Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Пухов, Базисы из экспонент, синусов и косинусов
в весовых пространствах на конечном интервале, *Изв.
РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 195–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:12:10

УДК 517.982.254

С. С. Пухов

Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале

Получен результат о базисе в весовом пространстве на интервале $(-a, a)$ системы экспонент, порожденной нулями преобразования Фурье функции с особенностями на концах интервала-носителя $(-a, a)$. Найден для произвольного $\Delta \in \mathbb{C}$ критерий базиса системы $(e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t})_{n \in \mathbb{Z}}$ в весовом пространстве на интервале $(-\pi, \pi)$ и систем синусов $(\sin((n+\Delta)t))_{n \in \mathbb{N}}$ и косинусов $1 \cup (\cos((n+\Delta)t))_{n \in \mathbb{N}}$ в весовом пространстве на интервале $(0, \pi)$. Вес всюду является конечным произведением степенных функций.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: базисы из экспонент, весовые пространства.

§ 1. Введение

Рассмотрим систему функций

$$e(\Lambda) = (e^{i\lambda_n t}, (it)e^{i\lambda_n t}, \dots, (it)^{m_n-1}e^{i\lambda_n t})_{n=0}^{\infty}, \quad (1)$$

порожденную последовательностью $\Lambda = (\lambda_n, m_n)_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $m_n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$. Числа λ_n являются корнями кратности m_n целой функции

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma(t) < +\infty, \quad (2)$$

$$d\sigma(t) = \frac{k(t)}{(a-|t|)^\alpha} dt, \quad \operatorname{var} k(t) < +\infty, \quad k(\pm a \mp 0) \neq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1.$$

Этот случай важен, в частности, тем, что к нему при $a = \pi$ сводятся системы вида

$$e(\Lambda_\Delta) = (e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t})_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad \Delta \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

С системами (3) связаны системы синусов и косинусов

$$(\sin((n+\Delta)t))_{n=1}^{\infty}, \quad 1 \cup (\cos((n+\Delta)t))_{n=1}^{\infty}, \quad (4)$$

первая из которых при определенных значениях Δ важна для решения уравнений математической физики (см. [1]).

Для систем с порождающими функциями вида (2) в [2, § 8.3] доказано следующее:

1) при $1 - \operatorname{Re} \alpha < 1/p < 1$ система $e(\Lambda)$ образует базис в пространстве $L^p(-a, a)$;

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00225а).

2) при $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1/p$ система $e(\Lambda) \cup \{e^{i\lambda t}\}$ (для любого $\lambda \notin \Lambda$) образует базис в пространстве $L^p(-a, a)$.

Эти базисы обладают свойством Рисса, т. е. проекционный оператор

$$S^+ : \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m_n-1} c_{n,l}(it)^l e^{i\lambda_n t} \mapsto \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n > 0} \sum_{l=0}^{m_n-1} c_{n,l}(it)^l e^{i\lambda_n t} \quad (5)$$

ограничен в соответствующем пространстве.

В настоящей статье исследуется вопрос о базисных свойствах системы (1) в весовых пространствах $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$. Через $L^p(I, \omega(t) dt)$, где вес $\omega(t)$ – неотрицательная функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$, обозначено пространство, состоящее из определенных на интервале I измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_I |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p}.$$

Мы рассматриваем (при $1 < p < \infty$) веса вида

$$\omega_\mu(t) = \prod_{l=1}^s |t - b_l|^{\mu_l}, \quad (6)$$

$$s \geq 2, \quad -a = b_1 < \dots < b_s = a, \quad \mu_1 = \mu_s = \mu, \quad -1 < \mu_1, \dots, \mu_s < p - 1,$$

где μ_l – показатели веса, b_l – точки концентрации. Эти пространства обозначаем $L_\mu^p(-a, a)$, а норму в них – $\|\cdot\|_{p,\mu}$ (при $\mu = 0$ индекс веса не выписываем). Основной результат состоит в распространении приведенной теоремы из [2] на такие весовые пространства. По сравнению с невесовым случаем здесь возникают значительные трудности. Их наличие связано с тем, что в [2] широко использовались свойства свертки, многие из которых перестают быть справедливыми при переходе к весовым пространствам. Доказательство от этого значительно усложняется, однако обходится без привлечения дифференциальных свойств интеграла Пуассона из [3] и теоремы Мацаева–Соломяка [4] об оценке интеграла Стилтеса, использовавшихся в [2]. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть Λ – последовательность нулей функции вида (2), $1 < p < \infty$. Тогда:

1) при $1 - \operatorname{Re} \alpha < (1 + \mu)/p$ система $e(\Lambda)$ образует базис со свойством Рисса в пространстве $L_\mu^p(-a, a)$;

2) при $1 - \operatorname{Re} \alpha > (1 + \mu)/p$ и при дополнительном условии $k \in \operatorname{Lip}(1 - \operatorname{Re} \alpha)$ для всякого $\lambda \notin \Lambda$ система $e(\Lambda) \cup \{e^{i\lambda t}\}$ образует базис со свойством Рисса в $L_\mu^p(-a, a)$.

Сформулируем имеющиеся результаты о базисах вида (1) в весовых пространствах. Для систем (3) и (4) с вещественными Δ в [5] установлены критерии базиса соответственно в пространствах $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$ и $L^p((0, \pi), \omega(t) dt)$ с весами, являющимися частными по отношению к (6) (а именно, $s = 5$, $b_3 = 0$, $b_2 = -b_4$, $\mu_2 = \mu_4$). Статья [5] является развитием работы [6], где были даны соответствующие критерии для невесовых пространств, обобщенные в [7] в случае комплексных Δ . Позже было показано [2, гл. 9], как результаты

статьи [6] получаются из общих результатов о базисах вида (1). Кроме того, в [2] была доказана эквивалентность получающихся базисов тригонометрическим (при соответствиях $e^{int} \leftrightarrow e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\sin(nt) \leftrightarrow \sin((n+\Delta)t)$, $n \in \mathbb{N}$; $1 \leftrightarrow 1$, $\cos(nt) \leftrightarrow \cos((n+\Delta)t)$, $n \in \mathbb{N}$).

В [2, § 8.1] даны теоремы о базисности систем экспонент общего вида в рассматриваемых весовых пространствах при следующих условиях для функции $L(z)$, нули которой задают последовательность Λ . В первом из двух рассмотренных в [2, § 8.1] случаев ограничение для $L(z)$ задается через так называемое (A_p) -условие, во втором вид $L(z)$ задается первым равенством в (2), причем функция $\sigma(t)$ имеет скачки на концах отрезка $[-a, a]$. В обоих случаях утверждается, что система (1) образует базис со свойством Рисса в пространствах $L_\mu^p(-a, a)$ с совпадающими и неотрицательными показателями веса (в первом случае также налагается условие $\mu \geq p-2$).

Следующая теорема выводится из теоремы 1 при ограничении $\operatorname{Re} \Delta \neq 0$, так как в случае $\operatorname{Re} \Delta = 0$ условие (2) не выполняется. Однако с помощью другого подхода данный случай рассмотрен А. М. Седлецким (см. [8]), что позволяет доказать следующую теорему в полном объеме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$. Система (3) образует базис в пространстве $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1+\mu}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1+\mu}{2p}. \quad (7)$$

Базис (3) эквивалентен тригонометрическому базису $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ при соответствии $e^{int} \leftrightarrow e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Из теоремы 2, в свою очередь, выводится

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, а вес $\omega_\mu(t)$ задается соотношениями (6). Тогда система (4) синусов (косинусов) образует базис пространства $L^p((0, \pi), \omega_\mu(t) dt)$ в том и только в том случае, когда

$$\frac{1+\mu}{2p} - 1 < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1+\mu}{2p} \quad \left(\frac{1+\mu}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1+\mu}{2p} + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Этот базис эквивалентен базису $(\sin(nt))_{n \in \mathbb{N}}$ при соответствии $\sin(nt) \leftrightarrow \sin((n+\Delta)t)$, $n \in \mathbb{N}$ (базису системы $1 \cup (\cos(nt))_{n \in \mathbb{N}}$ при соответствии $1 \leftrightarrow 1$, $\cos(nt) \leftrightarrow \cos((n+\Delta)t)$, $n \in \mathbb{N}$).

Все упомянутые выше критерии базиса систем (3), (4) содержатся в теоремах 2, 3.

Результаты данной статьи анонсированы в [8].

§ 2. Вспомогательные утверждения

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При условиях (6) верны топологические вложения $L^\infty \hookrightarrow L_\mu^p(-a, a) \hookrightarrow L^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пространством, сопряженным к $L^p(I, \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$, является пространство $L^{p'}(I, (\omega(t))^{-p'/p} dt)$, $1/p' + 1/p = 1$ (если функционал $h \in L^{p'}(I, (\omega(t))^{-p'/p} dt)$ реализуется как $(h, f) = \int_I f(t)h(t) dt$). В частности, сопряженным к $L_\mu^p(-a, a)$ является пространство $L_{-\mu p'/p}^{p'}(-a, a)$, в котором точки концентрации веса те же, а показатели веса умножены на $-p'/p$.

Всюду далее отношение $a(x) \asymp b(x)$ означает, что существуют c и $C \in (0, \infty)$ такие, что $c|a(x)| \leq |b(x)| \leq C|a(x)|$. Через $\hat{f}(x)$, как обычно, обозначаем преобразование Фурье:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt.$$

Следующие две леммы представляют собой формулы обращения $\hat{f}(x)$.

ЛЕММА 1 [2, § 8.1]. Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < \mu < p - 1$, а функция $f \in L^p(\mathbb{R}, |t - b|^\mu dt)$ имеет компактный носитель. Тогда в норме пространства $L^p(\mathbb{R}, |t - b|^\mu dt)$ существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \hat{f}(u) e^{itu} du = f(t), \quad (9)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \hat{f}(u) e^{itu} du. \quad (10)$$

Следующая лемма для случая пространства $L_\mu^p(-a, a)$ с совпадающими и неотрицательными показателями веса μ_i также содержится в [2, § 8.1].

ЛЕММА 2. Если $1 < p < \infty$, верны условия (6) и $f \in L_\mu^p(-a, a)$, то пределы (9), (10) существуют в норме пространства $L_\mu^p(-a, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I_{2i-1} — непересекающиеся отрезки, каждый из которых содержит ровно одну точку концентрации веса b_i , а I_{2i} — отрезки, расположенные между I_{2i-1} так, чтобы $\bigcup_{i=1}^{2s-1} I_i = [-a, a]$. Для удобства изложения будем считать, что в набор $\{b_i\}$ входят точки, лежащие внутри отрезков I_{2i} , и этим точкам соответствуют нулевые показатели. Таким образом, отрезок $[-a, a]$ оказывается разбит на $2s - 1$ отрезков I_i , каждый из которых содержит ровно одну точку b_i , причем заведомо $\mu_{2i} = 0$. На отрезке I_i вес (6) удовлетворяет условию $\omega_\mu(t) \asymp |t - b_i|^{\mu_i}$. Представив функцию f в виде суммы: $f = \sum f \chi_{I_i} = \sum f_i$, докажем, что пределы (9), (10) для всякой функции f_i существуют в норме пространства $L^p(I_j, |t - b_j|^{\mu_j} dt)$ для всех $j \in \overline{1, 2s - 1}$. Для $j = i$ это верно по лемме 1. Если $|j - i| > 1$, то носитель f_i отделен от I_j , поэтому пределы (9), (10) существуют даже в смысле равномерной сходимости и, тем более, в требуемой норме.

Пусть теперь $j = i \pm 1$. Тогда при $\mu_i \leq 0$

$$f_i \in L^p(I_i, |t - b_i|^{\mu_i} dt) \Rightarrow f_i \in L^p(I_i) \Rightarrow f_i \in L^p(I_i, |t - b_j|^{\mu_j} dt),$$

поэтому по лемме 1 пределы (9), (10) для f_i существуют в норме пространства $L^p(I_j, |t - b_j|^{\mu_j} dt)$. При $\mu_j \geq 0$ последнее верно потому, что $|t - b_j|^{\mu_j} \leq C$ и $C_1 \leq |t - b_i|^{\mu_i}$ на I_j , а в норме пространства $L^p(I_j, |t - b_i|^{\mu_i} dt)$ пределы (9), (10) существуют по лемме 1. Поскольку хотя бы один из индексов i, j четный, то и

соответствующий показатель равен нулю, и оставшийся случай $\mu_i > 0$, $\mu_j < 0$ невозможен. Итак, пределы (9), (10) для f_i существуют в нормах пространства $L^p(I_j, |t - b_j|^{\mu_j} dt)$ для всех j , а значит, и в норме пространства $L^p_\mu(-a, a)$. По линейности то же заключаем для f . Лемма доказана.

Далее нам понадобятся элементы теории дробного интегрирования (см. [9]). Левосторонним (правосторонним) дробным интегралом порядка γ ($\text{Re } \gamma > 0$) функции φ , определенной на отрезке $[a, b]$, называют выражение

$$I_{a+}^\gamma(\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\gamma}} dt \quad \left(I_{b-}^\gamma(\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\gamma}} dt \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если O – оператор отражения, $(Of)(x) = f(a + b - x)$, то $O I_{a+}^\gamma = I_{b-}^\gamma O$.

