Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, Об устойчивости оператора ε -проекции на множество сплайнов в пространстве $C[0, 1]$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 99–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:46:20

УДК 517.518.8

Е. Д. Лившиц

Об устойчивости оператора ε -проекции на множество сплайнов в пространстве $C[0, 1]$

Исследуется вопрос о существовании непрерывной выборки из метрической проекции на множество n -звенных кусочно линейных функций в пространстве $C[0, 1]$. Показано, что непрерывная выборка существует в том и только том случае, когда $n = 1$ или $n = 2$. Установлено, что непрерывная ε -выборка на множество L ($L \subset C[0, 1]$) существует в случае, когда L принадлежит некоторому классу множеств, включающему в себя, в частности, множество алгебраических рациональных дробей и множество кусочно линейных функций. Построен пример, показывающий, что для множества сплайнов степени $d > 1$ непрерывная ε -выборка существует не всегда.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Рассматривается задача об устойчивости почти наилучшего приближения в пространстве $C[0, 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Напомним, что *оператором почти наилучшего приближения*, или *ε -проекцией элемента x* , действительного банахова пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ на множество $L \subset X$ называется (многозначное) отображение

$$x \mapsto P_{L,\varepsilon}(x) = \{z \in L \mid \|x - z\|_X \leq \rho(x, L) + \varepsilon\},$$

где $\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|_X$ – расстояние от x до L . В дальнейшем в качестве X будем рассматривать $C[0, 1]$, а в качестве $\|\cdot\|_X$ – равномерную норму. При $\varepsilon = 0$ оператор $P_{L,0} = P_L$ является оператором метрической проекции.

Для $Y, Z \subset X$ обозначим через $C(Y, Z)$ множество всех непрерывных отображений из Y в Z в смысле нормы $\|\cdot\|_X$. Отображение $G: x \mapsto z \in P_{L,\varepsilon}$ называется *ε -выборкой* из оператора почти наилучшего приближения, если при этом $G \in C(X, L)$, то оператор G называется *непрерывной ε -выборкой на множестве L* .

В 1859 г. П. Л. Чебышев [1] отметил, что множество $\mathcal{P}_d[a, b]$ алгебраических полиномов степени не больше d на отрезке $[a, b]$ и множество

$$R_{m,n}[a, b] = \left\{ \frac{P}{Q}; P \in \mathcal{P}_m[a, b]; Q \in \mathcal{P}_n[a, b]; Q(t) \neq 0 \forall t \in [a, b] \right\}$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 02-01-00248).

алгебраических рациональных дробей, $m, n \in \mathbb{N}$, являются множествами существования и единственности (как говорят сейчас, *чебышевскими множествами*) в пространстве $C[0, 1]$. В работе [3] было показано, что метрическая проекция на $R_{m,n}$ разрывна. Тем не менее, как установил С. В. Конягин [2], для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε -выборка на множество $R_{m,n}$.

В. И. Бердышев [4] изучал строго выпуклые пространства, в которых метрическая проекция непрерывна на классе строго выпуклых множеств. В работе [5] И. Г. Царьков исследовал геометрические свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора $P_{L,\varepsilon}$. А. В. Маринов [6] изучал устойчивость оператора ε -проекции на классе выпуклых множеств в произвольных линейных нормированных пространствах. П. В. Альбрехт [7] исследовал липшицевы ε -выборки на подпространства в банаховых пространствах.

Наряду с рациональными дробями часто в качестве аппроксимирующего множества L используется множество сплайнов с фиксированными или нефиксированными узлами. Для чисел $n, d \in \mathbb{N}$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ обозначим

$$S_n^{d,d-1}[x_0, x_1, \dots, x_n] = \{f \in C^{d-1}[x_0, x_n] : f|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \mathcal{P}_d[x_{k-1}, x_k] \text{ для всех } 1 \leq k \leq n\}.$$

Г. Нюрнбергер и М. Зоммер доказали [8], что непрерывная выборка из метрической проекции на $S_n^{d,d-1}[x_0, \dots, x_n]$ существует тогда и только тогда, когда $n \leq d$. Для $n, d \in \mathbb{N}$ и $a < b$ положим

$$S_n^d[a, b] = \{f \in C[a, b] : \exists a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \text{ такие, что } f|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \mathcal{P}_d[x_{k-1}, x_k] \text{ для всех } 1 \leq k \leq n\}. \quad (1.1)$$

В дальнейшем вместо $S_n^d[0, 1]$ будем записывать S_n^d , вместо $\mathcal{P}_d[0, 1] - \mathcal{P}_d$, вместо $R_{m,n}[0, 1] - R_{m,n}$.

В § 2 изучаются некоторые аппроксимативные свойства множества сплайнов, в частности доказывается, что множество сплайнов является множеством существования, но не является множеством единственности всех при $n > 1$. Результаты этого параграфа общеизвестны, но они используются в дальнейшем и приводятся для полноты изложения.

В § 3 исследуется вопрос о существовании непрерывной выборки из метрической проекции на S_n^1 при различных n . Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *При $n = 1, 2$ существует отображение $G \in C(C[0, 1], S_n^1)$ такое, что для любой функции $f \in C[0, 1]$ справедливо равенство*

$$\|G(f) - f\| = \rho(f, S_n^1);$$

при $n \geq 3$ такого отображения не существует.

В § 4 доказывается существование непрерывной ε -выборки на множество L в случае, если L принадлежит некоторому классу K , содержащему, в том числе,

множества кусочно линейных функций и алгебраических рациональных дробей. Сформулируем основную теорему этого параграфа.

Пусть $n \geq 2$, $m \geq 0$. Рассмотрим непустое открытое множество $D \subset [0, 1]^{n-1}$, множество $L \subset C[0, 1]$, $L = \text{Im } F$, где $F: D \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow C[0, 1]$ – некоторое непрерывное отображение.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим отображение $Y_{L,\varepsilon}: C[0, 1] \times D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{m+1}}$, положив для произвольных $f \in C[0, 1]$ и $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$

$$\begin{aligned} Y_{L,\varepsilon}(f, x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ = \{ (y_0, \dots, y_m) \mid \|F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_m) - f\| < \rho(f, L) + \varepsilon \}, \end{aligned}$$

где $\rho(f, L) = \inf_{l \in L} \|f - l\|$.

Пусть K – класс множеств L , удовлетворяющих следующим условиям:

(i) для любых $\varepsilon > 0$, функции $f \in C[0, 1]$ и набора $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ множество $Y_{L,\varepsilon}(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ ограничено и выпукло;

(ii) для произвольных $f \in C[0, 1]$, $\varepsilon > 0$ и целого k , $0 \leq k \leq n-2$, при любых действительных $x_1, \dots, x_k$ множество, состоящее из таких x_{k+1} , что найдутся $(x_{k+2}, \dots, x_{n-1})$, удовлетворяющие $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ и $Y_{L,\varepsilon}(f, x_1, \dots, x_{n-1}) \neq \emptyset$, связно (пустое множество считается связным);

(iii) отображение $Y_{L,\varepsilon}$ непрерывно, если в качестве расстояния между выпуклыми множествами (в том числе, если среди них есть пустые) понимать лебегову меру их симметрической разности.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $L \in K$ и $\varepsilon > 0$; тогда существует непрерывная ε -выборка G на множество L , т.е. существует отображение $G \in C(C[0, 1], L)$ такое, что для любой функции $f \in C[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\|G(f) - f\| \leq \rho(f, L) + \varepsilon.$$

В § 5 приведены следствия теоремы 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Для любых $\varepsilon > 0$ и $n > 1$ существует непрерывная ε -выборка G на множество S_n^1 .

Из теоремы 1.2 также можно вывести следующий результат С. В. Конягина [2].

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных целых $m \geq 0$ и $n > 0$ существует непрерывная ε -выборка G на множество $R_{m,n}$.

В § 6 приведен пример, показывающий, что на множество кусочно полиномиальных функций ε -выборка существует не всегда.

ТЕОРЕМА 1.5. При любых $n > 1$, $d > 1$ найдется такое $\varepsilon > 0$, для которого не существует непрерывной ε -выборки на множество S_n^d .

Результаты статьи были анонсированы в [9].

§ 2. Аппроксимативные свойства множества сплайнов

Будем говорить, что функция $f(t)$ находится между функциями $g_1(t)$ и $g_2(t)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $(f(t) - g_1(t)) \times (g_2(t) - f(t)) \geq 0$. Отметим, что если $f, g, g_1, g_2 \in C[a, b]$ и g находится между g_1 и g_2 на отрезке $[a, b]$, то

$$\|f - g\| \leq \max(\|f - g_1\|, \|f - g_2\|). \quad (2.1)$$

Действительно, для любого $t \in [a, b]$ справедливы или неравенства

$$f(t) - g_1(t) \leq f(t) - g(t) \leq f(t) - g_2(t),$$

или неравенства

$$f(t) - g_2(t) \leq f(t) - g(t) \leq f(t) - g_1(t).$$

Следовательно,

$$|f(t) - g(t)| \leq \max(|f(t) - g_1(t)|, |f(t) - g_2(t)|),$$

из чего вытекает оценка (2.1).

Пусть $s \in S_n^d[a, b]$. Рассмотрим множество $H_n(s)$, состоящее из всех наборов $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, обладающих свойствами (1.1).

ЛЕММА 2.1. Пусть $s \in S_n^d$. Тогда множество $H_n(s)$ состоит из одного набора в тех и только тех случаях, когда $s \notin S_{n-1}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $s \in S_{n-1}^d$ и $\{x'_0, \dots, x'_{n-1}\} \in H_{n-1}(s)$. Тогда два различных набора $(x'_0, x'_1/2, x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ и $(x'_0, x'_1/3, x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$ принадлежат $H_n(s)$.

Предположим, что $(x'_0, \dots, x'_n), (x''_0, \dots, x''_n)$ – различные наборы из $H_n(s)$. В этом случае найдутся такие целые числа p' ($1 \leq p' \leq n-1$) и p'' ($0 \leq p'' \leq n-1$), что $x'_{p'} \in (x''_{p''}, x''_{p''+1})$. Пусть P – такой элемент $\mathcal{P}_d$, что $P|_{[x''_{p''}, x''_{p''+1}]} = s|_{[x''_{p''}, x''_{p''+1}]}$. Тогда $P|_{[x'_{p'-1}, x'_{p'}]} = s|_{[x'_{p'-1}, x'_{p'}]}$ и $P|_{[x'_{p'}, x'_{p'+1}]} = s|_{[x'_{p'}, x'_{p'+1}]}$. По-этому ограничения сплайна s на отрезки $[x'_0, x'_1], \dots, [x'_{p'-2}, x'_{p'-1}], [x'_{p'-1}, x'_{p'+1}], [x'_{p'+1}, x'_{p'+2}], \dots, [x'_{n-1}, x'_n]$ являются многочленами из $\mathcal{P}_d$ и, следовательно, $s \in S_{n-1}^d$.

ЛЕММА 2.2. Рассмотрим $f \in C[0, 1]$, последовательность сплайнов $\{\tilde{s}_k\} \subset S_n^d$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \tilde{s}_k\| = \rho(f, S_n^d),$$

и наборы $(\tilde{x}_{0,k}, \dots, \tilde{x}_{n,k}) \in H_n(\tilde{s}_k)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $s \in S_n^d$ и набор $(x_0, \dots, x_n) \in H_n(s)$, обладающие свойствами

$$\|f - s\| = \rho(s, S_n^d), \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,k} - \varepsilon < x_i < \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,k} + \varepsilon, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что последовательность $\{f - \tilde{s}_k\}$ ограничена в $C[0, 1]$, следовательно, последовательность $\{\|\tilde{s}_k\|\}$ ограничена некоторой константой $C_1 > 0$. Поэтому можно выбрать такие подпоследовательность $\{s_k\} \subset \{\tilde{s}_k\}$ и наборы $(x_{0,k}, \dots, x_{n,k}) \in H_n(s_k)$, что наборы $(x_{0,k}, x_{1,k}, \dots, x_{n,k}, s_k(x_{0,k}), \dots, s_k(x_{n,k}))$ сходятся к некоторому $(\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_n, \hat{y}_0, \dots, \hat{y}_n)$. Предположим сначала, что все $\hat{x}_i$ различны. В этом случае

$$\min_{k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n} |x_{i,k} - x_{i-1,k}| > 0,$$

отсюда, согласно неравенству А. А. Маркова [10], заключаем, что найдется такая постоянная C_2 , для которой при всех k и $t \in [0, 1]$, $t \neq x_{i,k}$, $i = 0, \dots, n$, выполнено неравенство

$$\left| \frac{d}{dt} s_k(t) \right| < C_2.$$

Следовательно, последовательность $\{s_k\}$ равномерно непрерывна, и по теореме Асколи–Арцела (см. [11]) в ней найдется подпоследовательность, равномерно сходящаяся к $s \in C[0, 1]$. Ясно, что $\|f - s\| = \rho(f, S_n^d)$, $s \in S_n^d$, причем $\{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_n\} \in H_n(s)$ и удовлетворяет (2.2).

