Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Бабенко, С. А. Богатый, Аменабельность группы
подстановок формальных степенных рядов, *Изв. РАН.
Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 19–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:51:54

УДК 512.546+517.987.5

И. К. Бабенко, С. А. Богатый

Аменабельность группы подстановок формальных степенных рядов

Изучается свойство аменабельности группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ формальных степенных рядов от одной переменной с коэффициентами в некотором унитарном коммутативном кольце $\mathbf{k}$. Показано, что на пространстве $C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$ равномерно непрерывных ограниченных функций на этой группе существует инвариантное среднее. Это эквивалентно тому, что всякое непрерывное действие группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на всяком компактном пространстве обладает инвариантной вероятностной мерой.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: топологическая группа, действие группы, инвариантное среднее.

Введение

Пусть $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей, в дальнейшем это условие предполагается всегда выполненным и может специально не оговариваться. Рассмотрим множество $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ всевозможных формальных степенных рядов переменной x , имеющих вид

$$f(x) = x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \cdots = x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots), \quad \alpha_n \in \mathbf{k}. \quad (1)$$

Это множество становится группой, если в качестве операции используется подстановка ряда в ряд с последующим раскрытием скобок и приведением подобных членов (см. [1]): $f \circ g = f(g(x))$. Общие алгебраические свойства группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ изучались в [1]. Интерес к этой группе, в основном в случае поля $\mathbf{k}$ конечной характеристики, был достаточно высок в последние 10–15 лет (подробности см. в [2]; см. также [3], где изучается случай $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ и имеются ссылки на некоторые более поздние работы).

Группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ естественно представляется как топологическая группа. Даже в том случае, когда $\mathbf{k}$ а priori не является топологическим кольцом, мы можем снабдить его дискретной топологией, что задает на $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ нульмерную топологию обратного предела (см. [3]). Последняя является наиболее сильной (после дискретной) из естественных топологий на $\mathcal{J}(\mathbf{k})$.

В классических работах Дж. фон Неймана и Н. Н. Боголюбова 20–30 годов прошлого века под аменабельностью некоторой топологической группы G понималось существование левоинвариантного среднего на пространстве ограниченных непрерывных функций, заданных на G .

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ 1562.2008.1) и РФФИ (грант № 10-01-00257).

Известно, что для любого нетривиального кольца $\mathbf{k}$ группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ содержит свободную подгруппу ранга 2. В случае $\mathbf{k}$ конечной характеристики это следует из [4], в случае нулевой характеристики – из [3]. Таким образом, на пространстве $l_\infty(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$ всех ограниченных функций, определенных на группе $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, левоинвариантное среднее (ЛИС) отсутствует, и мы видим, что $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, рассматриваемая как дискретная группа, не является аменабельной. Отсюда следует, что при изучении возможных инвариантных средних на группе $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ важно учитывать ее естественную топологию и исходя из этого выбирать пространство ограниченных функций, на котором существовало бы такое инвариантное среднее. Если $\mathbf{k}$ компактно (конечно), то группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ тоже компактна, и тогда вопрос об инвариантных средних на пространстве непрерывных функций положительно решается в рамках классической теории меры Хаара. В некомпактном случае (бесконечного дискретного) кольца $\mathbf{k}$ проблема выбора пространства функций важна еще и потому, что группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ не локально компактна и к ней неприменимы стандартные результаты о средних на локально компактных топологических группах. В [5] введено свойство *сильной локальной некомпактности*, и из теоремы 10 этой работы следует, что для бесконечного дискретного кольца $\mathbf{k}$ группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ является сильно локально некомпактной, ее локальная структура достаточно сложна. Более того, для бесконечного дискретного кольца $\mathbf{k}$ группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ не вкладывается ни в какую локально компактную группу [6].

Общая теория инвариантных средних на локально компактных и, в частности, на дискретных группах достаточно хорошо отражена в ставшей уже классической монографии [7]. Удачным дополнением к [7] может служить монография [8]. Для локально компактной группы G существование ЛИС на пространстве $C_{\text{ru}}^*(G)$ всех ограниченных равномерно непрерывных справа функций на G влечет существование среднего на пространстве $C^*(G)$ всех непрерывных ограниченных функций (обратное очевидно для любой группы G) [7, теорема 2.2.1]. Для не локально компактных групп это, вообще говоря, неверно (см. [9]) и выбор подходящего пространства функций становится достаточно деликатной проблемой.

В отличие от локально компактного случая, для общих топологических групп G существование ЛИС именно на пространстве $C_{\text{ru}}^*(G)$ приобретает первостепенную важность благодаря общему результату, который следует считать классическим. Скажем, что топологическая группа G обладает *свойством неподвижной точки*, если для любого выпуклого компакта K в некотором локально выпуклом топологическом векторном пространстве E любое непрерывное аффинное действие G на K обладает неподвижной точкой.

ТЕОРЕМА А. *Для топологической группы G следующие условия эквивалентны:*

- 1) *на пространстве $C_{\text{ru}}^*(G)$ существует ЛИС;*
- 2) *группа G обладает свойством неподвижной точки;*
- 3) *любое непрерывное действие G на любом компакте обладает инвариантной вероятностной мерой;*
- 4) *естественное действие группы G на своем максимальном эквивариантном компактном расширении $\gamma_{\text{u}}G$ обладает инвариантной вероятностной мерой.*

