Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков, Метод подобных операторов в спектральном анализе несамо-сопряженного оператора Дирака с негладким потенциа-лом, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 3, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 02:53:24

УДК 517.19

А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков

Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом

Для исследования спектральных свойств оператора Дирака используется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра оператора Дирака и сходимости спектральных разложений.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: спектр оператора, оператор Дирака, асимптотика спектра, спектральные разложения, метод подобных операторов.

§ 1. Введение

Пусть $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2) = L_2[0, \pi] \times L_2[0, \pi]$ – гильбертово пространство измеримых на $[0, \pi]$ со значениями в $\mathbb{C}^2$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ определяется формулой

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2), \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2),$$

где $(x_i, y_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x_i(\tau) \overline{y_i(\tau)} d\tau$, $i = 1, 2$, – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$ комплексных функций. Через $W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2): y \text{ абсолютно непрерывна и } y' \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)\}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = (x, y) + (x', y')$, $x, y \in W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2)$.

Рассматривается оператор Дирака

$$L_{bc}: D(L_{bc}) \subset L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2),$$

$$L_{bc}y = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} - vy, \quad y \in D(L_{bc}),$$

где $v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$, $P, Q \in L_2[0, \pi]$. Область определения $D(L_{bc})$ задается одним из краевых условий bc:

- (a) *периодическое условие* (bc = per: $y(0) = y(\pi) \in \mathbb{C}^2$);
- (b) *антипериодическое условие* (bc = ap: $y(0) = -y(\pi) \in \mathbb{C}^2$);
- (c) *условие Дирихле* (bc = dir: $y_1(0) = y_2(0)$ и $y_1(\pi) = y_2(\pi)$), где $y = (y_1, y_2) \in W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2)$.

А именно, полагаем $D(L_{bc}) = \{y \in W_2^1([0, \pi], \mathbb{C}^2): y \in bc\}$, и соответствующие операторы будут обозначаться через L_{per} , L_{ap} , L_{dir} . Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то используется запись L_{bc}^0 или L_{per}^0 , L_{ap}^0 , L_{dir}^0 соответственно. Оператор L_{bc}^0 будет называться *свободным оператором Дирака*. Он, как правило,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00276).

при изучении оператора L_{bc} будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал v – возмущенного. Особо отметим, что не налагаются ограничения на v , гарантирующие самосопряженность возмущения (см. [1]), и какие-либо дополнительные ограничения (типа гладкости), кроме условия $v \in L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$.

Операторы L_{bc}^0 , $bc \in \{\text{per}, \text{ap}, \text{dir}\}$, являются самосопряженными с дискретным спектром. Легко описываются спектры $\sigma(L_{bc}^0)$ и собственные функции для L_{bc}^0 :

(а) $\sigma(L_{\text{per}}^0) = 2\mathbb{Z}$ – множество четных чисел; каждое $\lambda_n = 2n \in 2\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, есть двойное собственное значение, а соответствующее собственное подпространство есть $E_n^0 = \text{Span}\{e_n^1, e_n^2\}$, где

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi];$$

(б) $\sigma(L_{\text{ap}}^0) = 2\mathbb{Z} + 1$ – множество нечетных чисел; соответствующие собственные подпространства заданы теми же формулами, что и для оператора L_{per}^0 , где $\lambda_n = 2n + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$, $n \in \mathbb{Z}$;

(с) $\sigma(L_{\text{dir}}^0) = \mathbb{Z}$; каждое собственное значение простое и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n^1 + e_n^2)$, где $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В определении оператора L_{bc} , $bc \in \{\text{per}, \text{ap}, \text{dir}\}$, при введении соответствующих обозначений мы, в основном, следовали статье [2]. В ней, в частности, был приведен ряд общих спектральных свойств оператора Дирака. Исследования проводились (см. более ранние работы [3], [4]) с привлечением обычных методов теории возмущений [5] (резольвентный метод), а также с использованием матричного представления операторов. В частности, в [2] получены локализационные теоремы (теорема 17 для спектра и теорема 18, предложение 19 для проекторов Рисса). В предложении 20 получено утверждение о сходимости спектральных разложений для функции из $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ по системе спектральных проекторов.

При попытке исследования оператора Дирака L_{bc} общими методами теории возмущений [5]–[9] возникает несколько затруднений, связанных с наличием таких свойств, как:

(а) расстояние между собственными значениями невозмущенного оператора L_{bc}^0 не уходит в бесконечность;

(б) возмущение (оператор умножения на потенциал v) не является ограниченным оператором.

В настоящей статье для исследования спектральных свойств оператора Дирака используется метод подобных операторов [10]–[12]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора L_{bc}^0). Тем самым, существенно упрощается изучение исследуемого оператора L_{bc} .

Одним из основных результатов статьи является теорема 6, в которой установлено, что каждый из рассматриваемых операторов Дирака L_{bc} , где $bc \in \{\text{per}, \text{ap}, \text{dir}\}$, подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов конечного ранга. Такой результат служит основой для последующего

спектрального анализа оператора L_{bc} . Так, в теореме 7 на основе теоремы 6 получены оценки его собственных значений. Оценки собственных значений важны, например, при оценках длин зон неустойчивости соответствующего оператора Дирака в $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ (см. [2]). В теоремах 9–11 получены оценки отклонений спектральных проекторов оператора L_{bc} от соответствующих спектральных проекторов оператора L_{bc}^0 . В частности, получены оценки равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений для операторов L_{bc} и L_{bc}^0 .

§ 2. О методе подобных операторов

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство, $\text{End } \mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = UA_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2 .

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Имеет место следующая лемма, непосредственно вытекающая из определения 1.

ЛЕММА 1. Пусть $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, – два подобных оператора и $U \in \text{End } \mathcal{X}$ – оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда:

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ – спектр, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$ и $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, – дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i , $i = 1, 2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|_{\mathcal{X}_k}$, $k = 1, 2$, – сужение A_2 на $\mathcal{X}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{X}}_k = U(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|_{\widetilde{\mathcal{X}}_k}$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{X}}_2$. Кроме того, если P – проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ (т.е. $\mathcal{X}_1 = \text{Im } P$ – образ проектора P , $\mathcal{X}_2 = \text{Im}(I - P)$), то проектор $\widetilde{P}$, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{X}}_2$, определяется формулой

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}. \quad (1)$$

Через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору A , т.е. линейный оператор $B: D(B) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина $\|B\|_A = \inf\{C > 0: \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$, принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Поскольку $D(A - B) = D(A)$ для любого $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, то обычно считается, что выполнено равенство $D(B) = D(A)$.

Далее будет рассматриваться трансформатор (т.е. линейный оператор в пространстве линейных операторов; терминология М.Г. Крейна) $\text{ad}_A: D(\text{ad}_A) \subset \text{End } \mathcal{X} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$,

$$\text{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\text{ad}_A),$$

с областью определения $D(\text{ad}_A)$, состоящей из операторов $X \in \text{End } \mathcal{X}$, обладающих свойствами:

- 1) $XD(A) \subset D(A)$;
- 2) оператор $AX - XA: D(A) \rightarrow \mathcal{X}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{X}$ (и полагается $\text{ad}_A X = Y$).

Наиболее важным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки [10]–[12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{U}$ – линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, \quad \Gamma: \mathfrak{U} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$$

являются трансформаторами. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора A , а $\mathfrak{U}$ – *допустимым пространством возмущений*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathfrak{U}$ – банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \leq C\|X\|_*$ для любого $X \in \mathfrak{U}$);
- 2) J и Γ – непрерывные трансформаторы, причем J – проектор;
- 3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, более того, $\Gamma X \in D(\text{ad}_A)$, причем

$$\text{ad}_A \Gamma X = A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX \quad \forall X \in \mathfrak{U}, \quad (2)$$

кроме того, $\Gamma X \in \text{End } \mathcal{X}$ – единственное решение уравнения

$$\text{ad}_A Y = AY - YA = X - JX, \quad (3)$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

- 4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

- 5) для любых $X \in \mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 1 [10], [12]. Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ – допустимая тройка для оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ и B – некоторый оператор из пространства допустимых для A возмущений $\mathfrak{U}$. Тогда если выполнено неравенство

$$\|J\| \|B\|_* \|\Gamma\| < \frac{1}{4}, \quad (4)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - J\tilde{X}$, где $\tilde{X} \in \mathfrak{U}$ является решением (нелинейного) уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B := \Phi(X), \quad (5)$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B, \dots$ (оператор $\Phi: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{U}: \|X - B\| \leq 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J\tilde{X}$ осуществляет оператор $I + \Gamma X \in \text{End } \mathcal{X}$.

Часто бывает сложно построить пространство допустимых возмущений, содержащее рассматриваемое возмущение. В таком случае осуществляется построение трансформаторов J и Γ (с помощью равенств (2), (3)) на всем пространстве $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ таким образом, чтобы операторы вида $A - JX$, $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, имели несложную структуру. Затем строится пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ такое, что оно вместе с сужениями J и Γ на это пространство (они далее обозначаются теми же буквами) образует допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для A .