Теперь перейдем к случаю, когда некоторые $\hat{x}_i$ равны между собой. Рассмотрим множество $A = (0, 1) \cap \{\hat{x}_i \mid \hat{x}_i = \hat{x}_{i+1}, 0 \leq i < n\}$. С помощью аналогичных рассуждений легко установить, что из последовательности $\{s_k\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится равномерно к некоторому сплайну степени d на любом отрезке, содержащемся во множестве $(0, 1) \setminus A$, и поточечно к некоторой функции s' на всем множестве $(0, 1) \setminus A$. Рассмотрим множество

$$B = \{\bar{x} \in A \mid \lim_{t \rightarrow \bar{x}-} s'(t) \neq \lim_{t \rightarrow \bar{x}+} s'(t)\} \cup \{0, 1\}.$$

Тогда $B = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p\}$, где $0 = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{p-1} < \bar{x}_p = 1$, $p < n$. Найдутся числа $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, и сплайны $m_i \in S_{k_i}^d[\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i]$, $i = 1, \dots, p$, для которых

$$\begin{aligned} \|f - m_i\|_{[\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i]} &\leq \rho(f, S_n^d), \quad i = 1, \dots, p, \\ m_i(\bar{x}_i) &\neq m_{i+1}(\bar{x}_i), \quad i = 1, \dots, p-1, \\ \sum_{i=1}^p k_i &\leq n - (p-1). \end{aligned}$$

Отметим, что в случае $\rho(f, S_n^d) = 0$ имеем $p = 1$, $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_1 = 1$ и $m_1 \in S_n^d = S_n^d[0, 1]$. В случае, когда $\rho(f, S_n^d) \neq 0$, докажем, что для $\varepsilon' = \min(\frac{1}{3} \min_{1 \leq i \leq p} |\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}|, \varepsilon)$ и $i = 1, \dots, p-1$ найдутся числа $\bar{x}_{i,-}$, $\bar{x}_{i,+}$,

$$\bar{x}_i - \varepsilon \leq \bar{x}_i - \varepsilon' < \bar{x}_{i,-} < \bar{x}_i < \bar{x}_{i,+} < \bar{x}_i + \varepsilon' \leq \bar{x}_i + \varepsilon,$$

такие, что линейная функция l_i , проходящая через $(\bar{x}_{i,-}, m_i(\bar{x}_{i,-}))$ и $(\bar{x}_{i,+}, m_{i+1}(\bar{x}_{i,+}))$, удовлетворяет неравенству

$$\|f - l_i\|_{[\bar{x}_{i,-}, \bar{x}_{i,+}]} \leq \rho(f, S_n^d). \quad (2.3)$$

Покажем, как определить соответствующие $\bar{x}_{i,-}$ и $\bar{x}_{i,+}$. В силу выбора сплайнов m_i для $i = 1, \dots, p-1$ справедливы оценки

$$|m_i(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i)| \leq \rho(f, S_n^d), \quad |m_{i+1}(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i)| \leq \rho(f, S_n^d).$$

Так как $m_i(\bar{x}_i) \neq m_{i+1}(\bar{x}_i)$, то для $z_i = \frac{1}{2}(m_i(\bar{x}_i) + m_{i+1}(\bar{x}_i))$ выполняется

$$|z_i - f(\bar{x}_i)| < \rho(f, S_n^d).$$

Тогда найдется δ , $0 < \delta < \varepsilon'$, для которого $\|f - z_i\|_{[\bar{x}_i - \delta, \bar{x}_i + \delta]} \leq \rho(f, S_n^d)$.

Без ограничения общности будем считать, что $m_i(\bar{x}_i) < m_{i+1}(\bar{x}_i)$. Пусть $l_i(t) = \frac{2C_1}{\delta}(t - \bar{x}_i) + z_i$. Тогда $l_i(\bar{x}_i - \delta) \leq -C_1$, $l_i(\bar{x}_i + \delta) \geq C_1$. В качестве $\bar{x}_{i,-} < \bar{x}_i$ возьмем наибольшую из абсцисс точек пересечения l_i и m_i , в качестве $\bar{x}_{i,+} > \bar{x}_i$ — наименьшую из абсцисс точек пересечения l_i и m_{i+1} . Так как на отрезке $[\bar{x}_{i,-}, \bar{x}_i]$ функция $l_i(t)$ находится между $m_i(t)$ и z_i , а на отрезке $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i,+}]$ — между $m_{i+1}(t)$ и z_i , то согласно (2.1) имеем неравенство (2.3).

Определим функцию s следующим образом:

$$s|_{[\bar{x}_{i-1,+}, \bar{x}_{i,-}]} = m_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad s|_{[\bar{x}_{j,-}, \bar{x}_{j,+}]} = l_j, \quad j = 1, \dots, p-1, \\ \bar{x}_{0,+} = 0, \quad \bar{x}_{1,-} = 1.$$

Ясно, что $s \in S_n^d$, и с учетом (2.3) выполняется $\|f - s\| = \rho(f, S_n^d)$. Для завершения доказательства леммы остается выбрать набор $\{x_0, \dots, x_n\} \in H_n(s)$, удовлетворяющий соотношению (2.2).

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Множество S_n^d является множеством существования при всех $n, d \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из доказательства леммы 2.2 вытекает следующее утверждение. Если $f \in C[0, 1]$ и для последовательности сплайнов $\{\tilde{s}_k\} \subset S_2^1$ выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \tilde{s}_k\| = \rho(f, S_2^1),$$

то найдется такая ее подпоследовательность $\{s_k\}$, что или s_k равномерно сходятся к некоторой $s \in P_{S_2^1}(f)$, или s_k поточечно на интервале $(0, 1)$ сходятся к некоторой $l \in \mathcal{P}_1$, $l \in P_{S_2^1}(f)$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\hat{s} \in S_n^d$, но $\hat{s} \notin S_{n-1}^d$ и $H_n(\hat{s}) = \{(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякой функции $s \in S_n^d$, $\|\hat{s} - s\| < \delta$, и набора $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in H_n(s)$ выполнено $|\hat{x}_i - x_i| < \varepsilon$ при $0 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдутся последовательность сплайнов $\{s_k\}$ и наборы $(x_{0,k}, \dots, x_{n,k}) \in H_n(s_k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых будут выполняться следующие соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|s - s_k\| = 0,$$

$$(x_{0,k}, \dots, x_{n,k}) \rightarrow \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n\} \neq (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_n).$$

Применяя лемму 2.2 к $f = \hat{s}$, последовательности $\{s_k\}$ и достаточно малому ε_0 , получим, что $s \in S_n^d$ и $(x_0, \dots, x_n) \in H_n(s)$, $(x_0, \dots, x_n) \neq (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_n)$. Ясно, что $\hat{s} = s$ и $H_n(\hat{s})$ состоит более чем из одного набора. Следовательно, согласно лемме 2.1 имеем $\hat{s} \in S_{n-1}^d$. Противоречие с условиями леммы 2.5.

ЛЕММА 2.6. Пусть $d \geq 1$, $n > 1$. Тогда множество $S_n^d[a, b]$ не является множеством единственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[a, b] = [-1, 1]$. Для произвольного натурального l рассмотрим функцию $f_l \in C[-1, 1]$, определяемую равенствами $f_l|_{[-1, 0]} = T_{2l+1}$, $f_l|_{[0, 1]} = 0$, где T_m — многочлен Чебышева степени m . Ясно, что для фиксированных n, d и достаточно больших l , $l > n(d+2)$, будет выполняться равенство $\rho(f_l, S_n^d) = 1$. В то же время для любого $s \in S_n^d[-1, 1]$ такого, что $\|s\| \leq 1$ и $s|_{[-1, 0]} = 0$, выполняется равенство $\|f_l - s\| = 1$. При $d \geq 1$ и $n > 1$ таких сплайнов бесконечно много.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Докажем, что для $n \geq 3$ не существует непрерывной выборки из метрической проекции на S_n^1 . Для уменьшения количества выкладок докажем это утверждение для $n = 3$, переход к общему случаю может быть осуществлен так же, как это будет сделано в теореме 1.5.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $D_n \subset [0, 1]^{n-1}$,

$$D_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < 1\}, \quad (3.1)$$

и отображение $F_n: D_n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S_n^1$, переводящее наборы $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_n$ и $(y_0, \dots, y_n)$ в такую функцию $l \in S_n^1$, что

$$(0 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 1) \in H_n(l) \quad \text{и} \quad y_j = l(x_j), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.2)$$

Рис. 1

Пусть $l^1 = F_3(2/9, 5/9, 0, 6, 9, 1)$, $l^2 = F_3(4/9, 7/9, 1, 9, 6, 0)$ так, как изображено на рис. 1.

Будем использовать следующие леммы.

ЛЕММА 3.1. *Существует такое $\delta_1 > 0$, что для любой функции $l \in S_2^1$ найдется отрезок Δ , $\Delta \subset [0, 1]$, $|\Delta| = \delta_1$, обладающий следующим свойством:*

(*) *или $l(t) > \max(l^1(t), l^2(t)) \quad \forall t \in \Delta$, или $l(t) < \min(l^1(t), l^2(t)) \quad \forall t \in \Delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_1 = 1/9$, $t_2 = 1/3$, $t_3 = 1/2$, $t_4 = 2/3$, $t_5 = 8/9$. Тогда для всех $f \in C[0, 1]$, лежащих между l^1 и l^2 , и i , $1 \leq i \leq 5$, выполняется $f(t_i) = l^1(t_i) = l^2(t_i)$. Нетрудно видеть, что существует такое достаточно малое ε , что для любой функции $l \in S_2^1$ найдется i , $1 \leq i \leq 5$, для которого

$$l(t_i) \notin [l^1(t_i) - \varepsilon, l^1(t_i) + \varepsilon].$$

Тогда существует такое $\delta_1 > 0$ (например, можно положить $\delta_1 = \varepsilon/27$), что для всех $t \in [t_i - \delta_1, t_i + \delta_1]$ или $l(t) > \max(l^1(t), l^2(t))$, или $l(t) < \min(l^1(t), l^2(t))$.

Пусть

$$M = \left\{ l \in S_3^1 \setminus S_2^1 \mid \exists (0, x_1, x_2, 1) \in H_3(l) : x_1 < \frac{3.5}{9}, x_2 > \frac{5.5}{9} \right\}.$$

Аналогичным образом доказывается

ЛЕММА 3.2. *Существует такое $\delta_2 > 0$, что для любой функции $l \in M$ найдется отрезок Δ , $\Delta \subset [0, 1]$, $|\Delta| = \delta_2$, обладающий свойством (*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in M$. Тогда $l|_{[\frac{3.5}{9}, \frac{5.5}{9}]}$ — линейная функция, поэтому выполнено по крайней мере одно из неравенств

$$\begin{aligned} l\left(\frac{3.5}{9}\right) &> l^2\left(\frac{3.5}{9}\right) + 0.001, & l\left(\frac{1}{2}\right) < l^1\left(\frac{1}{2}\right) - 0.001 = l^2\left(\frac{1}{2}\right) - 0.001, \\ l\left(\frac{5.5}{9}\right) &> l^1\left(\frac{5.5}{9}\right) + 0.001. \end{aligned}$$

Тогда найдется δ_2 такое, что для одного из отрезков $[\frac{3.5}{9} - \delta_2, \frac{3.5}{9} + \delta_2]$, $[\frac{1}{2} - \delta_2, \frac{1}{2} + \delta_2]$ или $[\frac{5.5}{9} - \delta_2, \frac{5.5}{9} + \delta_2]$, выполняется свойство (*).

Для любых $m, k \in \mathbb{N}$ и $v_1, v_2 \in C[0, m]$ определим функцию $f_{k;(v_1, v_2)}^m \in C[0, m]$ следующим образом: для $0 \leq i \leq km$ полагаем

$$f_{k;(v_1, v_2)}^m\left(\frac{i}{k}\right) = \begin{cases} \max(v_1(\frac{i}{k}), v_2(\frac{i}{k})) - 10, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ \min(v_1(\frac{i}{k}), v_2(\frac{i}{k})) + 10, & \text{если } i \text{ четно.} \end{cases} \quad (3.3)$$

На отрезках $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$, $0 \leq i \leq km - 1$, доопределяем $f_{k;(v_1, v_2)}^m$ как линейную функцию.

