тогда, индукцией по α , каждое $\equiv^\alpha$ является борелевским ОЭ на $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ и $\equiv^\beta \subseteq \equiv^\alpha$ при $\alpha < \beta$.

Рассмотрим ОЭ $E = E_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$, индуцированное “польским” действием “польской” группы $\mathbb{G}$ на “польском” пространстве $\mathbb{X}$, которое сводится к “польскому” действию S_∞ при помощи измеримой по Бэру функции. Согласно теоремам 15, 16 и предложению 3 существует измеримая по Бэру редукция $\vartheta: \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ отношения E к $\cong_{\mathcal{G}}$. Она непрерывна на плотном $\mathbf{G}_\delta$ -множестве $D_0 \subseteq \mathbb{X}$. Напомним, что для $A, B \subseteq \mathbb{N}^2$ соотношение $A \cong_{\mathcal{G}} B$ означает, что найдется функция $f \in S_\infty$ такая, что $A(k, l) \iff B(f(k), f(l))$ для всех k, l . Индукцией по α мы легко получаем $\cong_{\mathcal{G}} \subseteq \equiv_{st}^\alpha$, где $t = f \circ s$, в частности, $\cong_{\mathcal{G}} \subseteq \equiv_{\Lambda\Lambda}^\alpha$, где Λ – пустая последовательность. Поскольку ϑ является редукцией, эквивалентность $x E y \iff \vartheta(x) \cong_{\mathcal{G}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y . Наша цель – найти плотное $\mathbf{G}_\delta$ -множество $D \subseteq D_0$ и ординал $\alpha < \omega_1$ такие, что

(*) импликация $x E y \implies \vartheta(x) \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^\alpha \vartheta(y)$ верна для всех $x, y \in D$.

Для этого фиксируем счетную транзитивную модель $\mathcal{M}$ теории ZFHC (см. выше). Предполагается, что пространство $\mathbb{X}$, группа $\mathbb{G}$, ее действие на $\mathbb{X}$, множество D_0 и функция $\vartheta \upharpoonright D_0$ кодированы в $\mathcal{M}$ в том смысле, как указано в доказательстве леммы 9. Покажем, что множество D всех генерических по Коэну над $\mathcal{M}$ точек $\mathbb{X}$ (т. е. плотное $\mathbf{G}_\delta$ -подмножество $\mathbb{X}$, оно включено в D_0) удовлетворяет (*).

Пусть $x, y \in D$. Предположим сначала, что пара $\langle x, y \rangle$ является генерической по Коэну над $\mathcal{M}$. По выбору ϑ , если $x E y$, мы имеем $\vartheta(x) \not\equiv_{\mathcal{G}} \vartheta(y)$, значит, по теореме абсолютности Мостовского соотношение $\vartheta(x) \not\equiv_{\mathcal{G}} \vartheta(y)$ выполнено в $\mathcal{M}[x, y]$. Следовательно, рассуждая релятивизованно к модели $\mathcal{M}[x, y]$ (это все еще модель ZFHC, см. п. 2.3), находим ординал $\alpha \in \text{Ord}^{\mathcal{M}} = \text{Ord}^{\mathcal{M}[x, y]}$, $\vartheta(x) \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^\alpha \vartheta(y)$. Более того, поскольку форсинг Коэна удовлетворяет CCC (условию счетности антицепей), существует ординал $\alpha \in \mathcal{M}$ такой, что $\vartheta(x) \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^\alpha \vartheta(y)$ для всех генерических по Коэну над $\mathcal{M}$ пар $\langle x, y \rangle \in D^2$, $x E y$. Остается показать, что это также выполнено для всех пар $x, y \in D$, $x E y$, которые не образуют генерическую по Коэну пару.

Рассмотрим генерический по Коэну над $\mathcal{M}[x, y]$ элемент $g \in \mathbb{G}$. Легко видеть, что $z = g \cdot x \in \mathbb{X}$ – генерическая по Коэну над $\mathcal{M}[x, y]$ точка (поскольку действие непрерывно), более того, $x E z$, значит, $y E z$. Однако y генерично по Коэну над $\mathcal{M}$,

а z генерично над $\mathfrak{M}[y]$, значит, пара $\langle y, z \rangle$ генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$, таким образом, $\vartheta(z) \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y)$ по доказанному выше. С другой стороны, $\vartheta(x) \equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(z)$ выполнено, поскольку $x \in z$. Имеем в конце концов $\vartheta(x) \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y)$, что и требуется в (*).

Итак, $x \in y \iff \vartheta(x) \equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y)$ для всех $x, y \in D$. Ясно, что ϑ можно переопределить на дополнении к D в $\mathbb{X}$ так, что эквивалентность выполнится для всех $x, y \in \mathbb{X}$, иными словами, измененная ϑ есть (так как $\vartheta \upharpoonright D$ непрерывна, а D – плотное $\mathbf{G}_{\delta}$ -множество) измеримая по Бэру редукция $\mathbf{E} \kappa \equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha}$.