Поскольку возмущение B может не принадлежать $\mathfrak{U}$, делаем предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор вида $A - \tilde{B}$, где $\tilde{B} \in \mathfrak{U}$. Такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Операторы ΓB , JB , B удовлетворяют следующим условиям:*

- (i) $\Gamma B \in \text{End } \mathcal{X}$ и $\|\Gamma B\| < 1$;
- (ii) $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$;
- (iii) $B\Gamma B, (\Gamma B)JB \in \mathfrak{U}$;
- (iv) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$;
- (v) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что выполнено неравенство $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 2. *При выполнении предположения 1 оператор $A - B$ подобен оператору $A - JB - B_0$, где $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$, причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0); \quad (6)$$

здесь I – тождественный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (i) и (v) предположения 1 следуют (см. [10]) непрерывная обратимость оператора $U = I + \Gamma B$ и равенство $UD(A) = D(A)$. Равенство (6) следует из условий (ii), (iv). Корректность определения оператора B_0 следует из условий (ii), (iii). Теорема доказана.

§ 3. Построение допустимой тройки для абстрактных операторов, близких к оператору Дирака

Теперь приведенную схему предварительного преобразования подобия и построения допустимой тройки осуществим для таких абстрактных операторов, которые по своим свойствам наиболее близки к изучаемому оператору Дирака.

Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – идеал операторов Гильберта–Шмидта из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$. Через $\|X\|_2$ обозначается норма Гильберта–Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т.е. $\|X\|_2 = \sqrt{\|XX^*\|}$. Пусть $A = A^*$: $D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – самосопряженный оператор с компактной резольвентой $R(\cdot, A)$: $\rho(A) \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, вида

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{\omega}n + a, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $a \geq 0$. Таким образом, $\omega = \pi$, $a = 0$, если $A = L_{\text{per}}^0$; $\omega = \pi$, $a = 1$, если $A = L_{\text{ap}}^0$; $\omega = 2\pi$, $a = 0$, если $A = L_{\text{dir}}^0$. Пусть P_n – ортогональный

проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$, и, следовательно, $AP_n = \lambda_n P_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Оператор iA согласно теореме Стоуна [4] будет являться (инфинитезимальным) генератором группы изометрий $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, причем имеет место следующее спектральное представление операторов этой группы изометрий:

$$T(t)x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(\frac{2\pi}{\omega} n + a)t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теперь, следуя приведенной выше схеме, построим трансформаторы $J, \Gamma: \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Для этого будем использовать некоторые подходы из [10]–[12], связанные с гармоническим анализом линейных операторов.

Вначале эти трансформаторы определим на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, совпадающей с одной из алгебр $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\text{End } \mathcal{H}$ (для нас наиболее важна в дальнейшем первая). С этой целью каждому оператору $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ сопоставим периодическую периода ω сильно непрерывную операторнозначную функцию

$$t \mapsto T(t)XT(-t): \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

При этом она непрерывна в равномерной операторной топологии, если $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Тем самым, возникло изометрическое периодическое периода ω представление

$$\tilde{T}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathcal{B}(\mathcal{H})), \quad \tilde{T}(t) = T(t)XT(-t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (7)$$

генератором которого является оператор ad_A со спектром $\sigma(\text{ad}_A) = i\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ (см. [10], [11]).

Для функции вида (7) рассмотрим ее ряд Фурье

$$T(t)XT(-t)x \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n x e^{i\frac{2\pi}{\omega} nt}, \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты Фурье $X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{Z}$, имеют вид

$$X_n x = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t)XT(-t)x e^{-i\frac{2\pi}{\omega} nt} dt, \quad x \in \mathcal{H}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ назовем *рядом Фурье оператора X* (относительно группы операторов T), а операторы X_n , $n \in \mathbb{Z}$, – коэффициентами Фурье этого оператора.

Данный ряд сильно суммируем к X методом Чезаро, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) X_k x = Xx, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Из [10], [12] следует, что каждый из операторов X_n допускает представление в виде безусловно сильно сходящегося ряда (см. доказательство леммы 2 для $n = 0$)

$$X_n = \sum_{\substack{i-j=n \\ i, j \in \mathbb{Z}}} P_i X P_j, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти операторы являются собственными векторами трансформатора ad_A , причем $\text{ad}_A X_n = i \frac{2\pi n}{\omega} X_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Здесь возникает операторная матрица (X_{ij}) , составленная из операторных блоков $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. В частном случае, если размерность $\dim \text{Im } P_k$ образа $\text{Im } P_k$ каждого ортопроектора P_k , $k \in \mathbb{Z}$, равна 1, т. е. $P_k x = (x, e_k) e_k$, $k \in \mathbb{Z}$, где (e_k) , $k \in \mathbb{Z}$, – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то

$$X_{ij} x = (P_i X P_j) x = (X P_j x, e_i) e_i = (X e_j, e_i) (x, e_j) e_i = (x_{ij}) (x, e_j) e_i, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

где (x_{ij}) – числовая матрица оператора X относительно базиса (e_k) , $k \in \mathbb{Z}$. Если $\dim \text{Im } P_k = 2$, $k \in \mathbb{Z}$ (например, в случае $A \in \{L_{\text{per}}^0, L_{\text{ap}}^0\}$), то далее будут рассматриваться блочные числовые матрицы

$$(\widetilde{x}_{ij}), \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{x}_{ij} = \begin{pmatrix} (X e_j^1, e_i^1) & (X e_j^2, e_i^1) \\ (X e_j^1, e_i^2) & (X e_j^2, e_i^2) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где e_i^1, e_i^2 , $i \in \mathbb{Z}$, – ортонормированный базис в $\text{Im } P_i$.

При следующих оценках будут использоваться равенства

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \|P_i X P_j\|_2^2, \quad \|X\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее будут рассматриваться как операторные матрицы, так и числовые матрицы операторов из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, определенные соответственно равенствами $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и формулой (8). При этом из равенства нулю любой из этих матриц следует, что соответствующий оператор равен нулю.

Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ определим равенствами

$$(JX)x = X_0 x = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t) X T(-t) x dt, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (9)$$

$$(\Gamma X)x = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t) T(t) X T(-t) x dt \sim \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{\omega}{2\pi n} X_n x, \quad (10)$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – периодическая периода ω функция вида $f(t) = i(t - \frac{\omega}{2})$, $t \in [0, \omega)$. Если $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\|X\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2 < \infty$, и поэтому ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\omega}{2\pi n} X_n$ является сходящимся в равномерной операторной топологии.

ЛЕММА 2. Трансформаторы $J, \Gamma: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограничены и обладают свойствами:

1) J – проектор, $\|J\| = 1$, и он представим в виде безусловно сходящегося в сильной операторной топологии ряда:

$$JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n = X_0, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (11)$$

этот ряд безусловно сходится в равномерной операторной топологии, если $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

2) имеет место оценка $\|\Gamma\| \leq \frac{\omega}{4}$, причем $\|\Gamma\| \leq \frac{\omega}{2\pi}$, если $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$;

3) $\Gamma X \in D(\text{ad}_A)$ для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\text{ad}_A \Gamma X = A \Gamma X - \Gamma X A = X - JX$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, что $\|J\| \leq 1$ и $\|JX\| = \|X\|$ для любого оператора $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, перестановочного с операторами $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Чтобы доказать представление (11) для J , достаточно в силу замечания 1 доказать, что $J(P_k X P_m) = \delta_{km} P_k X P_m$, где δ_{km} – символ Кронекера. Действительно,

$$\begin{aligned} J(P_k X P_m)x &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(t) P_k X P_m T(-t)x dt \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^\omega e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} P_k X P_m x e^{-i\frac{2\pi m}{\omega}t} dt = \delta_{km} P_k X P_m, \quad m, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2) Данная оценка выводится непосредственно:

$$\|\Gamma\| \leq \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |f(t)| dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega/2} \left(\frac{\omega}{2} - t\right) dt + \frac{1}{\omega} \int_{\omega/2}^\omega \left(t - \frac{\omega}{2}\right) dt = \frac{\omega}{4}.$$

Если $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то ряд в (10) сходится абсолютно и из (10) следует оценка $\|\Gamma X\|_2^2 \leq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2 = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 \|X\|_2^2$.

3) Как отмечалось, каждый коэффициент Фурье X_n , $n \in \mathbb{Z}$, оператора $X \in \text{End } \mathcal{H}$ принадлежит $D(\text{ad}_A)$, в частности $X_k D(A) \subset D(A)$. Тогда средние Чезаро $S_n = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) X_k$, $n \geq 1$, также обладают свойством $S_n D(A) \subset D(A)$ и сильно сходятся к оператору X . Последовательность операторов

$$\Gamma S_n = \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{\omega}{2\pi k} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) X_k, \quad n \geq 1,$$

будет являться средними Чезаро для оператора ΓX и поэтому также будет сильно сходить к оператору ΓX . Поскольку $\text{ad}_A \Gamma S_n = S_n - X_0 = S_n - JX$, $n \geq 1$, из замкнутости оператора ad_A в сильной операторной топологии пространства $\text{End } \mathcal{H}$ следует, что $\Gamma X \in D(\text{ad}_A)$ и $\text{ad}_A \Gamma X = X - JX$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $A \in \{L_{\text{per}}^0, L_{\text{ap}}^0\}$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\|\Gamma\| \leq \frac{1}{2}$, и если $A = L_{\text{dir}}^0$, то $\|\Gamma\| \leq 1$.