Пусть $f_0 = f_{K;(l^1, l^2)}^1$, где $K \geq \max(100, \frac{3}{\delta_1}, \frac{3}{\delta_2})$. Ясно, что $\|f_0 - l^1\| = \|f_0 - l^2\| = 10$. Предположим, что существует отображение $G \in C(C[0, 1], S_3^1)$ такое, что

$$\|G(f) - f\| = \rho(f, S_3^1) \quad \text{для всех } f \in C[0, 1].$$

Пусть $l_0 = G(f_0)$ и $(0, x_{1,0}, x_{2,0}, 1) \in H_3(l_0)$.

Нетрудно видеть, что $l_0 \notin S_2^1$ и хотя бы одно из чисел $x_{1,0}, x_{2,0}$ принадлежит интервалу $(\frac{3.5}{9}, \frac{5.5}{9})$. Действительно, в противном случае согласно леммам 3.1 и 3.2 нашелся бы отрезок $\Delta \in [0, 1]$, $|\Delta| \geq \frac{3}{K}$, обладающий свойством (*), и существовало бы $i \in \mathbb{N}$: $\frac{i}{K}, \frac{i+1}{K} \in \Delta$, такое, что одно из неравенств

$$\left|f_0\left(\frac{i}{K}\right) - l_0\left(\frac{i}{K}\right)\right| \leq 10, \quad \left|f_0\left(\frac{i+1}{K}\right) - l_0\left(\frac{i+1}{K}\right)\right| \leq 10$$

было бы не верным (см. (3.3)).

Пусть $x_{1,0} \geq \frac{3.5}{9}$ (второй случай рассматривается аналогично). В силу непрерывности отображения G и леммы 2.5 существует такое $\delta > 0$, что для всех $f \in C[0, 1]$, $\|f - f_0\| < \delta$, найдется набор

$$(0, x_1, x_2, 1) \in H_3(G(f)), \quad x_1 > \frac{3.4}{9}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим семейство функций $l_t^2 \in C[0, 1]$, непрерывно зависящее от $t \in [0, 1]$, обладающее следующими свойствами: $l_0^2 = l^2$, $l_t^2|_{[\frac{3.5}{9}, 1]} = l^2$ при всех $t \in [0, 1]$ и

$$(l^2(x) - l_t^2(x))(l^1(x) - l_t^2(x)) < 0 \quad \text{при всех } t \in (0, 1],$$

$$x \in \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{3.5}{9}\right).$$

Например, можно взять

$$l_t^2(x) = \begin{cases} l^2(x) + \frac{x(x - \frac{1}{9})}{50}t, & 0 \leq x \leq \frac{1}{9}, \\ l^2(x) - \frac{(x - \frac{1}{9})(x - \frac{3}{9})}{50}t, & \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{3}{9}, \\ l^2(x) + \frac{(x - \frac{3}{9})(x - \frac{3.5}{9})}{50}t, & \frac{3}{9} \leq x \leq \frac{3.5}{9}, \\ l^2(x), & \frac{3.5}{9} \leq x \leq \frac{9}{9}. \end{cases}$$

Пусть $f_t = f_{K; (l^1, l_t^2)}^1$ для всех $t \in [0, 1]$. Отметим, что $\rho(f_t, S_3^1) \leq \|f_t - l^1\| = 10$ при $t \in (0, 1]$. Ясно, что если для некоторых $t \in (0, 1]$ и $l \in C[0, 1]$ выполняется $\|f_t - l\| \leq 10$, то для l справедливо следующее утверждение:

$$\begin{aligned} \exists z_1 \in \left(0, \frac{1}{9}\right): \quad l(z_1) < l^2(z_1); \quad \exists z_2 \in \left(\frac{1}{9}, \frac{3}{9}\right): \quad l(z_2) > l^2(z_2); \\ \exists z_3 \in \left(\frac{3}{9}, \frac{3.5}{9}\right): \quad l(z_3) < l^2(z_3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим такое $t_0 \in (0, 1)$, для которого $\|f - f_{t_0}\| < \delta$. Из (3.4) вытекает, что ограничение $l_{t_0} = G(f_{t_0})$ на отрезок $[0, \frac{3.4}{9}]$ является линейной функцией. Следовательно, для l_{t_0} не может выполняться (3.5). Противоречие. Поэтому при $n \geq 3$ не существует непрерывной выборки из метрической проекции на S_n^1 .

Докажем, что для $n = 1, 2$ существует непрерывная выборка из метрической проекции на S_n^1 . При $n = 1$ требуемое утверждение вытекает из результатов Кирхбергера [12], который доказал непрерывность метрической проекции на множество многочленов степени не выше заданной.

Пусть $n = 2$. Определим (нелинейный) функционал $T: S_2^1 \rightarrow (0, \pi]$ следующим образом: пусть график $l \in S_2^1$ является ломаной $M_0M_1M_2$, тогда

$$T(l) = \angle M_0M_1M_2.$$

(Если, например, $l \in S_2^1$ — линейная функция, то $T(l) = \pi$.)

ЛЕММА 3.3. *Функционал T непрерывен на множестве $S_2^1 \setminus \mathcal{P}_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $l \in S_2^1$, но $l \notin \mathcal{P}_1$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что любая функция $\tilde{l} \in S_2^1$ из ε -окрестности l также не является линейной. По лемме 2.1 координаты узлов графика $\tilde{l}$ (как ломаной) определены однозначно, а по лемме 2.5 они непрерывно зависят от $\tilde{l}$ в соответствующей ε -окрестности. Следовательно, и функционал T непрерывен в точке l .

Обозначим $\hat{T}(f) = \sup\{T(l) \mid l \in P_{S_2^1}(f)\}$.

ЛЕММА 3.4. Для любой $f \in C[0, 1]$ существует функция $l \in P_{S_2^1}(f)$ такая, что $T(l) = \hat{T}(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{\tilde{l}_n\} \subset P_{S_2^1}(f)$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} T(\tilde{l}_n) = \hat{T}(f)$. Тогда согласно замечанию 2.4 или $P_{S_2^1}(f)$ содержит некоторую линейную функцию l , или найдется подпоследовательность $\{l_n\} \subset \{\tilde{l}_n\}$, которая равномерно сходится к некоторой $l \in S_2^1 \setminus \mathcal{P}_1$. В первом случае $T(l) = \hat{T}(f) = \pi$, во втором, в силу непрерывности функционала $T(\cdot)$ в точке l , $T(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(l_n) = \hat{T}(f)$.

В дальнейшем будем использовать следующую лемму.

ЛЕММА 3.5. Пусть $a \leq c \leq b$, $f, g_1, g_2 \in C[a, b]$, $l \in \mathcal{P}_1$, $\varepsilon > 0$, $\sigma = \operatorname{sgn}(f(c) - g_1(c))$ ($\operatorname{sgn}(0) = 1$). Если

- а) $g_1(t) < l(t) < g_2(t)$ для всех $t \in [a, b]$ или
- б) $g_1(t) < l(t) < g_2(t)$ для всех $t \in [a, c)$, $g_1(c) = l(c) = g_2(c)$, $g_1(t) > l(t) > g_2(t)$ для всех $t \in (c, b]$,

то найдется такое число $0 < U_0 \leq \varepsilon$, что при всех u из интервала $I(U_0)$, равного $(-U_0, U_0)$ в случае а) и $(\min(0, \sigma U_0), \max(0, \sigma U_0))$ в случае б), для функции $\hat{l} = l + u$ будет выполняться неравенство

$$\|f - \hat{l}\| < \max(\|f - g_1\|, \|f - g_2\|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\delta = \inf_{t \in [a, b]} \min(|l(t) - g_1(t)|, |l(t) - g_2(t)|)$. Тогда $U_0 = \min(\varepsilon, \delta/2)$ удовлетворяет требованиям леммы. Действительно, предположим, что $\hat{l} = l + u$ для некоторого $u \in I(U_0)$. Пусть $t \in [a, b]$, и для определенности $f(t) \geq \hat{l}(t)$; тогда

$$|f(t) - \hat{l}(t)| \leq |f(t) - g_1(t)| - \delta/2 \leq \max(\|f - g_1\|, \|f - g_2\|) - \delta/2.$$

б) Без ограничения общности будем считать, что $f(c) \geq g_1(c)$. Пусть $\rho = \max(\|f - g_1\|, \|f - g_2\|)$. Тогда найдется такое $\gamma > 0$, что на $[c - \gamma, c + \gamma] \cap [a, b]$ выполняется неравенство $f(t) \geq l(t) - \rho/2$. Пусть

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \inf_{t \in [a, c - \gamma]} \min(|l(t) - g_1(t)|, |l(t) - g_2(t)|), \\ \kappa_2 &= \inf_{t \in [c + \gamma, b]} \min(|l(t) - g_1(t)|, |l(t) - g_2(t)|). \end{aligned}$$

Положим $U_0 = \min(\kappa_1/2, \kappa_2/2, \rho/4, \varepsilon)$. Если $\hat{l} = l + u$ для некоторого $u \in I(U_0)$, то в силу п. а) имеем

$$\begin{aligned}\|f - \hat{l}\|_{[a, c-\gamma]} &< \max(\|f - g_1\|_{[a, c-\gamma]}, \|f - g_2\|_{[a, c-\gamma]}), \\ \|f - \hat{l}\|_{[c+\gamma, b]} &< \max(\|f - g_1\|_{[c+\gamma, b]}, \|f - g_2\|_{[c+\gamma, b]}).\end{aligned}$$

Кроме того, для всех $t \in [c - \gamma, c + \gamma] \cap [a, b]$ выполняется

$$f(t) - \hat{l}(t) \leq \rho - u, \quad \hat{l}(t) - f(t) \leq \frac{\rho}{2} + \delta \leq \frac{3}{4}\rho.$$

Следовательно,

$$\|f - \hat{l}\| < \max(\|f - g_1\|, \|f - g_2\|).$$

ЛЕММА 3.6. Пусть $f \in C[0, 1]$, $l^0, l^1 \in P_{S_2^1}(f)$ и $T(l^1) = \hat{T}(f) < \pi$. Тогда графики функций l^0 и l^1 имеют бесконечно много общих точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $l^0, l^1 \notin \mathcal{P}_1$. Пусть $(x_0^i, x_1^i, x_2^i) \in H_2(l^i)$ и $y_j^i = l^i(x_j^i)$ для $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$. Ясно, что графики функций l^0 и l^1 могут иметь 0, 1, 2, 3 или бесконечно много общих точек (см. рис. 2). Будем считать, что если разность двух функций из S_2^1 имеет один нуль на интервале $(0, 1)$, в малой окрестности которого она не меняет знак (кратный нуль), и еще один нуль на отрезке $[0, 1]$, то графики этих функций имеют три общие точки (см. рис. 2, в), но первая из них совпадает со второй (левая общая точка на рис. 2, в).

Для доказательства леммы будет проверено, что если графики функций l^0 и l^1 будут иметь 0, 1 или 2 общие точки, то найдется $\bar{l} \in S_2^1$, для которой

$$\|f - \bar{l}\| < \max(\|f - l^0\|, \|f - l^1\|);$$

если графики функций l^0 и l^1 имеют три общие точки, то найдется $\bar{l} \in S_2^1$, для которой

$$\|f - \bar{l}\| \leq \max(\|f - l^0\|, \|f - l^1\|), \quad T(\bar{l}) > \max(T(l^0), T(l^1)).$$

Предположим, что l^0 и l^1 имеют 0, 1 или 2 общие точки и $(l^0(x_1^0) - l^1(x_1^0))(l^0(x_1^1) - l^1(x_1^1)) \neq 0$ (рис. 2, а, в, г).

Для определенности будем считать, что $x_1^0 \leq x_1^1$ и на каждом из отрезков $[0, x_1^0]$ и $[x_1^0, 1]$ функции l^0 и l^1 принимают равные значения не более чем в одной точке (если бы последнее утверждение было неверным, то выполнялось бы аналогичное утверждение для x_1^1). Пусть l' – линейная функция, которая на $[x_1^0, 1]$ лежит между l^0 и l^1 , причем $l'(t) = l^0(t)$ тогда и только тогда, когда $l'(t) = l^1(t)$. Применяя лемму 3.5, а) к функциям f , $g_1 = l^0$, $g_2 = l^1$, $a = x_1^0$, $b = 1$, линейной функции l' и числу $\varepsilon = \min(|l'(x_1^0) - l^0(x_1^0)|, |l'(x_1^0) - l^1(x_1^0)|) > 0$, получим число U_0 . Пусть u_0 и $\varepsilon' > 0$ таковы, что $(u_0 - \varepsilon', u_0 + \varepsilon') \subset I(U_0)$, аналогично возьмем такую

Рис. 2

линейную функцию l'' , чтобы на отрезке $[0, x_1^0]$ функция l'' лежала между l^0 и l^1 , $l''(x_1^0) = l'(x_1^0) + u_0$, и $l^0(t) = l''(t)$ при тех и только тех t , для которых $l^1(t) = l''(t)$. Применяя лемму 3.5 к f, l_1, l_2, l'' , $a = 0$, $b = x_1^0$ и ε' , получим число U_1 . Пусть $u_1 \in I(U_1)$, а функция $\bar{l} \in S_2^1$ такова, что $\bar{l}|_{[0, x_1^0]} = l'' + u_1$ и $\bar{l}|_{[x_1^0, 1]} = l' + u_0 + u_1$. Тогда по лемме 3.5

$$\|f - \bar{l}\| < \|f - l^0\| = \|f - l^1\|,$$

что противоречит равенству $\|f - l^0\| = \rho(f, S_2^1)$.

