Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Г. Маркушевич, А. С. Тихомиров, Симплектическая структура на пространстве модулей пучков на четырехмерной кубике, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 131–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:28:28

УДК 517.2

Д. Г. Маркушевич, А. С. Тихомиров

Симплектическая структура на пространстве модулей пучков на четырехмерной кубике

Построено 10-мерное симплектическое пространство модулей пучков кручения на четырехмерной кубике в 5-мерном проективном пространстве. Оно параметризует стабильные векторные расслоения ранга 2 на гиперплоских сечениях четырехмерной кубики в 5-мерном проективном пространстве, получаемые конструкцией Серра из нормальных эллиптических квинтик. Естественная проекция построенного пространства модулей в двойственное 5-мерное проективное пространство является лагранжевым расслоением. Симплектическая структура оказывается тесно связанной (возможно, совпадающей) со спариванием Ионеды на пространстве модулей.

Библиография: 17 наименований.

Введение

В работе [12] Мукаи построил пример симплектического пространства модулей пучков кручения на КЗ-поверхности S , носители которых описывают полную линейную систему на S . Это пространство модулей идентично компактифицированному относительному якобиану линейной системы, и его слои, т. е. якобианы индивидуальных кривых, являются лагранжевыми подмногообразиями симплектической структуры.

Авторы настоящей статьи занимались поиском аналогичной ситуации с относительным промежуточным якобианом семейства многообразий высшей размерности вместо обычного якобиана семейства кривых. Поэтому соответствующие пучки кручения должны были бы иметь носители размерности по меньшей мере 3, а их ограничения на носители имели бы ранг больше 1. Нами найдена 10-мерная компонента пространства модулей стабильных пучков с ожидаемыми свойствами, носители которых являются гиперплоскими сечениями 4-мерной гиперкубики в $\mathbb{P}^5$. Это новый пример пространства модулей пучков, обладающего симплектической структурой; известные ранее примеры таких пространств параметризуют пучки на многообразиях с голоморфными 2-формами (см. [12] для случая КЗ- либо абелевых поверхностей, [9] для гиперкэлеровых многообразий, [15] для поверхностей с $p_g > 0$), и симплектические структуры на них по существу происходят из 2-формы на базе. В нашем примере база отстоит очень далеко от многообразий, обладающих голоморфной 2-формой: она является многообразием Фано.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS-OPEN-2000-269.

Слой пространства модулей, параметризующий пучки с фиксированным носителем (3-мерной кубикой), был построен в предыдущей статье авторов [11]. В ней исследовалось отображение Абеля–Якоби семейства эллиптических кривых степени 5 (квинтик) на общей 3-мерной кубике. Нами доказано, что это отображение пропускается через отображение в 5-мерную компоненту пространства модулей M_X стабильных векторных расслоений $\mathcal{E}$ на X с числами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, общая точка которой представляет векторное расслоение, полученное конструкцией Серра из эллиптической квинтики $C \subset X$. Эллиптические квинтики, отображающиеся в точку пространства модулей, варьируются в 5-мерном проективном пространстве внутри схемы Гильберта Hilb_X^{5n} , и индуцированное отображение Ψ из компоненты пространства модулей в промежуточный якобиан $J(X)$ этально на открытом множестве, представляющем гладкие линейно нормальные эллиптические квинтики. Это отображение однозначно определяется выбором квинтики отсчета в X . В действительности эллиптические квинтики представляют класс $c_2(\mathcal{E}(1))$, поэтому можно интерпретировать Ψ как вычисление класса c_2 со значениями в алгебраических циклах по модулю рациональной эквивалентности, взятого в композиции с отображением Абеля–Якоби на циклах.

В настоящей статье мы релятивизируем эту конструкцию над семейством неособых гиперплоских сечений четырехмерной кубики Y . Это дает 10-мерную компоненту пространства модулей $\mathcal{M}_Y$ пучков кручения на Y с носителями на гиперплоских сечениях $X = H \cap Y$, ограничения которых на X являются векторными расслоениями ранга два из M_X . Мы показываем, что спаривание Ионеды индуцирует квазисимплектическую структуру на $\mathcal{M}_Y$, т.е. невырожденную голоморфную 2-форму, которая необязательно замкнута, и что естественная проекция $p: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{P}^5$ является лагранжевым расслоением, где $\mathbb{P}^5$ – база семейства гиперплоскостей в $\mathbb{P}^5$. Это означает, что слои M_X , параметризующие пучки с фиксированным носителем X , являются лагранжевыми подмногообразиями в $\mathcal{M}$.