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространство $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, обозначаемые теми же буквами, осуществляются следующим образом. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Положим

$$JX = J(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}), \quad (12)$$

$$\Gamma X = \Gamma(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I), \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}). \quad (13)$$

Эти продолжения корректны, т. е. не зависят от выбора числа λ_0 из $\rho(A)$. Если операторы $\Gamma X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, $JX \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ допускают ограниченное расширение на все $\mathcal{H}$, то их будем обозначать теми же буквами. Если $x \in D(A)$, то из (12) и (13) следует, что операторы JX и ΓX на векторе x определяются равенствами (9) и (10) соответственно.

Теперь в качестве пространства допустимых возмущений для оператора A будем использовать идеал операторов Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и некоторые

его подпространства, которые будут строиться по рассматриваемому возмущению $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ оператора A .

Для любого оператора $0 \neq X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим двустороннюю последовательность вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1} \max \left\{ \left(\sum_{|k| \geq |n|} \|XP_k\|_2^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{|k| \geq |n|} \|P_k X\|_2^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Она обладает следующими свойствами:

- 1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n(X) = 0$;
- 3) $\alpha_n(X) \leq 1$;
- 4) $\alpha_n(X) \geq \alpha_{n+1}(X)$, $n \geq 0$;
- 5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, если и только если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq X$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $P_{(m)} = \sum_{|k| \leq m} P_k$;
- 6) конечна величина $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \alpha_n(X) \neq 0}} \frac{\|XP_n\|_2^2 + \|P_n X\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор

$$f_X(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(X) P_n \in \text{End } \mathcal{H}, \quad (15)$$

являющийся функцией f_X от оператора A , где $f_X: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что $\|f_X(A)\| \leq \max_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq X$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$, то оператор X является положительно определенным. Это свойство будет считаться всюду выполненным для рассматриваемого возмущения $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. В противном случае (т.е. при условии $P_{(m)}BP_{(m)} = B$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$) изучение оператора $A - B$ сводится к изучению оператора конечного ранга $(A - B)|_{\mathcal{H}_m}$ (к изучению сужения оператора $A - B$ на конечномерное подпространство $\mathcal{H}_m = \text{Im } P_{(m)}$).

Оператор $f_B(A)$ обозначим через $f(A)$. Введем в рассмотрение банахово пространство операторов $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представления

$$X = X_l f(A), \quad X = f(A) X_r \quad (16)$$

для некоторых $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, с нормой $\|X\|_* = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Ясно, что $\|X\|_2 \leq \|X\|_*$ для любого $X \in \mathfrak{U}(f)$.

Поскольку оператор B представим в виде $B = B_l f(A)$, $B = f(A) B_r$, $B_l = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n} B P_n$, $B_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n} P_n B$, где $\alpha_n = \alpha_n(B)$, $B_l, B_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, возмущение B принадлежит $\mathfrak{U}(f)$.

Непосредственно из определения трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End } \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что подпространство $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является для них инвариантным, причем

$$\begin{aligned} J(\tilde{X} f(A)) &= J(\tilde{X}) f(A), & J(f(A) \tilde{X}) &= f(A) J(\tilde{X}), \\ \Gamma(\tilde{X} f(A)) &= \Gamma(\tilde{X}) f(A), & \Gamma(f(A) \tilde{X}) &= f(A) \Gamma(\tilde{X}), \end{aligned} \quad \tilde{X} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Рассмотрим последовательности трансформаторов $(J_m), (\Gamma_m), m \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_+$, принадлежащие $\text{End } \mathfrak{U}(f)$ и определенные равенствами

$$J_m X = P_{(m)} X P_{(m)} + \sum_{|k| \geq m+1} P_k X P_k = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad (17)$$

$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}), \quad (18)$$

где $P_{(m)} = \sum_{|k| \leq m} P_k$ и $X \in \mathfrak{U}(f)$. Отметим, что $J_0 = J$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Наряду с последовательностью (α_n) рассмотрим одностороннюю последовательность $(\alpha'_n) = (\alpha'_n(B))$, определенную равенствами

$$\alpha'_{n+1}(B) = \alpha'_{n+1} = \max_{\substack{|i| \geq n+1 \\ |j| \leq n}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i - j|}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = 0$.

Через $(\tilde{\alpha}_n)$ обозначим последовательность

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\omega}{\pi} \left(\alpha_n + \frac{\alpha'_n}{2} \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (19)$$

ЛЕММА 3. Для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ и любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место оценка

$$\max\{\|\Gamma_m(Xf(A))\|_2, \|\Gamma_m(f(A)X)\|_2\} \leq \tilde{\alpha}_{m+1} \|X\|_2. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q_{(m)} = I - P_{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\|f(A)Q_{(m)}\| \leq \alpha_{m+1}$, $m \geq 0$, а из формулы (18) и из свойства 2) леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} \|\Gamma_m(Xf(A))\|_2 &= \|\Gamma(Xf(A)Q_{(m)}) + \Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})\|_2 \\ &\leq \frac{\omega}{2\pi} \alpha_{m+1} \|X\|_2 + \|\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})\|_2. \end{aligned}$$

Оператор $\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})$ представим в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)}) &= \Gamma(Q_{(m)}f(A)XP_{(m)}) + T_m, \\ T_m &= \Gamma(Q_{(m)}(Xf(A) - f(A)X)P_{(m)}). \end{aligned}$$

Из этого представления получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})\|_2 &\leq \frac{\omega}{2\pi} \alpha_{m+1} \|X\|_2 + \|T_m\|_2 \\ &\leq \frac{\omega}{2\pi} \alpha_{m+1} \|X\|_2 + \frac{\omega}{2\pi} \max_{\substack{|i| \geq m+1 \\ |j| \leq m}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i - j|} \|X\|_2 = \frac{\omega}{2\pi} (\alpha_{m+1} + \tilde{\alpha}_{m+1}) \|X\|_2. \end{aligned}$$

При этом использовалась операторная матрица оператора $T_m \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, которая имеет вид

$$\begin{aligned} P_i T_m P_j &= \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_j} P_i X P_j = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{i - j} \right) (P_i X P_j), \\ &\quad |i| \geq m+1, \quad |j| \leq m, \end{aligned}$$

причем $P_i T_m P_j = 0$, если $|i| \leq m$ либо $|j| \geq m+1$.

Аналогичным образом той же величиной оценивается норма Гильберта–Шмидта оператора $\Gamma_m(f(A)X)$, и, следовательно, верна оценка (20). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Для любого $m \geq 0$ тройка $(\mathfrak{U}(f), J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A , причем $\|J_m\| = 1$ и постоянная $\gamma = \gamma_m$ из определения 2 допускает оценку*

$$\gamma_m \leq \tilde{\alpha}_{m+1}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\|J_m\| = 1$. Подлежащее проверке свойство 4) из определения 2 следует из леммы 3. Пусть $X \in \mathfrak{U}(f)$. Представим оператор X в виде $X = X_l f(A)$, где $X_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $\|\Gamma_m(Xf(A))\|_2 \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X\|_*$. Следовательно, $\|\Gamma_m\| \leq \tilde{\alpha}_{m+1}$.

Пусть $X = X_l f(A)$ и $Y = Y_l f(A)$, где $X_l, Y_l \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_m Y = Z_l f(A)$, где $Z_l = X_l \Gamma_m(f(A)Y_l)$. Из леммы 3 получаем

$$\|Z_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X_l\|_2\|Y_l\|_2 \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X\|_*\|Y\|_*.$$

Пусть теперь $X = f(A)X_r$, $Y = f(A)Y_r$, где $X_r, Y_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда $X\Gamma_m Y = f(A)Z_r$, где $Z_r = X_r \Gamma_m(f(A)Y_r)$. Снова из леммы 3 получаем оценку

$$\|Z_r\|_2 \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X_r\|_2\|Y_r\|_2 \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X\|_*\|Y\|_*.$$

Следовательно, $\|X\Gamma_m Y\|_* \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X\|_*\|Y\|_*$. Таким же образом (с применением леммы 3) устанавливается оценка $\|(\Gamma_m X)Y\|_* \leq \tilde{\alpha}_{m+1}\|X\|_*\|Y\|_*$ для любых $X, Y \in \mathfrak{U}(f)$.