Эквивалентность условий 1) и 2) теоремы А в основном доказана М. М. Де-ем [10], [11]. Формулировка для общих топологических групп и соответствующее доказательство, в котором используются идеи Дея, принадлежат Н. Риккерту [12]. Классический результат Боголюбова [13] утверждает, что наличие ЛИС на пространстве $C^*(G)$ всех непрерывных и ограниченных функций на группе G влечет наличие инвариантной меры для любого непрерывного действия G на компакте. В действительности для существования инвариантных мер некоторого непрерывного действия G на компакте X достаточно потребовать существования ЛИС лишь на пространстве $C_{\text{гу}}^*(G)$. Такие меры в точности являются неподвижными точками ассоциированного действия G на компакте вероятностных мер на X , и их существование обеспечено результатом Дея–Риккерта. С другой стороны, существование инвариантной меры для любого непрерывного действия G на компакте влечет, в частности, существование такой меры для естественного действия G на своей *равномерной компактификации* $\gamma_u G$ (см. [14], а также [15, § 21.5]; далее мы придерживаемся терминологии и обозначений из монографии [15]). Поскольку пространства функций $C_{\text{гу}}^*(G)$ и $C(\gamma_u G)$ естественно изоморфны, интеграл по любой инвариантной мере на $\gamma_u G$ определяет инвариантное среднее на пространстве $C_{\text{гу}}^*(G)$. Укажем, что эквивалентность условий 3) и 4) теоремы А получается и непосредственно из свойства максимальности равномерной компактификации $\gamma_u G$.

В интересующем нас далее случае группы $G = \mathcal{J}(\mathbf{k})$ левая и правая равномерности совпадают, поэтому мы рассматриваем просто ограниченные равномерно непрерывные функции, образующие пространство $C_u^*(G)$. Двусторонние инвариантные средние, в отличие от ЛИС, называются далее *инвариантными средними*. Основной результат настоящей работы составляет

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathbf{k}$ – коммутативное топологическое кольцо с единицей. На пространстве $C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$ равномерно непрерывных ограниченных функций на группе $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ существует инвариантное среднее.*

Непосредственно из теоремы А получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\mathbf{k}$ – коммутативное топологическое кольцо с единицей. Любое непрерывное действие группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на любом компакте обладает инвариантной вероятностной мерой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интересный пример инвариантной меры можно получить для действия группы $\mathcal{J}(\mathbb{R})$. Рассмотрим пространство правых смежных классов $K_\infty = \mathcal{J}(\mathbb{R})/\mathcal{J}(\mathbb{Z})$ и естественное левое действие $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ на K_∞ . Пространство K_∞ компактно в естественной топологии как факторпространство $\mathcal{J}(\mathbb{R})$, а указанное действие будет непрерывным. При этом топологическое строение K_∞ достаточно сложно, в частности оно сильно локально неодносвязно и, тем самым, не имеет универсального накрытия. Пространство K_∞ имеет естественную вероятностную меру, инвариантную относительно левого действия группы $\mathcal{J}(\mathbb{R})$, эта мера имеет простую геометрическую природу. Как само пространство K_∞ , так и указанная мера подробно изучаются в [3].

Пусть θ – некоторая топология на кольце $\mathbf{k}$ и θ_0 – дискретная топология на нем. Топологии, возникающие на $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, обозначим соответственно Θ и Θ_0 .

Имеется очевидное включение пространств функций

$$C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}); \Theta) \subset C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}); \Theta_0).$$

Таким образом, из существования среднего на пространстве $C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}); \Theta_0)$ будет вытекать наличие среднего на пространстве ограниченных равномерно непрерывных функций, ассоциированных с любой другой топологией Θ , заданной на $\mathbf{k}$. Дальнейшие рассуждения будем вести в предположении, что $\mathbf{k}$ дискретно.

Все рассматриваемые ниже топологические пространства предполагаются вполне регулярными (тихоновскими). В рассматриваемых ниже примерах групп условие полной регулярности всегда выполнено. Если X – топологическое пространство, то βX обозначает, как обычно, стоун-чеховскую компактификацию X (см., например, [15] или [16]).

Все группы далее предполагаются топологическими (возможно, не локально компактными), все гомоморфизмы – непрерывными. Если G – топологическая группа, то ее действие на себе левыми сдвигами продолжается до действия

$$m: G \times \beta G \rightarrow \beta G$$

гомеоморфизмами на βG .

Для дискретной группы G отображение m является непрерывным. Из классического результата Р. Эллиса [17] следует, что если группа G дискретна, то ее действие на βG свободно. Этот результат обобщен В. Р. Вичем [18] в случае локально компактных групп. Таким образом, дискретная группа G действует непрерывно и свободно на своей стоун-чеховской компактификации βG .

Заметим, что действие локально компактной группы на своей стоун-чеховской компактификации уже не всегда непрерывно. М. Г. Мегрелишвили в 1988 г. построил пример тихоновского пространства X с непрерывным действием на нем некоторой топологической группы G , которое не имеет эквивариантного компактного расширения [19]. Однако всякая топологическая группа G имеет компактное расширение, на которое действие G продолжается до непрерывного действия. Среди таких эквивариантных расширений группы G имеется максимальное – ее равномерная компактификация $\gamma_u G$, это эквивариантный аналог стоун-чеховской компактификации βG [14], [15]. Заметим, что компактификация $\gamma_u G$ является компактификацией Самюэля [20], отвечающей правой равномерности на группе G . Краткое изложение конструкции $\gamma_u G$ приведено в § 2, где эта компактификация действительно используется.

Если X – топологическое пространство, то непрерывные ограниченные функции из $C^*(X)$ однозначно продолжаются до непрерывных функций на βX , что дает изоморфизм $C^*(X) \simeq C(\beta X)$ банаховых пространств. Посредством этого изоморфизма и согласно теореме Рисса средние на $C^*(X)$ соответствуют вероятностным мерам на βX . Если G – топологическая группа, то ЛИС на пространстве $C^*(G)$ соответствуют инвариантным вероятностным мерам на βG . Аналогично, для топологической группы G левоинвариантные средние на пространстве $C_{\text{ru}}^*(G)$ соответствуют инвариантным вероятностным мерам на $\gamma_u G$. Отметим, что Е. Гласнер и М. Г. Мегрелишвили изучали [21]

и другие специальные эквивариантные компактные расширения группы, т. е. некоторые специальные эквивариантные подалгебры алгебры $C_{\text{ru}}^*(G)$.