Следующий результат завершает доказательство теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Каждое $\text{ОЭ} \equiv^{\alpha}$ борелевски сводимо к одному из $\mathbf{T}_{\gamma}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнено $\equiv^0 \leq_{\mathbf{B}} \mathbf{T}_0$, так как $\equiv^0$ имеет счетно много классов эквивалентности и все они открыто-замкнуты. Чтобы провести шаг $\alpha \mapsto \alpha + 1$, заметим, что отображение $\langle s, A \rangle \mapsto \{\langle s^{\wedge k}, A \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1} \kappa (\equiv^{\alpha})^{\infty}$. Пусть $\lambda = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ – предельный ординал и $\mathbf{R} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \equiv^{\alpha_n}$, т. е. $\mathbf{R}$ есть ОЭ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, определенное так, что $\langle m, s, A \rangle \mathbf{R} \langle n, t, B \rangle$, когда $m = n$ и $A \equiv_{st}^{\alpha_m} B$. Однако отображение $\langle s, A \rangle \mapsto \{\langle m, s, A \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ является борелевской редукцией $\equiv^{\lambda} \kappa \mathbf{R}^{\infty}$.

Теорема 14 доказана.

§ 4. Приколотые ОЭ и несводимость $\mathbf{T}_2$

Этот параграф включает теорему, согласно которой $\text{ОЭ} \mathbf{T}_2$ (равенство счетных множеств вещественных чисел) борелевски не сводится к ОЭ из семейства *приколотых* ОЭ , которое включает, например, непрерывные действия CLI-групп, некоторые не обязательно “полишабельные” идеалы, ОЭ с классами эквивалентности в $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$, и замкнуто относительно произведений Фубини по модулю Fin . Определение этого семейства основано на свойстве скорее метаматематического характера, которое мы взяли из статьи [5].

4.1. Приколотые ОЭ . Прежде всего, договоримся, что если X – аналитическое множество в универсуме всех множеств $\mathbb{V}$ (в частности, X может быть борелевским) и рассматривается генерическое расширение $\mathbb{V}^+$ универсума $\mathbb{V}$, то через $X^{\sharp}$ будет обозначаться результат той последовательности операций, которая заключена в определении X , но примененной в $\mathbb{V}^+$. Это определение корректно по теореме абсолютности Шенфилда, и легко видеть, что $X = X^{\sharp} \cap \mathbb{V}$.

Например, если в универсуме $\mathbb{V}$ отношение $\mathbf{E}$ есть аналитическое ОЭ на “польском” пространстве $\mathbb{X}$, то, по теореме абсолютности Шенфилда, $\mathbf{E}^{\sharp}$ – аналитическое ОЭ на $\mathbb{X}^{\sharp}$. Если $x \in \mathbb{X}$ (значит, $x \in \mathbb{V}$), то $\mathbf{E}$ -класс $[x]_{\mathbf{E}} \subseteq \mathbb{X}$ точки x (определенный в $\mathbb{V}$) включен в единственный $\mathbf{E}^{\sharp}$ -класс $[x]_{\mathbf{E}^{\sharp}} \subseteq \mathbb{X}^{\sharp}$ (в $\mathbb{V}^+$). Классы вида $[x]_{\mathbf{E}^{\sharp}}$, $x \in \mathbb{X}$, принадлежат к более широкой, вообще говоря, категории $\mathbf{E}^{\sharp}$ -классов, допускающих описание с точки зрения универсума $\mathbb{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Допустим, что $\mathbb{P}$ – форсинг в $\mathbb{V}$. *Виртуальным $\mathbf{E}$ -классом* называется всякий $\mathbb{P}$ -терм ξ такой, что $\mathbb{P}$ вынуждает $\xi \in \mathbb{X}^{\sharp}$ и $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ вынуждает

$\xi_{\text{л}} E^{\sharp} \xi_{\text{пр}}$ ¹⁵. Виртуальный класс называется *приколотым*, если существует в $\mathbb{V}$ точка $x \in \mathbb{X}$, которая “прикалывает” его в том смысле, что $\mathbb{P}$ вынуждает $x E^{\sharp} \xi$. Наконец, аналитическое ОЭ E *приколото*, если для любого форсинга $\mathbb{P} \in \mathbb{V}$ все виртуальные E -классы приколоты.

Если ξ – виртуальный E -класс, то в любом расширении $\mathbb{V}^+$ универсума $\mathbb{V}$ выполнено следующее: если U и V – генерические подмножества $\mathbb{P}$, то точки $x = \xi[U]$ и $y = \xi[V]$ принадлежат $\mathbb{X}^{\sharp}$ и удовлетворяют $x E^{\sharp} y$, следовательно, ξ индуцирует $E^{\sharp}$ -класс в расширении. Если ξ приколот, то этот класс содержит элемент из исходного универсума $\mathbb{V}$, другими словами, приколотые виртуальные классы индуцируют классы $E^{\sharp}$ -эквивалентности вида $[x]_{E^{\sharp}}$, $x \in \mathbb{V}$, в расширениях $\mathbb{V}$.