Предположим, что графики l^0 и l^1 имеют 0, 1 или 2 общие точки и $l^0(x_1^0) = l^1(x_1^0)$ (случай $l^0(x_1^0) = l^1(x_1^0)$ рассматривается точно так же; рис 2, б, д, е). Тогда функция $l^0 - l^1$ имеет кратный нуль в точке $x_1^0 \in (0, 1)$. Следовательно, других нулей у этой функции на $[0, 1]$ нет (иначе согласно нашим обозначениям графики l^0 и l^1 имели бы три общие точки). Тогда найдутся функции $l', l'' \in \mathcal{P}_1$, $l'(x_1^0) = l''(x_1^0) = l^0(x_1^0)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} (l^0(t) - l'(t))(l^1(t) - l'(t)) &< 0, \quad t \in [0, x_1^0), \\ (l^0(t) - l''(t))(l^1(t) - l''(t)) &< 0, \quad t \in (x_1^0, 1]. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.5,б) к функциям $f, g_1 = l^0, g_2 = l^1, l = l', a = 0, b = x_1^0, c = x_1^0$ и функциям $f, g_1 = l^0, g_2 = l^1, l = l'', a = x_1^0, b = 1, c = x_1^0$ с произвольным $\varepsilon > 0$, получим числа U_0 и U_1 . Заметим, что в этих двух случаях

число $\sigma = \operatorname{sgn}(f(c) - g_1(c))$ одно и то же. Поэтому $I(U_0) \cap I(U_1) \neq \emptyset$. Пусть $u \in I(U_0) \cap I(U_1)$; тогда для функции $\bar{l} \in S_2^1$: $\bar{l}|_{[0, x_1^0]} = l' + u$, $\bar{l}|_{[x_1^0, 1]} = l'' + u$, выполняется $\|f - \bar{l}\| < \|f - l^0\| = \|f - l^1\|$. Противоречие с равенством $\|f - l^0\| = \rho(f, S_2^1)$.

Предположим, что графики l^0 и l^1 , $x_1^0 < x_1^1$, имеют ровно три общие точки (рис. 2, ж, з). Пусть (x, y) – координаты второй точки пересечения l^0 и l^1 ; тогда для $\bar{l} = F_2(x, y_0^1, y, y_2^0)$ по свойству внешних углов треугольника имеем

$$T(\bar{l}) > \max(T(l^0), T(l^1)),$$

кроме того, $\bar{l}$ лежит между l^0 и l^1 , следовательно, $\bar{l} \in P_{S_2^1}(f)$. Противоречие с условиями леммы.

ЛЕММА 3.7. *Для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ существует не более одной $l \in P_{S_2^1}(f)$ такой, что $T(l) = \widehat{T}(f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторой функции $f \in C[0, 1]$ нашлись различные функции $l^0, l^1 \in P_{S_2^1}(f)$ такие, что

$$T(l^0) = T(l^1) = \widehat{T}(f).$$

Если $\widehat{T}(f) = \pi$, то функции l^0 и l^1 линейны. По теореме Чебышева (см. [13]) существует единственная линейная функция наилучшего приближения, следовательно, $l^0 = l^1$.

Если $\widehat{T}(f) < \pi$, то по лемме 3.6 графики функций l^0 и l^1 имеют бесконечно много общих точек. Пусть $(x_0^i, x_1^i, x_2^i) \in H_2(l^i)$ и $y_j^i = l^i(x_j^i)$ для $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$. Случай $x_1^0 = x_1^1$ очевиден, поэтому будем считать, что $x_1^0 < x_1^1$. Это может произойти в двух случаях: или второе звено l^0 и первое звено l^1 принадлежат одной прямой или первые (вторые) звенья l^0 и l^1 принадлежат одной прямой. В первом случае (рис. 2, и) $P_{S_2^1}(f)$ содержит линейную функцию. Этот случай рассматривался выше. Если справедливо второе (рис. 2, к) (пусть для определенности на одной прямой лежат первые звенья), то для $\bar{l} = F_2(x_1^0, y_0^0, y_1^0, y_2^1)$ выполняется

$$\bar{l} \in P_{S_2^1}(f), \quad T(\bar{l}) > T(l^0) = T(l^1),$$

что противоречит выбору l^0 и l^1 .

Зададим выборку G на множество S_2^1 так, чтобы для любой функции $f \in C[0, 1]$ выполнялось равенство

$$T(G(f)) = \widehat{T}(f).$$

В силу лемм 3.4 и 3.7 определение G корректно.

Докажем непрерывность отображения G . Предположим, что G разрывно в точке f^0 и $l^0 = G(f^0)$. Из замечания 2.4 вытекает, что найдется последовательность $\{f_n\} \in C[0, 1]$, равномерно сходящаяся к f^0 , такая, что последовательность

$l_n = G(f_n)$ ($\|l_n - f^0\| \rightarrow \rho(f^0, S_2^1)$) или равномерно сходится к $l^1 \in S_2^1$, $l^1 \neq l^0$, или $l^0 \in \mathcal{P}_1$ и l_n сходится к l^0 поточечно на $(0, 1)$, но не равномерно. Рассмотрим первый случай. Ясно, что $l^1 \in P_{S_2^1}(f^0)$ и $T(l^1) < T(l^0)$, поэтому согласно лемме 3.6 графики функций l^0 и l^1 имеют бесконечно много общих точек. Без ограничения общности считаем, что первые звенья l^0 и l^1 лежат на одной прямой, а вторые звенья не ниже этой прямой. Тогда если l^0 не является линейной функцией, то вершина ее графика не может находиться правее вершины графика l^1 . Этот случай разбивается на три подслучая (см. рис. 3, а, б, в).

В случае рис. 3, а наборы $(0 = x_0^i, x_1^i, x_2^i = 1) \in H_2(l^i)$, $i = 0, 1$, определены однозначно и $x_1^0 < x_1^1$.

Рассмотрим линейную функцию $\tilde{l}$, проходящую через $\left(\frac{x_1^0 + x_1^1}{2}, l^1\left(\frac{x_1^0 + x_1^1}{2}\right)\right)$ и лежащую на $\left[\frac{x_1^0 + x_1^1}{2}, 1\right]$ между l^0 и l^1 . Пусть число U получено применением леммы 3.5 к функциям $f^0, l^0, l^1, \tilde{l}$, отрезку $\left[\frac{1}{4}x_1^0 + \frac{3}{4}x_1^1, 1\right]$ и достаточно малому ε . Выберем $u \in I(U)$ (интервал $I(U)$ определен в условии леммы 3.5), возьмем такое δ , $0 < \delta < \delta_0$ (δ_0 – фиксированное число), чтобы были справедливы следующие соотношения:

$$\|f^0 - l\|_{\left[\frac{1}{4}x_1^0 + \frac{3}{4}x_1^1, 1\right]} \leq \rho(f^0, S_2^1) - \delta, \quad l = \tilde{l} + u, \quad (3.6)$$

и при $t \in \left[\frac{3}{4}x_1^0 + \frac{1}{4}x_1^1, \frac{1}{4}x_1^0 + \frac{3}{4}x_1^1\right]$ выполнялось $l^0(t) - \delta > l(t)$, $l^0(t) - \delta > l^1(t) + \delta$, следовательно,

$$\|f^0 - (l^0 - \delta)\|_{\left[\frac{3}{4}x_1^0 + \frac{1}{4}x_1^1, \frac{1}{4}x_1^0 + \frac{3}{4}x_1^1\right]} \leq \rho(f^0, S_2^1) - \delta. \quad (3.7)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $\|f_n - f^0\| < \delta/2$, $\|l_n - l^1\| < \delta$. Если δ_0 и ε достаточно малы, то первое звено графика l_n пересечется с графиком l в точке с координатами (x, y) , $x \in \left[\frac{3}{4}x_1^0 + \frac{1}{4}x_1^1, \frac{1}{4}x_1^0 + \frac{3}{4}x_1^1\right]$. Пусть функция $\bar{l} \in S_2^1$ такова, что $\bar{l}|_{[0, x]} = l_n$, $\bar{l}|_{[x, 1]} = l$. Тогда $\bar{l}$ лежит между l_n и $l^0 - \delta$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}x_1^0 + \frac{1}{4}x_1^1, \frac{1}{4}x_1^0 + \frac{3}{4}x_1^1\right]$. Используя (3.6) и (3.7), получаем, что $\|f_n - \bar{l}\| \leq \rho(f_n, S_2^1)$, в то же время $T(\bar{l}) > T(l_n)$. Противоречие с определением l_n .

Рис. 3

Перейдем к подслучаям первого случая, показанным на рис. 3,б, в, и ко второму случаю. Рассмотрим наборы $(x_{0,n}, x_{1,n}, x_{2,n}) \in H(l_n)$, $y_{j,n} = l_n(x_{j,n})$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, 2$ (начиная с некоторого n_0 , они определены однозначно). Пусть $y_2^i = l^i(1)$, $i = 0, 1$. В подслучаях на рис. 3,б и 3,в рассмотрим

$$\bar{l}_{k,n} = \begin{cases} F_2\left(x_{1,n}, y_{1,n}, y_{1,n}, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right), & f^0(x_1^1) \leq l^0(x_1^1), \\ F_2\left(\frac{k-1}{k}x_{1,n}, y_{0,n}, \frac{1}{k}y_{0,n} + \frac{k-1}{k}y_{1,n}, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right), & f^0(x_1^1) > l^0(x_1^1). \end{cases}$$

Во втором случае будем считать, что

$$x_{1,n} \rightarrow 1, \quad y_{1,n} \rightarrow l^0(1), \quad y_{2,n} \rightarrow b > l^0(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим

$$\bar{l}_{k,n} = \begin{cases} F_2\left(x_{1,n}, y_{0,n}, y_{1,n}, \frac{y_2^0 + b}{2}\right), & f^0(1) \leq l^0(1), \\ F_2\left(\frac{k-1}{k}x_{1,n}, y_{0,n}, \frac{1}{k}y_{0,n} + \frac{k-1}{k}y_{1,n}, \frac{y_2^0 + b}{2}\right), & f^0(1) > l^0(1). \end{cases}$$

Легко видеть, что существует такое n_1 , что для всех $n, k > n_1$ справедливо неравенство $T(\bar{l}_{k,n}) > T(l_n)$. Можно установить, что найдутся $n, k > \max(n_0, n_1)$, для которых $\bar{l}_{k,n} \in P_{S_2^1}(f_n)$. Проверим это в подслучаях первого случая, показанных на рис. 3,б и 3,в, во втором случае соответствующую проверку можно провести аналогичным образом.