Для основного рассматриваемого примера, группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, где кольцо $\mathbf{k}$ бесконечно, мы не можем утверждать, что инвариантные вероятностные меры на $\beta\mathcal{J}(\mathbf{k})$ существуют. Действие $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на $\beta\mathcal{J}(\mathbf{k})$ достаточно сложно, и его изучение представляет интерес независимо от проблем аменабельности. В § 2 мы устанавливаем, что это действие свободно, но разрывно. Вопрос о существовании инвариантных мер этого действия, т. е. вопрос о существовании ЛИС на пространстве $C^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$ остается полностью открытым.

Как отмечалось выше, инвариантные средние на пространстве $C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$ связаны с инвариантными мерами на равномерной компактификации $\gamma_u\mathcal{J}(\mathbf{k})$ группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$. В § 2 (теорема 2) мы дадим спектральное описание компакта инвариантных средних на пространстве ограниченных равномерно непрерывных функций топологической группы G , разлагающейся в обратную последовательность дискретных групп. Этот компакт совпадает с подпространством G -инвариантных вероятностных мер на компактификации $\gamma_u G$ исходной группы G .

В § 1 мы устанавливаем ряд технических утверждений о пространствах равномерно непрерывных функций на нульмерных группах, разлагающихся в обратную последовательность дискретных групп. Группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ естественным образом разлагается в обратную последовательность нильпотентных групп очень специальной структуры. Это обстоятельство позволяет “конструктивно” получать инвариантные средние на $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, исходя из некоторого фиксированного среднего на аддитивной группе базисного кольца $\mathbf{k}$ (см. ниже замечание 5). Такое построение инвариантных средних рассмотрено в § 3.

Пользуясь случаем, мы хотим поблагодарить П. де ла Харпа за полезные обсуждения, инициировавшие написание этой статьи. Авторы выражают благодарность К. Л. Козлову за полезные обсуждения условий непрерывности действия группы на ее стоун-чеховском расширении. Мы также благодарны рецензенту, многочисленным замечания и комментарии которого способствовали улучшению статьи.

§ 1. Пространства равномерно непрерывных функций

Скажем, что функция f на группе G *равномерно непрерывна справа*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U единицы $e \in G$, что для любых элементов $x, y \in G$, удовлетворяющих включению $xy^{-1} \in U$, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Равномерно непрерывные слева функции определяются аналогично с заменой включения $xy^{-1} \in U$ на $x^{-1}y \in U$. Функцию, равномерно непрерывную одновременно справа и слева, будем называть просто *равномерно непрерывной*. Равномерно непрерывные (справа, слева) ограниченные функции на G образуют банахово пространство с нормой равномерной сходимости, которое будем обозначать $C_u^*(G)$ (соответственно $C_{\text{ru}}^*(G)$ или $C_{\text{lu}}^*(G)$ в случае правой или левой равномерности).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если топология G дискретна, то все пространства совпадают:

$$C_{\text{ru}}^*(G) = C_{\text{lu}}^*(G) = C_{\text{u}}^*(G) = C^*(G) = l_{\infty}(G).$$

Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 1. Пусть $h: G \rightarrow K$ – гомоморфизм топологических групп. Тогда индуцированное на пространстве непрерывных функций отображение $h_*: C(K) \rightarrow C(G)$ согласовано с любым видом равномерной непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\varepsilon > 0$; скажем, что функция $f \in C(G)$ является ε -равномерно непрерывной справа (слева), если существует окрестность единицы $U = U(\varepsilon)$ такая, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $xy^{-1} \in U$ ($x^{-1}y \in U$).

Рассмотрим точную последовательность топологических групп

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 1. \quad (2)$$

ЛЕММА 2. Пусть в точной последовательности (2) отображение π открыто и обладает непрерывным сечением. Предположим, что $f \in C(G)$ – ε -равномерно непрерывная (справа, слева) функция, причем соответствующая окрестность единицы $U(\varepsilon)$ содержит окрестность V , удовлетворяющую включению $VH \subset U(\varepsilon)$. Тогда существует ε -равномерно непрерывная (справа, слева) функция $\tilde{f} \in C(K)$ такая, что

$$|f - \tilde{f} \circ \pi| < \varepsilon.$$

Под непрерывным сечением здесь понимается сечение в топологическом смысле, наличие каких-либо алгебраических свойств не предполагается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Разберем случай равномерной непрерывности справа. Пусть $\mu: K \rightarrow G$ – сечение отображения π . Положим $\tilde{f} = f \circ \mu$ и проверим, что эта функция удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим открытую окрестность единицы $K \supset W = \pi(V)$, и пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in K$ таковы, что $\tilde{x}\tilde{y}^{-1} \in W$. Положим $x = \mu(\tilde{x})$ и $y = \mu(\tilde{y})$. Поскольку $\pi(xy^{-1}) = \tilde{x}\tilde{y}^{-1} \in W$, включение $VH \subset U(\varepsilon)$ влечет $xy^{-1} \in U(\varepsilon)$, откуда

$$|\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{y})| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

т. е. $\tilde{f}$ – ε -равномерно непрерывная (справа) функция.

Далее, для произвольного элемента $x \in G$ имеем

$$|f(x) - \tilde{f} \circ \pi(x)| = |f(x) - f \circ \mu \circ \pi(x)| = |f(x) - f(ux)|,$$

где $u \in H \subset U(\varepsilon)$. Таким образом, $|f(x) - f(ux)| < \varepsilon$, что завершает доказательство леммы.