ЛЕММА 3 (частный случай теоремы 3.10 из [9, гл. 1]). Если

$$1 < p < \infty, \quad \mu_1, \dots, \mu_{s-1} < p-1, \quad \gamma > 0, \quad (11)$$

то I_{a+}^γ – ограниченный оператор из $L^p((a, b), \prod_{i=1}^s |t - b_i|^{\mu_i} dt)$ в $L^p((a, b), \prod_{i=1}^s |t - b_i|^{\nu_i} dt)$, при этом

$$\begin{aligned} \nu_i &= \mu_i - \gamma p, & \mu_i - \gamma p &> -1, \\ \nu_i &> -1, & \mu_i - \gamma p &\leq -1. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, что по замечанию 3 аналогичное утверждение верно и для I_{b-}^γ . Для формулировки следующей леммы введем при определенном степенном весе ω_μ вида (6) точки $\{c_l\}$, $l \in \overline{1, 2s-1}$, на интервале $(-2a, 2a)$, образованные путем сдвига точек $\{b_i\}$ на $+a$ и $-a$, т.е. $c_i + a = c_{i+s-1} - a = b_i$, $i \in \overline{1, s}$. Введем также при определенном параметре γ веса $\tilde{\omega}_\mu(t) = \prod |t - c_l|^{\tilde{\mu}_l}$, где $\tilde{\mu}_i = \tilde{\mu}_{i+s-1} = \mu_i$, $i \in \overline{1, s}$, и $\tilde{\omega}_\nu(t) = \prod |t - c_l|^{\tilde{\nu}_l}$, где $\tilde{\nu}_i = \tilde{\nu}_{i+s-1} = \nu_i$, $i \in \overline{1, s}$, а ν_i определяются из (12). В последних произведениях $l \in \overline{1, 2s-1}$.

ЛЕММА 4. Пусть $g(t) = (a - |t|)^{-\alpha} k(t) \chi_{(-a, a)}(t)$, где функция $k(t)$ ограничена, $\gamma = 1 - \text{Re } \alpha$, $a f \in L^p_\mu(-a, a)$, вес ω_μ имеет вид (6), причем верны соотношения (11), (12) и $\gamma p - 1 < \mu < p - 1$. Тогда свертка $f * g$ принадлежит $L^p((-2a, 2a), \tilde{\omega}_\nu(t) dt)$ и ее норма $\|f * g\|_{p, \nu}$ в этом пространстве не превосходит $A \|f\|_{p, \mu}$, $A \neq A(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая f продолженной нулем вне $(-a, a)$, представим g в виде $g = g \chi_{(0, a)} + g \chi_{(-a, 0)} =: g_+ + g_-$ и, аналогично, $k = k_+ + k_-$. Тогда при $x \in (-2a, 2a)$

$$(f * g_+)(x) = \int_{x-a}^a f(t) \frac{k_+(x-t)}{(a-(x-t))^\alpha} dt = \int_x^{2a} \frac{f(t-a) k_+(x-t+a)}{(t-x)^\alpha} dt.$$

Поскольку $f(t-a) \in L^p((-2a, 2a), \tilde{\omega}_\mu(t) dt)$ и норма $f(t-a)$ в этом пространстве не превосходит $C \|f\|_{p, \mu}$, то с учетом ограниченности k_+ по лемме 3 имеем $f * g_+ \in L^p((-2a, 2a), \tilde{\omega}_\nu(t) dt)$ и $\|f * g_+\|_{p, \nu} \leq A_1 \|f\|_{p, \mu}$. Аналогично,

$$(f * g_-)(x) = \int_{-a}^{x-a} f(t) \frac{k_-(x-t)}{(a-(t-x))^\alpha} dt = \int_{-2a}^x \frac{f(t+a) k_-(x-t+a)}{(x-t)^\alpha} dt,$$

и $f * g_- \in L^p((-2a, 2a), \tilde{\omega}_\nu(t) dt)$, $\|f * g_-\|_{p,\nu} \leq A_2 \|f\|_{p,\mu}$. Значит, сумма $f * g_+ + f * g_- = f * g$ также принадлежит тому же пространству с такой же оценкой нормы. Лемма доказана.

В утверждении леммы 4 важно то, что в новом весе $\tilde{\omega}_\nu(t)$ показатели на концах интервала $(-2a, 2a)$ и в нуле равны $\mu - \gamma p$.

ЛЕММА 5. При $t < 0$ верны следующие элементарные неравенства:

$$\forall \rho \in [0, 1] \quad 1 - e^t \leq |t|^\rho, \quad (13)$$

$$\forall \rho > 0 \quad e^t \leq \frac{C(\rho)}{|t|^\rho}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (13) следует из того, что $1 - e^t \leq -t$: при $-1 \leq t < 0$ верно $|t| \leq |t|^\rho$, а при $t < -1$ просто имеем $1 - e^t \leq 1 \leq |t|^\rho$. Неравенство (14) следует из того, что функция $e^t |t|^\rho$ непрерывна и стремится к нулю при $t \rightarrow -0$ и при $t \rightarrow -\infty$.

ЛЕММА 6. Пусть $I(t_0; \rho) = \int_{-\infty}^0 e^t |t - t_0|^\rho dt$ при $t_0 \in \mathbb{R}$ и фиксированном $\rho \in \mathbb{R}$. Тогда:

- 1) при $-1 < \rho \leq 0$ интеграл $I(t_0; \rho)$ ограничен равномерно по t_0 ;
- 2) при $\rho < -1$, $\rho \notin \mathbb{Z}$ и $0 < t_0 < c$ верна оценка $I(t_0; \rho) \asymp t_0^{1+\rho}$;
- 3) при $\rho > 0$ верно $I(t_0; \rho) \leq C_1(\rho) |t_0|^\rho + C_2(\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^t |t - t_0|^\rho dt &= \int_{\mathbb{R}_- \cap [t_0-1, t_0+1]} e^t |t - t_0|^\rho dt + \int_{\mathbb{R}_- \setminus [t_0-1, t_0+1]} e^t |t - t_0|^\rho dt \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{dt}{|t|^\rho} + \int_{-\infty}^0 e^t dt = C(\rho). \end{aligned}$$

2) Производя интегрирование по частям до тех пор, пока показатель степени не попадет в промежуток из п. 1), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^t |t - t_0|^\rho dt &= C_1 \int_{-\infty}^0 e^t d(t_0 - t)^{1+\rho} = C_1 t_0^{1+\rho} - C_1 \int_{-\infty}^0 e^t (t_0 - t)^{1+\rho} dt = \dots \\ &\dots = C_1 t_0^{1+\rho} + C_2 t_0^{2+\rho} + \dots + C_k t_0^{k+\rho} + C \int_{-\infty}^0 e^t (t_0 - t)^{k+\rho} dt \asymp t_0^{1+\rho}. \end{aligned}$$

3) Из неравенства $|t - t_0|^\rho \leq C(\rho)(|t_0|^\rho + |t|^\rho)$ очевидно утверждение 3).

ЛЕММА 7. Если $f \in L^p(J, \omega_\mu(t) dt)$, $1 < p < \infty$, и $\pm I + d \subset J$, $I, J \subset \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, то

$$\int_I |f(\pm t + d)g(t)| dt \leq \|f\|_{p,\mu} \left(\int_I |g(t)|^{p'} \omega_\mu^{-\frac{1}{p-1}}(\pm t + d) dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем при помощи неравенства Гёльдера.

ЛЕММА 8. Пусть $\text{var } k(t) < +\infty$, $\text{supp } k \subset [a, b]$. Тогда $\|k(x + h) - k(x)\|_1 = O(h)$.

ЛЕММА 9. Пусть $g(t) = (a - |t|)^{-\alpha} k(t) \chi_{(-a,a)}(t)$, $\text{var } k(t) < +\infty$, $0 < \text{Re } \alpha < 1$. Тогда $\|g(x+h) - g(x)\|_1 = O(h^{1-\text{Re } \alpha})$.

Леммы 8, 9 приведены в [2, § 8.3] (первая – при доказательстве второй).

ЛЕММА 10. Если $1 < p < \infty$, вес $\omega_\mu(t)$ задается соотношениями (6), а Λ – последовательность всех корней целой функции экспоненциального типа $L(z)$, для которой при некотором $\delta > 0$ и всех $y > y_0 \geq 0$ и $y < -y_0$ верно $|L(iy)| \geq \delta e^{a|y|} |y|^{-(1+\mu)/p}$, то система $e(\Lambda)$ полна в $L_\mu^p(-a, a)$.

ЛЕММА 11. Пусть $L(z)$ имеет вид (2). Тогда:

1) все корни λ_n функции $L(z)$, кроме, быть может, конечного числа, проты и при определенной нумерации $n \in \mathbb{Z}$ для них имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1-\alpha}{2} \text{sign } n + C \right) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty;$$

2) если $\text{dist}(z, \Lambda) \geq \delta > 0$ и $|z| \geq \delta$, то справедливы оценки

$$0 < c_1(\delta) \leq \frac{|L(z)|}{|z|^{\text{Re } \alpha - 1} e^{a|y|}} \leq c_2(\delta) < +\infty.$$

Леммы 10, 11 также доказаны в [2]: лемма 10 – частный случай следствия 2 из [2, § 4.3], а лемма 11 – частный случай теоремы 4 из [2, § 3.1]. Следующий факт, хотя и не сформулирован явно, но используется в [2] при доказательстве невесового аналога теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Сдвигом последовательности Λ корней функции вида (2) на сколь угодно малое ε вдоль вещественной оси можно добиться того, что существует такая последовательность $(r_k)_{k=1}^\infty$, $r_k > 0$ (назовем ее *подходящей*), что $\text{dist}(\bigcup_{k=1}^\infty \{z: |z| = r_k\}, \Lambda) > 0$ и для любого k в кольце $r_k < |z| < r_{k+1}$ содержится ровно одна точка λ_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Переход от последовательности Λ к $\tilde{\Lambda} = \Lambda - \varepsilon$, где ε такое, что $\text{Re } \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \text{Re } \tilde{\lambda}_n > 0$, не меняет ни условия, ни утверждения теоремы 1.

Далее на основании замечаний 4, 5 считаем последовательность Λ сдвинутой на $\varepsilon > 0$ влево так, чтобы все точки λ_n , лежащие в правой полуплоскости, оставались в ней (соответственно, на мнимой оси точек λ_n не существует) и чтобы существовала подходящая последовательность $(r_k)_{k=1}^\infty$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Доказательства подобных теорем основываются на сходимости биортогонального ряда по системе $e(\Lambda)$ для всякой функции из рассматриваемого пространства, что влечет базисность системы.

При доказательстве невесового аналога теоремы 1 в [2, § 7.1, пп. 1, 3] при условии (2) (которое влечет минимальность системы в L^1 , а значит, и во всех

$L^p_\mu(-a, a)$) найдена биортогональная система к (1) и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_r(t, f) &= \sum_{|\lambda_n| < r} \sum_{l=0}^{m_n-1} c_{n,l}(it)^l e^{i\lambda_n t}, & S_r^+(t, f) &= \sum_{\substack{|\lambda_n| < r \\ \operatorname{Re} \lambda_n > 0}} \sum_{l=0}^{m_n-1} c_{n,l}(it)^l e^{i\lambda_n t}, \\ R_r(t, f) &= S_r(t, f) - \int_{-r}^r \hat{f}(u) e^{iut} du, & R_r^+(t, f) &= S_r^+(t, f) - \int_0^r \hat{f}(u) e^{iut} du, \end{aligned} \quad (15)$$

где $c_{n,l}$ – коэффициенты биортогонального ряда функции f . В [2] также выведены формулы

$$R_r(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad R_r^+(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r^+} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz,$$

где $c_r^+ = [-ir, ir] \cup \{|z| = r, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, а $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \frac{L(u)}{u-z} du$, и формула

$$F(z) = i \int_0^{\mp 2a} e^{-izt} (f * g)(t) dt, \quad y \geq 0, \quad z = x + iy, \quad (16)$$

где $g(t) = -\sigma'(-t)$. Обозначив $\tilde{k}(t) = -k(-t)$, согласно второму соотношению в (2) имеем

$$g(t) = \chi_{(-a,a)}(t)(a - |t|)^{-\alpha} \tilde{k}(t), \quad \operatorname{var} \tilde{k}(t) < +\infty, \quad \tilde{k}(\pm a \mp 0) \neq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1. \quad (17)$$

Фиксируя $y > 0$, обозначим $\varphi(t) = (f * g)(t)$ и $\varphi_y(t) = e^{yt} \varphi(t)$ (таким образом, носители $\varphi(t)$ и $\varphi_y(t)$ сосредоточены на отрезке $[-2a, 2a]$). Везде далее при фиксированном h для любой функции $s(t)$ обозначим $\Delta s(t) = s(t+h) - s(t)$. Перепишем (16) в виде

$$\frac{F(x + iy)}{i} = - \int_{-2a}^0 e^{-ixt} \varphi_y(t) dt$$

и после сдвига переменной на $h = \pi/|x|$ также в виде

$$\frac{F(x + iy)}{i} = \left(\int_{-2a-h}^{-2a} + \int_{-2a}^{-h} \right) e^{-ixt} \varphi_y(t+h) dt.$$