Итак, $\gamma_m \leq \tilde{\alpha}_{m+1}$. Выполнение всех остальных свойств из определения 2 следует из уже доказанного и леммы 2. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор $A - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору вида*

$$A - P_{(m)}\tilde{X}P_{(m)} - \sum_{|k| \geq m+1} P_k\tilde{X}P_k = A - J_m\tilde{X} = A - B_0 \quad (22)$$

для любого числа $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которого верна оценка

$$\tilde{\alpha}_{m+1}(B)\|B\|_* < \frac{1}{4}. \quad (23)$$

Оператор $\tilde{X} \in \mathfrak{U}(f)$ – решение уравнения (5), в котором $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$. Его можно найти методом последовательных приближений. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m\tilde{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из полученных оценок (21) и равенства $\|J_m\| = 1$ следует, что выполнено условие (4) теоремы 1, из которой вытекает утверждение данной теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Будем считать выполненным условие (21). Из теоремы 3 и леммы 1 следует, что оператор $A - B_0 = A - J_m\tilde{X}$ вида (22) перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)}$, P_k , $|k| \geq m+1$. Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \text{Im } P_{(m)}$, $\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $|k| \geq m+1$, являются инвариантными для оператора $A - B_0$. Из подобия операторов $A - B$, $A - B_0$ следует равенство

$\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0)$. Оператор $A - B_0$ имеет (как и оператор $A - B$) компактную резольвенту. Поэтому если $\lambda_0 \in \sigma(A - B_0)$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - B_0)x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, из вида оператора B_0 следуют равенства

$$A_{(m)}P_{(m)}x_0 = \lambda_0 P_{(m)}x_0, \quad A_k P_k x_0 = \lambda_0 P_k x_0, \quad |k| \geq m + 1, \quad (24)$$

где $A_{(m)}$ – сужение оператора $A - B_0$ на $\mathcal{H}_{(m)} = \text{Im } P_{(m)}$, A_k – сужение оператора $A - B_0$ на $\mathcal{H}_k$, $|k| \geq m + 1$. Ввиду того, что $I = P_{(m)} + \sum_{|k| \geq m+1} P_k$ (система проекторов P_k , $|k| \geq m+1$, $P_{(m)}$ образует разложение единицы), из (24) следует, что хотя бы один из векторов $P_k x_0$, $|k| \geq m + 1$, $P_{(m)} x_0$ ненулевой. Следовательно, λ_0 – собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_k , $|k| \geq m + 1$, $A_{(m)}$.

Очевидно обратное включение

$$\sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|k| \geq m+1} \sigma(A_k) \right) \subset \sigma(A - B_0) = \sigma(A - B).$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0) = \sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|k| \geq m+1} \sigma(A_k) \right). \quad (25)$$

Из представления операторов A_k , $|k| \geq m + 1$, в виде

$$A_k = (kI - P_k \tilde{X})|_{\mathcal{H}_k}, \quad |k| \geq m + 1,$$

и принадлежности оператора $\tilde{X}$ идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|P_k \tilde{X} P_k\| = 0$, поэтому

$$\text{dist}(\sigma(A_k), \{k\}) = \inf_{\lambda \in \sigma(A_k)} |k - \lambda| \leq \|P_k \tilde{X} P_k\|_2 \rightarrow 0, \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, из (25) вытекает

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие (23) теоремы 3. Тогда существует число $n_0 \geq m + 1$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, такое, что спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения взаимно непересекающихся множеств σ_0, σ_k , $|k| \geq n_0 + 1$:

$$\sigma(A - B) = \sigma(A_{(n_0)}) \cup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma(A_k) \right) = \sigma_0 \cup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma_k \right), \quad (26)$$

где σ_0 – конечное множество и $\sum_{|k| \geq n_0+1} \text{dist}(\{k\}, \sigma_k)^2 < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть выполнено условие (23) теоремы 3. Из подобия операторов $A - B$, $A - B_0$ и равенства (1) получаем, что верны следующие представления возмущенных проекторов:

$$\tilde{P}_{(m)} = U^{-1} P_m U, \quad \tilde{P}_k = U^{-1} P_k U, \quad |k| \geq m + 1, \quad (27)$$

где $\tilde{P}_{(m)}$ – проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_{(m)}$, $\tilde{P}_k$ – проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_k$ и $U = I + \Gamma_m \tilde{X}$.

Представление (25) спектра оператора $A - B$ и представление проекторов (27) позволяют получать различные спектральные свойства оператора $A - B$, в частности оценки его собственных значений и соответствующих проекторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k , $k \in \mathbb{J}$:

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k, \quad \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}. \quad (28)$$

Пусть P_k – проектор Рисса, построенный по множеству σ_k . Оператор A называется *спектральным относительно разложения* (28) (или *обобщенным спектральным*), если ряд $\sum_{k \in \mathbb{J}} P_k x$ безусловно сходится для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.

Если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{J}$, – одноточечные множества и проекторы P_k , $k \in \mathbb{J}$, обладают свойством $AP_k = \lambda_k P_k$ для всех $k \in \mathbb{J}$, исключая конечное число, то спектральный относительно разложения (28) оператор A является *спектральным* (по Данфорду; см. [6]) *оператором*, причем A – спектральный оператор скалярного типа, если $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{J}$.

Теперь из замечаний 2, 3, теоремы 3 и леммы 5 следует

ТЕОРЕМА 4. Существует число $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $A - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, представим в виде (26). Оператор $A - B$ спектрален относительно разложения (26), причем он спектрален по Данфорду, если $\dim \mathcal{H}_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

§ 4. Основные результаты

Применяя метод подовных операторов для исследования спектральных свойств оператора L_{bc} , $bc \in \{\text{per}, \text{ar}, \text{dir}\}$, будем считать, что свободный оператор L_{bc}^0 является невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также через A . Таким образом, $L_{bc} = A - B$, где B – оператор умножения на потенциал v .

Всюду далее $\mathcal{H} = L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ и это пространство будет отождествляться с гильбертовым пространством $L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ периодических периода π функций, определенных на $\mathbb{R}$ и суммируемых с квадратом нормы на $[0, \pi]$. В $L_{2,\pi}$ определена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций, т. е. $(S(t)x)(s) = x(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in L_{2,\pi}$. Функции P и Q также будем рассматривать как элементы пространства $L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрим обратимую изометрию $U: L_{2,\pi} \rightarrow L_{2,\pi}$,

$$(Ux)(s) = (e^{-is}x_1(s), e^{is}x_2(s)), \quad s \in [0, \pi], \quad x = (x_1, x_2) \in L_{2,\pi}.$$

Тогда $UD(L_{ap}) = D(L_{per})$ и имеет место равенство

$$L_{ap} = U^{-1}(L_{per}^0 - \hat{B} - I)U, \quad (29)$$

где $\widehat{B}$ – оператор умножения на потенциал $\widehat{v}(s) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i2s}P(s) \\ e^{i2s}Q(s) & 0 \end{pmatrix}$, $s \in [0, \pi]$. Следовательно, оператор L_{ap} подобен оператору $L_{\text{per}}^0 - \widehat{B} - I$, и поэтому изучение спектральных свойств оператора L_{ap} сводится к изучению спектральных свойств оператора Дирака $L_{\text{per}}^0 - \widehat{B}$. Таким образом, по существу можно ограничиться только изучением операторов L_{per} и L_{dir} .

Через P_n обозначим ортогональный проектор (проектор Рисса) на собственное подпространство E_n^0 (см. § 1), отвечающее собственному значению $\lambda_n = 2n \in 2\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_{per}^0 . Этот проектор имеет вид

$$P_n x = (x, e_n^1) e_n^1 + (x, e_n^2) e_n^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Для $\lambda_n = n \in \sigma(L_{\text{dir}}^0)$ проектор Рисса P_n представим в виде

$$P_n x = (x, s_n) s_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Поскольку оператор A самосопряженный, то оператор iA – генератор группы изометрий $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } L_{2,\pi}$.

Если $\text{bc} = \text{per}$, то, поскольку генератором группы $S: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ является оператор $\frac{d}{dt}$, соответствующая группа изометрий $T = T_{\text{per}}$ имеет вид

$$T_{\text{per}}(t)x = (S(-t)x_1, S(t)x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Если $\text{bc} = \text{ar}$, то из равенства (29) следует, что

$$T_{\text{ap}}(t) = e^{-it} U^{-1} T_{\text{per}}(t) U, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для $\text{bc} = \text{dir}$ группа изометрий T_{dir} будет иметь вид

$$(T_{\text{dir}}x)(s) = \left(\frac{x_1(s-t) + x_2(t-s)}{2}, \frac{x_1(-s-t) + x_2(s+t)}{2} \right), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

где $x = (x_1, x_2) \in L_{2,\pi}$.

Для доказательства представления (33) достаточно заметить, что $T_{\text{dir}}(t)s_n = e^{int}s_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь, пользуясь формулами (9), (10), (32), (33), выпишем представление операторов $JB = J_{\text{bc}}B$, $\Gamma B = \Gamma_{\text{bc}}B$, где $\text{bc} \in \{\text{per}, \text{dir}\}$. Имеют место следующие равенства:

$$((J_{\text{per}}B)x)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & P(\frac{s+\tau}{2}) \\ Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (34)$$

$$((\Gamma_{\text{per}}B)x)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & f(\frac{s-\tau}{2})P(\frac{s+\tau}{2}) \\ f(\frac{\tau-s}{2})Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad (35)$$

где $(x_1, x_2) \in L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, $s \in [0, \pi]$, $f(t) = i(t - \frac{\pi}{2})$, $t \in [0, \pi]$, $f \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$. Далее, верны равенства

$$((J_{\text{dir}}B)x)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{4\pi} \mathcal{K}_{\text{dir}}(s, \tau) x(\tau) d\tau, \quad x \in L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad s \in [0, \pi], \quad (36)$$

$$((\Gamma_{\text{dir}}B)x)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{4\pi} \widetilde{\mathcal{K}}_{\text{dir}}(s, \tau) x(\tau) d\tau, \quad x \in L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad s \in [0, \pi], \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\text{dir}}(s, \tau) &= \begin{pmatrix} \Phi(\frac{s-\tau}{2}) & \Phi(\frac{s+\tau}{2}) \\ \Phi(\frac{-s-\tau}{2}) & \Phi(\frac{-s+\tau}{2}) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_{\text{dir}}(s, \tau) &= \begin{pmatrix} f(\frac{s+\tau}{2})\Phi(\frac{s-\tau}{2}) & f(\frac{s-\tau}{2})\Phi(\frac{s+\tau}{2}) \\ f(\frac{\tau-s}{2})\Phi(\frac{-s-\tau}{2}) & f(\frac{-s-\tau}{2})\Phi(\frac{-s+\tau}{2}) \end{pmatrix}, \\ \Phi(u) &= \frac{P(u) + Q(-u)}{2}, \quad \Phi \in L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2).\end{aligned}$$