Если $f(x_1^1) \leq l^0(x_1^1)$, то выберем такое $\varepsilon > 0$, что $(x_1^1 - \varepsilon, x_1^1 + \varepsilon) \subset (0, 1)$, и для $t \in (x_1^1 - \varepsilon, x_1^1 + \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$f(t) < l^0(t) + \rho(f^0, S_2^1)/2. \quad (3.8)$$

Пусть $\tau = \frac{1}{2}(l^1(x_1^1 + \varepsilon) - l^0(x_1^1 + \varepsilon)) > 0$. В силу того, что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f^0 , а последовательность $\{l_n\}$ — к l^1 , найдется такое $n > \max(n_0, n_1)$, что

$$\begin{aligned} x_{1,n} &\in (x_1^1 - \varepsilon, x_1^1 + \varepsilon), \\ \max\left(\|l_n - l_1\|, \|f_n - f^0\|, \left\|\bar{l}_{n,n} - F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)\right\|\right) \\ &< \min\left(\frac{\tau}{8}, \frac{\rho(f^0, S_2^1)}{8}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Тогда $\bar{l}_{n,n}|_{[0, x_1^1 - \varepsilon]} = l_n|_{[0, x_1^1 - \varepsilon]}$. Для $t \in [0, 1]$ выполняются неравенства

$$\bar{l}_{n,n}(t) \leq l_n(t), \quad F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) \geq l^0(t),$$

и в силу выбора n и соотношений (3.8), (3.9) для $t \in (x_1^1 - \varepsilon, x_1^1 + \varepsilon)$ имеем

$$\bar{l}_{n,n}(t) - f_n(t) \leq l_n(t) - f_n(t) \leq \rho(f_n, S_2^1)$$

и

$$\begin{aligned} f_n(t) - \bar{l}_{n,n}(t) &\leq f_n(t) - F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) \\ &\quad + \left| F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) - \bar{l}_{n,n}(t) \right| \\ &\leq f_n(t) - l^0(t) + \frac{\rho(f^0, S_2^1)}{8} \leq f^0(t) + \frac{\rho(f^0, S_2^1)}{4} - l^0(t) \\ &\leq \frac{3}{4}\rho(f^0, S_2^1) \leq \rho(f_n, S_2^1). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \inf_{t \in [x_1^1 + \varepsilon, 1]} \min \left(l^1(t) - F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t), \right. \\ \left. F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) - l^0(t) \right) = \tau. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поэтому в силу выбора n , неравенства треугольника и соотношений (3.9), (3.10) для $t \in [x_1^1 + \varepsilon, 1]$ имеем

$$\bar{l}_{n,n}(t) - f_n(t) \leq l_n(t) - f_n(t) \leq \rho(f_n, S_2^1)$$

и

$$\begin{aligned} f_n(t) - \bar{l}_{n,n}(t) &\leq f^0(t) + |f_n(t) - f^0(t)| + \left| F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) - \bar{l}_{n,n}(t) \right| \\ &\quad - F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) \\ &\leq f^0(t) + |f_n(t) - f^0(t)| \\ &\quad + \left| \bar{l}_{n,n}(t) - F_2\left(x_1^1, y_0^1, y_1^1, \frac{y_2^0 + y_2^1}{2}\right)(t) \right| - (l^0(t) + \tau) \\ &\leq \rho(f^0, S_2^1) - \frac{\tau}{4} \leq \rho(f_n, S_2^1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{l}_{n,n} \in P_{S_2^1}(f_n)$.

Если $f(x_1^1) > l^0(x_1^1)$, то выберем такое $\varepsilon > 0$, что $(x_1^1 - \varepsilon, x_1^1 + \varepsilon) \subset (0, 1)$, и для $t \in (x_1^1 - \varepsilon, x_1^1 + \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$f(t) > l^1(t) - \frac{\rho(f^0, S_2^1)}{2}. \quad (3.11)$$

Выберем такое $k > \max(n_0, n_1)$, что для функции $\tilde{l}_k = F_2(\frac{k-1}{k}x_1^1, y_0^1, \frac{1}{k}y_0^1 + \frac{k-1}{k}y_1^1, \frac{y_2^0+y_2^1}{2})$ выполняются следующие условия:

$$\frac{k-1}{k}x_1^1 \in (x_1^1 - \varepsilon, x_1^1), \quad \exists \kappa \in (x_1^1, x_1^1 + \varepsilon): \tilde{l}_k(\kappa) = l^1(\kappa),$$

$\tilde{l}_k(t) - l^1(t) \leq \rho(f^0, S_2^1)/8$ для всех $t \in [0, 1]$.

Положим $\tau = l^1(\kappa) - l^0(\kappa)$. Пусть $n > \max(n_0, n_1)$ – такое натуральное число, что

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k}x_{1,n} &\in (x_1^1 - \varepsilon, x_1^1), \quad \exists \gamma \in (x_1^1, x_1^1 + \varepsilon): \bar{l}_{k,n}(\gamma) = l_n(\gamma), \\ \max(\|l_n - l_1\|, \|f_n - f^0\|, \|\bar{l}_{k,n} - \tilde{l}_k\|) &\leq \min\left(\frac{\tau}{8}, \frac{\rho(f^0, S_2^1)}{8}\right). \end{aligned}$$

Тогда $\bar{l}_{k,n}|_{[0, x_1^1 - \varepsilon]} = l_n|_{[0, x_1^1 - \varepsilon]}$. Для всех $t \in [x_1^1 - \varepsilon, \gamma]$ в силу выбора n , неравенства треугольника и соотношения (3.11) справедливо

$$f_n(t) - \bar{l}_{k,n} \leq f_n(t) - l_n(t) \leq \rho(f^n, S_2^1)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{l}_{k,n}(t) - f_n(t) &\leq l^1(t) - f^0(t) + |f_n(t) - f^0(t)| + |\bar{l}_{k,n}(t) - \tilde{l}_k(t)| + |\tilde{l}_k(t) - l^1(t)| \\ &\leq (1/2 + 1/8 + 1/8)\rho(f^0, S_2^1) \leq \rho(f^n, S_2^1). \end{aligned}$$

Далее для $t \in [\gamma, 1]$ имеем

$$\bar{l}_{k,n}(t) - f_n(t) \leq l_n(t) - f_n(t) \leq \rho(f_n, S_2^1)$$

и

$$\begin{aligned} f_n(t) - \bar{l}_{k,n}(t) &\leq f^0(t) - \tilde{l}(t) + |f_n(t) - f^0(t)| + |\tilde{l}(t) - \bar{l}_{k,n}(t)| \\ &\leq f^0(t) - l^0(t) + (l^0(t) - \tilde{l}(t)) + \tau(1/8 + 1/8) \\ &\leq \rho(f^0, S_2^1) + \tau/4 + l^0(\gamma) - \tilde{l}(\gamma) \\ &\leq \rho(f^0, S_2^1) + \tau/4 - \tau/2 \leq \rho(f^n, S_2^1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{l}_{k,n} \in P_{S_2^1}(f_n)$.

Таким образом, верны следующие соотношения:

$$\rho(f_n, S_2^1) = \|f_n - l_n\| = \|f_n - \bar{l}_{k,n}\|, \quad T(\bar{l}_{k,n}) > T(l_n),$$

что противоречит определению l_n , и теорема 1.1 полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1.2

В дальнейшем в обозначении множества $Y_{L,\varepsilon}(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ индексы ε и L будут опускаться.

Пусть $\mu = \mu_d$ — лебегова мера в пространстве $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим строго возрастающую функцию $\phi \in C(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ такую, что $\phi(0) = 0$. Для любых $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ и $f \in C[0, 1]$ положим

$$V_f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{cases} \phi(\mu(Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})))\theta(x_1, \dots, x_{n-1}), & (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \\ 0, & (x_1, \dots, x_{n-1}) \notin D, \end{cases}$$

где

$$\theta(x_1, \dots, x_{n-1}) = \inf_{(t_1, \dots, t_{n-1}) \notin D} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - t_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Функция θ носит вспомогательный характер: если, например, как в следствии 1.3, множество D было бы выпуклым, то в определении V_f сомножитель θ можно было бы опустить. Определение V_f корректно в силу условия (i) из § 1.

Пусть $f \in C[0, 1]$. Из условия (iii) вытекает, что $V_f(x_1, \dots, x_{n-1})$ непрерывно зависит от $f, x_1, \dots, x_{n-1}$ на всей области определения. В силу непрерывности отображения F для любых $f \in C[0, 1]$ и $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ множество $Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ открыто, и, следовательно, если $Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ непусто, то $V_f(x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$. Последовательно определим отображения $X_i(f): C[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq n-1$, следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{X_i(f)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 V_f(X_1(f), \dots, X_{i-1}(f), x_i, \dots, x_{n-1}) dx_i dx_{i+1} \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{X_i(f)}^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 V_f(X_1(f), \dots, X_{i-1}(f), x_i, \dots, x_{n-1}) dx_i dx_{i+1} \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Пусть $x_i^{\text{av}} = X_i(f)$. В силу условия (ii) из § 1 следует, что определение $X_i(f)$ корректно и множество $Y(f, x_1^{\text{av}}, \dots, x_{n-1}^{\text{av}})$ непусто. Пусть $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$. Для $0 \leq j \leq m$ определим отображение $Z_j: C[0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$Z_j(f, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int \cdots \int_{Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})} y_j dy_0 \dots dy_n / \mu(Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Пусть набор $(y_0^{\text{av}}, y_1^{\text{av}}, \dots, y_m^{\text{av}})$ является центром масс множества $Y(f, x_1^{\text{av}}, \dots, x_{n-1}^{\text{av}})$: $y_j^{\text{av}} = Z_j(f, x_1^{\text{av}}, \dots, x_{n-1}^{\text{av}})$, $0 \leq j \leq m$. По условию (i) набор $(y_0^{\text{av}}, y_1^{\text{av}}, \dots, y_m^{\text{av}})$ принадлежит $Y(f, x_1^{\text{av}}, \dots, x_{n-1}^{\text{av}})$. Определим $G: C[0, 1] \rightarrow L$ следующим образом:

$$G(f) = F(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{n-1}^{\text{av}}, y_0^{\text{av}}, \dots, y_m^{\text{av}}).$$

Непосредственно из определения функции $G(f)$ следует, что $\|f - G(f)\| < \rho(f, L) + \varepsilon$ для каждой $f \in C[0, 1]$, т.е. $G(f)$ — ε -выборка. В силу непрерывности F для доказательства теоремы достаточно проверить, что x_i^{av} и y_i^{av} непрерывно зависят от f .

Обозначим через Δ операцию симметрической разности. Из непрерывности отображения $Y(\cdot)$ (условие (iii) из § 1) и выпуклости множества $Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ следует, что $\mu(Y(f, x_1, \dots, x_{n-1}) \Delta Y(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})) \rightarrow 0$ при $\hat{f} \rightarrow f$ и $\hat{x}_i \rightarrow x_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Из ограниченности множества $Y(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ (условие (i)) вытекает, что для множества $A = Y(f, x_1, \dots, x_{n-1}) \Delta Y(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})$ интеграл $\int_A y_i dy_0 \dots dy_m$ стремится к нулю при $\hat{f} \rightarrow f$ и $\hat{x}_i \rightarrow x_i$, $1 \leq i \leq n-1$, следовательно, для любого $\psi > 0$ существует $\xi > 0$ такое, что если $\hat{f} \in C[0, 1]$, $\|f - \hat{f}\| < \xi$, $|x_i^{\text{av}} - \hat{x}_i| < \xi$, то $|y_j^{\text{av}} - Z_j(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})| < \psi$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого $\xi > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|f - \hat{f}\| < \delta$, то для $\hat{x}_i^{\text{av}} = X_i(\hat{f})$ выполнено $|x_i^{\text{av}} - \hat{x}_i^{\text{av}}| < \xi$.

Рассмотрим произвольные числа $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}$, $i \leq n-1$. Функцию $\hat{U}_i(t)$ зададим следующим соотношением:

$$\hat{U}_i(t) = \int_0^1 \dots \int_0^1 V_{\hat{f}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) dx_{i+1} \dots dx_{n-1}.$$

Пусть для всех $1 \leq i \leq n-1$ функция $\hat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1})$ определяется следующим соотношением:

$$\begin{cases} \int_0^{\hat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1})} \hat{U}_i(t) dt = \int_{\hat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1})}^1 \hat{U}_i(t) dt, & \hat{U}_i \not\equiv 0, \\ 0, & \hat{U}_i \equiv 0. \end{cases}$$

Это определение корректно. Действительно, если для некоторых $0 < t_1 < t_2 < 1$ справедливы неравенства $\hat{U}_i(t_1) > 0$, $\hat{U}_i(t_2) > 0$, то в силу условия (ii) из § 1 для всех t , $t_1 < t < t_2$, выполнено $\hat{U}_i(t) > 0$.