Взяв полусумму от двух последних равенств и применив к ней неравенство треугольника, получим оценку

$$|F(x + iy)| \leq \int_{-2a}^{-h} |\Delta \varphi_y(t)| dt + \int_{-2a}^{-2a+h} |\varphi_y(t)| dt + \int_{-h}^0 |\varphi_y(t)| dt = J_1 + J_2 + J_3.$$

Поскольку $\Delta \varphi_y(t) = e^{y(t+h)} \Delta \varphi(t) + e^{yt}(e^{hy} - 1)\varphi(t)$, то

$$J_1 \leq \int_{-2a}^{-h} e^{y(t+h)} |\Delta \varphi(t)| dt + (1 - e^{-hy}) \int_{-2a}^{-h} e^{y(t+h)} |\varphi(t)| dt = K_1 + K_2. \quad (18)$$

Таким образом,

$$|F(z)| \leq K_1 + K_2 + J_1 + J_2 + J_3. \quad (19)$$

Введем показатели γ , q и p' :

$$\gamma = 1 - \operatorname{Re} \alpha, \quad \frac{1 + \mu}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Наша цель – получить оценку

$$|F(z)| \leq C \frac{\|f\|_{p,\mu} h^\gamma}{y^{1/q}}, \quad h = \frac{\pi}{|x|}, \quad C \neq C(f, h, y), \quad (20)$$

функции $F(z)$ в секторах $0 < y \leq |x|$, где $hy \leq \pi$, для всех функций $f \in L_\mu^p(-a, a)$ в утверждении 1) теоремы 1 и для всех функций $f \in L_\mu^p(-a, a)$, удовлетворяющих условию $\int_{-a}^a f(t) d\sigma(t) = 0$, в утверждении 2). Заметим, что получение оценки (20) является ключевым местом в доказательстве теоремы 1.

Оценка (20) будет получена при помощи оценок интегралов K_1 , K_2 , J_2 , J_3 (см. (19)). Считаем h достаточно малым. Способ оценки J_2 будет в целом общим для случаев $\gamma < (1 + \mu)/p$ и $\gamma > (1 + \mu)/p$. Применяя (14) при $\rho = 1/q$ и учитывая вид g и замечание 1, имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-2a}^{-2a+h} e^{yt} dt \left| \int_{-a}^{t+a} f(t-x)g(x) dx \right| \\ &\leq \frac{C}{y^{1/q}} \int_{-a}^{-a+h} |g(x)| dx \int_{x-a}^{-2a+h} |f(t-x)| dt \\ &\leq C_1 \frac{\|f\|_1}{y^{1/q}} \int_{-a}^{-a+h} \frac{dx}{(a+x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \leq C_2 \frac{\|f\|_{p,\mu} h^\gamma}{y^{1/q}}. \end{aligned}$$

Способ оценки интеграла

$$K_1 = \int_{-2a}^{-h} e^{y(t+h)} |(f * \Delta g)(t)| dt$$

в случаях $\gamma < (1 + \mu)/p$ и $\gamma > (1 + \mu)/p$ также будет общим, но гораздо более сложным, чем способ оценки J_2 . Отметим, что для любой константы $c_1 > 0$ в силу (14) при $\rho = 1/q$, леммы 9 и замечания 1, оценивая экспоненту единицей, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-2a}^{-c_1} e^{y(t+h)} dt \int_{-a-h}^{t+a} |f(t-x)\Delta g(x)| dx \\ &\leq \frac{C}{y^{1/q}} \int_{-a-h}^{-c_1} |\Delta g(x)| dx \int_{\max(x-a, -2a)}^{-c_1} |f(t-x)| dt \\ &\leq \frac{C\|f\|_1}{y^{1/q}} \|\Delta g\|_1 \leq C_1 \frac{h^\gamma \|f\|_{p,\mu}}{y^{1/q}}, \end{aligned}$$

поэтому можно считать, что в интеграле K_1 нижний предел равен фиксированному числу $-c_1$, так как для оставшейся части K_1 оценка вида (20) уже получена. Разложим функцию f в сумму:

$$f = f\chi_{[-a, -c]} + f\chi_{(-c, c)} + f\chi_{[c, a]} = f_- + f_0 + f_+, \quad (21)$$

такую, что на отрезках $[-a, -c]$ и $[c, a]$ не существует точек концентрации веса, отличных от $\pm a$. Теперь c_1 выберем так, чтобы $c_1 + c < a$ и $c_1 < c$. Для получения оценки K_1 нужно оценить сумму

$$\begin{aligned} \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} |(f_0 * \Delta g)(t)| dt + \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} |(f_+ * \Delta g)(t)| dt \\ + \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} |(f_- * \Delta g)(t)| dt = K_1^0 + K_1^+ + K_1^-. \end{aligned}$$

Поскольку вариация функции g на отрезке $[-c_1 - c - \varepsilon, c + c_1 + \varepsilon]$ ограничена, по лемме 8, замечанию 1 и неравенству $hy \leq \pi$ в случае 1) теоремы 1, когда $\operatorname{Re} \alpha > 1/q$, имеем

$$\begin{aligned} K_1^0 &\leq \int_{-c_1}^{-h} dt \int_{-c}^c |f(x) \Delta g(t-x)| dx \\ &= \int_{-c}^c |f(x)| dx \int_{-c_1}^{-h} |\Delta g(t-x)| dt \leq Ch \|f\|_1 \leq C_1 \frac{h^\gamma \|f\|_{p,\mu}}{y^{1/q}}. \end{aligned}$$

В случае 2), когда $\operatorname{Re} \alpha < 1/q$, воспользуемся липшицевостью функции $\tilde{k}$ (см. (17)), а значит, и липшицевостью g на отрезке $[-c_1 - c - \varepsilon, c + c_1 + \varepsilon]$:

$$\begin{aligned} K_1^0 &\leq \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-c}^c |f(x) \Delta g(t-x)| dx \\ &\leq Ch^\gamma \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-c}^c |f(x)| dx \leq Ch^\gamma \|f\|_1 \frac{1 - e^{y(h-c_1)}}{y}. \end{aligned}$$

Применяя теперь (13) при $\rho = 1 - 1/q$ и замечание 1, добьемся нужной оценки K_1^0 .

Оценим теперь интеграл

$$\begin{aligned} K_1^+ &= \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a-h}^{-a+h} |f(t-x) \Delta g(x)| dx \\ &\quad + \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a+h}^{t-c} |f(t-x) \Delta g(x)| dx \end{aligned} \quad (22)$$

(отметим, что, так как $\operatorname{supp} f_+ \subset [c, a]$, вместо веса $\omega_\mu(t)$ можно рассматривать выражение $(a-t)^\mu$). В первом слагаемом из (22) изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a-h}^{-a+h} |f(t-x) \Delta g(x)| dx \\ = \int_{-a-h}^{-a+h} |\Delta g(x)| dx \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} |f(t-x)| dt. \end{aligned} \quad (23)$$

По лемме 7 внутренний интеграл в правой части (23) не превосходит

$$\begin{aligned}
 & \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-c_1}^{-h} e^{p'y(t+h)} (a-t+x)^{-\frac{\mu}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 & < \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-\infty}^{-h} e^{p'y(t+h)} y^{\frac{\mu}{p-1}} |y(t-(x+a))|^{-\frac{\mu}{p-1}} y^{-1} d(t+h)y \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 & = \|f\|_{p,\mu} y^{-1+\frac{1+\mu}{p}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{p't} |t-y(x+a+h)|^{-\frac{\mu}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

По лемме 6 последний интеграл равномерно ограничен по x , h и y (в случае $\mu < 0$ мы пользуемся тем, что $y(x+a+h) \leq 2hy \leq 2\pi$). Подставляя оценку (24) в (23), с помощью леммы 9 получаем оценку вида (20) для первого слагаемого в соотношении (22). Заметим, что при $\mu \geq 0$ этого приема было бы достаточно для оценки всего интеграла K_1 .

Для оценки второго слагаемого в (22) представим Δg следующим образом:

$$\Delta g(x) = \tilde{k}(x+h) \left(\frac{1}{(a+x+h)^\alpha} - \frac{1}{(a+x)^\alpha} \right) + \frac{\Delta \tilde{k}(x)}{(a+x)^\alpha} = A_1(x, h) + A_2(x, h). \quad (25)$$

По теореме Лагранжа и согласно ограниченности $\tilde{k}$ слагаемое $A_1(x, h)$ не превосходит $Ch(a+x)^{-1-\operatorname{Re} \alpha}$. Оценим часть K_1^+ , соответствующую этому слагаемому. По лемме 7 имеем

$$\begin{aligned}
 K_{11}^+ &= \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a+h}^{t-c} |f(t-x)A_1(x, h)| dx \\
 &\leq Ch \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a+h}^{t-c} \frac{|f(t-x)|}{(x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} dx \\
 &= Ch \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_c^{t+a-h} \frac{|f(x)|}{(t-x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} dx \\
 &\leq Ch \int_c^{a-2h} |f(x)| dx \int_{x-a+h}^{-h} \frac{e^{y(t+h)}}{(t-x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} dt \\
 &\leq Ch \|f\|_{p,\mu} \left(\int_c^{a-2h} (a-x)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx \left(\int_{x-a+h}^{-h} \frac{e^{y(t+h)}}{(t-x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} dt \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Теперь разобьем внутренний интеграл на две части, и для одной экспоненту оценим своим максимумом, а для другой степенную функцию – своим:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x-a+h}^{-h} \frac{e^{y(t+h)} dt}{(t-x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} = \int_{x-a+h}^{\frac{x-a}{2}} + \int_{\frac{x-a}{2}}^{-h} \\
 & \leq C_1 e^{y \frac{x-a}{2}} \int_{x-a+h}^{\frac{x-a}{2}} \frac{dt}{(t-x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} + C_2 (a-x)^{-1-\operatorname{Re} \alpha} \int_{x-a+h}^{-h} e^{y(t+h)} dt.
 \end{aligned}$$

Вычисляя эти интегралы и учитывая для второго слагаемого неравенство (13) при $\rho = (1 + \mu)/p$, получим

$$\int_{x-a+h}^{-h} \frac{e^{y(t+h)} dt}{(t-x+a)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \leq C_3 h^{-\operatorname{Re} \alpha} e^{y \frac{x-a}{2}} + C_4 \frac{(a-x)^{-1-\operatorname{Re} \alpha + (1+\mu)/p}}{y^{1-(1+\mu)/p}}.$$

Подставляя полученное в правую часть (26) и применяя неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} K_{11}^+ &\leq C_5 h^{1-\operatorname{Re} \alpha} \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{c-a}^{-2h} e^{\frac{p'yx}{2}} |x|^{-\frac{\mu}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad + C_6 \frac{h \|f\|_{p,\mu}}{y^{1-(1+\mu)/p}} \left(\int_c^{a-2h} (a-x)^{\frac{p(-1-\operatorname{Re} \alpha)+1}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &< C_5 \frac{\|f\|_{p,\mu} h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\frac{p'x}{2}} |x|^{-\frac{\mu}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} + C_7 \frac{\|f\|_{p,\mu} h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}} \\ &\leq C \frac{\|f\|_{p,\mu} h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}} \end{aligned} \quad (27)$$

(последний интеграл сходится, так как $\mu < p-1$).

Наконец, рассмотрим часть интеграла K_1^+ (см. (22), второе слагаемое), соответствующую слагаемому $A_2(x, h)$ из разложения (25), т. е.

$$K_{12}^+ = \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a+h}^{t-c} |f(t-x) A_2(x, h)| dx.$$

Если $\operatorname{Re} \alpha \geq -\mu/p$, то, меняя порядок интегрирования и оценивая внутренний интеграл аналогично (24), получим следующую оценку:

$$K_{12}^+ \leq \frac{\|f\|_{p,\mu}}{y^{1/q}} \int_{-a+h}^{-c-h} \frac{|\Delta \tilde{k}(x)| dx}{(a+x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{p't} |t-y(x+a+h)|^{-\frac{\mu}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (28)$$

Если $\mu < 0$, то по лемме 6, поскольку $hy \leq \pi$, внутренний интеграл в степени $1/p'$ не превзойдет $(C_1(y(x+a+h))^{-\mu/(p-1)} + C_2)^{1/p'} \leq C_3(y(x+a))^{-\mu/p} + C_4$. С учетом последнего неравенства оценим правую часть в (28). Вынося степенные функции из-под знаков интеграла с помощью оценок $(x+a)^{b_{1,2}} \leq h^{b_{1,2}}$, где $b_1 = -\operatorname{Re} \alpha - \mu/p \leq 0$, $b_2 = -\operatorname{Re} \alpha < 0$, получаем по лемме 8 согласно неравенству $(hy)^{-\mu/p} \leq C_0$ следующее:

$$\begin{aligned} K_{12}^+ &\leq \frac{\|f\|_{p,\mu}}{y^{1/q}} \int_{-a+h}^{-c-h} \frac{|\Delta \tilde{k}(x)| (C_3(y(x+a))^{-\frac{\mu}{p}} + C_4) dx}{(a+x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\ &\leq C_3 (hy)^{-\frac{\mu}{p}} \frac{\|f\|_{p,\mu}}{h^{\operatorname{Re} \alpha} y^{1/q}} \int_{-a+h}^{-c-h} |\Delta \tilde{k}(x)| dx + C_4 \frac{\|f\|_{p,\mu}}{h^{\operatorname{Re} \alpha} y^{1/q}} \int_{-a+h}^{-c-h} |\Delta \tilde{k}(x)| dx \\ &\leq C \frac{\|f\|_{p,\mu} h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}}. \end{aligned}$$

Если $\mu \geq 0$, то по лемме 6 внутренний интеграл в (28) оценится константой, отчего предыдущая оценка только упростится (в ней останется лишь слагаемое с C_4).