Если группа K дискретна, то построенная в доказательстве леммы 2 функция $\tilde{f}$ всегда будет равномерно непрерывной (см. замечание 2). Если K компактна, то $\tilde{f}$ также равномерно непрерывна. Кроме того, в случае дискретной K сечение μ всегда существует, а проекция π открыта.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в точной последовательности (2) группа K дискретна, то для любой ε -равномерно непрерывной (справа, слева) функции $f \in C(G)$ такой, что соответствующая окрестность единицы $U(\varepsilon)$ H -инвариантна, существует равномерно непрерывная функция $\tilde{f} \in C(K)$ такая, что

$$|f - \tilde{f} \circ \pi| < \varepsilon.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если K компактна, то утверждение следствия 2 справедливо в предположении существования непрерывного сечения μ .

Далее нас будет интересовать лишь следствие 2.

Рассмотрим обратную последовательность топологических групп

$$G_1 \xleftarrow{\pi_1^2} G_2 \xleftarrow{\pi_2^3} \dots \xleftarrow{\pi_{n-1}^n} G_n \xleftarrow{\pi_n^{n+1}} \dots \longleftarrow G, \quad (3)$$

где $G = \varprojlim_n G_n$ – предельная группа. Пусть $\pi_n: G \rightarrow G_n$, $n = 1, 2, \dots$, – проекции на конечные факторы. С последовательностью (3) связана прямая последовательность пространств непрерывных ограниченных функций

$$C^*(G_1) \rightarrow C^*(G_2) \rightarrow \dots \rightarrow C^*(G_n) \rightarrow \dots \rightarrow C^*(G). \quad (4)$$

Пусть

$$C_\infty^* = \overline{\lim_n C^*(G_n)} \subset C^*(G) \quad (5)$$

– замыкание прямого предела (4). Заметим, что если все группы $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ дискретны, то $C^*(G_n) = C_{\text{ru}}^*(G_n)$ и очевидное включение $\pi_n^*(C_{\text{ru}}^*(G_n)) \subset C_{\text{ru}}^*(G)$ для всех n влечет включение

$$C_\infty^* \subset C_{\text{ru}}^*(G). \quad (6)$$

Следующее утверждение дает достаточное условие, при котором имеется обратное к (6) включение.

ЛЕММА 3. Пусть в обратной последовательности (3) отображения π_n эпиморфны, открыты и обладают непрерывными сечениями. Если $f \in C(G)$ – ε -равномерно непрерывная (справа, слева) функция, то существуют номер n и непрерывная функция $\tilde{f} \in C(G_n)$ такие, что

$$|f - \tilde{f} \circ \pi_n| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предположению для заданного $\varepsilon > 0$ существует окрестность единицы $U = U(\varepsilon) \in G$ такая, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, если $xy^{-1} \in U$. Существует другая окрестность единицы $V \subset U$ такая, что $VV \subset U$. Поскольку топология G совпадает с топологией обратного предела, найдется номер n такой, что $\text{Ker } \pi_n \subset V$ и, следовательно, $V \text{Ker } \pi_n \subset U$. Далее утверждение леммы непосредственно вытекает из леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия леммы 3 выполнены, если все группы $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ дискретны.

СЛЕДСТВИЕ 4. В условиях леммы 3 имеет место включение $C_\infty^* \supset C_{\text{ru}}^*(G)$.

Если функция f равномерно непрерывна справа на G , то ε может быть выбрано произвольно и следствие 4 непосредственно вытекает из леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если в последовательности (3) все группы $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ дискретны, то справедливы равенства

$$C_u^*(G) = C_{ru}^*(G) = \overline{\lim_n l_\infty(G_n)}. \quad (7)$$

Правое равенство в (7) вытекает теперь из следствия 4 и включения (6) для дискретных групп. Правый член в (7) не зависит от выбора равномерности на группе G , что влечет совпадение пространств функций: $C_u^*(G) = C_{ru}^*(G) = C_{lu}^*(G)$. Заметим, что совпадение этих пространств функций является проявлением того, что для групп G , разлагающихся в обратную последовательность дискретных групп (6), левая и правая равномерности совпадают.

Рассмотрим теперь интересующую нас группу $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ – дискретное коммутативное кольцо с единицей. Подгруппы

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{k}) = \{f(x) \in \mathcal{J}(\mathbf{k}) \mid \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

нормальны и образуют базу окрестностей единицы (см. [1]). Естественно считать, что $\mathcal{J}_0(\mathbf{k}) = \mathcal{J}(\mathbf{k})$. Нам будет также полезна последовательность факторгрупп

$$\mathcal{J}^n(\mathbf{k}) = \mathcal{J}(\mathbf{k}) / \mathcal{J}_n(\mathbf{k}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Группу $\mathcal{J}^n(\mathbf{k})$ естественно понимать как группу полиномов вида $x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n)$ с коэффициентами в $\mathbf{k}$. Операцией в $\mathcal{J}^n(\mathbf{k})$ является подстановка полиномов $\bmod x^{n+2}$. Эти группы нильпотентны (см. [1]) и дискретны в силу выбора топологии базисного кольца $\mathbf{k}$. Очевидно, что для $G = \mathcal{J}(\mathbf{k})$ имеет место разложение вида (3) при $G_n = \mathcal{J}^n(\mathbf{k})$. Применяя следствие 5, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6. Для любого дискретного кольца $\mathbf{k}$ с единицей имеет место равенство

$$C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k})) = \overline{\lim_n l_\infty(\mathcal{J}^n(\mathbf{k}))}. \quad (8)$$

§ 2. Асимптотическая компактификация и инвариантные средние на равномерно непрерывных функциях

Рассмотрим топологическую группу G . Скажем, что G действует на топологическом пространстве X , если задано (анти)представление в группу гомеоморфизмов

$$h: G \rightarrow \text{Homeo}(X).$$

Если $g \in G$ и $x \in X$, то $h(g)(x)$ будем далее обозначать через $g(x)$ или gx . Таким образом, получаем отображение

$$m: G \times X \rightarrow X, \quad (9)$$

заданное формулой $m(g, x) = gx$. Будем говорить, что действие G на X непрерывно, если отображение (9) непрерывно. Такое определение непрерывности

действия эквивалентно непрерывности представления h , если $\text{Homeo}(X)$ снабжено соответствующей топологией.