Докажем ниже, что T_2 не приколото, более того, T_2 борелевски не сводится ни к какому приколотому аналитическому ОЭ. В дополнение дадим упрощенное доказательство теоремы Хьёрта о том, что непрерывные действия “польских” СЛГ-групп не индуцируют приколотые ОЭ, представим семейство приколотых ОЭ, порожденных $F_{\sigma\delta}$ -идеалами, докажем, что борелевские ОЭ с классами эквивалентности типа $G_{\delta\sigma}$ приколоты, и докажем, что класс всех приколотых аналитических ОЭ замкнут относительно произведения Фубини по модулю Fin .

4.2. Приколотые ОЭ и T_2 . Напомним, что, с точностью до $\sim_B$, отношение T_2 есть ОЭ на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, определенное так: $x T_2 y$, когда $\text{gap } x = \text{gap } y$.

ЛЕММА 20. *Отношение T_2 не приколото. Если E, F – аналитические ОЭ, $E \leq_B F$ и F приколото, то E также приколото. Следовательно, T_2 борелевски не сводится ни к одному приколотому аналитическому ОЭ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что T_2 не приколото, рассмотрим в $\mathbb{V}$ форсинг $\mathbb{P} = \text{Coll}(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$, порождающий генерическую функцию $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} 2^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{P}$ состоит из всех функций $p: u \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, где $u \subseteq \mathbb{N}$ конечно). $\mathbb{P}$ -терм ξ для $\text{gap } f = \{f(n): n \in \mathbb{N}\}$ является виртуальным T_2 -классом, но он не приколот, поскольку $2^{\mathbb{N}}$ несчетно в исходном универсуме $\mathbb{V}$.

Допустим, что $\vartheta: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ в $\mathbb{V}$ является борелевской редукцией E к F , где $\mathbb{X} = \text{dom } E$ и $\mathbb{Y} = \text{dom } F$. Можно предполагать, что $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = 2^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим форсинг $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}$ -терм ξ , являющийся виртуальным E -классом. По теореме абсолютности Шенфилда $\vartheta^{\sharp}$ будет редукцией $E^{\sharp}$ к $F^{\sharp}$ в любом расширении $\mathbb{V}$, значит, $\mathbb{P}$ -терм σ для $\vartheta^{\sharp}(\xi)$ также есть виртуальный F -класс. Поскольку F приколото, найдется $y \in \mathbb{Y}$ такое, что $\mathbb{P}$ вынуждает $y F^{\sharp} \sigma$. Заметим, что в $\mathbb{P}$ -генерическом расширении выполнено $y F^{\sharp} \vartheta^{\sharp}(x)$ для некоторого $x \in \mathbb{X}^{\sharp}$, значит, по теореме Шенфилда в исходном универсуме имеется $x \in \mathbb{X}$ такое, что $y F \vartheta(x)$. Легко видеть, что $\mathbb{P}$ вынуждает $x E^{\sharp} \xi$. Лемма доказана.

4.3. Произведения Фубини приколотых ОЭ. Напомним, что произведение Фубини $E = \prod_{k \in \mathbb{N}} E_k / \text{Fin}$ данных ОЭ E_k на $\mathbb{X}_k$ по модулю Fin есть ОЭ на $\mathbb{X} = \prod_k \mathbb{X}_k$, определенное так, что выполнено $x E y$, когда выполнено $x(k) E_k y(k)$ для всех, кроме конечного числа, индексов k .

¹⁵ $\xi_{\text{л}}$ и $\xi_{\text{пр}}$ – это $(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ -термы, означающие терм ξ , ассоциированный с соответственно левым и правым факторами $\mathbb{P}$ в произведении форсингов, формально, $\xi_{\text{л}}[U \times V] = \xi[U]$ и $\xi_{\text{пр}}[U \times V] = \xi[V]$ для любого $(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ -генерического множества $U \times V$, где, скажем, $\xi[U]$ – интерпретация терма ξ через генерическое множество U .