Последовательно построим числа $\beta_{n-1} \geq \beta_{n-2} \geq \dots \geq \beta_0$, обладающие следующими свойствами: *если для произвольных i , $1 \leq i \leq n-1$, чисел $\hat{x}_k$, $1 \leq k < i$, и функции $\hat{f} \in C[0, 1]$ выполняются неравенства*

$$|\hat{x}_k - x_k^{\text{av}}| < \beta_{i-1}, \quad \|\hat{f} - f\| < \beta_{i-1},$$

то справедлива оценка

$$|\hat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}) - x_i^{\text{av}}| < \beta_i. \quad (4.1)$$

Пусть $\beta_{n-1} = \xi$. Для фиксированного $1 \leq i \leq n-1$ рассмотрим функцию

$$U_i(t) = \int_0^1 \dots \int_0^1 V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, t, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) dx_{i+1} \dots dx_{n-1}.$$

Числа x_i^{av} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\int_0^{x_i^{\text{av}}} U_i(t) dt = \int_{x_i^{\text{av}}}^1 U_i(t) dt.$$

Докажем, что существует λ_i такое, что если $\int_0^1 |\widehat{U}_i(t) - U_i(t)| dt < \lambda_i$, то $|x_i^{\text{av}} - \widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})| < \beta_i$. В силу непрерывности функции $V_f(x_1, \dots, x_{n-1})$ существует такая γ -окрестность точки x_i^{av} , что функция $U_i(t)$ в этой окрестности не меньше некоторого $a > 0$. Если для некоторого $\tau > 0$ выполнено неравенство $\int_0^1 |U_i(t) - \widehat{U}_i(t)| dt < \tau$, то по неравенству треугольника будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \widehat{U}_i(t) dt - \int_0^1 U_i(t) dt \right| &< \tau, \\ \left| \int_0^{\widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})} \widehat{U}_i(t) dt - \int_0^{x_i^{\text{av}}} U_i(t) dt \right| &< \tau/2, \\ \left| \int_0^{\widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})} (\widehat{U}_i(t) - U_i(t)) dt \right| &< \tau, \\ \left| \int_{x_i^{\text{av}}}^{\widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})} U_i(t) dt \right| &< 2\tau. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\left| \int_{x_i^{\text{av}}}^{\widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})} U_i(t) dt \right| > a \min(|\widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) - x_i^{\text{av}}|, \gamma).$$

Поэтому если для $\lambda_i = \min(\frac{a\beta_i}{2}, \frac{a\gamma}{4})$ будет выполнено соотношение

$$\left| \int_0^1 \widehat{U}_i(t) dt - \int_0^1 U_i(t) dt \right| < \lambda_i,$$

то

$$|x_i^{\text{av}} - \widehat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})| < \beta_i.$$

Таким образом, для проверки оценки (4.1) достаточно показать, что найдется такое β_{i-1} , что неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 \dots \int_0^1 |V_{\hat{f}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \\ - V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})| dx_i \dots dx_{n-1} < \lambda_i \end{aligned}$$

выполняется для любых чисел $\hat{x}_k$, $|\hat{x}_k - x_k^{\text{av}}| < \beta_{i-1}$, $1 \leq k \leq i-1$, и функций $\hat{f}$, $\|\hat{f} - f\| < \beta_{i-1}$.

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество S_q , состоящее из таких наборов $(x_i, \dots, x_{n-1})$, что для произвольного набора $(x'_1, \dots, x'_{n-1})$ и функции $\hat{f} \in C[0, 1]$, удовлетворяющих соотношениям $|x'_k - x_k^{\text{av}}| < \frac{1}{q}$, $|x'_l - x_l| < \frac{1}{q}$, $\|\hat{f} - f\| < \frac{1}{q}$ при $1 \leq k \leq i-1$, $i \leq l \leq n-1$, справедливо

$$|V_{\hat{f}}(x'_1, \dots, x'_{n-1}) - V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})| < \frac{\lambda_i}{3}.$$

В силу непрерывной зависимости $V_f(x_1, \dots, x_{n-1})$ от $f, x_1, \dots, x_{n-1}$ выполняется

$$\mu_{n-i} \left(\bigcup_{q=1}^{\infty} S_q \right) = 1,$$

кроме того, $S_q \subset S_{q+1}$. Поэтому найдется натуральное p , для которого $\mu(S_p) > 1 - \frac{\lambda_i}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{S_p} |V_{\hat{f}}(\hat{x}_1^{\text{av}}, \dots, \hat{x}_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \\ & - V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})| dx_i \dots dx_{n-1} < \frac{\lambda_i}{3}. \end{aligned}$$

Для любой функции $\hat{f} \in C[0, 1]$ выполнено

$$|V_{\hat{f}}(\hat{x}_1^{\text{av}}, \dots, \hat{x}_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})| \leq 1.$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{[0,1]^{n-1}} |V_{\hat{f}}(\hat{x}_1^{\text{av}}, \dots, \hat{x}_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \\ & - V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})| dx_i \dots dx_{n-1} \\ & = \left(\int \dots \int_{S_p} + \int \dots \int_{[0,1]^{n-1} \setminus S_p} \right) |V_{\hat{f}}(\hat{x}_1^{\text{av}}, \dots, \hat{x}_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \\ & - V_f(x_1^{\text{av}}, \dots, x_{i-1}^{\text{av}}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})| dx_i \dots dx_{n-1} \\ & \leq \frac{\lambda_i}{3} + \frac{\lambda_i}{3} < \lambda_i. \end{aligned}$$

Положим $\beta_{i-1} = \min(\beta_i, \frac{1}{p})$. Пусть $\delta = \beta_0$. Найденное δ является искомым. Действительно, если для $\|\hat{f} - f\| < \delta$ положить $\hat{x}_i^{\text{av}} = \hat{x}_i = \hat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1})$, то из определения β_i следует

$$|\hat{x}_i^{\text{av}} - x_i^{\text{av}}| = |\hat{x}_i - x_i^{\text{av}}| = |\hat{X}_i(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}) - x_i^{\text{av}}| < \beta_i \leq \beta_{n-1} = \xi.$$

§ 5. Следствия из теоремы 1.2

В этом параграфе для уменьшения выкладок будем использовать следующие векторные обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad y = (y_0, \dots, y_m).$$

Пусть $f \in C[0, 1]$ и $N(f) = \bigcup_{\gamma < \varepsilon} P_{L, \gamma} = \{l \in L \mid \|l - f\| < \rho(f, L) + \varepsilon\}$. Для функции $l \in L$ определим множество $H(l) = \{x \mid \exists y: l = F(x, y)\}$.

Докажем ряд лемм, используемых в доказательстве следствий 1.3 и 1.4.

ЛЕММА 5.1. Пусть $f \in C[0, 1]$. Если $l^0, l^1 \in N(f)$ и функция $l \in L$ находится между l^0 и l^1 на $[0, 1]$, то $l \in N(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $t \in [0, 1]$ или $|l(t) - f(t)| \leq |l^0(t) - f(t)|$, или $|l(t) - f(t)| \leq |l^1(t) - f(t)|$, поэтому $\|l - f\| \leq \max(\|l^0 - f\|, \|l^1 - f\|)$ и, следовательно, $l \in N(f)$.

ЛЕММА 5.2. Если отображение F линейно по y при фиксированных x , то $Y(f, x)$ выпукло при любых $f \in C[0, 1]$ и $x \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть наборы $y^0 = (y_0^0, \dots, y_m^0)$, $y^1 = (y_0^1, \dots, y_m^1)$ принадлежат $Y(f, x)$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Рассмотрим такие функции $l^0, l^1 \in N(f)$, что $l^0 = F(x, y^0)$ и $l^1 = F(x, y^1)$. Тогда функция $l = \alpha l^0 + \beta l^1$ находится между l^0 и l^1 и

$$l = \alpha F(x, y^0) + \beta F(x, y^1) = F(x, \alpha y^0 + \beta y^1).$$

Поскольку из леммы 5.1 следует, что $l \in N(f)$, то

$$(\alpha y^0 + \beta y^1) \in Y(f, x)$$

и $Y(f, x)$ выпукло.

Введем несколько обозначений, необходимых для формулировки и доказательства леммы 5.3. Пусть $M \subset X$ ($X = (X, \rho)$ – метрическое пространство). Положим

$$U_\gamma(M) = \{u \in X \mid \rho(u, M) < \gamma\}. \quad (5.1)$$

Для $t \in X$ и $r > 0$ определим открытый шар $\overset{\circ}{B}_X(t, r) = \{u \in X \mid \rho(u, t) < r\}$ и замкнутый шар $B_X(t, r) = \{u \in X \mid \rho(u, t) \leq r\}$. В случае $X = \mathbb{R}^d$ будем обозначать открытый и замкнутый шары $\overset{\circ}{B}_d(t, r)$ и $B_d(t, r)$ соответственно.

ЛЕММА 5.3. Пусть F удовлетворяет условиям леммы 5.2, а также обладает следующим свойством:

(**) для произвольных шаров $B_{n-1}(x, r_x) \subset D$, $\overset{\circ}{B}_{m+1}(y, r_y)$ и набора $y^0 \in \overset{\circ}{B}_{m+1}(y, r_y)$ найдутся $\beta > 0$ и $y^1 \in \overset{\circ}{B}_{m+1}(y, r_y)$ такие, что для любого $x' \in B_{n-1}(x, r_x)$ выполнено

$$\min_{t \in [0,1]} |l^0(t) - l^1(t)| \geq \beta,$$

где $l^k = F(x', y^k)$, $k = 0, 1$.

Тогда отображение $Y(f, x)$ непрерывно для всех $f \in C[0, 1]$ и $x \in D$.

Разобьем доказательство леммы на два предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть для $f \in C[0, 1]$ и $x \in D$ множество $Y(f, x)$ непусто. Тогда для любого $\gamma > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции $\hat{f} \in C[0, 1]$ такой, что $\|\hat{f} - f\| < \delta$, и набора $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) \in D$ такого, что $|\hat{x}_i - x_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n-1$, выполнено $Y(\hat{f}, \hat{x}) \neq \emptyset$ и $Y(f, x) \subset U_\gamma(Y(\hat{f}, \hat{x}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть набор $y^0 = (y^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ принадлежит $Y(f, x)$. Докажем, что для произвольного $\gamma > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой функции $\hat{f}$, $\|\hat{f} - f\| < \delta$, и набора $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) \in D$, $|\hat{x}_i - x_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n-1$, найдется такой набор $y = (y_0, y_1, \dots, y_m) \in Y(\hat{f}, \hat{x})$, что $|y_j^0 - y_j| < \gamma$, $0 \leq j \leq m$.

Рассмотрим шар $B_{n-1} = \{x\}$ и шар $\overset{\circ}{B}_{m+1}$ с центром в точке y^0 радиуса γ_1 , причем $0 < \gamma_1 < \gamma$ выбрано так, чтобы $\overset{\circ}{B}_{m+1} \subset Y(f, x)$. Тогда согласно (**) существуют набор y^1 и число β , обладающие соответствующими свойствами (см. (**)). Пусть $l^k = F(x, y^k)$, $k = 0, 1$. Рассмотрим функцию $l = \frac{l^0 + l^1}{2}$, $l = F(x, y)$, где $y = \frac{y^0 + y^1}{2}$. Пусть $\delta_0 = \frac{\beta}{8}$. Ввиду того, что l^0 и l^1 принадлежат $N(f)$, для любого $t \in [0, 1]$ и $i = 0, 1$ выполнено $|l^i(t) - f(t)| < \rho(f, L) + \varepsilon$. Так как $|l^0(t) - l^1(t)| \geq 8\delta_0$ при всех $t \in [0, 1]$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\left| \frac{l^0(t) + l^1(t)}{2} - a \right| + 4\delta_0 \leq \max(|l^0(t) - a|, |l^1(t) - a|).$$

Положив $a = f(t)$ для всех $t \in [0, 1]$, получим $\|f - l\| + 4\delta_0 \leq \rho(f, L) + \varepsilon$ для $\hat{f}$, $\|\hat{f} - f\| < \delta_0$, по неравенству треугольника получим неравенство $\|f - l\| + 3\delta_0 < \rho(\hat{f}, L) + \varepsilon$, из которого следует

$$\|\hat{f} - l\| + 2\delta_0 < \rho(\hat{f}, L) + \varepsilon.$$

В силу непрерывности функции F можно подобрать δ_1 таким образом, что если $|\hat{x}_i - x_i| < \delta_1$, то функция $\hat{l} = F(\hat{x}, y)$ будет отличаться от l не более чем на δ_0 . Тогда положим $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$. Функция $\hat{l}$ принадлежит $N(\hat{f})$ и, следовательно, $y \in Y(\hat{f}, \hat{x})$.

Завершим доказательство предложения. Открытые шары радиуса $\frac{\gamma}{2}$ с центрами во всех точках $Y(f, x)$ являются покрытием компакта $\overline{Y(f, x)}$. Выделяем

из этих шаров конечное покрытие – шары с центрами в точках $z^1, z^2, \dots, z^s$, где $z^k = (z_0^k, z_1^k, \dots, z_m^k)$, $1 \leq k \leq s$. Тогда для каждого z^k найдется δ^k , $1 \leq k \leq s$, такое, что для любой функции $\hat{f}$, $\|\hat{f} - f\| < \delta^k$, и $\hat{x} \in D$, $|\hat{x}_i - x_i| < \delta^k$, $1 \leq i \leq n-1$, найдется такой набор $(z_0, z_1, \dots, z_m) \in Y(\hat{f}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})$, что $|z_j^k - z_j| < \frac{\gamma}{2\sqrt{m+1}}$, $0 \leq j \leq m$. Пусть $\delta = \min_{1 \leq j \leq s} \delta^j$. Таким образом, для любой функции $\hat{f}$, $\|\hat{f} - f\| < \delta$, и набора $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})$, $|\hat{x}_i - x_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n-1$, множество $Y(f, x)$ находится в γ -окрестности множества $Y(\hat{f}, \hat{x})$. Действительно, если z^0 принадлежит $Y(f, x)$, то найдется такое p , что расстояние между z^0 и z^p меньше $\frac{\gamma}{2}$. Находим такой набор $z = (z_0, z_1, \dots, z_m)$, принадлежащий $Y(\hat{f}, \hat{x})$, что $|z_j^p - z_j| < \frac{\gamma}{2\sqrt{m+1}}$, $0 \leq j \leq m$. Таким образом, расстояние между z^0 и z меньше γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть $f \in C[0, 1]$ и $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$. Тогда для любого $\gamma > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $\hat{f} \in C[0, 1]$, $\|\hat{f} - f\| < \delta$, и набора $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) \in D$, $|\hat{x}_i - x_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n-1$, выполнено

$$\begin{aligned} Y(\hat{f}, \hat{x}) &\subset U_\gamma(Y(f, x)), & Y(f, x) &\neq \emptyset, \\ \mu_{m+1}(Y(\hat{f}, \hat{x})) &< \gamma, & Y(f, x) &= \emptyset. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение предложения неверно. Пусть $Y(f, x) \neq \emptyset$. Тогда существовало бы такое γ , что для любого δ нашлись бы функция $\hat{f}$, $\|\hat{f} - f\| < \delta$, и набор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1})$, $|\hat{x}_i - x_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n-1$, такие, что во множестве $Y(\hat{f}, \hat{x})$ найдется набор $\tilde{y} = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$, для которого $U_\gamma(\tilde{y}) \cap Y(f, x) = \emptyset$.