В случае $\operatorname{Re} \alpha < -\mu/p$ (что влечет $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1 + \mu/p > (1 + \mu)/p$, а значит, по условию теоремы и липшицевость функций $k(t)$ и $\tilde{k}(t) = -k(-t)$), произведя те же преобразования, что и для K_{11}^+ (см. (26)), получим

$$K_{12}^+ \leq \|f\|_{p,\mu} \left(\int_c^{a-2h} (a-x)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx \left(\int_{x-a+h}^{-h} \frac{e^{y(t+h)} |\Delta \tilde{k}(t-x)| dt}{(t-x+a)^{\operatorname{Re} \alpha}} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (29)$$

После разбиения внутреннего интеграла на два для первого слагаемого, оценив экспоненту и степенную функцию их максимумами, воспользуемся леммой 8, а для второго после оценки степенной функции ее максимумом – липшицевостью $\tilde{k}$ и неравенством (13) при $\rho = (1 + \mu)/p$:

$$\begin{aligned} \int_{x-a+h}^{-h} \frac{e^{y(t+h)} |\Delta \tilde{k}(t-x)| dt}{(t-x+a)^{\operatorname{Re} \alpha}} &= \int_{x-a+h}^{\frac{x-a}{2}} + \int_{\frac{x-a}{2}}^{-h} \\ &\leq e^{y \frac{x-a}{2}} h^{-\operatorname{Re} \alpha} \int_{x-a+h}^{\frac{x-a}{2}} |\Delta \tilde{k}(t-x)| dt + Ch^\gamma (a-x)^{-\operatorname{Re} \alpha} \frac{1 - e^{y \frac{x-a}{2}}}{y} \\ &\leq C_1 h^\gamma e^{y \frac{x-a}{2}} + C_2 h^\gamma \frac{(a-x)^{-\operatorname{Re} \alpha + \frac{1+\mu}{p}}}{y^{1 - \frac{1+\mu}{p}}}. \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в (29) и применяя неравенство Минковского, с первым получившимся слагаемым поступим, как в (27), а второе будет равно

$$\frac{C_2 \|f\|_{p,\mu} h^\gamma}{y^{1 - \frac{1+\mu}{p}}} \left(\int_c^{a-2h} (a-x)^{\frac{1-p \operatorname{Re} \alpha}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

где интеграл равномерно ограничен по h , так как $1 - p \operatorname{Re} \alpha > 1 - p$. Таким образом, для K_{12}^+ , а вместе с ним и для всего K_1^+ оценка вида (20) получена.

Рассмотрим интеграл K_1 для f_- (теперь вес $\omega_\mu(t)$ можно считать равным величине $(a+t)^\mu$). Применяя разложение, аналогичное (25), получим

$$\begin{aligned} K_1^- &= \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{t+c}^{t+a} |f(t-x)| \\ &\quad \times \left| \tilde{k}(x+h) \left(\frac{1}{(a-x-h)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right) + \frac{\tilde{k}(x+h) - \tilde{k}(x)}{(a-x)^\alpha} \right| dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала интеграл K_1^- только со вторым слагаемым под знаком модуля. Если $\operatorname{Re} \alpha \geq -\mu/p$, то оценка соответствующей части K_1^- аналогична оценке K_{12}^+ . Пусть $\operatorname{Re} \alpha < -\mu/p$. Поскольку

$$a-x > a+t-x > 0 \Rightarrow (a-x)^{-\operatorname{Re} \alpha} < (a+t-x)^{-\operatorname{Re} \alpha} < C_1 (a+t-x)^{\mu/p},$$

а $k \in \operatorname{Lip} \gamma$, то внутренний интеграл по неравенству Гёльдера не превзойдет $C_1 \|f\|_{p,\mu} h^\gamma$. Оставшийся (внешний) интеграл от экспоненты оценится с помощью (13) величиной $C/y^{1/q}$, и мы вновь приходим к оценке вида (20).

Оценку интеграла

$$\int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{t+c}^{t+a} |f(t-x)| \left| \tilde{k}(x+h) \left(\frac{1}{(a-x-h)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right) \right| dx$$

проведем отдельно в случаях $x > a - 2h$ и $x \leq a - 2h$ (учтем, что $|\tilde{k}(x+h)| \leq C_0$):

$$\begin{aligned} & \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{t+c}^{t+a} |f(t-x)\tilde{k}(x+h)| \left| \frac{1}{(a-x-h)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right| dx \\ & \leq C_0 \int_{-2h}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{a-2h}^{t+a} |f(t-x)| \left| \frac{1}{(a-x-h)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right| dx \\ & \quad + C_0 \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{t+c}^{\min(t+a, a-2h)} |f(t-x)| \left| \frac{1}{(a-x-h)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right| dx. \end{aligned}$$

Обозначив два последних интеграла через K_{11}^- и K_{12}^- соответственно, для первого из них, оценивая экспоненту единицей, а также применяя неравенство $|(a-x-h)^{-\alpha} - (a-x)^{-\alpha}| \leq 2(a-x-h)^{-\operatorname{Re} \alpha}$, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} K_{11}^- & \leq C \int_{-2h}^{-h} dt \int_{a-2h}^{t+a} |f(t-x)| \frac{dx}{(a-x-h)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\ & = C \int_{-2h}^{-h} dt \int_{-a}^{t-a+2h} |f(x)| \frac{dx}{(a-t+x-h)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\ & = C \int_{-a}^{-a+h} |f(x)| dx \int_{x+a-2h}^{-h} \frac{dt}{(a+x-t-h)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\ & \leq C_1 h^{1-\operatorname{Re} \alpha} \int_{-a}^{-a+h} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Используя лемму 7 и неравенство $hy \leq \pi$, получим нужную оценку:

$$\begin{aligned} K_{11}^- & \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} h^{1-\operatorname{Re} \alpha} \left(\int_{-a}^{-a+h} (x+a)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ & = C_1 \|f\|_{p,\mu} h^{1+\gamma-\frac{1+\mu}{p}} \leq C_2 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Интеграл K_{12}^- оценим, используя лемму 7 и неравенство

$$|(a-x-h)^{-\alpha} - (a-x)^{-\alpha}| \leq Ch(a-x-h)^{-1-\operatorname{Re} \alpha}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} K_{12}^- & \leq h \|f\|_{p,\mu} \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \left(\int_{t+c}^{\min(t+a, a-2h)} \frac{(t-x+a)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(a-x-h)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ & = h \|f\|_{p,\mu} \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \left(\int_{\max(0, t+2h)}^{a-c} \frac{\tau^{-\frac{\mu}{p-1}} d\tau}{(\tau-t-h)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ & = h \|f\|_{p,\mu} \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} |t|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} dt \left(\int_{\max(0, \frac{2h}{|t|}-1)}^{\frac{a-c}{|t|}} \frac{\tau^{-\frac{\mu}{p-1}} d\tau}{(1+\tau-\frac{h}{|t|})^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Внутренний интеграл в (30) ограничен равномерно по $t < -h$, так как

$$-\frac{\mu}{p-1} - \frac{p(1+\operatorname{Re} \alpha)}{p-1} < -1, \quad \mu < p-1. \tag{31}$$

Действительно, из первого неравенства в (31) вытекает ограниченность данного интеграла на бесконечности, а его ограниченность в окрестности нуля вытекает из второго неравенства в (31) и ограниченности снизу знаменателя:

$$1 + \tau - \frac{h}{|t|} \geq \max\left(1 - \frac{h}{|t|}, \frac{h}{|t|}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Далее, делая замену $\tau = y(t + h)$ во внешнем интеграле (30), воспользуемся леммой 6. В случае 1) теоремы 1, т. е. когда $\operatorname{Re} \alpha > 1/q$, общая оценка будет иметь вид

$$\begin{aligned} K_{12}^- &\leq Ch \|f\|_{p,\mu} y^{-\frac{1}{q} + \operatorname{Re} \alpha} (hy)^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha} \leq C \|f\|_{p,\mu} h^{\gamma + \frac{1}{q}} \\ &= C \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma (hy)^{\frac{1}{q}}}{y^{\frac{1}{q}}} \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}}, \end{aligned}$$

а в случае 2), когда $\operatorname{Re} \alpha < 1/q$, интеграл K_{12}^- оценится сверху величиной

$$Ch \|f\|_{p,\mu} y^{-\frac{1}{q} + \operatorname{Re} \alpha} = C \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma (hy)^{\operatorname{Re} \alpha}}{y^{\frac{1}{q}}} \leq C_2 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}}.$$

Таким образом, для K_1^- , а значит, и для K_1 оценка вида (20) получена.

Способы оценки интегралов J_3 и K_2 будут принципиально различными для утверждений 1), 2) теоремы 1. В первом из них $\mu > \gamma p - 1$, значит, применима лемма 4, и тогда по лемме 7 имеем

$$J_3 \leq \int_{-h}^0 |\varphi(t)| dt \leq C \|\varphi\|_{p,\nu} \left(\int_{-h}^0 |t|^{-\frac{\mu - \gamma p}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} h^{\gamma + \frac{1}{q}} \leq C_2 \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}} \|f\|_{p,\mu}.$$

Далее, заметим, что для любой константы $c_1 > 0$ в силу (13) при $\rho = \gamma$ и (14) при $\rho = \gamma + 1/q$, а также в силу известного свойства свертки и замечания 1 имеем

$$\begin{aligned} (1 - e^{-hy}) \int_{-2a}^{-c_1} e^{y(t+h)} |\varphi(t)| dt &\leq (hy)^\gamma \frac{C}{y^{\gamma + \frac{1}{q}}} \|f * g\|_1 \leq C \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}} \|f\|_1 \|g\|_1 \\ &\leq C_1 \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}} \|f\|_{p,\mu}. \end{aligned} \quad (32)$$

Поэтому в интеграле K_2 (см. (18)) для получения оценки вида (20) можно в нижнем пределе интегрирования записывать $-c_1$ вместо $-2a$. Подбирая c_1 так, чтобы для веса из леммы 4 выполнялось $\tilde{\omega}_\nu(t) \asymp |t|^{\mu - \gamma p}$ на $[-c_1, 0]$, в силу лемм 4, 7, а также неравенства (13) при $\rho = \gamma$ имеем

$$\begin{aligned} K_2 &\leq (hy)^\gamma \|\varphi\|_{p,\nu} \left(\int_{-c_1}^{-h} e^{p'y(t+h)} |t|^{-\frac{\mu - \gamma p}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &< C \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}} \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-\infty}^0 e^{p't} |t - yh|^{-\frac{\mu - \gamma p}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

а последний интеграл по лемме 6 равномерно ограничен, так как $0 < hy \leq \pi$ и $\frac{\mu - \gamma p}{p-1} < 1$.

В утверждении 2) теоремы 1, когда $\mu < \gamma p - 1$ (т.е. $\operatorname{Re} \alpha < 1/q$), способ оценки J_3 и K_2 будет более сложным. Впрочем, (32) остается в силе. Поскольку $\int_{-a}^a f(t) d\sigma(t) = 0$, где $d\sigma(t) = -g(-t) dt$, достаточно оценить следующие интегралы:

$$J_3 = \int_{-h}^0 e^{yt} dt \left| \int_{-a}^a f(x)(g(t-x) - g(-x)) dx \right|,$$

$$K_2 = (1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \left| \int_{-a}^a f(x)(g(t-x) - g(-x)) dx \right|$$

(напомним, что вне интервала $(-a, a)$ функция g равна нулю). Вновь применим разложение (21) и выберем c_1 так, чтобы $c_1 + c < a$, $c_1 < c$. Тогда поскольку $\tilde{k} \in \operatorname{Lip} \gamma$ (для оценки J_3 и K_2 везде достаточно даже $k \in \operatorname{Lip}(\gamma - 1 + 1/q)$), то и $g \in \operatorname{Lip}(\gamma - 1 + 1/q)$ на $[-c_1 - c - \varepsilon, c + c_1 + \varepsilon]$. Поэтому внутренние интегралы в выражениях для J_3 и K_2 при замене f на f_0 (эти выражения обозначим через J_3^0 и K_2^0 соответственно) оценятся сверху величиной $C|t|^{1/q - \operatorname{Re} \alpha} \|f\|_1$, а значит, по замечанию 1 и величиной $C|t|^{1/q - \operatorname{Re} \alpha} \|f\|_{p,\mu}$. Последней оценки внутреннего интеграла достаточно для получения оценок вида (20) для J_3^0 и K_2^0 в силу следующей леммы, которая и в дальнейшем будет неоднократно применяться.