ЛЕММА 21. *Семейство всех аналитических приколотов ОЭ замкнуто относительно произведений Фубини по модулю Fin.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что аналитические ОЭ E_k на “польских” пространствах $\mathbb{X}_k$ приколоты. Докажем, что их произведение Фубини, т.е. ОЭ $E = \prod_{k \in \mathbb{N}} E_k / \text{Fin}$ на $\mathbb{X} = \prod_k \mathbb{X}_k$, также приколото. Рассмотрим форсинг $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}$ -терм ξ , являющийся виртуальным E -классом. Существуют число k_0 и “условия” $p, q \in \mathbb{P}$ такие, что $\langle p, q \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-вынуждает $\xi_{\text{л}}(k) E_k^\sharp \xi_{\text{пр}}(k)$ для всех $k \geq k_0$. Поскольку все E_k суть ОЭ, мы заключаем, что “условие” $\langle p, p \rangle$ также вынуждает $\xi_{\text{л}}(k) E_k^\sharp \xi_{\text{пр}}(k)$ для всех $k \geq k_0$. Следовательно, так как E_k приколоты, существует в $\mathbb{V}$ последовательность точек $x_k \in \mathbb{X}_k$ таких, что p $\mathbb{P}$ -вынуждает $x_k E_k^\sharp \xi(k)$ для всех $k \geq k_0$. Рассмотрим $x \in \mathbb{X}$ такое, что $x(k) = x_k$ для всех $k \geq k_0$ (значения $x(k) \in \mathbb{X}_k$ при $k < k_0$ могут быть любые). Тогда p , очевидно, $\mathbb{P}$ -вынуждает $x E^\sharp \xi$.

Остается показать, что каждое $q \in \mathbb{P}$ вынуждает $x E^\sharp \xi$. Пусть, напротив, некоторое $q \in \mathbb{P}$ вынуждает то, что $x E^\sharp \xi$ не имеет места. Рассмотрим пару $\langle p, q \rangle$ как “условие” в $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$: оно вынуждает $x E^\sharp \xi_{\text{л}}$ и $\neg x E^\sharp \xi_{\text{пр}}$, а также $\xi_{\text{л}} E^\sharp \xi_{\text{пр}}$ по выбору E и ξ . Противоречие. Лемма доказана.

4.4. Инвариантные слева действия и приколотые ОЭ. Напомним, что “польская” группа $\mathbb{G}$ называется *CLI-группой* (complete left-invariant), если она допускает совместимую полную инвариантную слева метрику. Тогда $\mathbb{G}$ также допускает и совместимую полную инвариантную справа метрику, что и будет практически использовано.

ТЕОРЕМА 22 [5]. *Любое ОЭ $E = E_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$, индуцированное “польским” действием CLI-группы $\mathbb{G}$ на “польском” пространстве $\mathbb{X}$, приколото, значит, T_2 борелевски не сводится к E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим форсинг $\mathbb{P}$ и виртуальный E -класс ξ . Через $\leq$ обозначается частичный порядок на $\mathbb{P}$; как обычно, $p \leq q$ означает, что p – более сильное “условие”. Фиксируем совместимую полную инвариантную справа метрику ρ на $\mathbb{G}$. Для $\varepsilon > 0$ положим $G_\varepsilon = \{g \in \mathbb{G} : \rho(g, 1_{\mathbb{G}}) < \varepsilon\}$. Скажем, что $q \in \mathbb{P}$ имеет размер $\leq \varepsilon$, если $\langle q, q \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-вынуждает существование $g \in G_\varepsilon^\sharp$ такого, что $\xi_{\text{л}} = g \cdot \xi_{\text{пр}}$.

ЛЕММА 23. *Если $q \in \mathbb{P}$ и $\varepsilon > 0$, то существует “условие” $r \in \mathbb{P}$, $r \leq q$, размера $\leq \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, для каждого $r \in \mathbb{P}$, $r \leq q$, имеется пара “условий” $r', r'' \in \mathbb{P}$, более сильных, чем r , и таких, что “условие” $\langle r', r'' \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-вынуждает несуществование $g \in G_\varepsilon^\sharp$ такого, что $\xi_{\text{л}} = g \cdot \xi_{\text{пр}}$. Применяя в таком генерическом расширении $\mathbb{V}^+$ универсума $\mathbb{V}$, где $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \cap \mathbb{V}$ счетно, обычную расщепляющую конструкцию, находим несчетное множество $\mathcal{U}$ генерических множеств $U \subseteq \mathbb{P}$, $q \in U$, такое, что все пары $\langle U, V \rangle$ из $U \neq V$ в $\mathcal{U}$ суть $(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ -генерические (над $\mathbb{V}$), значит, нет $g \in G_\varepsilon^\sharp$ такого, что $\xi[U] = g \cdot \xi[V]$ ¹⁶.

Рассмотрим $U_0 \in \mathcal{U}$. Каждому $U \in \mathcal{U}$ можно сопоставить в $\mathbb{V}^+$ элемент $g_U \in G_\varepsilon^\sharp$ такой, что $\xi[U] = g_U \cdot \xi[U_0]$, тогда $g_U \notin G_\varepsilon^\sharp$ (см. выше). Более того,

¹⁶ $\xi[U]$ есть интерпретация $\mathbb{P}$ -терма ξ посредством генерического множества U .