Мы исследуем также связь квазисимплектической структуры Ионеды с симплектической структурой, построенной Донаги и Маркманом [5, пример 8.22] на многообразии $\mathbf{J}_Y$. Это многообразие обладает аналогичным свойством: слои $J(Y \cap H)$ являются лагранжевыми. Вообще говоря, не существует отображения между двумя 10-мерными многообразиями $\mathcal{M}_Y$ и $\mathbf{J}_Y$, и нельзя сказать, что одна квазисимплектическая структура индуцирована другой. Тем не менее, отображение из $\mathcal{M}_Y$ в $\mathbf{J}_Y$ существует локально над $\mathbb{P}^5$ в классической (либо этальной) топологии, и мы доказываем, что эти локальные отображения совместимы с симплектическими структурами с точностью до добавления 2-формы, которая является локальным сечением расслоения $p^*\Omega_{\mathbb{P}^5}^2$.

Согласно [8] степень вышеуказанного отображения Ψ равна 1, поэтому M_X можно отождествить с открытым подмножеством в $J^2(X)$, а $\mathcal{M}_Y$ – с открытым подмножеством некоторого торсора над относительным промежуточным якобианом $\mathbf{J}_Y$ семейства неособых гиперплоских сечений Y .

К сожалению, не наблюдается какого-либо разумного подхода к доказательству замкнутости квазисимплектической структуры Ионеды. Заметим, что ни Тюрин, ни Мукаи не доказывали замкнутости их 2-форм. В итоге оказалось, что эти 2-формы замкнуты [13], [3], [7], но метод доказательства в указанных работах по су-

шеству сводится к вопросу о замкнутости представителей класса Атьи когерентного пучка. Наша квазисимплектическая структура не содержит компонент класса Атьи, поэтому этот метод не работает. Тем не менее, мы доказываем существование симплектической структуры на $\mathcal{M}_Y$, которая находится в том же соотношении со структурой Донаги–Маркмана: вышеуказанные локальные отображения из $\mathcal{M}_Y$ в $\mathbf{J}_Y$ согласованы с симплектическими структурами с точностью до прибавления 2-формы, являющейся локальным сечением $p^*\Omega_{\mathbb{P}^5}^2$. Мы определяем ее фактически на торсоре, содержащем $\mathcal{M}_Y$.

Опишем кратко содержание статьи по параграфам.

В § 1 мы получаем подготовительную информацию о когомологиях и Ext-группах пучков из $\mathcal{M}_Y$. Вычисления используют локально-относительную спектральную последовательность для Ext-пучков и проективную геометрию эллиптических квинтиков.

В § 2 мы доказываем, что спаривание Ионеды $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{Yoneda}} \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \simeq \mathbb{C}$ для $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_Y$ является кососимметрическим и невырожденным отображением. Мы показываем, что комплексные прямые $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ для различных $\mathcal{E}$ склеиваются в тривиальное линейное расслоение над $\mathcal{M}_Y$. Следовательно, спаривание Ионеды определяет настоящую 2-форму $\Lambda_{\mathcal{M}_Y}$ на $\mathcal{M}_Y$, дающую ожидаемую квазисимплектическую структуру.

В § 3 мы описываем симплектическую структуру $\Lambda_{\mathbf{J}_Y}$ Донаги–Маркмана на $\mathbf{J}_Y$. Она определяется симплектической структурой на 4-мерном многообразии Фано Z многообразия Y , параметризующем прямые $l \subset Y$. Существование и единственность последней была доказана Бовилем и Донаги [2], но они не дали ее конструкции.