Из приведенных формул (35)–(37) следует, что операторы $B\Gamma_{\text{per}}B$, $B\Gamma_{\text{dir}}B$ являются интегральными соответственно с ядрами $\tilde{\mathcal{K}}_{\text{per}}$, $\tilde{\mathcal{K}}'_{\text{dir}}$ вида

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\text{per}} = \begin{pmatrix} f(\frac{\tau-s}{2})P(s)Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \\ 0 & f(\frac{s-\tau}{2})Q(s)P(\frac{s+\tau}{2}) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}'_{\text{dir}} = \begin{pmatrix} f(\frac{\tau-s}{2})P(s)\Phi(\frac{-s-\tau}{2}) & f(\frac{-s-\tau}{2})P(s)\Phi(\frac{-s+\tau}{2}) \\ f(\frac{s+\tau}{2})Q(s)\Phi(\frac{s-\tau}{2}) & f(\frac{s-\tau}{2})Q(s)\Phi(\frac{s+\tau}{2}) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Ввиду принадлежности функций P и Φ пространству $L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, непрерывности функций $\int_0^{4\pi} |\Phi(\frac{\pm s \pm \tau}{2})|^2 d\tau$ и ограниченности функции f из приведенных формул (34)–(39) следует, что все рассматриваемые интегральные операторы являются операторами Гильберта–Шмидта (элементами пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = L_{2,\pi}$). Используется стандартный критерий принадлежности интегрального оператора идеалу операторов Гильберта–Шмидта [13]. Таким образом, верна

ЛЕММА 6. *Операторы $JB = J_{\text{bc}}(B)$, $\Gamma B = \Gamma_{\text{bc}}(B)$, $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB$, где $\text{bc} \in \{\text{per}, \text{ar}, \text{dir}\}$, являются операторами Гильберта–Шмидта.*

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$; введем в рассмотрение операторы (см. формулы (17), (18), где используются проекторы, определенные равенствами (30) и (31))

$$J_k B = JB - J(P_{(k)}BP_{(k)}) + P_{(k)}BP_{(k)}, \quad (40)$$

$$\Gamma_k B = \Gamma B - \Gamma(P_{(k)}BP_{(k)}). \quad (41)$$

Ясно, что $J_0 B = JB$, $\Gamma_0 B = \Gamma B$. Из определения трансформаторов $J = J_{\text{bc}}$ и $\Gamma_0 B = \Gamma B$ (из формул (9)–(11)) получаем представления операторов $J_k B$ и $\Gamma_k B$ вида

$$J_k B = JB - P_{(k)}JB P_{(k)} + P_{(k)}BP_{(k)}, \quad \Gamma_k B = \Gamma B - (P_{(k)}\Gamma B P_{(k)}), \quad (42)$$

из которых в силу леммы 6 следует, что $J_k B, \Gamma_k B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для всех $k \geq 0$. Кроме того, из (42) следует, что (см. [12])

$$\begin{aligned}\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|\Gamma_k B\|_2^2 &= \lim_{|k| \rightarrow \infty} \|\Gamma B - P_{(k)}(\Gamma B)P_{(k)}\|_2^2 \\ &= \lim_{|k| \rightarrow \infty} \sum_{\max\{|i|, |j|\} \geq k+1} \|P_i(\Gamma_m B)P_j\|_2^2 = 0.\end{aligned} \quad (43)$$

В следующей лемме предполагается, что $\text{bc} \in \{\text{per}, \text{ar}\}$.

ЛЕММА 7. *Существует $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что операторы B , $J_k B$ и $\Gamma_k B$, $k \geq k_0$, удовлетворяют условиям предположения 1, где $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6 следует, что $JB, \Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$, и, таким образом, из равенства (42) получаем, что $J_k B, \Gamma_k B \in \mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя (43), приходим к выводу, что выполнены условия (i) и (iii) предположения 1, причем условие (i) выполнено для $k \geq k_0$ при некотором $k_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Установим свойства (ii) и (iv) предположения 1 для операторов $\Gamma_k B$, $J_k B$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для $\lambda_0 \in \rho(A)$ рассмотрим последовательность (B_k) операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ вида

$$B_k = A_{(k)}(\Gamma B)R(\lambda_0, A) = AP_{(k)}(\Gamma B)R(\lambda_0, A), \quad k \geq 0.$$

Из полученных формул (10), (42) следует, что матрица (блочная, если $\text{bc} = \text{per}$) оператора B_k при $m \neq n$, $m \leq k$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$\begin{aligned} b_{mn}^{(k)} &= \lambda_m \frac{b_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} = \frac{(\lambda_m - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_0) + \lambda_0}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} b_{mn} \\ &= b_{mn}(\lambda_n - \lambda_0)^{-1} + b_{mn}(\lambda_m - \lambda_n)^{-1} + b_{mn}\lambda_0(\lambda_m - \lambda_n)^{-1}(\lambda_n - \lambda_0)^{-1}, \end{aligned}$$

где (b_{mn}) – матрица оператора B . Если $m = n$ или если $m \geq k + 1$, то $b_{mn}^{(k)} = 0$. Из только что приведенного представления матрицы оператора B_k получаем, что его матрица совпадает с матрицей оператора $P_{(k)}(B - JB)(A - \lambda_0 I)^{-1} + P_{(k)}\Gamma B + \lambda_0 P_{(k)}(\Gamma B)R(\lambda_0, A) = P_{(k)}T_0$, где $T_0 = (B - JB)R(\lambda_0, A) + \Gamma B + \lambda_0(\Gamma B)R(\lambda_0, A) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, $B_k = P_{(k)}T_0$, $k \geq 0$. Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{(k)}T_0 - T_0\|_2 = 0$, последовательность B_k сходится (при $k \rightarrow \infty$) к T_0 в равномерной операторной топологии. Поэтому ввиду замкнутости оператора A из вида оператора B_k вытекает, что $\text{Im}((\Gamma B)R(\lambda_0, A)) \subset D(A)$ и имеет место равенство

$$A(\Gamma B R(\lambda_0, A)) = T_0. \quad (44)$$

Если $x \in D(A)$, то вектор x представим в виде $x = R(\lambda_0, A)y$ для некоторых $y \in \mathcal{H}$, следовательно, доказано свойство $(\Gamma B)x \in D(A)$ для любого $x \in D(A)$. Далее, из (44) получаем

$$\begin{aligned} A(\Gamma B)x &= (B - JB)x + (\Gamma B)(A - \lambda_0 I)x + \lambda_0(\Gamma B)x \\ &= (B - JB)x + (\Gamma B)Ax, \quad x \in D(A). \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, свойство (ii) установлено для операторов B , ΓB , JB .

Теперь непосредственно из определения операторов $\Gamma_k B$, $J_k B$, $k \geq 0$, и доказанного выше следует, что $(\Gamma_k B)x = (\Gamma B - P_{(k)}\Gamma B P_{(k)})x \in D(A)$ для любого $x \in D(A)$, т. е. доказано свойство (ii) для операторов $\Gamma_k B$, $k \geq 0$.

Кроме того, из (45) следует, что

$$\begin{aligned} A(\Gamma_k B)x &= A\Gamma Bx - AP_{(k)}(\Gamma B)P_{(k)} = A\Gamma Bx - P_{(k)}(A\Gamma B)P_{(k)} \\ &= (B - JB)x + (\Gamma B)Ax - P_{(k)}(B - JB)P_{(k)}x - P_{(k)}(\Gamma B)AP_{(k)}x \\ &= (B - J_k B)x + (\Gamma_k B)Ax, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

Таким образом, доказаны свойства (ii) и (iv) из предположения 1. Установим свойство (v) для $k \geq k_0$. Докажем, что $UD(A) = D(A)$ для $U = I + \Gamma_k B$. Включение $UD(A) \subset D(A)$ следует из условия (ii) предположения 1. Доказывая обратное включение, рассмотрим число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $\|\Gamma_k B\| + \varepsilon < 1$. Пусть число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ таково, что $\|(B - J_k B)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_2 < \varepsilon$. Из свойства (iv) предположения 1 следует равенство

$$T_\varepsilon = (A - \lambda_\varepsilon I)(\Gamma_k B)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} = (B - J_k B)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} + \Gamma_k B.$$

Поскольку $\|T_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon + \|\Gamma_k B\|_2 < 1$, то

$$U^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_k B)^j = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n,$$

где $U_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j (\Gamma_k B)^j$. Тогда, снова используя свойства предположения 1, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda_\varepsilon I)U_n(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T_\varepsilon + T_\varepsilon^2 - \dots + (-1)^n T_\varepsilon^n) = (I + T_\varepsilon)^{-1}.$$