ЛЕММА 12. Если $0 \leq j(t) \leq Ch^{1/q - \operatorname{Re} \alpha} \|f\|_{p,\mu}$ (или $0 \leq j(t) \leq C|t|^{1/q - \operatorname{Re} \alpha} \times \|f\|_{p,\mu}$), то согласно неравенству $hy \leq \pi$ (или неравенству (13) при $\rho = \gamma$ и лемме 6) имеем

$$\int_{-h}^0 e^{yt} j(t) dt \leq C \|f\|_{p,\mu} h^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha} \int_{-h}^0 dt = C \|f\|_{p,\mu} h^{\frac{1}{q} + \gamma} \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}}$$

$$\left((1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} j(t) dt \leq C \|f\|_{p,\mu} (hy)^\gamma \int_{-c_1+h}^0 e^{yt} |t - h|^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha} dt \right.$$

$$\left. < C \|f\|_{p,\mu} \frac{(hy)^\gamma}{y^{\gamma + \frac{1}{q}}} \int_{-\infty}^0 e^t |t - hy|^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha} dt \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}} \right).$$

Рассмотрим теперь интеграл J_3 при замене f на f_- :

$$J_3^- = \int_{-h}^0 e^{yt} dt \left| \int_{-a}^{-c} f(x)(g(t-x) - g(-x)) dx \right|. \quad (33)$$

Пусть $x < -a + h$. Тогда в силу вида (17) функции g и ограниченности $\tilde{k}$ имеем

$$|g(t-x) - g(-x)| \leq C(|a+x-t|^{-\operatorname{Re} \alpha} + |a+x|^{-\operatorname{Re} \alpha}) \leq 2C|a+x|^{-\operatorname{Re} \alpha},$$

и по лемме 7 модуль внутреннего интеграла в выражении для J_3^- не превосходит

$$2C \int_{-a}^{-a+h} \frac{|f(x)| dx}{(a+x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \leq 2C \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-a}^{-a+h} \frac{dx}{(a+x)^{p'(\operatorname{Re} \alpha + \frac{\mu}{p})}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= C_1 \|f\|_{p,\mu} h^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha}.$$

По лемме 12 имеем

$$\int_{-h}^0 e^{yt} dt \left| \int_{-a}^{-a+h} f(x)(g(t-x) - g(-x)) dx \right| \leq C_2 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}}.$$

При $x > -a + h$ во внутреннем интеграле (33) применим разложение:

$$g(t-x) - g(-x) = \tilde{k}(t-x) \left(\frac{1}{(a+x-t)^\alpha} - \frac{1}{(a+x)^\alpha} \right) + \frac{\tilde{k}(t-x) - \tilde{k}(-x)}{(a+x)^\alpha}. \quad (34)$$

Поскольку $|(a+x-t)^{-\alpha} - (a+x)^{-\alpha}| \leq C|t|(a+x)^{-1-\operatorname{Re} \alpha}$, внутренний интеграл в (33) при подстановке первого слагаемого из (34) вместо $g(t-x) - g(-x)$ по лемме 7 не превосходит

$$\begin{aligned} C_1 |t| \int_{-a+h}^{-c} \frac{|f(x)| dx}{(a+x)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} &\leq C_1 h \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-a+h}^{-c} \frac{dx}{(a+x)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha + \frac{\mu}{p})}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C_2 \|f\|_{p,\mu} h^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha}, \end{aligned}$$

и соответствующая часть J_3 (т. е. $\int_{-h}^0 e^{yt} dt \int_{-a+h}^{-c} |f(x) \tilde{k}(t-x)| ((a+x-t)^{-\alpha} - (a+x)^{-\alpha}) dx$) оценивается при помощи леммы 12. При подстановке второго слагаемого из (34) вместо $g(t-x) - g(-x)$, используя условие $\tilde{k} \in \operatorname{Lip}(\gamma - 1 + 1/q)$, лемму 7 и неравенство $|t| \leq h$, оценим внутренний интеграл из (33) следующим образом:

$$C |t|^{\gamma-1+\frac{1}{q}} \int_{-a+h}^{-c} \frac{|f(x)| dx}{(a+x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \leq C |h|^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha} \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-a+h}^{-c} \frac{dx}{(a+x)^{p'(\operatorname{Re} \alpha + \frac{\mu}{p})}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Поскольку $p'(\operatorname{Re} \alpha + \mu/p) < 1$, последний интеграл ограничен равномерно по h . Снова применяя лемму 12, оценим тем самым оставшуюся часть J_3^- величиной из правой части (20).

Теперь оценим интеграл

$$K_2^- = (1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \left| \int_{-a}^{-c} f(x)(g(t-x) - g(-x)) dx \right|.$$

Способ оценки K_2^- во многом схож со способом оценки J_3^- . Действительно, при $x < -a + h$ внутренний интеграл K_2^- , как мы видели при оценке J_3^- , оценивается сверху величиной $C \|f\|_{p,\mu} h^{1/q - \operatorname{Re} \alpha}$, а значит, и $C \|f\|_{p,\mu} |t|^{1/q - \operatorname{Re} \alpha}$, и соответствующая часть K_2^- в силу леммы 12 оценится нужной величиной. При $x > -a + h$ также применим разложение (34), и для его второго слагаемого повторим рассуждения, использованные при получении оценки для J_3^- (за исключением оценки $|t| \leq h$), вновь благодаря лемме 12 приходя к нужной оценке части K_2^- . Однако для первого слагаемого в (34) предыдущие рассуждения не дадут желаемого результата. В этом случае воспользуемся формулой

$$\frac{1}{(a+x-t)^\alpha} - \frac{1}{(a+x)^\alpha} = -\alpha \int_0^{-t} \frac{d\tau}{(a+\tau+x)^{1+\alpha}}.$$

Используя ограниченность функции $\tilde{k}$, с помощью последнего равенства получим

$$\begin{aligned} K_{21}^- &= (1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \left| \int_{-a+h}^{-c} f(x) \left(\frac{\tilde{k}(t-x)}{(a+x-t)^\alpha} - \frac{\tilde{k}(t-x)}{(a+x)^\alpha} \right) dx \right| \\ &\leq C(1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{-a+h}^{-c} |f(x)| dx \int_0^{-t} \frac{d\tau}{(a+\tau+x)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \\ &= C(1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_0^{-t} d\tau \int_{-a+h}^{-c} \frac{|f(x)| dx}{(a+\tau+x)^{1+\operatorname{Re} \alpha}}. \end{aligned} \quad (35)$$

По лемме 7 имеем

$$\begin{aligned} \int_{-a+h}^{-c} \frac{|f(x)| dx}{(a+\tau+x)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} &\leq \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-a+h}^{-c} \frac{(a+x)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(a+x+\tau)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \frac{\|f\|_{p,\mu}}{\tau^{1+\operatorname{Re} \alpha - \frac{1}{q}}} \left(\int_{\frac{h}{\tau}}^{\frac{a-c}{\tau}} \frac{x^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(x+1)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл ограничен равномерно по τ и h , так как интеграл от той же функции по всей положительной полупрямой сходится в силу неравенств $p'(1 + \operatorname{Re} \alpha) + \mu/(p-1) > 1$ и $\mu < p-1$. После подстановки этой оценки в (35) и интегрирования по τ получим $|t|^{1/q - \operatorname{Re} \alpha}$, что по лемме 12 достаточно для нужной оценки интеграла K_{21}^- . Этим получение оценки для K_2^- завершено.

Наконец, получим оценки интегралов

$$\begin{aligned} J_3^+ &= \int_{-h}^0 e^{yt} dt \int_c^a |f(x)| |g(t-x) - g(-x)| dx, \\ K_2^+ &= (1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_c^a |f(x)| |g(t-x) - g(-x)| dx. \end{aligned}$$

Имеем $g(t-x) = 0$ при $x > t+a$, поэтому в силу вида (17) функции $g(t)$ и по лемме 7 получаем

$$\begin{aligned} \int_{t+a}^a |f(x)| |g(t-x) - g(-x)| dx &\leq C \int_{t+a}^a \frac{|f(x)| dx}{(a-x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\ &\leq C \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{t+a}^a \frac{dx}{(a-x)^{p'(\operatorname{Re} \alpha + \frac{\mu}{p})}} \right)^{\frac{1}{p'}} = C_1 \|f\|_{p,\mu} |t|^{\frac{1}{q} - \operatorname{Re} \alpha}, \end{aligned}$$

что в силу леммы 12 влечет нужную оценку частей интегралов J_3^+ и K_2^+ (где внутренние интегралы берутся в пределах от $t+a$ до a).

Далее, при $t+a-h < x < t+a$ оценим в силу вида (17) функции $g(t)$ и ограниченности $\tilde{k}$ разность $g(t-x) - g(-x)$ величиной $C(a+t-x)^{-\operatorname{Re} \alpha}$, и соответствующая часть интеграла J_3^+ оценится величиной

$$\begin{aligned} C \int_{-h}^0 dt \int_{t+a-h}^{t+a} \frac{|f(x)| dx}{(a+t-x)^{\operatorname{Re} \alpha}} &\leq C \int_{a-2h}^a |f(x)| dx \int_{x-a}^{x-a+h} \frac{dt}{(a+t-x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\ &\leq C_1 h^\gamma \int_{a-2h}^a |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Осталось для получения оценки вида (20) применить лемму 7 (последний интеграл тогда не превзойдет $C\|f\|_{p,\mu}h^{1/q}$) и неравенство $(hy)^{1/q} \leq C$.

Теперь рассмотрим соответствующую часть интеграла K_2^+ , применив неравенство $1 - e^{-hy} \leq hy$:

$$\begin{aligned}
 & (1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{t+a-h}^{t+a} |f(x)| |g(t-x) - g(-x)| dx \\
 & \leq Chy \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_{t+a-h}^{t+a} \frac{|f(x)| dx}{(a+t-x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\
 & < Chy \int_{a-c_1-h}^{a-2h} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{x-a+h} \frac{e^{y(t+h)} dt}{|a+t-x|^{\operatorname{Re} \alpha}} \\
 & \quad + Chy \int_{a-2h}^{a-h} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^{y(t+h)} dt}{(a+t-x)^{\operatorname{Re} \alpha}} \\
 & \leq Chy^{\operatorname{Re} \alpha} \left(\int_{a-c_1-h}^{a-2h} \frac{|f(x)| dx}{e^{y(a-x-2h)}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^t dt}{|t+yh|^{\operatorname{Re} \alpha}} \right. \\
 & \quad \left. + \int_{a-2h}^{a-h} |f(x)| dx \int_{-\infty}^0 \frac{e^t dt}{(t+y(a-x-h))^{\operatorname{Re} \alpha}} \right). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Внутренние интегралы ограничены по лемме 6, поэтому оценку (36) можно продолжить в силу лемм 7, 6 и неравенства $hy \leq \pi$:

$$\begin{aligned}
 & C_1 hy^{\operatorname{Re} \alpha} \left(\int_{a-c_1-h}^{a-2h} |f(x)| e^{y(x-a+2h)} dx + \int_{a-2h}^{a-h} |f(x)| dx \right) \\
 & \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} hy^{\operatorname{Re} \alpha} \left(\left(\int_{a-c_1-h}^{a-2h} \frac{e^{p'y(x-a+2h)} dx}{(a-x)^{\frac{\mu}{p-1}}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\int_{a-2h}^{a-h} (a-x)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \right) \\
 & \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{p'x} dx}{(-x+2hy)^{\frac{\mu}{p-1}}} \right)^{\frac{1}{p'}} \frac{hy^{\operatorname{Re} \alpha}}{y^{\frac{1}{q}}} + C_2 \|f\|_{p,\mu} h^{1+\frac{1}{q}} y^{\operatorname{Re} \alpha} \\
 & \leq C_3 \|f\|_{p,\mu} \frac{h^\gamma}{y^{\frac{1}{q}}}.
 \end{aligned}$$

Осталось в качестве внутренних интегралов в J_3^+ и K_2^+ рассмотреть

$$\begin{aligned}
 & \int_c^{t+a-h} |f(x)| |g(t-x) - g(-x)| dx \\
 & \leq \int_c^{t+a-h} |f(x) \tilde{k}(t-x)| \left| \frac{1}{(a-x+t)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right| dx \\
 & \quad + \int_c^{t+a-h} |f(x)| \frac{|\tilde{k}(t-x) - \tilde{k}(-x)|}{(a-x)^{\operatorname{Re} \alpha}} dx = I_1(t) + I_2(t).
 \end{aligned}$$

Способ оценки интеграла $I_2(t)$ и результатов его подстановки вместо внутренних интегралов в J_3^+ и K_2^+ аналогичен способу оценки интегралов J_3^-