Рассмотрим числа $\gamma > 0$, $R > 0$ и выпуклое ограниченное множество V , $V \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $\mu_{m+1}(V) > 0$. Докажем, что найдется такое число α , что для произвольного выпуклого $W \subset \mathbb{R}^{m+1}$, которое можно поместить в шар радиуса R , и множества $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ таких, что $V \subset W$, $V \subset U$ и W не лежит в γ -окрестности множества U , найдется открытый шар B радиуса α такой, что $B \subset W \setminus U$.

Возьмем такую точку $t \in W$, что $U_\gamma(t) \cap U = \emptyset$. Пусть $r \leq 2R$ таково, что $V \subset B_{m+1}(t, r)$. Положим $C = \{t + \lambda(v - t) \mid v \in V, \lambda \geq 0\}$; ясно, что C – выпуклый конус. Заметим, что $V \subset C \cap B(t, r)$, а $V' = C \cap B(t, \gamma) \subset W \setminus U$. Понятно, что V' выпукло, $\mu(V') \geq \mu(V)(\frac{\gamma}{r})^{m+1}$, кроме того, множество V' лежит в некотором шаре радиуса γ . Поэтому существует α , которое зависит от V, R, U и γ и не зависит от W , такое, что множество V' и, следовательно, множество $W \setminus U$ содержат замкнутый шар радиуса α .

В силу предположения найдутся последовательности функций $\{f^k\} \subset C[0, 1]$ и наборов $\{x^k = (x_1^k, \dots, x_{n-1}^k)\} \subset D$ таких, что

$$\|f^k - f\| < \frac{1}{k}, \quad |x_i^k - x_i| < \frac{1}{k}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.2)$$

и во множестве $Y(f^k, x^k)$ найдется y^k такое, что

$$U_\gamma(y^k) \cap Y(f, x) = \emptyset.$$

Из леммы 5.2 вытекает, что множества $W^k = Y(f^k, x^k)$ и $U = Y(f, x)$ выпуклы. Для $\tau > 0$ рассмотрим множество

$$V = \{\tilde{y} \mid U_{2\tau}(\tilde{y}) \subset Y(f, x)\}.$$

Если τ достаточно мало, то V выпукло и непусто. По предложению 5.4 найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $k > N$ верно $U \subset U_\tau(W^k)$. Тогда при $k > N$ выполняется включение $V \subset W^k$. Действительно, в противном случае нашлась бы точка $\hat{y} \in V \setminus W^k$ и ввиду выпуклости множества W^k существовала бы такая точка $\tilde{y} \in U_{2\tau}(\hat{y}) \subset U$, которая не содержится в $U_\tau(W^k)$. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что найдется последовательность замкнутых шаров $\{B^k\}$ радиуса α , для которых справедливо вложение

$$B^k \subset W^k \setminus U = Y(f^k, x^k) \setminus Y(f, x).$$

В случае, когда $Y(f, x) = \emptyset$, найдутся последовательности функций $\{f^k\} \in C[0, 1]$ и наборов $\{x^k\} \subset D$, обладающие свойствами (5.2), для которых $\mu_{m+1} \times Y(f^k, x^k) > \gamma$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В силу того, что множества $Y(f^k, x^k)$ выпуклы и ограничены в совокупности, существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N}$ множество $Y(f^k, x^k)$ содержит некоторый шар B^k радиуса α . (Дальнейшее доказательство одинаково для случая $Y(f, x) \neq \emptyset$ и случая $Y(f, x) = \emptyset$.)

Так как множества $Y(f^k, x^k)$ при $k > N$ ограничены в совокупности, то из последовательности $\{B^k\}$ можно выбрать подпоследовательность шаров, содержащих некоторый открытый шар $\overset{\circ}{B}$ радиуса $\alpha/2$. Для уменьшения выкладок будем считать, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется (5.2) и справедливо включение

$$\overset{\circ}{B} \subset Y(f^k, x^k) \setminus Y(f, x). \quad (5.3)$$

Рассмотрим произвольный набор $y^0 = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_m^0) \in \overset{\circ}{B}$, шар $\overset{\circ}{B}$ и замыкание некоторой окрестности $U_{\gamma_1}(x)$, лежащей в D , $\gamma_1 < \gamma$. Тогда по свойству (**) существуют набор y^1 и число β , обладающие соответствующими свойствами (см. (**)). Положим $y = \frac{y^0 + y^1}{2}$, и пусть $l = F(x, y)$. Пусть $\beta_1 < \gamma_1$ таково, что для всех $\tilde{x} \in D$ из β_1 -окрестности x выполнено $\|F(\tilde{x}, y) - l\| < \frac{\beta}{8}$. Пусть k – такое натуральное число, что $\frac{1}{k} < \min\left(\frac{\beta}{8}, \beta_1\right)$. Рассмотрим $l^k = F(x^k, y)$. В силу выбора k , соотношения (5.2) и того, что $F(x, y), F(x^k, y^1) \in N(f^k)$, для любого $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|F(x^k, y^0)(t) - F(x^k, y^1)(t)| > \beta.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 5.4, получаем оценку

$$\|l^k - f^k\| + \frac{\beta}{2} < \rho(L, f^k) + \varepsilon.$$

Применив два раза неравенство треугольника и используя оценку $\|f^k - f\| < \frac{\beta}{8}$, получим, что $\|l^k - f\| + \frac{\beta}{4} < \rho(L, f) + \varepsilon$. Учитывая то, что $\frac{1}{k} < \beta_1$, и соотношения (5.2), заключаем, что $\|l - f\| < \rho(L, f) + \varepsilon$, следовательно, $y \in Y(f, x) \cap \overset{\circ}{B}$. Противоречие с соотношением (5.3).

Лемма 5.3 непосредственно вытекает из предложений 5.4 и 5.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. Для того чтобы доказать существование непрерывной ε -выборки на множество кусочно линейных функций S_n^1 (см. (1.1)), проверим, что $S_n^1 \in K$, и применим теорему 1.2 для $m = n$, D_n (см. (3.1)), F_n (см. (3.2)) и $S_n^1 = \text{Im } F_n$.

Докажем, что при $n > 1$ множество S_n^1 принадлежит K , т.е. удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) из § 1.

Непосредственно из задания S_n^1 следует, что оно удовлетворяет условиям леммы 5.2, поэтому для S_n^1 условие (i) выполняется. Проверим выполнение условия (ii).

Пусть для некоторого $0 \leq k \leq n-2$ функции l^0 и l^1 из $N(f)$ таковы, что существуют такие наборы $(0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 1) \in H_n(l^0)$ и $(0, x_1^1, \dots, x_{n-1}^1, 1) \in H_n(l^1)$, для которых $x_i^0 = x_i^1$ при всех $0 \leq i \leq k$. Докажем, что для любого $z \in (x_{k+1}^0, x_{k+1}^1)$ найдутся функция $l \in S_n^1$, лежащая между l^0 и l^1 , и набор $(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in H_n(l)$ такие, что $x_i = x_i^0$ при всех $0 \leq i \leq k$ и $x_{k+1} = z$. Будем считать k равным нулю, в других случаях можно доопределить l на $[0, x_k^0]$ линейной комбинацией l^0 и l^1 так, чтобы l была непрерывной.

Пусть $x_1^0 < x_1^1$. Если условие (ii) не выполняется, то найдется z , $x_1^0 < z < x_1^1$, для которого не существует функции $l \in S_n^1$, лежащей между l^0 и l^1 , и набора $(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in H_n(l)$, в котором $x_1 = z$. Положим

$$z^0 = \sup\{x_1 \mid l \text{ лежит между } l^0 \text{ и } l^1; (0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in H_n(l), x_1 < z\},$$

$$z^1 = \inf\{x_1 \mid l \text{ лежит между } l^0 \text{ и } l^1; (0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in H_n(l), x_1 > z\}.$$

Очевидно, что $z_0 \leq z_1$. Тогда найдутся такие последовательности функций $\{l_k^0\}$, лежащих между l^0 и l^1 , и наборов $\{(x_{1,k}^0, \dots, x_{n-1,k}^0)\}$, $(0 = x_{0,k}^0, x_{1,k}^0, \dots, x_{n-1,k}^0, x_{n,k}^0 = 1) \in H_n(l_k^0)$, для которых существуют $\hat{x}_i^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k}^0$, $\hat{y}_j^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k^0(x_{j,k}^0)$, $1 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m$, причем $\hat{x}_1^0 = z^0$. Если $\hat{x}_{i-1}^0 \neq \hat{x}_i^0$, $1 \leq i \leq n$, то полагаем $\hat{x}_i^0 = \hat{x}_i^0$, $\hat{y}_i^0 = \hat{y}_i^0$, $0 \leq i \leq n$, $\hat{l}^0 = F(\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_{n-1}^0, \hat{y}_0^0, \dots, \hat{y}_n^0)$. Ясно, что $\hat{l}^0$ лежит между l^0 и l^1 . Возможно, что $\hat{x}_{i-1}^0 = \hat{x}_i^0$ для некоторых i . В этом случае будем действовать следующим образом. Пусть $\tau > 0$; для каждого $t \in (0, 1)$, $t \neq \hat{x}_i^0$, $1 \leq i \leq n-1$, существует $\tilde{l}^0(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k^0(t)$. Если $\hat{x}_{i-1}^0 \neq \hat{x}_i^0 = \dots = \hat{x}_j^0 \neq \hat{x}_{j+1}^0$, $1 \leq i < j \leq n-1$, то рассмотрим числа

$$\hat{x}_p^0 = \hat{x}_i^0 + \tau(p-i), \quad i \leq p \leq j,$$

$$\hat{y}_i^0 = \lim_{t \rightarrow \hat{x}_i^0-0} \tilde{l}^0(t), \quad \hat{y}_p^0 = \tilde{l}^0(\hat{x}_i^0 + \tau(p-i)), \quad i+1 \leq p \leq j.$$

Если $\hat{x}_i^0 = \dots = \hat{x}_{n-1}^0 = 1$, $2 \leq i \leq n-1$, то рассмотрим

$$\hat{x}_p^0 = 1 - (n-p)\tau, \quad i \leq p \leq n-1, \quad \hat{y}_p^0 = \tilde{l}^0(1 - (n-p)\tau), \quad i \leq p \leq n-1,$$

и $\hat{y}_n^0 = \lim_{t \rightarrow 1-0} \tilde{l}^0(t)$. Кроме того, еще неопределенные числа $\hat{x}_i^0, \hat{y}_j^0$, $1 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq n$, зададим равенствами $\hat{x}_i^0 = \hat{x}_i^0$, $\hat{y}_j^0 = \hat{y}_j^0$. Для достаточно малого τ

набор $(\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_{n-1}^0)$ принадлежит D , а набор $(\hat{y}_0^0, \dots, \hat{y}_n^0)$ определен корректно. Положим

$$\hat{l}^0 = F(\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_{n-1}^0, \hat{y}_0^0, \dots, \hat{y}_n^0).$$

Ясно, что $\hat{l}^0$ лежит между l^0 и l^1 и $\hat{x}_1^0 = z^0$. Аналогичным образом можно построить такие наборы $(\hat{x}_1^1, \dots, \hat{x}_{n-1}^1) \in D$ и $(\hat{y}_0^1, \dots, \hat{y}_n^1)$, что функция

$$\hat{l}^1 = F(\hat{x}_1^1, \dots, \hat{x}_{n-1}^1, \hat{y}_0^1, \dots, \hat{y}_n^1)$$

также лежит между l^0 и l^1 , и $\hat{x}_1^1 = z^1$.