мы имеем $g_V g_U^{-1} \cdot \xi[U] = \xi[V]$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$, значит, $g_V g_U^{-1} \notin G_\varepsilon^\#$ при $U \neq V$, что влечет $\rho(g_U, g_V) \geq \varepsilon$ согласно инвариантности метрики справа. Но это противоречит сепарабельности G . Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы 22. Предположим, что, напротив, “условие” $p \in \mathbb{P}$ вынуждает отсутствие точек $x \in \mathbb{X}$ (в исходном универсуме $\mathbb{V}$) таких, что $x \mathbf{E}^\# \xi$. Согласно лемме 23 существуют в $\mathbb{V}$ последовательности “условий” $p_n \in \mathbb{P}$ размера $\leq 2^{-n}$ и замкнутые множества $X_n \subseteq \mathbb{X}$ $\mathbb{X}$ -диаметра $\leq 2^{-n}$ такие, что $p_0 \leq p$, $p_{n+1} \leq p_n$, $X_{n+1} \subseteq X_n$ и p_n вынуждает $\xi \in X_n^\#$ для каждого n . Пусть x – общая точка множеств X_n в $\mathbb{V}$. Утверждается, что p_0 вынуждает $x \mathbf{E}^\# \xi$.

В самом деле, иначе некоторое $q \in \mathbb{P}$, $q \leq p_0$, вынуждает $\neg x \mathbf{E}^\# \xi$. Рассмотрим расширение $\mathbb{V}^+$ универсума $\mathbb{V}$, содержащее для каждого n генерическое множество $U_n \subseteq \mathbb{P}$, $p_n \in U_n$, такое, что каждая пара $\langle U_n, U_{n+1} \rangle - (\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ -генерическая (над $\mathbb{V}$) и, кроме того, $q \in U_0$. Пусть $x_n = \xi[U_n]$ (элемент $\mathbb{X}^\#$); тогда $\{x_n\} \rightarrow x$. Для каждого n как U_n , так и U_{n+1} содержат p_n , значит, поскольку p_n имеет размер $\leq 2^{-n-1}$, существует $g_{n+1} \in G_\varepsilon^\#$ такое, что $x_{n+1} = g_{n+1} x_n$. Тогда $x_n = h_n \cdot x_0$, где $h_n = g_n \dots g_1$. Однако $\rho(h_n, h_{n-1}) = \rho(g_n, 1_\mathbb{G}) \leq 2^{-n+1}$ по правой инвариантности метрики ρ , значит, $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность Коши в $G^\#$. Через $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \in G^\#$ обозначим ее предел. Поскольку рассматриваемое действие непрерывно, $x = \lim_n x_n = h \cdot x_0$. Следовательно, мы имеем $x \mathbf{E}^\# x_0$ в $\mathbb{V}^+$, значит, также и в $\mathbb{V}[U_0]$. Однако $x_0 = \xi[U_0]$, в то время как $q \in U_0$ вынуждает $\neg x \mathbf{E}^\# \xi$. Противоречие.

Итак, p_0 $\mathbb{P}$ -вынуждает $x \mathbf{E}^\# \xi$. Тогда все $r \in \mathbb{P}$ вынуждают $x \mathbf{E}^\# \xi$. В самом деле, если $r \in \mathbb{P}$ вынуждает $\neg x \mathbf{E}^\# \xi$, то пара $\langle p_0, r \rangle - (\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ -вынуждает $x \mathbf{E}^\# \xi_\text{л}$ и $\neg x \mathbf{E}^\# \xi_\text{пр}$, что противоречит тому, что $(\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ -вынуждает $\xi_\text{л} \mathbf{E}^\# \xi_\text{пр}$. Теорема 22 доказана.

4.5. ОЭ с $G_{\delta\sigma}$ -классами. Рассмотрим не приколотое ОЭ T_2 класса $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$. Следующая теорема показывает, что это наиболее простой класс не приколотых борелевских ОЭ.

ТЕОРЕМА 24. *Каждое борелевское ОЭ $\mathbf{E}$, все классы эквивалентности которого – множества $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$, является приколотым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (основано на идее, сообщенной авторам Хтьёртом). Можно предполагать, что $\text{dom } \mathbf{E} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Из теоремы Луво [14] следует, что существует борелевская функция γ , определенная на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ так, что $\gamma(x)$ есть $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$ -код $[x]_\mathbf{E}$ для каждого $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, т. е., например, $\gamma(x) \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и

$$[x]_\mathbf{E} = \bigcup_i \bigcap_j \bigcup_{\langle i, j, s \rangle \in \gamma(x)} B_s, \quad B_s = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : s \subset a\}, \quad s \in \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Рассмотрим форсинг $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}; \leq \rangle$ и виртуальный $\mathbf{E}$ -класс ξ , таким образом, $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ вынуждает $\xi_\text{л} \mathbf{E}^\# \xi_\text{пр}$, значит, имеются число i_0 и “условие” $\langle p_0, q_0 \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, вынуждающее $\xi_\text{л} \in \vartheta^\#(\xi_\text{пр})$, где $\vartheta(x) = \bigcap_j \bigcup_{\langle i_0, j, s \rangle \in \gamma(x)} B_s$ для $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Главной идеей доказательства является замена $\mathbb{P}$ форсингом Коэна. Обозначим через $\mathbb{S}$ множество всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ таких, что p_0 не $\mathbb{P}$ -вынуждает $s \not\subset \xi$. Рассмотрим $\mathbb{S}$ как форсинг, и $s \subseteq t$ (т. е. t продолжает s) означает, что t – более сильное