и K_2^- со вторым слагаемым из формулы (34). Для интеграла $I_1(t)$, оценивая $|(a-x+t)^{-\alpha} - (a-x)^{-\alpha}| \leq C|t|(a-x+t)^{-1-\operatorname{Re} \alpha}$ и используя ограниченность $\tilde{k}$, применим лемму 7:

$$\begin{aligned} & \int_c^{t+a-h} |f(x)| \left| \frac{\tilde{k}(t-x)}{(a-x+t)^\alpha} - \frac{\tilde{k}(t-x)}{(a-x)^\alpha} \right| dx \\ & \leq C|t| \|f\|_{p,\mu} \left(\int_c^{t+a-h} \frac{(a-x)^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(a-x+t)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ & = C\|f\|_{p,\mu} |t|^{\gamma-1+\frac{1}{q}} \left(\int_{1+\frac{h}{|t|}}^{\frac{a-c}{|t|}} \frac{x^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(x-1)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_1 \|f\|_{p,\mu} h^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha} \end{aligned}$$

(последний интеграл равномерно ограничен по t и h , так как $p'(1+\operatorname{Re} \alpha) + \mu/(p-1) > 1$ и $|t| < h$). По лемме 12 такой оценки для $I_1(t)$ достаточно, чтобы получить оценки вида (20) для интеграла J_3^+ при подстановке $I_1(t)$ в качестве внутреннего интеграла. Нам осталось оценить интеграл

$$\begin{aligned} K_{21}^+ &= (1 - e^{-hy}) \int_{-c_1}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_c^{t+a-h} |f(x)| \tilde{k}(t-x) \left| \frac{1}{(a-x+t)^\alpha} - \frac{1}{(a-x)^\alpha} \right| dx \\ &\leq C_1 (1 - e^{-hy}) \int_c^{a-2h} |f(x)| dx \int_{x-a+h}^{-h} e^{y(t+h)} dt \int_x^{-t+x} \frac{d\tau}{(a-\tau)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \\ &= C_1 (1 - e^{-hy}) \int_c^{a-2h} |f(x)| dx \int_x^{a-h} \frac{d\tau}{(a-\tau)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \int_{x-a+h}^{-h} e^{y(t+h)} dt. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл, в котором нижний предел будем считать равным $x-a$, что сохранит оценку сверху. Получим с помощью замены порядка интегрирования, леммы 7 и неравенства $e^{hy} \leq e^\pi$ оценку

$$\begin{aligned} K_{21}^+ &\leq C_1 (1 - e^{-hy}) \int_c^{a-2h} |f(x)| dx \int_x^{a-h} \frac{e^{y(x-\tau+h)} (1 - e^{-y(a-\tau)}) d\tau}{y(a-\tau)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \\ &= C_1 \frac{1 - e^{-hy}}{y} \int_c^{a-2h} |f(x)| dx \int_{x-a+h}^0 \frac{e^{y(\tau+h)} (1 - e^{-y(a-x+\tau)}) d\tau}{(a-x+\tau)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \\ &= C_1 \frac{1 - e^{-hy}}{y} \int_{c-a+h}^0 e^{y(\tau+h)} d\tau \int_c^{a+\tau-h} \frac{|f(x)| (1 - e^{-y(a-x+\tau)}) dx}{(a-x+\tau)^{1+\operatorname{Re} \alpha}} \\ &\leq C_2 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y} \\ &\quad \times \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} d\tau \left(\int_c^{a+\tau-h} \frac{(a-x)^{-\frac{\mu}{p-1}} (1 - e^{-y(a-x+\tau)})^{p'} dx}{(a-x+\tau)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $u = (a-x)/|\tau|$, продолжим предыдущую оценку:

$$\begin{aligned} K_{21}^+ &\leq C_2 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y} \\ &\quad \times \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \left(\int_{1+\frac{h}{|\tau|}}^{\frac{a-c}{|\tau|}} \frac{u^{-\frac{\mu}{p-1}} (1 - e^{\tau y(u-1)})^{p'} dx}{(u-1)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть $p' \operatorname{Re} \alpha > 1$. Так как $p'(1 + \operatorname{Re} \alpha) + \mu/(p-1) > 1$ и $(1 - e^{\tau y(u-1)})^{p'} \leq (|\tau|y(u-1))^{p'}$ согласно (13) при $\rho = 1$, то внутренний интеграл допускает оценку

$$\begin{aligned} \int_{1+\frac{h}{|\tau|}}^{\frac{a-c}{|\tau|}} &< \int_{1+\frac{h}{|\tau|}}^2 + \int_2^{+\infty} \leq \left| c \int_{1+\frac{h}{|\tau|}}^2 \frac{(|\tau|y(u-1))^{p'} dx}{(u-1)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \right| + \int_2^{+\infty} \frac{u^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(u-1)^{p'(1+\operatorname{Re} \alpha)}} \\ &\leq C_3 |\tau y|^{p'} \left(1 + \left(\frac{h}{|\tau|} \right)^{1-p' \operatorname{Re} \alpha} \right) + C_4. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставив результат в (37) и применив неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} K_{21}^+ &\leq C_5 \|f\|_{p,\mu} (1 - e^{-hy}) \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \\ &\quad + C_5 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{h^{\operatorname{Re} \alpha - \frac{1}{p'}}} \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} |\tau|^{-\frac{\mu}{p}} d\tau \\ &\quad + C_6 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y} \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \\ &< C_5 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y^{1+\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha}} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \\ &\quad + C_5 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y^{1-\frac{\mu}{p}} h^{\operatorname{Re} \alpha - \frac{1}{p'}}} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} |\tau|^{-\frac{\mu}{p}} d\tau \\ &\quad + C_6 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y^{1+\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha}} \int_{-\infty}^0 e^{\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $1/q > \operatorname{Re} \alpha$ и $\mu < p-1 < p$, то все интегралы в правой части неравенства сходятся. Для получения оценки вида (20) осталось применить к $1 - e^{-hy}$ неравенство (13) два раза при $\rho = \gamma$ и один раз при $\rho = 1/p$.

Если $p' \operatorname{Re} \alpha < 1$, то в формуле (38) пропадает слагаемое $(h/|\tau|)^{1-p' \operatorname{Re} \alpha}$, что лишь упрощает приведенную выше оценку K_{21}^+ .

Наконец, если $p' \operatorname{Re} \alpha = 1$, то вместо (38) имеем

$$\int_{1+\frac{h}{|\tau|}}^{\frac{a-c}{|\tau|}} < \left| \int_{1+\frac{h}{|\tau|}}^2 \frac{(|\tau|y(u-1))^{p'} dx}{(u-1)^{p'+1}} \right| + \int_2^{+\infty} \frac{u^{-\frac{\mu}{p-1}} dx}{(u-1)^{p'+1}} \leq C_3 |\tau y|^{p'} \left| \ln \left(\frac{h}{|\tau|} \right) \right| + C_4.$$

Подставляя результат в (37) и применяя неравенство Минковского, получим оценку

$$\begin{aligned} K_{21}^+ &\leq C_5 \|f\|_{p,\mu} (1 - e^{-hy}) \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha} \left| \ln \left(\frac{h}{|\tau|} \right) \right|^{\frac{1}{p'}} d\tau \\ &\quad + C_6 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y} \int_{c-a+h}^0 e^{y\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \\ &< C_7 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y^{1+\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha}} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^0 e^{\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha} \left| \ln \left(\frac{hy}{|\tau|} \right) \right|^{\frac{1}{p'}} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\tau} |\tau|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл сходится, а для оценки первого, подобрав $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < 1/q - \operatorname{Re} \alpha$ и $\varepsilon < \operatorname{Re} \alpha$, используем очевидное неравенство $|\ln t|^{1/p'} \leq C_8(t^\varepsilon + t^{-\varepsilon})$ для любого $t > 0$. Применяя (13) при $\rho = 1 - \operatorname{Re} \alpha - \varepsilon$, $\rho = 1 - \operatorname{Re} \alpha + \varepsilon$ и $\rho = 1 - \operatorname{Re} \alpha$, завершим оценку K_{21}^+ :

$$\begin{aligned} K_{21}^+ &\leq C_9 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y^{1+\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha}} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^0 e^\tau |\tau|^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha-\varepsilon} (hy)^\varepsilon d\tau + \int_{-\infty}^0 e^l \tau |\tau|^{\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha+\varepsilon} (hy)^{-\varepsilon} d\tau \right) \\ &\quad + C_7 \|f\|_{p,\mu} \frac{1 - e^{-hy}}{y^{1+\frac{1}{q}-\operatorname{Re} \alpha}} \int_{-\infty}^0 e^\tau |\tau|^{\frac{1}{q}-1-\operatorname{Re} \alpha} d\tau \leq C \|f\|_{p,\mu} \frac{h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (20) нами полностью доказана:

$$|F(x + iy)| \leq C_0 \frac{\|f\|_{p,\mu} h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{C \|f\|_{p,\mu}}{y^{\frac{1}{q}} |x|^{1-\operatorname{Re} \alpha}}, \quad |x| > x_0, \quad |x| \geq y > 0. \quad (39)$$

В случае отрицательных y имеем (см. (16))

$$\begin{aligned} F(z) &= i \int_0^{2a} e^{-izt} (f * g)(t) dt = i \int_{-2a}^0 e^{izt} (f * g)(-t) dt \\ &= i \int_{-2a}^0 e^{ixt+|y|t} ((Of) * (Og))(t) dt \end{aligned}$$

(где $(Of)(t) = f(-t)$, $(Og)(t) = g(-t)$), что приводит к оценке (39) с заменой y на $|y|$, так как Of принадлежит аналогичному пространству (с отраженными от нуля точками концентрации веса), а Og имеет тот же вид, что и g . Далее, оценка (39) справедлива и при $|x| \leq x_0$ в силу формулы (16) и замечания 1:

$$|F(z)| \leq \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1 \leq C_0 \|f\|_{p,\mu}.$$

Поскольку $|x| \geq r/\sqrt{2}$ в секторах $|\theta \pm \pi/2| \geq \pi/4$, $\theta \neq 0, \pi$ ($z = re^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$), то

$$|F(z)| \leq \frac{C \|f\|_{p,\mu}}{|y|^{\frac{1}{q}} r^{1-\operatorname{Re} \alpha}}, \quad \left| \theta \pm \frac{\pi}{2} \right| \geq \frac{\pi}{4}, \quad \theta \neq 0, \pi. \quad (40)$$

Итак, основная трудность, состоявшая в получении оценки (40), преодолена. Дальнейшее доказательство теперь легко проводится по схеме доказательства невесового аналога теоремы 1.

Из оценки $|F(z)| \leq C_0 \|f\|_{p,\mu}$ следует ограниченность $F(z)$ в полуплоскостях $\operatorname{Im} z \geq 0$. Значит, функция $F(z)z^{1/q+\gamma}$ имеет нулевой порядок в углах $|\theta \pm \pi/2| < \pi/4$. В силу (40) на границах этих секторов она ограничена константой $C \|f\|_{p,\mu}$. По теореме Фрагмена–Линделёфа эта функция ограничена в данных секторах той же константой, т. е.

$$|F(z)| \leq C \|f\|_{p,\mu} r^{-\frac{1}{q}-1+\operatorname{Re} \alpha}, \quad \left| \theta \pm \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{4}.$$

Поскольку в этих секторах $r/\sqrt{2} \leq y \leq r$, с учетом (40) имеем единообразную оценку

$$|F(z)| \leq C \|f\|_{p,\mu} |y|^{-\frac{1}{q}} r^{\operatorname{Re} \alpha - 1}, \quad y \neq 0.$$

Пользуясь этой оценкой, формулой (16) и оценкой для $L(z)$ из леммы 11 и фиксируя подходящую (см. замечания 4, 5) последовательность (r_k) , имеем (см. (15))

$$\begin{aligned} |R_{r_k}(t, f)| &\leq C \|f\|_{p,\mu} \oint_{|z|=r_k} e^{|y|(|t|-a)} |y|^{-\frac{1}{q}} |dz| = 4C \|f\|_{p,\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r(a-|t|)\sin \theta}}{(r \sin \theta)^{\frac{1}{q}}} r d\theta \\ &\leq C_1 \|f\|_{p,\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{2}{\pi} r \theta (a-|t|)}}{(r \theta)^{\frac{1}{q}}} r d\theta < \frac{C_2 \|f\|_{p,\mu}}{(a-|t|)^{1-\frac{1}{q}}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\frac{1}{q}}} du \\ &= \frac{C \|f\|_{p,\mu}}{(a-|t|)^{\frac{1+\mu}{p}}}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $C \neq C(f, r_k, t)$. Так же оценивается и $R_{r_k}^+(t, f)$:

$$\begin{aligned} |R_{r_k}^+(t, f)| &\leq C \|f\|_{p,\mu} \oint_{c_{r_k}^+} e^{|y|(|t|-a)} |y|^{-\frac{1}{q}} |dz| = 2C \|f\|_{p,\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r(a-|t|)\sin \theta}}{(r \sin \theta)^{\frac{1}{q}}} r d\theta \\ &\quad + 2C \|f\|_{p,\mu} \int_0^{r_k} \frac{e^{-y(a-|t|)}}{y^{\frac{1}{q}}} dy < \frac{\tilde{C} \|f\|_{p,\mu}}{(a-|t|)^{\frac{1+\mu}{p}}}, \quad \tilde{C} \neq \tilde{C}(f, r_k, t). \end{aligned} \quad (42)$$