Из замкнутости оператора A следует, что $U^{-1}x \in D(A)$ для любого вектора x из $D(A)$. Итак, $UD(A) = D(A)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что

$$\|\Gamma_k B\|_2 < 1, \quad (46)$$

т. е. оператор $I + \Gamma_k B$ обратим, то оператор $L_{bc} = A - B$, где $A = L_{bc}^0$, B – оператор умножения на v , подобен оператору

$$\tilde{L}_{bc} = L_{bc}^0 - \tilde{B},$$

где $\tilde{B} = J_k B + (I + \Gamma_k B)^{-1}(B\Gamma_k B - (\Gamma_k B)J_k B)$, причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_k B) = (I + \Gamma_k B)(A - \tilde{B}). \quad (47)$$

Операторы $J_k B$, $\Gamma_k B$, $B\Gamma_k B$, $(\Gamma_k B)(J_k B)$, $\tilde{B}$ являются операторами Гильберта–Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, оператор $\tilde{B}$ из (47) представим в виде

$$\tilde{B} = JB + B\Gamma B - (\Gamma B)JB + C \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}), \quad (48)$$

где оператор C принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ ядерных операторов, определенных на $L_{2,\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения теоремы непосредственно следуют из лемм 6, 7 и теоремы 2. Оператор C из (48) имеет вид

$$C = -(I + \Gamma_k B)^{-1}(\Gamma_k B)(B\Gamma_k B - (\Gamma_k B)J_k B) + C_1,$$

где оператор $C_1 = B\Gamma_k B - B\Gamma B - (\Gamma_k B)J_k B + (\Gamma B)JB + J_k B - JB$ имеет конечный ранг и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$.

Из этого представления следует, что оператор C , являясь суммой оператора конечного ранга и произведения двух операторов Гильберта–Шмидта, принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ (см. [13]). Теорема доказана.

Полученный в теореме 5 результат позволяет свести изучение оператора $L_{bc} = A - B$ к изучению оператора $A - \tilde{B}$, где $\tilde{B}$, определенный формулой (48), есть оператор Гильберта–Шмидта. Поэтому для дальнейшего исследования применима теорема 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для оператора B умножения на потенциал v верны равенства

$$J_k((\Gamma_k B)J_k B) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (49)$$

Они следуют из определения трансформаторов $J_k, \Gamma_k, k \geq 0$ (см. формулы (9), (10), (17), (18), (40), (41)), и из равенств $P_j(\Gamma B)P_j = 0, P_j(JB) = (JB)P_j = P_j(JB)P_j, j \neq 0$, также вытекающих из формул (9), (10). Равенства (49) позволяют пользоваться уравнениями вида (5).

В следующей теореме последовательности $(\alpha_n(\tilde{B}))$ и $(\tilde{\alpha}_n(\tilde{B}))$ определены соответственно формулами (14) и (19) для оператора $\tilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, а функция $f = f_{\tilde{B}}: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ построена с помощью формулы (15) по последовательности $\alpha_n = \alpha_n(\tilde{B}), n \in \mathbb{Z}$. Поскольку оператор $\tilde{B}$, определенный формулой (48), не является оператором конечного ранга, все числа $\alpha_n, \tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_n(B), n \in \mathbb{Z}$, положительны. В данном случае оператор $f(A)$ будет иметь вид

$$f(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n P_n.$$

Таким образом, оператор $\tilde{B}$ принадлежит построенному допустимому пространству возмущений $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_k B\|_2 < 1$. Тогда для любого числа $m \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего условию

$$\tilde{\alpha}_{m+1} \|\tilde{B}\|_* = \tilde{\alpha}_{m+1}(\tilde{B}) \|B\|_* < \frac{1}{4}, \quad (50)$$

оператор $L_{bc} = A - B$ подобен оператору вида

$$A - B_0 = A - P_{(m)} \tilde{X} P_{(m)} - \sum_{|j| \geq m+1} P_j \tilde{X} P_j = A - J_m \tilde{X}. \quad (51)$$

Оператор $\tilde{X} \in \mathfrak{U}(f)$ есть решение уравнения (5), рассматриваемого в пространстве допустимых возмущений $\mathfrak{U}(f)$. В этом уравнении $\Gamma = \Gamma_m, J = J_m$ и $B = \tilde{B}$. Оператор $I + \Gamma_m \tilde{X}$ обратим и преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор вида

$$U_{km} = (I + \Gamma_k B)(I + \Gamma_m \tilde{X}) = I + V_{km}, \quad (52)$$

где $V_{km} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Кроме того, оператор $B_0 = J_m \tilde{X}$ представим в виде

$$B_0 = J_m B + J_m (B \Gamma B) + T_0 = JB + J(B \Gamma B) + T_1, \quad (53)$$

где T_0, T_1 – ядерные операторы из $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, причем $J_m T_j = T_j, j = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование числа $k \in \mathbb{Z}_+$, для которого $\|\Gamma_k B\|_2 < 1$, следует из леммы 7. Следовательно, оператор $I + \Gamma_k B$ обратим. Из теоремы 5 следует, что оператор $L_{bc} = A - B$ подобен оператору вида $A - \tilde{B}$, где оператор $\tilde{B}$ определен равенством (48). Поскольку $\tilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, к оператору $A - \tilde{B}$ применима теорема 3, из которой следует подобие этого оператора (и, следовательно, оператора $A - B$) оператору вида (51), где $\tilde{X} \in \mathfrak{U}(f)$ – решение уравнения (5). Применяя к обеим частям уравнения (5) трансформатор J_m и используя при этом замечание 4, получаем

$$\begin{aligned} B_0 &= J_m \tilde{X} = J_m(\tilde{B} \Gamma_m \tilde{X}) + J_m \tilde{B} = J_m \tilde{B} + J_m(\tilde{B} \Gamma_m \tilde{B}) + J_m(\tilde{B} \Gamma_m(\tilde{X} - \tilde{B})) \\ &= J_m \tilde{B} + J_m(\tilde{B} \Gamma_m \tilde{B}) + K = J_m B + J_m(B \Gamma B) + T_0 = JB + J(B \Gamma B) + T_1, \end{aligned}$$

где $K, T_0, T_1 \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$. Ясно, что $J_m T_j = T_j$, $j = 0, 1$. При получении этих равенств использовались следующие свойства: произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором, а операторы $J_m X - JX$, $\Gamma_m X - \Gamma X$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $m \geq 0$, являются операторами конечного ранга.

Ясно, что оператор преобразования оператора $L_{bc} = A - B$ в $A - B_0$ совпадает с оператором U_{km} вида (52). Поскольку $\Gamma_k B, \Gamma_m X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, оператор V_{km} из (52) принадлежит $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Теорема доказана.

Доказанная теорема 6 позволяет установить асимптотику собственных значений оператора L_{bc} , где $bc \in \{\text{reg}, \text{ar}, \text{dir}\}$. А именно, из равенства $\sigma(L_{bc}) = \sigma(A - B_0)$, представления (53) для оператора B_0 (здесь и далее используются обозначения теоремы 6), а также из замечания 2 будет следовать, что спектр оператора L_{bc} представим в виде (см. равенства (25))

$$\sigma(L_{bc}) = \sigma(A - B_0) = \sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|j| \geq m+1} \sigma(A_j) \right), \quad (54)$$

где $A_{(m)}$ – сужение оператора $A - B_0$ на подпространство $\mathcal{H}_{(m)} = \text{Im } P_{(m)}$, $P_{(m)} = \sum_{|j| \leq m} P_j$, A_j – сужение оператора $A - B_0$ на подпространство $\mathcal{H}_j = \text{Im } P_j$, $|j| \geq m+1$. Из представления (54) следует (ввиду конечномерности подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$), что множество $\sigma(A_{(m)}) = \sigma_{(m)}$ конечно. Подпространства $\mathcal{H}_j$, $|j| \geq m+1$, двумерны, если $bc \in \{\text{reg}, \text{ar}\}$, и одномерны, если $bc = \text{dir}$. Из формулы (53), определяющей оператор B_0 , и равенств $J_m T_j = T_j$, $j = 0, 1$, отмеченных в теореме 6, следует, что подпространства $\mathcal{H}_j = \text{Im } P_j$, $|j| \geq m+1$, инвариантны относительно $A - B_0$. Таким образом, операторы $A_{(m)}$, A_j , $|j| \geq m+1$, корректно определены.

Для дальнейшего очень важными являются вычисления собственных значений операторов B_j , $|j| \geq m+1$, которые являются сужениями оператора $JB + J(B \Gamma B)$ на $\text{Im } P_j$. Таким образом, $A_j = jI_j - B_j - T_{1j}$, где $T_{1j} = T_1 | \text{Im } P_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Для этого используем их матричное представление в базисе из $\text{Im } P_j$. При вычислениях будут использоваться ряды Фурье

$$P(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j e^{i2jt}, \quad Q(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q_j e^{i2jt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

функций $P, Q \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$.