“условие”; пустая последовательность Λ является слабейшим “условием” в $\mathbb{S}$. Если $s \in \mathbb{S}$, то существует по меньшей мере одно n такое, что $s^\wedge n \in \mathbb{S}$, следовательно, $\mathbb{S}$ вынуждает элемент $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{S}$ -имя которого будет $\mathbf{a}$.

ЛЕММА 25. Пара $\langle \Lambda, q_0 \rangle$ $(\mathbb{S} \times \mathbb{P})$ -вынуждает $\mathbf{a} \in \vartheta^\sharp(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае некоторое “условие” $\langle s_0, q \rangle \in \mathbb{S} \times \mathbb{P}$, $q \leq q_0$, вынуждает $\mathbf{a} \notin \vartheta^\sharp(\xi)$. По определению ϑ можно предполагать, что

$$\langle s_0, q \rangle \text{ } (\mathbb{S} \times \mathbb{P})\text{-вынуждает} \quad \neg \exists s (\langle i_0, j_0, s \rangle \in \gamma(\xi) \wedge s \subset \mathbf{a}) \quad (5)$$

для некоторого j_0 . Так как $s_0 \in \mathbb{S}$, имеется “условие” $p' \in \mathbb{P}$, $p' \leq p_0$, $\mathbb{P}$ -вынуждающее $s_0 \subset \xi$. По выбору $\langle p_0, q_0 \rangle$ можно предполагать, что

$$\langle p', q' \rangle \text{ } (\mathbb{P} \times \mathbb{P})\text{-вынуждает} \quad \langle i_0, j_0, s \rangle \in \gamma(\xi_{\text{пр}}) \wedge s \subset \xi_{\text{л}}$$

для подходящих $s \in \mathbb{S}$ и $q' \in \mathbb{P}$, $q' \leq q$. Это означает, что:

- 1) p' $\mathbb{P}$ -вынуждает $s \subset \xi$;
- 2) q' $\mathbb{P}$ -вынуждает $\langle i_0, j_0, s \rangle \in \gamma(\xi)$.

В частности, согласно сказанному выше p' вынуждает $s_0 \subset \xi$ и $s \subset \xi$, значит, либо $s \subseteq s_0$ – тогда пусть $s' = s_0$, либо $s_0 \subset s$ – тогда пусть $s' = s$. В обоих случаях $\langle s', q' \rangle$ $(\mathbb{S} \times \mathbb{P})$ -вынуждает $\langle i_0, j_0, s \rangle \in \gamma(\xi)$ и $s \subset \mathbf{a}$. Противоречие с (5). Лемма доказана.

Заметим, что $\mathbb{S}$ – подфорсинг форсинга Коэна $\mathbb{C} = \mathbb{N}^{<\omega}$, значит, согласно лемме 25 существует $\mathbb{C}$ -терм σ такой, что $\langle \Lambda, q_0 \rangle$ $(\mathbb{C} \times \mathbb{P})$ -вынуждает $\sigma \in \vartheta^\sharp(\xi)$, следовательно, вынуждает $\sigma \mathbf{E}^\sharp \xi$. Рассматривая форсинг $\mathbb{C} \times \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, выводим, что, вообще, $\mathbb{C} \times \mathbb{P}$ вынуждает $\sigma \mathbf{E}^\sharp \xi$. Отсюда следует, что, во-первых, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ вынуждает $\sigma_{\text{л}} \mathbf{E}^\sharp \sigma_{\text{пр}}$ и, во-вторых, для доказательства теоремы достаточно найти $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{V}$ такой, что $\mathbb{C}$ вынуждает $x \mathbf{E}^\sharp \sigma$. Этим мы и займемся.