Из неравенства (41) следует, что операторы R_{r_k} имеют слабый тип (p, p) в пространстве с мерой $\mu(A) = \int_A \omega_\mu(t) dt$ при одной и той же константе M :

$$\begin{aligned} \mu(t: |R_{r_k}(t, f)| > y) &\leq \mu\left(t: \frac{C \|f\|_{p,\mu}}{(a-|t|)^{\frac{1+\mu}{p}}} > y\right) \\ &= \mu\left(|t| > a - \left(\frac{C \|f\|_{p,\mu}}{y}\right)^{\frac{p}{1+\mu}}\right). \end{aligned} \quad (43)$$

Для больших y можно продолжить оценку (43), обозначив $b = \left(\frac{C \|f\|_{p,\mu}}{y}\right)^{\frac{p}{1+\mu}}$:

$$\mu(t: |R_{r_k}(t, f)| > y) \leq C_1 \int_{a-b}^a (a-u)^\mu du = C_2 b^{1+\mu} = \left(\frac{M \|f\|_{p,\mu}}{y}\right)^p,$$

а для $y \leq y_0 \|f\|_{p,\mu}$ последнее неравенство очевидно. Теперь для случая 1) теоремы 1, фиксируя p_1, p_2 : $1 < p_1 < p < p_2 < (1+\mu)/(1-\operatorname{Re} \alpha)$, и повторяя для p_1, p_2 все сказанное выше для p , по интерполяционной теореме Марцинкевича заключаем, что операторы R_{r_k} равномерно ограничены в $L_\mu^p(-a, a)$. На всюду плотном в $L_\mu^p(-a, a)$ по леммам 10, 11 множестве конечных линейных комбинаций функций системы $e(\Lambda)$ последовательность $R_{r_k}(t, f)$ сходится к нулю при $k \rightarrow \infty$ в $L_\mu^p(-a, a)$ в силу леммы 2 и того, что $S_{r_k}(t, f) = f$, начиная с некоторого K . По теореме Банаха–Штейнгауза $R_{r_k}(t, f) \rightarrow 0$ всюду

в $L_\mu^p(-a, a)$, что согласно лемме 2 означает сходимость к произвольной функции f выражения $S_{r_k}(t, f)$, т. е. в силу определения подходящей последовательности сходимость биортогонального ряда. Ограниченность проекционного оператора (5) выводится из (42) аналогично.

Рассуждения в случае 2) теоремы 1 несколько сложнее, чем в случае 1), но после установления слабого типа операторов R_{r_k} и $R_{r_k}^+$ аналогичны невесовому случаю, рассмотренному в [2], и мы не будем их повторять. Таким образом, теорема 1 доказана.

§ 4. Специальные базисы из экспонент, синусов и косинусов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Условием теоремы 1 удовлетворяет возмущение тригонометрической системы вида (3). В этом можно убедиться, используя равенства

$$L(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \Delta)^2} \right) = c(\Delta) \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{\sin \frac{t}{2}}{(\cos \frac{t}{2})^{1-2\Delta}} dt, \quad \operatorname{Re} \Delta > 0 \quad (44)$$

(см. [2, § 3.1, замечание 1]). При $-1/2 < \operatorname{Re} \Delta < 0$ верно равенство

$$L(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \Delta)^2} \right) = z \tilde{c}(\Delta) \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\Delta} dt,$$

т. е. порождающая функция последовательности $\Lambda'_\Delta = \Lambda_\Delta \setminus \{0\}$ удовлетворяет условиям (2). Отсюда следует базисность со свойством Рисса системы (3), $\operatorname{Re} \Delta \neq 0$ в пространствах $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ при условии (7). Базисность со свойством Рисса в пространствах $L_\mu^p(-a, a)$ системы (3) при $\operatorname{Re} \Delta = 0$, $\operatorname{Im} \Delta \neq 0$ доказана А. М. Седлецким в [8], где также отмечено, что вес $\omega_\mu(t)$ вида (6) удовлетворяет так называемому (A_p) -условию. Это влечет, как установлено в [10], базисность тригонометрической системы в $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ и ограниченность оператора, сопоставляющего функции f сопряженную ей $\tilde{f}$, а последнее эквивалентно свойству Рисса для тригонометрической системы. Эквивалентность базиса (3) тригонометрическому, как показано в рамках доказательства теоремы 3 из [2, § 9.1], следует из справедливости свойства Рисса для этих базисов (хотя в [2] рассматривались менее общие веса, в доказательстве данного факта вид веса не используется).

Теперь остается обосновать необходимость неравенства (7) для базисности системы (3) в пространстве $L_\mu^p(-\pi, \pi)$. Известно (см. [2, § 9.1, теоремы 1, 2]), что при $1 < p < \infty$ неравенство

$$\frac{1 + \mu}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta \leq \frac{1 + \mu}{2p} \quad (45)$$

является необходимым и достаточным условием одновременной полноты и минимальности системы (3) в пространстве $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ при $\mu_i = \mu$, $i = 1, \dots, s$. Обобщим это утверждение в случае пространств с переменными средними показателями. Во-первых, при этих условиях для полноты системы (3) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \Delta \leq (1 + \mu)/(2p)$. Действительно, достаточность

следует из лемм 11, 10. При $\operatorname{Re} \Delta > (1 + \mu)/(2p)$ из формулы (44) следует, что система (3) аннулируется функцией $c(\Delta) \sin(t/2) \cos^{2\Delta-1}(t/2)$, которая принадлежит пространству $L'_{-\mu/(p-1)}(-\pi, \pi)$, сопряженному по замечанию 2 к $L^p_\mu(-\pi, \pi)$, а значит, система (3) не полна в $L^p_\mu(-\pi, \pi)$. Во-вторых, минимальность системы $e(\Lambda_\Delta)$ эквивалентна минимальности системы $e(\Lambda_{\Delta+1/2}) \cup \{e^{i\beta t}\}$, $\beta \notin \Lambda_{\Delta+1/2}$ (см. [2, § 9.1, лемма 1]), а последняя эквивалентна неполноте системы $e(\Lambda_{\Delta+1/2})$, т. е. условию $\operatorname{Re} \Delta > (1 + \mu)/(2p) - 1/2$. Полученные условия полноты и минимальности системы (3) влекут (45).

Следовательно, остается доказать, что в случае $\Delta = (1 + \mu)/(2p) + ih$, $h \in \mathbb{R}$, данная система не образует базис. В процессе доказательства теоремы 3 из [2, § 9.1] установлено, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\frac{1+\mu}{p}-2ih}} \sin(\lambda_n t), \quad \lambda_n = n + \frac{1+\mu}{2p} + ih \quad (46)$$

(при замене $\sin(\lambda_n t) = (e^{i\lambda_n t} - e^{-i\lambda_n t})/(2i)$), является негармоническим рядом Фурье некоторой функции из $L^p_\mu(-\pi, \pi)$ по системе (3), и показана его расходимость при $h = 0$, что, очевидно, противоречит базисности системы экспонент в этом случае. Докажем его расходимость при произвольном h . Нам понадобится

ЛЕММА 13. *Если комплексные числа $z_1, \dots, z_n$ лежат в угле Λ раствора $\alpha < \pi$ с вершиной в нуле, то*

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \geq \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Делая при необходимости поворот в комплексной плоскости, можем считать, что угол Λ лежит в правой полуплоскости, а вещественная ось является его биссектрисой. Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \geq \left| \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n z_i \right| = \sum_{i=1}^n |z_i| \cos(\arg z_i) \geq \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

Продолжим доказательство теоремы. Сделаем в ряде (46) замену $t = \pi - x$; тогда

$$(-1)^n \sin(\lambda_n(\pi - x)) = \sin\left(\pi \frac{1+\mu}{2p} - \operatorname{Re} \lambda_n x + ih(\pi - x)\right),$$

и нам достаточно показать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ih \ln n}}{n^{1-\frac{1+\mu}{p}}} \sin\left(\pi \frac{1+\mu}{2p} - \operatorname{Re} \lambda_n x + ih(\pi - x)\right), \quad \lambda_n = n + \frac{1+\mu}{2p} + ih, \quad (47)$$

в норме пространства $L^p((0, \varepsilon), x^\mu dx)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Преобразуем общий член этого ряда. Если $0 \leq a \leq \pi/2$, $b \geq 0$, то

$$\sin(a + ib) = \sin a \operatorname{ch} b + i \cos a \operatorname{sh} b = \sqrt{\sin^2 a + \operatorname{sh}^2 b} e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi = \varphi(a, b) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

Значит, ряд (47) можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sin^2 a_n + \operatorname{sh}^2 b}}{n^{1-\frac{1+\mu}{p}}} e^{i(\varphi_n + 2h \ln n)}, \quad a_n = \pi \frac{1+\mu}{2p} - \operatorname{Re} \lambda_n x, \quad b = h(\pi - x), \quad (49)$$

где $0 \leq \varphi_n \leq \pi/2$ (если $0 \leq a_n \leq \pi/2$). Для фиксированного $N \in \mathbb{N}$ положим

$$x_N = \frac{\pi(1+\mu)}{4p \operatorname{Re} \lambda_{[CN]}} \asymp \frac{1}{N}, \quad C = e^{\frac{\pi}{8h}}.$$

Тогда если $0 \leq x \leq x_N$ и $n \leq [CN]$, то

$$\pi \frac{(1+\mu)}{4p} \leq \pi \frac{1+\mu}{2p} - \operatorname{Re} \lambda_n x = a_n \leq \pi \frac{1+\mu}{2p}.$$

Поскольку $0 < (1+\mu)/p < 1$, то, действительно, $0 < c \leq a_n \leq \pi/2$, откуда имеем $\sin a_n \geq \delta_0 > 0$. Тогда отрезок ряда (49) при $0 \leq x \leq x_N$, удовлетворяя условиям леммы 13 (аргументы всех слагаемых лежат между $2h \ln N$ и $\pi/2 + 2h \ln [CN]$, т. е. в угле раствора не больше $3\pi/4$), допускает оценку

$$\left| \sum_{n=N}^{[CN]} \frac{\sqrt{\sin^2 a_n + \operatorname{sh}^2 b}}{n^{1-\frac{1+\mu}{p}}} e^{i(\varphi_n + 2h \ln n)} \right| \geq \delta \sum_{n=N}^{[CN]} \frac{|\sin^2 a_n|}{n^{1-\frac{1+\mu}{p}}} \geq \delta_1 N^{\frac{1+\mu}{p}},$$

где δ_1 не зависит от N . Значит, если $x_N \leq \varepsilon$, то норма в $L^p((0, \varepsilon), x^\mu dx)$ левой части оценивается снизу равномерно по N , так как норма правой части не меньше, чем

$$\delta_1 N^{\frac{1+\mu}{p}} \left(\int_0^{x_N} x^\mu dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \delta_2 > 0.$$

Это и влечет расходимость ряда (49) (т. е. ряда (47)) в этой норме. Значит, система (3) при $\Delta = (1+\mu)/(2p) + ih$ не является базисом пространства $L_\mu^p(-\pi, \pi)$. Теорема доказана.

Наряду с системой (3) рассмотрим также систему с исключенной единицей:

$$e(\Lambda'_\Delta) = (e^{i(n-\Delta)t})_{n=-\infty}^{-1} \cup (e^{i(n+\Delta)t})_{n=1}^{+\infty}.$$

В [2, § 9.1, лемма 1] доказана эквивалентность систем $e(\Lambda_{\Delta+1/2})$ и $e(\Lambda'_\Delta)$ при соответствии $e^{i(-n-\Delta-1/2)t} \leftrightarrow e^{i(-n-\Delta-1)t}$, $e^{i(n+\Delta+1/2)t} \leftrightarrow e^{i(n+\Delta)t}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leftrightarrow e^{i(-1-\Delta)t}$. Из эквивалентности систем следует сохранение свойства Рисса при переходе от одной системы к другой. Далее, если свойство Рисса равносильно эквивалентности системы $e(\Lambda)$ тригонометрическому базису, то для системы $e(\Lambda'_\Delta)$ свойство Рисса означает ее эквивалентность базису $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ в замыкании линейной оболочки этой системы в $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ (при соответствии $e^{i(\pm n \pm \Delta)t} \leftrightarrow e^{\pm int}$, $n \in \mathbb{N}$). Это дает возможность, применив теорему 2 для системы $e(\Lambda_{\Delta+1/2})$, перейти к системе $e(\Lambda'_\Delta)$. Итак, верно

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 2 остается в силе, если систему $e(\Lambda_\Delta)$ заменить на $e(\Lambda'_\Delta)$, неравенства (7) – на неравенства

$$\frac{1+\mu}{2p} - 1 < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1+\mu}{2p} - \frac{1}{2} \quad (50)$$

и систему $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ – на $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$.