Пусть сначала $\text{bc} = \text{per}$. Тогда из формулы (8) следует, что блочная матрица (b_{nj}) , $n, j \in \mathbb{Z}$, оператора B имеет вид

$$b_{nj} = \begin{pmatrix} 0 & p_{-(j+n)} \\ q_{j+n} & 0 \end{pmatrix}, \quad j, n \in \mathbb{Z}.$$

Введем в рассмотрение последовательность $\omega_j = p_{-j}q_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Блочно диагональные элементы c_{nn} , $n \in \mathbb{Z}$, матрицы оператора BGB представимы в виде

$$\begin{aligned} c_{nn} &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq n}} \frac{1}{2(j-n)} \begin{pmatrix} 0 & p_{-(j+n)} \\ q_{j+n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_{-(j+n)} \\ q_{j+n} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \omega_{k+2n} & 0 \\ 0 & \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \omega_{k+2n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку собственные значения матрицы b_{nn} , $n \in \mathbb{Z}$, имеют вид $\{\pm \sqrt{\omega_{2n}}\}$ и поскольку $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|T_{1j}\|_2 < \infty$ (см. представление (53) оператора B_0), имеем

$$\sigma_n = \sigma(A_n) = \left\{ 2n \pm \sqrt{\omega_{2n}} - \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \omega_{k+2n} + \beta_n^\pm \right\}, \quad |n| \geq m+1, \quad (55)$$

где $\sum_{|n| \geq m+1} |\beta_n^\pm|^{4/3} < \infty$.

Если $\text{bc} = \text{ar}$, то непосредственно из равенства (29) следует, что

$$\sigma(L_{\text{ar}}) = \sigma(L_{\text{per}}^0 - \hat{B} - I) = \sigma(A - \hat{B} - I).$$

Поэтому, предполагая, что для чисел k и m выполнены условия (46) и (50), в которых $B = \hat{B}$, получаем, что верно представление

$$\sigma(L_{\text{bc}}) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right), \quad (56)$$

где $\sigma_{(m)}$ – конечное множество и

$$\sigma_n = \left\{ 2n - 1 \pm \sqrt{\tilde{\omega}_{2n}} - \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2k} \tilde{\omega}_{k+2n} + \tilde{\beta}_n^\pm \right\}, \quad |n| \geq m+1, \quad (57)$$

где $\tilde{\omega}_n = p_{-n+1}q_{n-1}$, $|n| \geq m+1$, а последовательности $(\tilde{\beta}_n^\pm)$ являются суммируемыми со степенью $4/3$.

Теперь рассмотрим оператор $L_{\text{dir}} = A - B$. Здесь матрица (b_{nj}) , $n, j \in \mathbb{Z}$, оператора B относительно ортонормированного базиса s_n , $n \in \mathbb{Z}$, в $L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ будет определяться несколько более сложным образом, чем для оператора B в базисе e_n^1 , e_n^2 , $n \in \mathbb{Z}$. Предлагаемый способ представления матрицы (b_{nj}) отличается от представления матрицы этого оператора, которая вычислялась в статье [2]. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} b_{nj} &= (Bs_n, s_j) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi P(t) e^{i(n+j)t} dt + \int_0^\pi Q(t) e^{-i(n+j)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} p_{-\frac{n+j}{2}} + q_{\frac{n+j}{2}}, & \text{если } n+j \in 2\mathbb{Z}, \\ \tilde{p}_{-\frac{n+j+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+j+1}{2}}, & \text{если } n+j \in 1+2\mathbb{Z}, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\tilde{P}(t) = P(t)e^{-it}$, $\tilde{Q}(t) = Q(t)e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, и $\tilde{p}_j, \tilde{q}_j, j \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье функций $\tilde{P}, \tilde{Q} \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ по ортонормированному базису $e_n(t) = \exp(2int)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Далее полагаем, что

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{-\frac{n}{2}} + q_{\frac{n}{2}}), & n \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}(\tilde{p}_{-\frac{n+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+1}{2}}), & n \in 1 + 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, матричные элементы оператора B представимы в виде

$$b_{nj} = \theta_{n+j}, \quad n, j \in \mathbb{Z},$$

т. е. матрица оператора B является ганкелевой.

Далее, для вычисления собственных значений оператора L_{dir} рассмотрим диагональные элементы d_n , $n \in \mathbb{Z}$, матрицы оператора $B\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Они представимы в виде

$$d_n = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq n}} \frac{\theta_{n+j}\theta_{n+j}}{j-n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq n}} \frac{\theta_{j+2n}^2}{j}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из представления (53) оператора B_0 получаем (при выполнении условий (46) и (50), налагаемых на выбор чисел k и m), что верно представление (56), где $\sigma_{(m)}$ – конечное множество с числом точек, не превосходящим $2m+1$, а множества σ_n , $|n| \geq m+1$, одноточечны, $\sigma_n = \{\tilde{\lambda}_n\}$, $|n| \geq m+1$, причем

$$\tilde{\lambda}_n = n - \theta_{2n} - \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \frac{\theta_{j+2n}^2}{j} + \tilde{\beta}_n, \quad |n| \geq m+1, \quad (58)$$

где $(\tilde{\beta}_n)$, $|n| \geq m+1$, – абсолютно сходящаяся последовательность. Таким образом, имеет место свойство

$$\sum_{|n| \geq m+1} \left| \tilde{\lambda}_n - n + \theta_{2n} + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \frac{\theta_{j+2n}^2}{j} \right| < \infty.$$

Из полученных представлений (55), (57), (58) следует

ТЕОРЕМА 7. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L_{bc} представим в виде (56), где $\sigma_{(m)}$ – конечное множество, а множества σ_n , $|n| \geq m+1$, определяются равенствами (55), (57), (58), если соответственно $\text{bc} = \text{per}$, $\text{bc} = \text{ap}$, $\text{bc} = \text{dir}$.*

Теперь из теорем 4, 5–7 следует (см. определение 3)

ТЕОРЕМА 8. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что оператор L_{bc} спектрален относительно разложения (56), причем оператор L_{dir} спектрален по Данфорду.*

Утверждение теоремы 8 получено в [3] при дополнительном условии для потенциала v .

Локализационные оценки теоремы 7 являются новыми. Ранее даже не было установлено, что $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\tilde{\lambda}_n - \lambda_n| = 0$ для собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_{bc} (см. [3]).

Далее рассматриваются оператор $\tilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, определенный формулой (48), и число $m \in \mathbb{Z}_+$, для которого выполнено условие (50). Следовательно, согласно теореме 7 спектр оператора L_{bc} представим в виде (56). При этом выбор достаточно большого числа m гарантирует, что участвующие в представлении (56) множества взаимно не пересекаются, т.е. являются спектральными для оператора L_{bc} . Пусть $\tilde{P}_m, \tilde{P}_n$, $|n| \geq m+1$, – спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L_{bc} и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n$, $|n| \geq m+1$, соответственно. Далее через $P_{(m)}$ обозначается проектор $\sum_{|k| \leq m} P_k$, который является проектором Рисса, построенным по конечному множеству $\sigma_m^0 = \{-m, \dots, m\}$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ (не обязательно конечного) через $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum_{k \in \Omega} P_k$, а через $\tilde{P}(\Omega)$ – спектральный проектор $\sum_{k \in \Omega} \tilde{P}_k$. Отметим, что

$$I = \sum_{|k| \geq m+1} P_k + P_{(m)}, \quad I = \sum_{|k| \geq m+1} \tilde{P}_k + \tilde{P}_m, \quad (59)$$

где второе разложение единицы следует из теорем 6–8.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max_{n \in \Omega} \alpha_n(X)$.

ЛЕММА 8. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ имеет место оценка*

$$\max\{\|P(\Omega)X\|_2, \|XP(\Omega)\|_2\} \leq C(X)\alpha(\Omega, X),$$

где величина $C(X) > 0$ зависит от оператора X и не зависит от выбора Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор X представим в виде $X = X_l f_X(A)$, $X = f_X(A)X_r$, где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Тогда

$$\|P(\Omega)X\|_2 = \|P(\Omega)f_X(A)X_r\|_2 = \left\| \left(\sum_{n \in \Omega} \alpha_n(X) P_n \right) X_r \right\|_2 \leq \alpha(\Omega, X) \|X_r\|_2.$$

Таким же образом устанавливается оценка $\|XP(\Omega)\| \leq \alpha(\Omega, X) \|X_l\|_2$. Лемма доказана.