Следующее хорошо известное утверждение будет полезно как при исследовании инвариантных средних на группе G , так и при исследовании ее действия на стоун-чеховской компактификации βG . Для полноты изложения мы приведем краткое доказательство.

ЛЕММА 4. Пусть X – эквивариантная компактификация группы G , т. е. левое действие группы G на себе продолжается до непрерывного действия G на X . Тогда ограничение на G любой непрерывной на X функции будет равномерно непрерывно (справа), т. е. имеет место вложение

$$C(X) \subset C_{\text{ru}}^*(G). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую функцию $f \in C(X)$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого $x \in X$ найдется окрестность $U_x \subset X$ такая, что $\|f(a) - f(b)\| < \varepsilon$ для любых $a, b \in U_x$. В силу непрерывности действия найдутся такие окрестности $x \in V_x \subset X$ и $e \in W_x \subset G$, что $V_x W_x \subset U_x$. Таким образом, для любых $a \in V_x$ и $g \in W_x$ имеем

$$\|f(a) - f(ga)\| < \varepsilon. \quad (11)$$

В силу компактности X из покрытия $\{V_x\}_{x \in X}$ можно извлечь конечное подпокрытие, скажем $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Положим $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$. Тогда (11) будет, очевидно, выполнено для всех $a \in X$ и $g \in W$. В силу произвольности ε это влечет равномерную непрерывность.

Пусть $\gamma_u G$ – равномерная компактификация группы G . Для удобства напомним одно из возможных определений этой компактификации (подробности и другие определения см., например, в [15, гл. 21]).

Рассмотрим банахово пространство ограниченных равномерно непрерывных справа функций $C_{\text{ru}}^*(G)$. Пусть $B \subset (C_{\text{ru}}^*(G))^*$ – единичный шар двойственного пространства, снабженный $*$ -слабой топологией. Замыкание естественного вложения $G \subset B$ обозначим $\gamma_u G$. Очевидно, что $\gamma_u G$ является компактификацией группы G . Изложенное построение аналогично одной из известных конструкций стоун-чеховской компактификации (см. [16]).

Группа G естественно действует на пространстве ограниченных равномерно непрерывных функций: $f_g(x) = f(gx)$, где $x, g \in G$ и $f \in C_{\text{ru}}^*(G)$. Если теперь $l \in (C_{\text{ru}}^*(G))^*$, то, полагая $l_g(f) = l(f_g)$, мы получаем сопряженное действие G в пространстве линейных функционалов. Очевидно, что B инвариантно относительно этого действия и в силу равномерной непрерывности f действие G на B будет непрерывным в $*$ -слабой топологии. Поскольку это действие согласовано с вложением $G \subset B$, то G непрерывно действует на компактификации $\gamma_u G$.

Необходимые нам свойства равномерной компактификации выражает следующее известное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Равномерная компактификация $\gamma_u G$ топологической группы G обладает следующими характеристическими свойствами:

а) естественное вложение $G \subset \gamma_u G$ индуцирует изоморфизм пространств функций $C_{\text{ru}}^*(G) \simeq C(\gamma_u G)$;

б) компактификация $\gamma_u G$ является максимальной среди всех компактификаций группы G таких, что (левое) действие G на себе продолжается непрерывно.

Заметим, что для дискретных групп имеет место равенство $\gamma_u G = \beta G$. Рассмотрим теперь случай, являющийся основным для настоящей работы: предположим, что группа G разлагается в обратную последовательность групп (3). Эта последовательность порождает обратную последовательность компактных топологических пространств и их отображений

$$\{\gamma_u G_n, \gamma_u \pi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}. \quad (12)$$

Положим

$$\gamma_{\infty} G = \varprojlim_n \gamma_u G_n.$$

Построенное пространство $\gamma_{\infty} G$ является компактом как обратный предел компактов. Отображения $\pi_n: G \rightarrow G_n \hookrightarrow \gamma_u G_n$ порождают отображение

$$i: G \rightarrow \gamma_{\infty} G. \quad (13)$$

Покажем, что $\gamma_{\infty} G$ является компактификацией исходной группы G .

ЛЕММА 5. *Отображение (13) является гомеоморфизмом на плотное подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, g_2 \in G$ – два различных элемента. Существует такой индекс n , что $\pi_n(g_1) \neq \pi_n(g_2)$. Поэтому $i(g_1) \neq i(g_2)$, т. е. отображение i является взаимно однозначным. Непрерывность отображения i вытекает из непрерывности отображений π_n . Покажем открытость отображения i на свой образ. Пусть U – базисное открытое подмножество G , т. е. $U = \pi_n^{-1}(U_n)$ для некоторого открытого подмножества $U_n \subset G_n$. Поскольку $i_n: G_n \hookrightarrow \gamma_u G_n$ является топологическим вложением, существует такое открытое в $\gamma_u G_n$ подмножество V_n , что $U_n = i_n^{-1}(V_n)$. Поэтому множество $U = \pi_n^{-1}(i_n^{-1}(V_n)) = i^{-1}((\gamma_u \pi_n)^{-1}(V_n))$, где $\gamma_u \pi_n: \gamma_{\infty} G \rightarrow \gamma_u G_n$ – предельная проекция на n -й член соответствующей обратной последовательности, является прообразом открытого в $\gamma_{\infty} G$ множества.