В § 4 дается явная конструкция симплектической структуры Бовиля–Донаги на Z . Идея построения воспроизводит доказательство теоремы о касательном расслоении для поверхности Фано трехмерной кубики. По существу, это доказательство есть вычисление дифференциала отображения Абеля–Якоби для семейства прямых посредством диаграммы Клеменса–Гриффитса–Велтерса (см. [17, § 2]) для тройки $l \subset X \subset \mathbb{P}^4$. Мы адаптируем его для тройки $l \subset Y \subset \mathbb{P}^5$, и это дает (после очевидной релятивизации) тензорное поле $\wedge_Z: \mathcal{T}Z \xrightarrow{\sim} \Omega_Z$. Принцип Бохнера гласит, что глобальные голоморфные тензорные поля на Z порождены формой Бовиля–Донаги, поэтому форма $\wedge_Z$ должна быть ей пропорциональна.

В § 5 мы сравниваем квазисимплектические структуры на $\mathcal{M}_Y$ и $\mathbf{J}_Y$. Эти два многообразия расслоены над одной и той же базой $U \subset \mathbb{P}^5$, параметризующей неособые гиперплоские сечения Y , имеют лагранжевы слои, и эти слои связаны этальным отображением из [11]. Таким образом, можно поточечно отождествить касательные пространства двух соответствующих слоев, равно как и их нормальные пространства, которые отождествляются с касательным пространством к U . Первое наблюдение состоит в том, что две квазисимплектические структуры определяют одинаковое спаривание между касательным и нормальным пространством к слою. Это дает поточечное отождествление двух квазисимплектических структур. Далее мы рассматриваем локальное (в классической топологии) послойное отображение $\Psi_{\mathcal{U}}: \mathcal{M}_Y \rightarrow \mathbf{J}_Y$, которое является отображением Абеля–Якоби, определяемым семейством эллиптических квинтиков отсчета в гиперплоских сече-

ниях Y над маленьким диском $\mathcal{U} \subset U$. Мы показываем, что $\Lambda_{\mathfrak{M}_Y}$, $\Lambda_{\mathbf{J}_Y}$ отличаются на сечение из $p^*\Omega_{\mathcal{U}}^2$ и что квазисимплектическую структуру Ионеды можно заменить на симплектическую структуру, связанную тем же отношением с $\Lambda_{\mathbf{J}_Y}$. В заключение мы обсуждаем продолжения на большее открытое подмногообразие $\bar{U}$, параметризующее гиперплоские сечения с не более чем одной невырожденной квадратичной особой точкой.

Первый автор с удовольствием выражает благодарность за гостеприимство Международному центру теоретической физики, г. Триест, и Математическому институту им. М. Планка, г. Бонн, где им была выполнена часть работы над статьёй.

§ 1. Вычисление Ext-групп

Пусть $Y \subset \mathbb{P}^5$ – неособая четырехмерная кубика и $X = Y \cap \mathbb{P}^4$ – ее общее гиперплоское сечение. Пусть $\mathcal{E}$ – векторное расслоение, полученное из проективно нормальной эллиптической кривой пятой степени $C \subset X \subset \mathbb{P}^4$ посредством конструкции Серра:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{I}_C(2) \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{I}_C = \mathcal{I}_{C,X}$ – пучок идеалов C в X . Поскольку класс C по модулю алгебраической эквивалентности равен $5l$, где l – класс прямой, последовательность (1.1) влечет $c_1(\mathcal{E}) = 0$, $c_2(\mathcal{E}) = 2l$. Более того, $\det \mathcal{E}$ тривиален, и, следовательно, $\mathcal{E}$ самодвойственно как векторное расслоение (т.е. $\mathcal{E}^* \simeq \mathcal{E}$). Дальнейшие детали этой конструкции см. в [11, § 2].

Здесь мы рассматриваем $\mathcal{E}$ как пучок кручения на Y с носителем в X .

ЛЕММА 1.1. *Имеем*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}, & \text{если } q = 0, \\ \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1), & \text{если } q = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем локальную тривиализацию $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}|_U \simeq (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X)|_U.$$

Это сводит проблему к вычислению пучка $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Используя резольвенту

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

приходим к заключению, что $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X$ для $q = 0$, $\mathcal{N}_{X/Y} \simeq \mathcal{O}_X(1)$ для $q = 1$ и $\mathcal{N}_{X/Y} = 0$ для $q \geq 2$. Принимая во внимание функториальный характер последнего изоморфизма по отношению к выбору базисов в $\mathcal{O}_X$, мы получаем искомые формулы с пучком $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ вместо $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, но эти пучки изоморфны в силу самодвойственности $\mathcal{E}$.