Через $\mathbf{a}$ обозначим $\mathbb{C}$ -имя генерической по Коэну точки $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Терм σ может иметь сложную природу, однако можно его заменить термом вида $f^\sharp(\mathbf{a})$, где $f: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – борелевская функция в исходном универсуме $\mathbb{V}$. Из сказанного выше вытекает, что для любой $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ -генерической над $\mathbb{V}$ пары $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеем $f^\sharp(\mathbf{a}) \mathbf{E}^\sharp f^\sharp(\mathbf{b})$. Отсюда следует, что $f^\sharp(\mathbf{a}) \mathbf{E}^\sharp f^\sharp(\mathbf{b})$ выполнено даже для любой пары отдельно генерических по Коэну $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Таким образом, в том генерическом расширении $\mathbb{V}$, где множество всех генерических по Коэну точек котошее, найдется котошее $\mathbf{G}_\delta$ -множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такое, что $f^\sharp(a) \mathbf{E}^\sharp f^\sharp(b)$ для всех $a, b \in X$. В силу теоремы абсолютности Шенфилда утверждение о существовании такого множества X истинно также и в $\mathbb{V}$, значит, в $\mathbb{V}$ имеется точка $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такая, что $x \mathbf{E} f(a)$ выполнено для котошего множества точек $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это опять абсолютное по Шенфилду свойство x , значит, $\mathbb{C}$ вынуждает $x \mathbf{E}^\sharp f^\sharp(\mathbf{a})$, что и требовалось доказать.

Теорема 24 доказана.

4.6. Одно семейство приколотых идеалов. Назовем борелевский идеал $\mathcal{I}$ *приколотым*, если таково индуцированное ОЭ $\mathbf{E}_{\mathcal{I}}$. Из теоремы 22 следует, что все P -идеалы приколоты, ибо борелевские P -идеалы все “полишабельны” [15], а “польские” абелевы группы являются CLI-группами. Однако существуют и не “полишабельные” приколотые идеалы.

Представим здесь одно семейство таких идеалов. Предположим, что $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – семейство полунепрерывных снизу (l.s.c.) субмер на $\mathbb{N}$. Пусть

$$\text{Exh}_{\{\varphi_i\}} = \{X \subseteq \mathbb{N} : \varphi_\infty(X) = 0\}, \quad \varphi_\infty(X) = \limsup_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(X),$$

– истощающий идеал последовательности субмер. По теореме Солецкого [15] для каждого борелевского P -идеала $\mathcal{I}$ существует l.s.c.-субмера φ такая, что $\mathcal{I} = \text{Exh}_{\{\varphi_i\}} = \text{Exh}_\varphi$, где $\varphi_i(x) = \varphi(x \cap [i, \infty))$, однако, например, не “полишабельный” идеал $\mathcal{I}_1 = \text{Fin} \times 0$ также имеет вид $\text{Exh}_{\{\varphi_i\}}$, где для $x \subseteq \mathbb{N}^2$ определяется $\varphi_i(x) = 0$ или $\varphi_i(x) = 1$, когда $x \subseteq \{0, \dots, n-1\} \times \mathbb{N}$ или $x \not\subseteq \{0, \dots, n-1\} \times \mathbb{N}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 26. *Все идеалы вида $\text{Exh}_{\{\varphi_i\}}$ приколоты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{I} = \text{Exh}_{\{\varphi_i\}}$, где все φ_i – l.s.c.-субмеры на $\mathbb{N}$. Можно предполагать, что субмеры φ_i убывают, т.е. $\varphi_{i+1}(x) \leq \varphi_i(x)$ для каждого x , поскольку если это не так, то рассмотрим l.s.c.-субмеры $\varphi'_i(x) = \sup_{j \geq i} \varphi_j(x)$.

Допустим, что $E = E_{\mathcal{I}}$ не приколото. Тогда существуют форсинг $\mathbb{P}$, виртуальный E -класс ξ и “условие” $p \in \mathbb{P}$, которое $\mathbb{P}$ -вынуждает $\neg x E^\# \xi$ для каждого $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathbb{V}$. По определению для всех $p' \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ существуют $i \geq n$ и “условия” $q, r \in \mathbb{P}$, $q, r \leq p'$, такие, что $\langle q, r \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-вынуждает неравенство $\varphi_i(\xi_\perp \Delta \xi_{\text{пр}}) \leq 2^{-n-1}$, следовательно, $\langle q, q \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-вынуждает $\varphi_i(\xi_\perp \Delta \xi_{\text{пр}}) \leq 2^{-n}$. Заключаем, что в $\mathbb{V}$ существуют последовательность чисел $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$, последовательность $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots$ “условий” из $\mathbb{P}$ и множество $u_n \subseteq [0, n)$ для каждого n такие, что $p_0 \leq p$ и

- 1) каждое p_n $\mathbb{P}$ -вынуждает $\xi \cap [0, n) = u_n$;
- 2) каждое $\langle p_n, p_n \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-вынуждает $\varphi_{i_n}(\xi_\perp \Delta \xi_{\text{пр}}) \leq 2^{-n}$.

В универсуме $\mathbb{V}$ положим $a = \bigcup_n u_n$; тогда $a \cap [0, n) = u_n$ для всех n . Мы утверждаем, что p_0 вынуждает $a E^\# \xi$. Это противоречит сделанному выше предположению, что доказывает теорему.