Пусть теперь $x \in \gamma_{\infty} G$ – произвольная точка и $V = (\gamma_u \pi_n)^{-1}(V_n)$, где $V_n \subset \gamma_u G_n$, – некоторая ее базисная окрестность. Поскольку G_n плотно в $\gamma_u G_n$, существует такой элемент $g \in G$, что $\pi_n(g) \in i_n^{-1}(V_n)$. Тогда $i(g) \in (\gamma_u \pi_n)^{-1}(V_n) = V$. Это завершает доказательство леммы.

Компакт $\gamma_{\infty} G$ будем называть *асимптотической компактификацией* группы G . Действие группы G_n на себе левыми сдвигами продолжается до действия

$$m_n: G_n \times \gamma_u G_n \rightarrow \gamma_u G_n \quad (14)$$

гомеоморфизмами на компактификации $\gamma_u G_n$. Это действие непрерывно, т. е. непрерывно отображение m_n .

ЛЕММА 6. Действие группы G на себе левыми сдвигами продолжается до непрерывного действия на асимптотической компактификации $\gamma_\infty G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойствам равномерной компактификации имеется непрерывное действие (14). Гомоморфизм $\pi_n: G \rightarrow G_n$ задает непрерывное действие G на $\gamma_u G_n$. Согласованность построенных действий задает действие группы G на бикompакте $\gamma_\infty G$.

Из непрерывности всех отображений (14) вытекает непрерывность действия группы G на пространствах обратной последовательности $\{\gamma_u G_n, \gamma_u \pi_n^{n+1}\}_{n=1}^\infty$. Это, в свою очередь, влечет непрерывность действия G на предельном пространстве $\gamma_\infty G$. Лемма доказана.

Построенное действие группы G на своей асимптотической компактификации будем называть *естественным*.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если все члены обратной последовательности (3) являются дискретными группами, то предельная группа G действует на $\gamma_\infty G$ непрерывно и свободно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку действие дискретной группы на своей стоун-чеховской компактификации непрерывно, согласно лемме 6 описанное выше действие определено и непрерывно. В доказательстве нуждается лишь то, что действие свободно. Пусть $g \in G$ – произвольный неединичный элемент, а $x \in \gamma_\infty G$ – произвольная точка. Предположим, что $g(x) = x$. Существует такой номер n , что элемент $\pi_n(g) \in G_n$ является неединичным. Тогда согласно уже упоминавшийся теореме Эллиса [17] имеем $\gamma_u \pi_n(g(x)) = \pi_n(g)(\gamma_u \pi_n(x)) \neq \gamma_u \pi_n(x)$, что противоречит равенству $g(x) = x$.

Отсюда непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 8. Естественное действие группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на своей асимптотической компактификации $\gamma_\infty \mathcal{J}(\mathbf{k})$ является свободным и непрерывным.

Универсальность расширения Стоуна–Чеха, в свою очередь, влечет

СЛЕДСТВИЕ 9. Действие группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на расширении Стоуна–Чеха $\beta \mathcal{J}(\mathbf{k})$ является свободным.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Согласно уже цитированному результату Вича [18] локально компактные группы действуют свободно на своей компактификации Стоуна–Чеха. Этим свойством группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ похожа на локально компактные группы.

ЛЕММА 7. Пусть группа G является обратным пределом последовательности дискретных групп (3). Тогда имеет место равенство

$$C(\gamma_\infty G) = C_u^*(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4, примененной к $X = \gamma_\infty G$, достаточно установить включение

$$C(\gamma_\infty G) \supset C_u^*(G). \quad (15)$$

Поскольку функции из $l_\infty(G_n)$ продолжаются до непрерывных функций на $\beta G_n = \gamma_u G_n$ и, следовательно, на $\gamma_\infty G$, то непрерывное продолжение любой функции из $C_u^*(G)$ на $\gamma_\infty G$ вытекает из следствия 5, что и влечет требуемое вложение (15).

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть группа G является обратным пределом последовательности дискретных групп (3). Тогда имеет место равенство

$$\gamma_\infty G = \gamma_u G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\gamma_u G$ и леммы 7 получаем равенство пространств функций

$$C(\gamma_\infty G) = C_u^*(G) = C(\gamma_u G),$$

которое, очевидно, является и изоморфизмом алгебр функций. Это в силу теоремы Гельфанда–Колмогорова (см., например, [22]) влечет гомеоморфность $\gamma_\infty G$ и $\gamma_u G$.

Из следствия 10 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть группа G является обратным пределом последовательности дискретных групп (3). Тогда ее асимптотическая компактификация $\gamma_\infty G$ не зависит от выбора самой последовательности (3), представляющей группу G .

Поскольку в теории Гельфанда–Колмогорова максимальное компактное расширение βG соответствует кольцу $C^*(G)$, а равномерное расширение $\gamma_u G$, являющееся максимальным эквивариантным компактным расширением, соответствует кольцу $C_{ru}^*(G)$, действие топологической группы G на βG разрывно тогда и только тогда, когда на G имеется ограниченная непрерывная не равномерно непрерывная функция. Известно, что для метризуемой группы G пространства $C^*(G)$ и $C_{ru}^*(G)$ совпадают тогда и только тогда, когда группа дискретна или компактна (см. [23, теорема 3.1]).

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть кольцо $\mathbf{k}$ бесконечно и дискретно. Тогда действие группы $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на своей компактификации Стоуна–Чеха $\beta \mathcal{J}(\mathbf{k})$ разрывно.