Теперь рассмотрим системы синусов и косинусов (4) в пространстве $L^p((0, \pi), \omega_\mu(t) dt)$, которое обозначим через $L_\mu^p(0, \pi)$. Если $c_1, \dots, c_k$ – положительные точки концентрации веса $\omega_\mu(t)$, то мы можем считать, что этот вес является четным и имеет вид

$$\omega_\mu(t) = |t|^{\tilde{\mu}_0} \prod_{l=1}^k |t - c_l|^{\tilde{\mu}_l} |t + c_l|^{\tilde{\mu}_l},$$

$$0 < c_1 < \dots < c_k = \pi, \quad \tilde{\mu}_k = \mu, \quad -1 < \tilde{\mu}_0, \dots, \tilde{\mu}_k < p - 1$$

(данный вес эквивалентен исходному на интервале $(0, \pi)$ в смысле отношения $\asymp$). Тогда пространство $L_\mu^p(0, \pi)$ изоморфно подпространству как четных, так и нечетных функций пространства $L_\mu^p(-\pi, \pi)$. Это позволяет сводить вопрос о базисности систем (4) в $L_\mu^p(0, \pi)$ к рассмотренному вопросу о базисности системы экспонент (3) в $L_\mu^p(-\pi, \pi)$. А именно, верно

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Система (3) образует базис пространства $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ тогда и только тогда, когда системы (4) образуют базисы пространства $L_\mu^p(0, \pi)$.

В случае замены системы $e(\Lambda_\Delta)$ на $e(\Lambda'_\Delta)$ из системы косинусов в замечании 7 надо удалить единицу.

Если $L(z)$ – целая функция экспоненциального типа (нечетная, как в начале этого параграфа), нули которой задают последовательность Λ_Δ , то формулы для биортогональных систем имеют вид

$$h_n(t) = \frac{1}{L'(n + \Delta \operatorname{sign} n)} \left(\frac{L(t)}{t - (n + \Delta \operatorname{sign} n)} \right)^\wedge \quad (51)$$

для системы экспонент в $L_\mu^p(-\pi, \pi)$, вид

$$f_n(t) = 2i(h_n(t) - h_{-n}(t)) = \frac{4i(n + \Delta)}{L'(n + \Delta)} \left(\frac{L(t)}{t^2 - (n + \Delta)^2} \right)^\wedge \quad (52)$$

для системы синусов в $L_\mu^p(0, \pi)$ и вид

$$\begin{aligned} g_0(t) &= 2h_0(t) = \frac{2}{L'(0)} \left(\frac{L(t)}{t} \right)^\wedge, \\ g_n(t) &= 2(h_n(t) + h_{-n}(t)) = \frac{4}{L'(n + \Delta)} \left(\frac{tL(t)}{t^2 - (n + \Delta)^2} \right)^\wedge \end{aligned} \quad (53)$$

для системы косинусов в $L_\mu^p(0, \pi)$. Если вместо $L_\mu^p(0, \pi)$ рассматривается подпространство нечетных (для синусов) или четных (для косинусов) функций в $L_\mu^p(-\pi, \pi)$, то коэффициент 2 в формулах для f_n и g_n (см. (52), (53)) исчезает. Из вида биортогональных систем следует, что ряд функции $f \in L_\mu^p(0, \pi)$ по системе синусов (4), (52) (косинусов (4), (53)) совпадает с рядом по системе экспонент (3), (51) ее нечетного (четного) продолжения на $(-\pi, \pi)$. Действительно, если, например, функция $f(t)$ нечетна на интервале $(-\pi, \pi)$ и ее ряд по системе экспонент (3), (51) имеет вид $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i(n + \Delta \operatorname{sign} n)t}$, то

$$c_{-n} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_{-n}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_n(-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) h_n(t) dt = -c_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

значит, этот ряд равен ряду $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2ic_n \sin((n + \Delta)t)$. Однако

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) f_n(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi f(t) f_n(t) dt = i \int_{-\pi}^\pi f(t) h_n(t) dt - i \int_{-\pi}^\pi f(t) h_{-n}(t) dt \\ &= ic_n - ic_{-n} = 2ic_n, \end{aligned}$$

т. е. $2ic_n$ является коэффициентом ряда функции $f(t)$ на $(0, \pi)$ по системе синусов (4), (52).

Нельзя утверждать, что если биортогональный ряд $f \in L_\mu^p(-\pi, \pi)$ по экспонентам преобразуется к ряду по синусам или косинусам, то функция f обязательно нечетная или четная. Однако верна

ЛЕММА 14. Пусть ряд функции $f \in L_\mu^p(-\pi, \pi)$ по системе экспонент (3), (51) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty c_n \frac{e^{i(n+\Delta)t} - e^{-i(n+\Delta)t}}{2i} &= \sum_{n=1}^\infty c_n \sin((n + \Delta)t) \\ \left(c_0 + \sum_{n=1}^\infty c_n \frac{e^{i(n+\Delta)t} + e^{-i(n+\Delta)t}}{2} \right) &= c_0 + \sum_{n=1}^\infty c_n \cos((n + \Delta)t). \end{aligned}$$

Тогда ряд функции $(f(t) - f(-t))/2$ по системе синусов (4), (52) (соответственно, функции $(f(t) + f(-t))/2$ по системе косинусов (4), (53)) имеет тот же самый вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через (f, g) интеграл $\int_{-\pi}^\pi f(t)g(t) dt$. Рассмотрим ряд, соответствующий случаю синусов. Поскольку мы рассматриваем функции, определенные на $(-\pi, \pi)$, в формулах (52) и (53) нет коэффициента 2. Так как $c_n = 2i(f, h_n)$, $c_n = -2i(f, h_{-n})$, то, взяв сумму и разность двух последних равенств, в силу нечетности f_n и четности g_n получим

$$2c_n = 2(f, f_n) = -2(f(-t), f_n), \quad 0 = (f, g_n) = (f(-t), g_n).$$

Кроме того, $0 = (f, h_0) = (f, g_0) = (f(-t), g_0)$. Значит, если негармонический ряд Фурье по системе экспонент функции $-f(-t)$ имеет вид $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t}$, то

$$\begin{aligned} (b_n + b_{-n}) &= -(f(-t), g_n) = 0, & i(b_n - b_{-n}) &= -(f(-t), f_n) = c_n, \\ b_0 &= -(f(-t), g_0) = 0 \end{aligned}$$

(откуда $b_n = -b_{-n} = c_n/(2i)$), т. е. этот ряд совпадает с исходным рядом функции f . Значит, то же можно утверждать и о функции $(f(t) - f(-t))/2$, которая нечетна, а потому рассматриваемый ряд является и ее рядом по системе синусов (4), (52). Случай ряда по косинусам рассматривается аналогично.

Полнота и минимальность системы (4) синусов (косинусов) в $L_\mu^p(0, \pi)$, $1 < p < \infty$, равносильна условию

$$\frac{1+\mu}{2p} - 1 < \operatorname{Re} \Delta \leq \frac{1+\mu}{2p} \quad \left(\frac{1+\mu}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta \leq \frac{1+\mu}{2p} + \frac{1}{2} \right), \quad (54)$$

что следует из приведенного выше аналогичного утверждения о системе экспонент (см. [2, § 9.2]). Отметим также, что, в силу базисности тригонометрической системы (e^{int}) , $n \in \mathbb{Z}$, в $L_\mu^p(-\pi, \pi)$, системы $S = (\sin(nt))$, $n \in \mathbb{N}$, и $C = 1 \cup (\cos(nt))$, $n \in \mathbb{N}$, образуют базисы в $L_\mu^p(0, \pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Утверждения о базисности и эквивалентности базису S системы синусов следуют в случае (7) из теоремы 2 и замечания 7, а в случае (50) – из замечаний 6, 7. Для рассмотрения центральной точки

$$\operatorname{Re} \Delta = \frac{1 + \mu}{2p} - \frac{1}{2}$$

интервала (8) воспользуемся интерполяцией: подберем p_1 и p_2 достаточно близкими к p , чтобы $1 + \mu_l < p_1 < p < p_2$ для любого l и выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right), & \frac{1 + \mu}{2p_1} - 1 < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1 + \mu}{2p_1} - \frac{1}{2}, \\ & & \frac{1 + \mu}{2p_2} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1 + \mu}{2p_2}. \end{aligned}$$

Базис из синусов $\sin((n + \Delta)t)$ эквивалентен базису $\sin(nt)$ в $L_\mu^{p_{1,2}}(0, \pi)$. Поэтому операторы T , T^{-1} , осуществляющие сопоставление $\sin((n + \Delta)t) \leftrightarrow \sin(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, ограничены в $L_\mu^{p_{1,2}}(0, \pi)$. По интерполяционной теореме Рисса–Торина это верно и в $L_\mu^p(0, \pi)$, а значит, система синусов (4) образует эквивалентный S базис в замыкании своей линейной оболочки, которая совпадает в данном случае с $L_\mu^p(0, \pi)$ в силу справедливости условия (54). Утверждения о базисности и эквивалентности базиса C системе косинусов в левой половине интервала (8), т. е. при выполнении условия (7), суть следствия теоремы 2 и замечания 7. Если $\operatorname{Re} \Delta$ попало в правую половину интервала (8), то согласно замечаниям 6, 7, примененным к $\Delta - 1$ вместо Δ , получим эквивалентность в $L_\mu^p(0, \pi)$ систем $\cos((n - 1 + \Delta)t)$ и $\cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, что, как доказано в [2, § 9.2, теорема 3], влечет требуемое. Середина интервала (8) вновь покрывается соответствующей интерполяцией.

Поскольку неравенство (54) необходимо для базиса системы (4) синусов (косинусов) в $L_\mu^p(0, \pi)$, остается показать, что эта система не образует базис при $\operatorname{Re} \Delta = (1 + \mu)/(2p)$ ($\operatorname{Re} \Delta = (1 + \mu)/(2p) + 1/2$). Как упоминалось при доказательстве теоремы 2, ряд (46) является негармоническим рядом Фурье некоторой функции из $L_\mu^p(-\pi, \pi)$. В силу леммы 14 эту функцию можно считать нечетной, а данный ряд – ее негармоническим рядом по системе синусов. Расходимость этого ряда в соответствующей норме установлена в процессе доказательства теоремы 2, так что рассматриваемая система синусов не может быть базисом $L_\mu^p(0, \pi)$. Для системы косинусов в [2] доказано, что ряд некоторой функции из $L_\mu^p(-\pi, \pi)$ по системе $e(\Lambda'_\Delta)$ имеет тот же вид (46) с заменой функции $\sin$ на $\cos$. Эту функцию можно считать четной опять же в силу леммы 14 (она, конечно, верна и при исключении единицы из систем экспонент и косинусов). Расходимость этого ряда устанавливается точно так же, как и ряда по синусам (с использованием формулы $\cos(a + ib) = \sqrt{\cos^2 a + \operatorname{sh}^2 b} e^{-i\varphi}$ вместо (48) при тех же ограничениях, налагаемых на a , b и φ). Теорема доказана.

Список литературы

1. С. М. Пономарев, “Об одной задаче на собственные значения”, *Докл. АН СССР*, **249**:5 (1979), 1068–1070; англ. пер.: S. M. Ponomarev, “On an eigenvalue problem”, *Soviet Math. Dokl.*, **20**:6 (1979), 1398–1400.

2. А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
3. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
4. В. И. Мацаев, М. З. Соломяк, “Об условиях существования интеграла Стилтjesа”, *Матем. сб.*, **88(130)**:4(8) (1972), 522–535; англ. пер.: V. I. Macaev, M. Z. Solomjak, “On existence conditions for the stieltjes integral”, *Math. USSR-Sb.*, **17**:4 (1972), 515–527.
5. Е. И. Моисеев, “О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 40–44; англ. пер.: V. I. Macaev, M. Z. Solomjak, “On the basis property of sine and cosine systems in a weighted space”, *Differential Equations*, **34**:1 (1998), 39–43.
6. Е. И. Моисеев, “О базисности систем синусов и косинусов”, *Докл. АН СССР*, **275**:4 (1984), 794–798; англ. пер.: E. I. Moiseev, “On the basis property of systems of sines and cosines”, *Soviet Math. Dokl.*, **29**:2 (1984), 296–300.
7. Г. Г. Девдариани, *Базисность некоторых специальных систем собственных функций несамосопряженных дифференциальных операторов*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1986.
8. С. С. Пухов, А. М. Седлецкий, “Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале”, *Докл. РАН*, **425**:4 (2009), 452–455; англ. пер.: S. S. Pukhov, A. M. Sedletskii, “Bases of exponentials, sines, and cosines in weighted spaces on a finite interval”, *Dokl. Math.*, **79**:2 (2009), 236–239.
9. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987; англ. пер.: St. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.
10. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, “Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **176** (1973), 227–251.

С. С. Пухов (S. S. PUKHOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: spukhov@mail.ru

Поступило в редакцию
21.08.2009