Непосредственно из определения последовательности $(\alpha_n(X))$, где $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, следует

ЛЕММА 9. *Если оператор $0 \neq X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ представим в виде $X = \sum_{k \geq 1} X_k$, где $X_k \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, и ряд является абсолютно сходящимся, то верны оценки*

$$\|X\|_2 \alpha_n(X) \leq \sum_{k \geq 1} \|X_k\|_2 \alpha_n(X_k).$$

Если $0 \neq X = X_1 \cdots X_l$ – произведение операторов X_k , $1 \leq k \leq l$, из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, то

$$\|X\|_2 \alpha_n(X) \leq (\alpha_n(X_1) + \alpha_n(X_l)) \prod_{k=1}^l \|X_k\|_2.$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \setminus \sigma_m^0$ имеют место оценки (равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений)

$$\|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_0(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \Gamma \tilde{X})), \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 &\leq C_1(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \tilde{B})) \\ &\leq C_2(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B\Gamma B)), \end{aligned} \quad (61)$$

где $C_0, C_1, C_2 > 0$ – постоянные, не зависящие от Ω , и $\tilde{X}$ – оператор из условий теоремы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 6 следует, что оператор $L_{bc}^0 - B$ подобен оператору $L_{bc}^0 - J_m \tilde{X}$ (см. формулу (51)) и оператором преобразования является оператор U_{km} вида (52). Оператор V_{km} из (52) имеет вид

$$V_{km} = \Gamma_k B + \Gamma_m \tilde{X} + (\Gamma_k B)(\Gamma_m \tilde{X}). \quad (62)$$

Из равенства

$$L_{bc}^0 - B = (I + V_{km})(L_{bc}^0 - J_m \tilde{X})(I + V_{km})^{-1}$$

и леммы 1 (см. формулу (1)) следует, что спектральные проекторы $\tilde{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ подобны и, более того, оператор $\tilde{P}(\Omega)$ допускает представление

$$\tilde{P}(\Omega) = (I + V_{km})P(\Omega)(I + V_{km})^{-1}.$$

Следовательно, оператор $\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (V_{km}P(\Omega) - P(\Omega)V_{km})(I + V_{km})^{-1}. \quad (63)$$

Учитывая, что

$$\|\Gamma_k B\|_2 \alpha_n(\Gamma_k B) \leq \|\Gamma B\|_2 \alpha_n(\Gamma B), \quad \|\Gamma_m \tilde{X}\|_2 \alpha_n(\Gamma_m \tilde{X}) \leq \|\Gamma \tilde{X}\|_2 \alpha_n(\Gamma \tilde{X}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

из лемм 8, 9 получаем оценки (для $V_{km} \neq 0$)

$$\begin{aligned} \max\{\|V_{km}P(\Omega)\|_2, \|P(\Omega)V_{km}\|_2\} &\leq C(V_{km})\alpha(\Omega, V_{km}) \\ &\leq \frac{C(V_{km})}{\|V_{km}\|}(\alpha(\Omega, \Gamma B)\|\Gamma B\|_2 + \alpha(\Omega, \Gamma \tilde{X}) + (\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \Gamma \tilde{X}))\|\Gamma B\|_2\|\Gamma \tilde{X}\|_2) \\ &\leq \tilde{C}(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \Gamma \tilde{X})), \end{aligned}$$

где $\tilde{C} > 0$ – постоянная, не зависящая от Ω . Теперь из представления (63) следует оценка (60).

Поскольку оператор $\tilde{X}$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}(f)$, он допускает представление вида (16), где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Из этого представления вытекают оценки

$$\begin{aligned}\|(\Gamma\tilde{X})P(\Omega)\|_2 &= \|(\Gamma X_l)f(A)P(\Omega)\|_2 \leq \| \Gamma X_l \|_2 \alpha(\Omega, \tilde{B}), \\ \|P(\Omega)(\Gamma\tilde{X})\|_2 &\leq \| \Gamma X_r \|_2 \alpha(\Omega, \tilde{B}), \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq C_1(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \tilde{B})).$$

Для получения оценки (61) обратимся к формуле (48) для оператора $\tilde{B}$. Из леммы 9 получаем (при условии, что $\tilde{B} \neq 0$)

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}\|_2 \alpha_n &= \|\tilde{B}\|_2 \alpha_n(\tilde{B}) \leq \|JB\|_2 \alpha_n(JB) + \|B\Gamma B\|_2 \alpha_n(B\Gamma B) \\ &\quad + \|\Gamma B\|_2 \|JB\|_2 (\alpha_n(\Gamma B) + \alpha_n(JB)) \\ &\quad + \tilde{C}(\alpha_n(\Gamma B) + \alpha_n(B\Gamma B) + \alpha_n(JB)), \quad n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

где $\tilde{C} > 0$ – постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\alpha_n \leq \text{const}(\alpha_n(\Gamma B) + \alpha_n(JB) + \alpha_n(B\Gamma B))$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\alpha(\Omega, \tilde{B}) \leq C_2(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B\Gamma B))$ для некоторой не зависящей от Ω постоянной $C_2 > 0$. Оценка (61) установлена. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10. *Если выполнены условия теоремы 6, то имеют место оценки*

$$\begin{aligned}\left\| \tilde{P}_m + \sum_{|k|=m+1}^n \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^n P_k \right\|_2 \\ \leq C(\alpha_{n+1}(\Gamma B) + \alpha_{n+1}(JB) + \alpha_{n+1}(B\Gamma B)), \quad n \geq m+1,\end{aligned}$$

где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенств (59) и теоремы 9, в которой $\Omega = \{l \in \mathbb{Z}_+ : |l| \geq n+1\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место равномерная равносходимость спектральных разложений операторов L_{bc} и L_{bc}^0 :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{P}_m + \sum_{|k|=m+1}^n \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^n P_k \right\|_2 = 0.$$

ТЕОРЕМА 11. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что*

$$\sum_{|n| \geq m+1} \frac{1}{\beta_n^2} \|\tilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty,$$

где $\beta_n = \alpha_n(\Gamma B) + \alpha_n(JB) + \alpha_n(B\Gamma B)$, $|n| \geq m+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбор числа $m \in \mathbb{Z}_+$ обусловлен использованием теоремы 6. Для $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющего условию $|n| \geq m + 1$, из (63) получаем

$$\tilde{P}_n - P_n = (V_{km}P_n - P_nV_{km})(I + V_{km})^{-1}. \quad (64)$$

Из вида определенного формулой (62) оператора V_{km} и доказательства теоремы 9 следует, что оператор $V_{km}P_n$ представим в виде $\tilde{V}_{km}\alpha_n(V_{km})P_n$, где $\tilde{V}_{km}$ – оператор Гильберта–Шмидта, не зависящий от n . Аналогичное представление имеет место для оператора P_nV_{km} . Следовательно, $\max\{\|V_{km}P_n\|_2, \|P_nV_{km}\|_2\} \leq C\beta_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $C > 0$ – некоторая константа. Теперь из представления (64) следует оценка

$$\|\tilde{P}_n - P_n\|_2 \leq \beta_n\gamma_n, \quad |n| \geq m + 1,$$

где (γ_n) – суммируемая с квадратом модуля последовательность. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\sum_{|n| \geq m+1} \|\tilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $\text{bc} = \text{per}$, то

$$\begin{aligned} \alpha_n(JB) &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_{2k}|^2 + |q_{2k}|^2 \right)^{-1/2} \left(\sum_{|k| \geq |n|} |p_{2k}|^2 + |q_{2k}|^2 \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha_n(\Gamma B) &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \neq 0} \frac{|p_{-(2k+j)}|^2 + |q_{2k+j}|^2}{4j^2} \right)^{-1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{|k| \geq |n|} \sum_{j \neq 0} \frac{|p_{-(2k+j)}|^2 + |q_{2k+j}|^2}{4j^2} \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Если ряды Фурье для функций P и Q абсолютно суммируемы, то из леммы 9 следует оценка

$$\alpha_n(B\Gamma B) \leq C\alpha_n(\Gamma B), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $C > 0$ – постоянная, не зависящая от n . Аналогичные равенства и оценки имеют место в случае $\text{bc} = \text{dir}$.

Авторы выражают благодарность рецензенту, обратившему наше внимание на статью [14], где получен результат следствия 3. Из этого результата можно с помощью теоремы Бари–Маркуса вывести утверждение теоремы 8.

Список литературы

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **59**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.

2. П. Б. Джаков, Б. С. Митягин, “Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака”, *УМН*, **61**:4 (2006), 77–182; англ. пер.: P. Djakov, B. S. Mityagin, “Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators”, *Russian Math. Surveys*, **61**:4 (2006), 663–766.
3. Б. С. Митягин, “Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака”, *Докл. РАН*, **393**:4 (2003), 456–459.
4. B. S. Mityagin, “Spectral expansions of one-dimensional periodic Dirac operators”, *Dyn. Partial Differ. Equ.*, **1**:2 (2004), 125–191.
5. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
6. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Спектральные операторы*, т. III, Мир, М., 1974; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Spectral operators*, v. III, Intersci. Publ., New York–London, 1971.
7. М. С. Агранович, “Спектральные свойства задач дифракции”, *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции*, Наука, М., 1977, 289–416; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Spectral properties of diffraction problems”, *Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory*, Wiley, Berlin, 1999.
8. А. С. Маркус, В. И. Мацаев, “О сходимости разложений по собственным векторам оператора, близкого к самосопряженному. Линейные операторы и интегральные уравнения”, *Матем. исслед.*, **61** (1981), 104–129.
9. А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986; англ. пер.: A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Transl. Math. Monogr., **71**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
10. А. Г. Баскаков, *Гармонический анализ линейных операторов*, Изд-во Воронеж. гос. ун-та, Воронеж, 1987.
11. А. Г. Баскаков, “Теория о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3 (1986), 435–457; англ. пер.: A. G. Baskakov, “A theorem on decomposition of an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:3 (1987), 421–444.
12. А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 3–32; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 1–31.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
14. P. Djakov, B. Mityagin, “Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators”, *Math. Nachr.*, **283**:3 (2010), 443–462.

А. Г. БАСКАКОВ (A. G. BASKAKOV)
 Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Поступило в редакцию
 17.08.2009

А. В. ДЕРБУШЕВ (A. V. DERBUSHEV)
 Воронежский государственный университет
E-mail: dav4444@mail.ru

А. О. ЩЕРБАКОВ (A. O. SHCHERBAKOV)
 Воронежский государственный университет
E-mail: shcherbakovAO@list.ru