Наконец, опишем пространство инвариантных средних на равномерно непрерывных функциях, определенных на нульмерной группе G , разлагающейся в обратную последовательность (3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа G является пределом обратной последовательности (3), где все группы G_n дискретны и абелевы, а все отображения π_n^{n+1} эпиморфны. Тогда естественное действие G на своей асимптотической компактификации $\gamma_\infty G$ обладает инвариантной мерой. Множество инвариантных мер этого действия находится во взаимно однозначном соответствии с множеством инвариантных средних на пространстве равномерно непрерывных функций $C_u^*(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – некоторый компакт. Обозначим через $P(X)$ компактное пространство всех вероятностных мер на X . Напомним, что

$\beta G_n = \gamma_u G_n$ для всех n в силу дискретности групп G_n . С последовательностью (3) связана последовательность компактификаций Стоуна–Чеха (12), которая, в свою очередь, порождает обратную последовательность компактов вероятностных мер и их отображений

$$\{P(\gamma_u G_n), P(\gamma_u \pi_n^{n+1})\}_{n=1}^{\infty}. \quad (16)$$

Справедливо равенство (см., например, [24, предложение 7.3.11])

$$P(\gamma_{\infty} G) = \varprojlim_n P(\gamma_u G_n).$$

Проекцию пространства $P(\gamma_{\infty} G)$ на n -й член обратной последовательности (16) обозначим $P(\gamma_u \pi_n)$. Пусть $A_n \subset P(\gamma_u G_n)$ – подмножество всех G_n -инвариантных вероятностных мер на $\beta G_n = \gamma_u G_n$. В силу аменабельности G_n оно не пусто при всех n . Очевидно, что A_n является также множеством всех G -инвариантных вероятностных мер на βG_n . Поскольку при эквивариантном отображении образом инвариантной меры является инвариантная мера, то $P(\gamma_u \pi_n^{n+1})(A_{n+1}) \subset A_n$. Отображения $P(\gamma_u \pi_n)$ сюръективны при всех n [24, предложение 7.3.21], поэтому множества $(P(\gamma_u \pi_n))^{-1}(A_n)$ образуют убывающую систему непустых замкнутых подмножеств компакта $P(\gamma_{\infty} G)$. Таким образом, их пересечение непусто и состоит в точности из G -инвариантных вероятностных мер на $\gamma_{\infty} G$.

Для доказательства соответствия инвариантных средних на $C_u^*(G)$ и G -инвариантных вероятностных мер на $\gamma_{\infty} G$ достаточно теперь воспользоваться леммой 7.

СЛЕДСТВИЕ 13. *Естественное действие $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ на своей асимптотической компактификации $\gamma_{\infty} \mathcal{J}(\mathbf{k})$ обладает инвариантной вероятностной мерой. Множество инвариантных вероятностных мер этого действия находится во взаимно однозначном соответствии с множеством инвариантных средних на пространстве равномерно непрерывных функций $C_u^*(\mathcal{J}(\mathbf{k}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже указывалось в § 1, группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ является пределом обратной последовательности (3), где $G_n = \mathcal{J}^n(\mathbf{k})$. Все эти группы нильпотентны и, следовательно, аменабельны, поскольку класс аменабельных групп содержит абелевы группы и замкнут относительно групповых расширений (см., например, [7]). Поэтому применима теорема 2.

Теорема 1 теперь непосредственно вытекает из следствия 13.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. С. З. Солецкий [25] ввел понятие аменабельности группы в единице. Согласно его результату [25, предложение 3.3] группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ аменабельна в единице.

§ 3. Последовательность согласованных инвариантных средних

В § 2 мы рассмотрели общую проблему существования инвариантных средних на нульмерных топологических группах достаточно общего вида. В то же

время основным конкретным объектом нашего внимания остается группа формальных степенных рядов $\mathcal{J}(\mathbf{k})$, которая разлагается в обратный предел (3) весьма специальной структуры. Это позволяет получать инвариантные средние на равномерно непрерывных функциях вполне конструктивно, исходя из некоторого фиксированного инвариантного среднего на аддитивной абелевой группе базисного кольца $\mathbf{k}$. Изложим теперь эту конструкцию.

Пусть $\pi: G_1 \rightarrow G_2$ – гомоморфизм топологических групп. Будем говорить, что два инвариантных средних $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, определенных соответственно на $C^*(G_1)$ и $C^*(G_2)$, *согласованы (вдоль π)*, если

$$\mathbf{m}_1(f \circ \pi) = \mathbf{m}_2(f), \quad f \in C_\infty(G_2).$$

Рассмотрим обратную последовательность групп (3) и предположим, что для каждого n на $C^*(G_n)$ определено инвариантное среднее $\mathbf{m}_n$. Будем говорить, что последовательность средних $\{\mathbf{m}_n\}_{n=1}^\infty$ *согласована (вдоль обратной последовательности)*, если для любого n средние $\mathbf{m}_n$ и $\mathbf{m}_{n+1}$ согласованы вдоль соответствующего гомоморфизма. Справедлива следующая простая

ЛЕММА 8. *Пусть для обратной последовательности групп (3) существует последовательность инвариантных средних $\{\mathbf{m}_n\}_{n=1}^\infty$, согласованная вдоль (3). Тогда существует инвариантное среднее $\mathbf{m}$ на пространстве $C_\infty^\circ(G)$ (определенном формулой (5)) предельной группы и $\mathbf{m}$ согласовано с любым средним $\mathbf{m}_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим сначала среднее на прямом пределе $C_\infty^\circ(G) = \varinjlim_n C^*(G_n)$. Если $f \in C_\infty^\circ(G)$, то найдутся номер n и функция $f' \in C^*(G_n)$ такие, что $f = f' \circ \pi_n$. Положим

$$\mathbf{m}(f) = \mathbf{m}_n(f').$$

Поскольку $\|\mathbf{m}_n\| = 1$ для любого n , то $\|\mathbf{m}\| = 1$ на $C_\infty^\circ(G)$, и этот функционал продолжается по непрерывности на замыкание $C_\infty^*(G)$ с сохранением нормы. Инвариантность всех $\mathbf{m}_n$ влечет инвариантность $\mathbf{m}$ на $C_\infty^\circ(G)$ и, по непрерывности, на $C_\infty^*(G)$. Условие $\mathbf{m}(1) = 1$ очевидно по построению, остается установить положительность этого функционала. Пусть $f \in C_\infty^*(G)$, $f \geq 0$ и $\varepsilon > 0$. Существуют номер n и функция $f' \in C_\infty(G_n)$ такие, что $\|f - f' \circ \pi_n\| < \varepsilon$, т. е. $f' > -\varepsilon$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{m}(f) - \mathbf{m}(f' \circ \pi_n) > -\varepsilon$ и $\mathbf{m}(f' \circ \pi_n) = \mathbf{m}_n(f') > -\varepsilon$, откуда $\mathbf{m}(f) > -2\varepsilon$, что в силу произвольности ε влечет $\mathbf{m}(f) \geq 0$.