В самом деле, в противном случае найдется “условие” $q_0 \leq p_0$, вынуждающее $\neg a E^\# \xi$. Рассмотрим генерическое расширение $\mathbb{V}^+$ универсума, где существует последовательность $\mathbb{P}$ -генерических множеств $U_n \subseteq \mathbb{P}$ такая, что для каждого n пара $\langle U_n, U_{n+1} \rangle$ ($\mathbb{P} \times \mathbb{P}$)-генерична над $\mathbb{V}$, $p_n \in U_n$, и, дополнительно, $q_0 \in U_0$. Тогда в $\mathbb{V}^+$ множества $x_n = \xi[U_n] \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ удовлетворяют $\varphi_{i_n}(x_n \Delta x_m) \leq 2^{-n}$ в силу 2) всякий раз, когда $n \leq m$. Отсюда следует $\varphi_{i_n}(x_n \Delta a) \leq 2^{-n}$, поскольку $a = \lim_m x_m$ в силу условия 1). Однако мы предположили, что субмеры φ_j убывают, значит, $\varphi_\infty(x_n \Delta a) \leq 2^{-n}$. С другой стороны, $\varphi_\infty(x_n \Delta x_0) = 0$, так как ξ – виртуальный E -класс. Заключаем, что $\varphi_\infty(x_0 \Delta a) \leq 2^{-n}$ для каждого n , другими словами, $\varphi_\infty(x_0 \Delta a) = 0$, т.е. $x_0 E^\# a$, что противоречит выбору U_0 , поскольку $x_0 = \xi[U_0]$ и $q_0 \in U_0$.

ВОПРОС 1. Являются ли приколотыми все борелевские идеалы? Ожидаемый положительный ответ показал бы, что T_2 борелевски не сводится ни к какому борелевскому идеалу. Являются ли приколотыми все ОЭ, индуцированные борелевскими действиями борелевских CLI-групп?

Вопрос 2 (Кехрис). Существует ли $\leq_B$ -наименьшее не приколотое борелевское ОЭ? Предполагалось, что T_2 может быть таковым, однако Хьёрт информировал авторов о том, что существует строго $\leq_B$ -меньшее не приколотое борелевское ОЭ достаточно сложной природы.

Авторы благодарны Г. Хьёрту, А.С. Кехрису и Су Гао за полезные обсуждения, относящиеся к содержанию этой статьи. Авторы благодарны Г. Хьёрту также за любезное разрешение включить в текст статьи один его неопубликованный результат (теорема 24).

Список литературы

1. *Becker H., Kechris A. S.* The descriptive set theory of Polish group actions. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
2. *Farah I.* Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers // *Mem. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 148(702).
3. *Friedman H., Stanley L.* A Borel reducibility theory for classes of countable structures // *J. Symbolic Logic.* 1989. V. 54. № 3. P. 894–914.
4. *Friedman H.* Borel and Baire reducibility // *Fund. Math.* 2000. V. 164. № 1. P. 61–69.
5. *Hjorth G.* Orbit cardinals: on the effective cardinalities arising as quotient spaces of the form X/G where G acts on a Polish space X // *Israel J. Math.* 1999. V. 111. P. 221–261.
6. *Hjorth G.* Classification and orbit equivalence relations. Providence: American Math. Society, 2000.
7. *Hjorth G., Kechris A. S.* New dichotomies for Borel equivalence relations // *Bull. Symbolic Logic.* 1997. V. 3. № 3. P. 329–346.
8. *Jackson S., Kechris A. S., Louveau A.* Countable Borel equivalence relations // *J. Math. Logic.* 2002. V. 2. № 1. P. 1–80.
9. *Kanovei V.* An Ulm-type classification theorem for equivalence relations in Solovay model // *J. Symbolic Logic.* 1997. V. 62. № 4. P. 1333–1351.
10. *Kanovei V.* Ulm classification of analytic equivalence relations in generic universes // *Math. Logic Quart.* 1998. V. 44. № 3. P. 287–303.
11. *Kechris A. S.* Rigidity properties of Borel ideals on the integers // *Topology Appl.* 1998. V. 85. № 1–3. P. 195–205.
12. *Kechris A. S.* New directions in descriptive set theory // *Bull. Symbolic Logic.* 1999. V. 5. № 2. P. 161–174.
13. *Kechris A. S.* Actions of Polish groups and classification problems // *Analysis and Logic. London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, 2002. P. 168–237.
14. *Louveau A.* A separation theorem for Σ_1^1 sets // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1980. V. 260. P. 363–378.
15. *Solecki S.* Analytic ideals and their applications // *Ann. Pure Appl. Logic.* 1999. V. 99. № 3. P. 51–72.

E-mail:

kanovei@math.uni-wuppertal.de,
reeken@math.uni-wuppertal.de

Поступило в редакцию
30.VII.2001