ЛЕММА 1.2. *Верны следующие утверждения:*

- (i) $h^p(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) = \dim \operatorname{Ext}_X^p(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0, \\ 5, & \text{если } q = 1, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$
- (ii) $h^0(\mathcal{E}(1)) = 6$ и $h^i(\mathcal{E}(1)) = 0$ для $i > 0$;
- (iii) $h^0(\mathcal{I}_C(k)) = \binom{4+k}{4} - \binom{1+k}{4} - 5k$ для $k \geq 1$ и $h^i(\mathcal{I}_C(k)) = 0$, если $i > 0$;
- (iv) $h^i(\mathcal{E}(j)) = 0$ для всех $i \in \mathbb{Z}$, $j = 0, -1, -2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i), (ii) следуют из [11, лемма 2.1, с); лемма 2.7, b)]. Утверждение (iii) проверено для $k \geq 2$ в доказательстве леммы 2.1 из [11] и очевидным образом продолжается на случай $k = 1$ рассмотрением точной тройки

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C(k) \rightarrow \mathcal{O}_X(k) \rightarrow \mathcal{O}_C(k) \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

с $k = 1$; C не содержится в гиперплоскости в силу проективной нормальности, поэтому $h^0(\mathcal{I}_C(1)) = 0$. Так как $h^i(\mathcal{O}_X(1)) = h^i(\mathcal{O}_C(1))$ равно 5 для $i = 0$ и равно 0 для всех $i > 0$, мы получаем искомое утверждение.

Утверждение (iv) для $j = 1$ есть не что иное, как [11, лемма 2.7, а)]. По двойственности Серра (на X) остается проверить (iv) лишь для $j = 0$. Это следует из (iii) с $k = 1$, точной последовательности (1.1), подкрученной на $\mathcal{O}_X(-1)$, и равенств $H^i(\mathcal{O}_X(-1)) = 0$ для $i > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Локально-глобальная спектральная последовательность*

$$E_2^{pq} = H^p(Y, \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \implies \operatorname{Ext}_Y^{p+q}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

вырождается во втором члене: $E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$. Следовательно, $\operatorname{Ext}_Y^0(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C}$, т. е. $\mathcal{E}$ прост, $\operatorname{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ включается в точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \rightarrow \operatorname{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) \rightarrow 0$$

и $\operatorname{Ext}_Y^n(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = H^{n-1}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1))$ для $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это немедленно следует из леммы 1.1 и утверждения (i) леммы 1.2.

ЛЕММА 1.4. *Выполняются следующие утверждения:*

- (i) $H^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) = H^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_C(1))$ и $H^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = H^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_C(2))$ для всех $i \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $H^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = 0$ для $i = 2, 3$ и $\chi(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) - h^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый изоморфизм доказан в [11]. Для доказательства второго изоморфизма рассмотрим точные последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(2) \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(2) \rightarrow \mathcal{E}(2) \rightarrow \mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

получаемые тензорным умножением (1.1), (1.2) на $\mathcal{E}$.

Утверждение (i) следует из (1.3) и леммы 1.2, (iv).

Утверждения (ii) и (iv) леммы 1.2 дают достаточно много значений эйлеровой характеристики $\chi(\mathcal{E}(k))$, которая есть кубический полином от k по теореме Римана–Роха–Хирцебруха, и мы получаем, что $\chi(\mathcal{E}(k)) = k(k+1)(k+2)$. Таким образом, $\chi(\mathcal{E}(2)) = 24$. Имеем также $\deg \mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{O}_C = 20$, следовательно, $\chi(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{O}_C) = 20$, и это позволяет определить оставшиеся числа Эйлера из (1.3), (1.4), доказывая тем самым равенство $\chi(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = 4$.