ЛЕММА 9. *Предположим, что в обратной последовательности (3) все группы G_n дискретны, а все отображения π_n^{n+1} эпиморфны. Предположим также, что инвариантное среднее существует на $C^*(G_1)$ и всех пространствах $C^*(\text{Ker } \pi_n^{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда на пространствах $C^*(G_n)$ существует последовательность инвариантных средних, согласованная вдоль (3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается прямым индуктивным построением последовательности инвариантных средних на группах G_n . Построение осуществляется с использованием леммы о расширении [7, теорема 2.3.3]. Построенная таким образом последовательность средних оказывается согласованной вдоль (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Поскольку группа $\mathcal{J}(\mathbf{k})$ является пределом обратной последовательности групп полиномов $G_n = \mathcal{J}^n(\mathbf{k})$, легко видеть, что

$$G_1 \simeq \text{Ker } \pi_n^{n+1} \simeq \mathbf{k}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т.е. все эти группы изоморфны аддитивной (абелевой) группе базисного кольца $\mathbf{k}$. Таким образом, для построения последовательности согласованных средних в лемме 9, примененной к обратной последовательности $\{G_n = \mathcal{J}^n(\mathbf{k})\}_{n=1}^\infty$, мы можем систематически использовать одно и то же среднее на абелевой группе $\mathbf{k}$.

Список литературы

1. S. A. Jennings, "Substitution groups of formal power series", *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 325–340.
2. R. Camina, "The Nottingham group", *New horizons in pro-p groups*, Progr. Math., **184**, Birkhäuser, Boston, MA, 2000, 205–221.
3. И. К. Бабенко, С. А. Богатый, "О группе подстановок формальных целочисленных рядов", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72:2** (2008), 39–64; англ. пер.: I. K. Babenko, S. A. Bogaty, "On the group of substitutions of formal power series with integer coefficients", *Izv. Math.*, **72:2** (2008), 241–264.
4. B. Szegedy, "Almost all finitely generated subgroups of the Nottingham group are free", *Bull. London Math. Soc.*, **37:1** (2005), 75–79.
5. M. Malicki, "Non-locally compact Polish groups and two-sided translates of open sets", *Fund. Math.*, **200:3** (2008), 279–295.
6. I. Babenko, S. Bogaty, *On topological properties of the formal power series substitution group*, arXiv: abs/0912.1813.
7. Ф. Гринлиф, *Инвариантные средние на топологических группах и их приложения*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand, London, 1969.
8. A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monogr., **29**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1988.
9. P. de la Harpe, "Moyennabilité de quelques groupes topologiques de dimension infinie", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **277** (1973), 1037–1040.
10. M. M. Day, "Fixed-point theorems for compact convex sets", *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 585–590.
11. M. M. Day, "Correction to my paper "Fixed-point theorems for compact convex sets"", *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 713.
12. N. W. Rickert, "Amenable groups and groups with the fixed point property", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 221–232.
13. Н. Н. Боголюбов, "О некоторых эргодических свойствах непрерывных групп преобразований. 1939 г.", *Избранные труды*, т. 1, Киев, 1969, 561–569; англ. пер.: N. N. Bogolubov, *Selected works*, v. I, Classics Soviet Math., **2**, Gordon and Breach, New York, 1990.
14. М. Г. Мегрелишвили, "Об эквивариантной нормальности", *Сообщ. АН ГрузССР*, **111:1** (1983), 17–19.
15. N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone–Čech compactification: theory and applications*, de Gruyter Exp. Math., **27**, de Gruyter, Berlin, 1998.
16. J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Grad. Texts in Math., **96**, Springer-Verlag, New York, 1985.

17. R. Ellis, “Universal minimal sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 540–543.
18. W. R. Veech, “Topological dynamics”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 775–830.
19. М. Г. Мегрелишвили, “Тихоновское G -пространство, не обладающее бикompактным G -расширением и G -линеаризацией”, *УМН*, **43:2** (1988), 145–146; англ. пер.: M. G. Megrelishvili, “A Tikhonov G -space not admitting a compact Hausdorff G -extension or G -linearization”, *Russian Math. Surveys*, **43:2** (1988), 177–178.
20. P. Samuel, “Ultrafilters and compactification of uniform spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64:1** (1948), 100–132.
21. E. Glasner, M. Megrelishvili, “New algebras of functions on topological groups arising from G -spaces”, *Fund. Math.*, **201:1** (2008), 1–51.
22. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1966.
23. W. W. Comfort, K. A. Ross, “Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups”, *Pacific J. Math.*, **16:3** (1966), 483–496.
24. В. В. Федорчук, В. В. Филипов, *Общая топология: основные конструкции*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
25. S. Z. Solecki, “Amenability, free subgroups, and Haar null sets in non-locally compact groups”, *Proc. London Math. Soc.*, **93:3** (2006), 693–722.

И. К. БАБЕНКО (I. K. BAVENKO)

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier,
France

E-mail: babenko@math.univ-montp2.fr

Поступило в редакцию

20.02.2009

04.03.2010

С. А. БОГАТЫЙ (S. A. BOGATYI)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: bogatyi@inbox.ru