Предположим, что $\hat{x}_2^0 \leq z^1$. Тогда определим функцию $l \in S_n^1$ следующим образом. Пусть $x_{1,l}$ – такое число из (z^0, z^1) , что на $[x_{1,l}, z^1)$ графики l^0 и l^1 или не пересекаются, или совпадают и $\hat{x}_i^0 \notin [x_{1,l}, z^1)$ при всех $1 \leq i \leq n-1$. Пусть $l \in C[0, 1]$ такова, что $l|_{[0, x_{1,l}]} = \hat{l}^1|_{[0, x_{1,l}]}$. Положим $x_{2,l} = z^1$, $y_{2,l} = \hat{l}^0(z^1)$. Определим $l|_{[x_{1,l}, x_{2,l}]}$ как линейную функцию, удовлетворяющую $l(x_{2,l}) = y_{2,l}$, и $l|_{[x_{2,l}, 1]} = \hat{l}^0|_{[x_{2,l}, 1]}$. Понятно, что $l \in S_n^1$ будет лежать между $\hat{l}^0$ и $\hat{l}^1$ и существует такой набор $(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in H_n(l)$, что $x_1 \in (z^0, z^1)$.

Рис. 4

Если $\hat{x}_2^0 > z^1$ (см. рис. 4), то проведем прямую a , которая на $[z^1, \min(\hat{x}_2^0, \hat{x}_2^1)]$ лежит между графиками $\hat{l}^0$ и $\hat{l}^1$, а вне этого отрезка не пересекает вторые звенья графиков $\hat{l}^0$ и $\hat{l}^1$ или, если вторые звенья графиков $\hat{l}^0$ и $\hat{l}^1$ лежат на одной прямой, совпадает с этой прямой. Если найдется точка (x', y') , $x' \in (z^0, z^1)$, принадлежащая прямой a и графику $\hat{l}^1$, то для $t \in [0, x']$ положим $l(t) = \hat{l}^1(t)$. В противном случае рассмотрим такую точку (x', y') прямой a , где $x' \in (z^0, z^1)$ достаточно близко к z^0 , что на отрезке $[0, x']$ можно определить линейную функцию l , лежащую между l^0 и l^1 , такую, что $l(x') = y'$.

Пусть $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – первая общая точка прямой a с графиком $\hat{l}^0$ или $\hat{l}^1$, для которой $\tilde{x} \geq \min(\hat{x}_2^0, \hat{x}_2^1)$, если такой точки нет, то возьмем $\tilde{x} = 1$. Пусть на $[x', \tilde{x}]$ график

функции l совпадает с прямой a , а на $[\tilde{x}, 1]$ функция l равна $\hat{l}^0$ или $\hat{l}^1$. Таким образом, l лежит между $\hat{l}^0$ и $\hat{l}^1$, а значит, между l^0 и l^1 , и существует такой набор $(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \in H_n(l)$, что $z^0 < x_1 < z^1$. Противоречие с определением z^0 и z^1 . Таким образом, условие (ii) проверено.

Покажем, что S_n^1 удовлетворяет условию (*). В качестве β возьмем такое число, что $(y_0^1, \dots, y_m^1) \in \mathring{B}_{m+1}(y, r_y)$, где $y_j^1 = y_j^0 + \beta$; тогда для любого набора $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_{n-1}(x, r_x)$ разница между $l^0 = F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0^0, \dots, y_m^0)$ и $l^1 = F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0^1, \dots, y_m^1)$ в любой точке $[0, 1]$ будет равна β . Выполнение для S_n^1 условия (iii) вытекает из леммы 5.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5.2. Покажем, что для $m \geq 0$ и $n \geq 2$ множество $R_{m,n-1}$ принадлежит классу K . Напомним, что функция l принадлежит множеству $R_{m,n-1}$, если она представима в виде $l = \frac{P}{Q}$, где P – многочлен степени, меньшей либо равной m , а Q – многочлен степени, меньшей либо равной $n-1$, который не имеет нулей на $[0, 1]$. Пусть $\psi \in C((0, 1), \mathbb{R})$ – строго возрастающая взаимно однозначная функция. Пусть D – множество таких наборов $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in (0, 1)^{n-1}$, что многочлен $\sum_{i=1}^{n-1} \psi(x_i)(t)^{n-i} + 1$ не имеет нулей на $[0, 1]$. Пусть отображение F переводит наборы $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ и $(y_0, \dots, y_m)$ в рациональную дробь P/Q , $Q = \sum_{i=1}^{n-1} \psi(x_i)(t)^{n-i} + 1$, а P – такой многочлен, что $P(j/m) = y_j$ для всех $0 \leq j \leq m$ при $m > 0$ и $P \equiv y_0$ при $m = 0$.

Проверим выполнение для $R_{m,n-1}$ условий (i)–(iii). Выполнение условия (i) непосредственно следует из определения $R_{m,n-1}$. Для проверки истинности условия (ii) заметим, что если $l_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ и $l_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ принадлежат $N(f)$, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, функция $l = \frac{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2}{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2}$ также принадлежит $N(f)$.

Покажем, что $R_{m,n-1}$ удовлетворяет условию (*). Рассмотрим набор $(y_0^1, \dots, y_m^1) \in \mathring{B}_{m+1}(y, r_y)$, где $y_j^1 = y_j^0 + \xi$; тогда для любого набора $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$

$$\min_{t \in [0, 1]} |l^0(t) - l^1(t)| \geq \min_{Q \in T} \frac{\xi}{\|Q\|} = \beta,$$

где $T = \{ \sum_{i=1}^{n-1} \psi(x_i)(t)^{n-i} + 1 \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_{n-1}(x, r_x) \}$, а $l^k = F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0^k, \dots, y_m^k)$, $k = 0, 1$. Выполнение для $R_{m,n-1}$ условия (iii) вытекает из леммы 5.3.

§ 6. Доказательство теоремы 1.5

Пусть заданы $n > 1$, $d > 1$. Обозначим $\tilde{S}_n^d = S_n^d[0, n+3]$. Покажем, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что любое отображение $G: C[0, n+3] \rightarrow \tilde{S}_n^d$, удовлетворяющее неравенству

$$\|f - G(f)\| \leq \rho(f, \tilde{S}_n^d) + \varepsilon,$$

будет разрывно. К утверждению теоремы 1.5 отсюда можно перейти с помощью гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{n+3}$.

Зададим функции l^0, l^1 следующими соотношениями:

$$l^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ -(x-3)^2 + 1, & 2 \leq x \leq 5, \\ (-1)^h(h-x) + \frac{(-1)^h}{2} - 2.5, & h \leq x \leq h+1, \quad 5 \leq h \leq n+2, \end{cases}$$

$$l^1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4, \\ -(x-3)^2 + 1, & 4 \leq x \leq 5, \\ (-1)^h(h-x) + \frac{(-1)^h}{2} - 2.5, & h \leq x \leq h+1, \quad 5 \leq h \leq n+2. \end{cases}$$

Функции l^0, l^1 изображены на рис. 5.

Рис. 5

Определим с помощью формулы (3.3) функции $f^k = f_{k; \{l^0, l^1\}}^{n+3}$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множества $U_0 = \{(x, y) \mid 2.5 \leq x \leq 3.5; y \geq 0.25\}$ и $U_1 = \{(x, y) \mid 2.5 \leq x \leq 3.5; y \leq 0.5\}$.

Заметим, что для $i = 0, 1$ существуют числа $a > 0$ и $K \in \mathbb{N}$ такие, что для любой точки (x, y) из U_i и многочлена R , $R \in \mathcal{P}_d$, $R(x) = y$, справедливо неравенство

$$\|R - f^k\|_{\Delta_i} \geq 10 + a, \quad k \geq K,$$

где $\Delta_0 = [0, 2]$ и $\Delta_1 = [4, 5]$.

Понятно, что найдутся такое $k > K$ и ε , $0 < \varepsilon < a$, для которых $\rho(f^k, \tilde{S}_n^d) = 10 = \|f^k - l^0\| = \|f^k - l^1\|$, и для любых $l \in P_{\tilde{S}_n^d, \varepsilon}(f^k)$ и набора $(0, x_1, \dots, x_{n-1}, n+3) \in H_n(l)$ выполняется $|x_p - (p+3)| < 0.1$, $2 \leq p \leq n$. Тогда если $l \in \tilde{S}_n^d$ и $l(3) \in (0.25, 0.5)$, то $l \notin P_{\tilde{S}_n^d, \varepsilon}(f^k)$.

Будем использовать следующую лемму.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\varepsilon > 0$, X – линейное нормированное пространство и L, V_0, V_1 – его подмножества, причем

$$\text{dist}(V_0, V_1) = \inf_{x_0 \in V_0, x_1 \in V_1} \|x_0 - x_1\| > \varepsilon. \quad (6.1)$$

Если для некоторого $x \in X \setminus L$ выполняется

$$P_{L,\varepsilon}(x) \subset V_0 \cup V_1, \quad \exists y_0 \in V_0, \quad y_1 \in V_1: y_0, y_1 \in P_{L,0}(x),$$

то не существует непрерывной ε -выборки на множество L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует непрерывная ε -выборка G на множество L . Пусть $x_t = ty_0 + (1-t)x$ — точка из X , где $t \in [0, 1]$, и $\rho = \rho(x, L) = \|y_0 - x\|$. Заметим, что для любого числа $t \in [0, 1]$ в силу введенных обозначений и определения ε -выборки выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|x_t - x\| &= t\rho, \\ \|G(x_t) - x_t\| &\leq \|y_0 - x_t\| + \varepsilon = (1-t)\rho + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|G(x_t) - x\| \leq \|G(x_t) - x_t\| + \|x - x_t\| \leq (1-t)\rho + \varepsilon + t\rho = \rho + \varepsilon.$$

Таким образом, для всех $t \in [0, 1]$ имеем

$$G(x_t) \in P_{L,\varepsilon}(x) \subset V_0 \cup V_1. \quad (6.2)$$

При $t = 1$ получаем, что $G(y_0) \in V_0 \cup V_1$, но $\rho(y_0, L) = 0$, поэтому $\|G(y_0) - y_0\| \leq \varepsilon$, и, следовательно, согласно (6.1) и (6.2) справедливо $G(y_0) \in V_0$. В силу непрерывности G и соотношения (6.2) получаем, что $G(x) \in V_0$. Аналогичным образом можно показать, что $G(x) \in V_1$. Противоречие с соотношением (6.1).

Для завершения доказательства теоремы 1.5 достаточно применить лемму 6.1 для $X = C[0, n+3]$, $L = \tilde{S}_n^d$, $V_0 = \{l \in \tilde{S}_n^d \mid l(3) \geq 0.5\}$, $V_1 = \{l \in \tilde{S}_n^d \mid l(3) \leq 0.25\}$, $x = f^k$, $y_0 = l^0$, $y_1 = l^1$ и ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. На самом деле, на S_n^d , $n > 1$, $d > 1$, не существует непрерывной ε -выборки ни для какого $\varepsilon > 0$. Это утверждение можно получить, применив растяжение к конструкции из теоремы 1.5.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, М. И. Карлову и А. Р. Алимову за помощь, оказанную при написании этой статьи, а также С. В. Конягину за ряд полезных замечаний, в частности за предложение идеи упрощения доказательства теоремы 1.5.

Список литературы

1. Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с наилучшим приближенным представлением функций // Сочинения. Т. II. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1946–1951. С. 151–235.
2. Конягин С. В. О непрерывном операторе обобщенного рационального приближения // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №3. С. 404.

3. *Maehly H., Witzgall Ch.* Tschebyscheff-Approximationen in kleinen Intervallen. II. Stetigkeitssätze für gebrochene rationale Approximationen // Num. Math. 1960. V. 2. № 5. P. 293–307.
4. *Бердышев В. И.* Пространства с равномерно непрерывной метрической проекцией // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 3–12.
5. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 122–131.
6. *Маринов А. В.* Оценки устойчивости непрерывной селекции для метрической почти-проекции // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 4. С. 47–53.
7. *Альбрехт П. В.* Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 3–28.
8. *Nürnberg G., Sommer M.* Characterization of continuous selection of the metric projection for spline functions // J. Approx. Theory. 1978. V. 22. P. 320–330.
9. *Лившиц Е. Д.* О непрерывном почти наилучшем приближении в пространстве $C[0, 1]$ // Функц. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 1. С. 85–87.
10. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее отклоняющихся от нуля. М.–Л.: ОГИЗ, 1948.
11. *Колмогоров А. Н. Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
12. *Kirchberger P.* Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. Inaugural-dissertation. Gottingen, 1902.
13. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

Поступило в редакцию

12.IV.2001

28.VIII.2002