Теперь снова используем (1.4), чтобы показать, что $H^i(\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_C(2)) = 0$ для $i = 2, 3$. Сначала покажем, что $H^1(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{O}_C) = 0$. В силу конструкции (1.1) $\mathcal{E}(1)|_C \simeq \mathcal{N}_{C/X}$. Следовательно,

$$H^1(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{O}_C) = H^1(\mathcal{N}_{C/X}(1)) = H^0(\mathcal{N}_{C/X}^*(-1))^* = H^0(\mathcal{N}_{C/X}(-3))^*$$

(мы использовали тот факт, что $\mathcal{N}_{C/X}(-1)$ самодвойственно).

Рассмотрим естественное включение $\mathcal{N}_{C/X}(-2) \subset \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}(-2)$ и в силу [6, предложение V.2.1] имеем $H^1(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(2) \otimes \mathcal{M}) = 0$ для любого обратимого пучка $\mathcal{M}$ степени 0. По двойственности Серра $H^0(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}(-2)) = 0$. Значит, $H^0(\mathcal{N}_{C/X}(-2)) = 0$ и, тем более, $H^0(\mathcal{N}_{C/X}(-3)) = 0$. Следовательно, $H^1(\mathcal{N}_{C/X}(1)) = 0$.

Далее, $H^i(\mathcal{E}(2)) = 0$ для $i > 0$ в силу того же самого рассуждения, которое применялось в доказательстве утверждения (ii) леммы 1.2. Теперь из (1.4) получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 1.5. *Имеют место равенства $h^0(\mathcal{I}_C^2(3)) = 0$, $h^1(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C) = 1$ и, тем самым, $h^0(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C) = 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы VI.3.1 из [6], мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow H^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(2)) \otimes \mathcal{O}_C \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(2) \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

где $\mathcal{F} = \ker \alpha$ – векторное расслоение ранга 2 с $\det \mathcal{F} = \mathcal{O}_C(-1)$ и $h^0(\mathcal{F}) = 0$. Оно является либо прямой суммой двух линейных расслоений $\mathcal{F} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, $\deg M_i \geq -5$, либо включается в нерасщепляющуюся точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-3o) \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_C(-2o) \otimes \mathcal{M} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{M}$ – тэта-характеристика на C , а o – точка в C такая, что $\mathcal{O}_C(1) \simeq \mathcal{O}_C(5o)$. Это влечет $h^1(\mathcal{F}(1)) = 0$. Согласно (1.5) отображение

$$H^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(2)) \otimes H^0(\mathcal{O}_C(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(3))$$

сюръективно. Это отображение пропускается, очевидно, через $H^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(3))$, следовательно, отображение

$$H^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(3)) \rightarrow H^0(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(3))$$

также сюръективно. По теореме Римана–Роха $h^0(\mathcal{F}(1)) = 5$, и в силу (1.5) $h^0(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(3)) = 25 - 5 = 20$ и $h^1(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(3)) = 0$. Согласно [11, лемма 4.2], $h^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(3)) = 20$, следовательно, точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(3) \rightarrow \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(3) \rightarrow \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(3) \rightarrow 0$$

дает равенство $h^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(3)) = 0$. В силу проективной нормальности кривой C имеем $h^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(3)) = 0$, а значит, $h^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(3)) = 0$.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(3) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/X}^2(3) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(3) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/X}(3) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(3) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{C/X}^*(3) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{1.6}$$

Из левого столбца получаем равенство $h^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}) = 0$, из первой строки находим $h^0(\mathcal{I}_{C/X}^2(3)) = h^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}) = 0$. Из нижней строки имеем $h^0(\mathcal{N}_{C/X}^*(3)) = 20$, $h^1(\mathcal{N}_{C/X}^*(3)) = 0$, а из средней строки – $h^0(\mathcal{I}_{C/X}(3)) = 19$, $h^1(\mathcal{I}_{C/X}(3)) = 0$, откуда следует, что $h^1(\mathcal{I}_{C/X}^2(3)) = 1$.

Теперь рассмотрим другую коммутативную диаграмму с точными тройками:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(1) & \longrightarrow & \mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C & \longrightarrow & \mathcal{I}_C^2(3) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(1) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{E}(2) & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{I}_C(3) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathcal{N}_{C/X}(1) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{N}_{C/X}^*(3) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (1.7)$$

Из средней строки видно, что μ сюръективно на глобальных сечениях. Можно рассматривать элементы из $H^0(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C)$ как сечения из $H^0(\mathcal{E}(2))$, обращающиеся в нуль на C . Таким образом, сечение $s \in H^0(\mathcal{E}(2))$ лежит в $H^0(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C)$ тогда и только тогда, когда $\mu(s) \in H^0(\mathcal{I}_{C/X}^2(3))$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 H^0(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C) &= \mu^{-1}\left(H^0(\mathcal{I}_{C/X}^2(3))\right), \\
 h^0(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C) &= h^0(\mathcal{I}_{C/X}^2(3)) + \dim \ker \mu = 5
 \end{aligned}$$

и $h^1(\mathcal{E}(2) \otimes \mathcal{I}_C) = 1$ по лемме 1.4, (ii). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. *Имеем $\dim \operatorname{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 10$, $\dim \operatorname{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 1$, $\operatorname{Ext}_Y^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ для $i > 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти равенства вытекают из следствия 1.3 и леммы 1.4.

§ 2. Квазисимплектическая структура на $\mathfrak{M}_Y$

Пусть Y – неособая четырехмерная кубика. Обозначение X будет использоваться для произвольного гиперплоского сечения кубики Y . Пусть $\mathcal{M}$ – объединение компонент пространства модулей простых пучков на Y , содержащего классы $[\mathcal{E}]$ пучков $\mathcal{E}$, определяемых тройками (1.1). Согласно [11] семейство проективно нормальных эллиптических квинтиков на общей трехмерной кубике неприводимо, так что $\mathcal{M}$ неприводимо в случае, когда Y – общая четырехмерная кубика. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ – подмножество классов пучков $\mathcal{E}$, определяемых расширениями (1.1) для всех проективно нормальных эллиптических квинтиков C , лежащих на всех неособых гиперплоских сечениях Y .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (i) *$\mathfrak{M}$ есть открытое подмножество в $\mathcal{M}$, содержащееся во множестве гладких точек пространства модулей простых пучков.*

(ii) Для всех i, p, q группы $\mathrm{Ext}_Y^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, $H^p(Y, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$ для различных $\mathcal{E}$ склеиваются (как векторные пространства) в векторные расслоения $\mathcal{T}^i$, соответственно, $\mathcal{T}^{p,q}$ на $\mathcal{M}$. Другими словами, существуют такие векторные расслоения $\mathcal{T}^i$, $\mathcal{T}^{p,q}$ на $\mathcal{M}$, что для любого $\mathcal{E}$, $e = [\mathcal{E}] \in \mathcal{M}$, имеют место канонические изоморфизмы $\mathcal{T}^i \otimes \mathbb{C}(e) = \mathrm{Ext}_Y^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, $\mathcal{T}^{p,q} \otimes \mathbb{C}(e) = H^p(Y, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$. Существует каноническое включение $\mathcal{T}^{i,0} \subset \mathcal{T}^i$. Расслоение $\mathcal{T}^1$ канонически изоморфно касательному расслоению к $\mathcal{M}$, и $\mathrm{rk} \mathcal{T}^1 = \dim \mathcal{M} = 10$, $\mathrm{rk} \mathcal{T}^2 = 1$.

(iii) Спаривание Ионеды

$$\mathrm{Ext}_Y^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}_Y^j(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{Ext}_Y^{i+j}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

определяет кососимметрическую билинейную форму

$$\Lambda: \mathcal{T}^1 \times \mathcal{T}^1 \rightarrow \mathcal{T}^2, \quad (2.1)$$

и $\mathcal{T}^{1,0}$ изотропно по отношению к Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для доказательства гладкости заметим, что $\dim \mathcal{M} \leq 10 = \dim \mathrm{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, и равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ неособо в $[\mathcal{E}]$. Но это равенство на самом деле выполнено всегда, потому что $\mathcal{M}$ содержит явно 10-мерное семейство попарно неизоморфных пучков: мы имеем 5 параметров, определяющих носитель X пучка, и пространство модулей M_X пучков с фиксированным носителем X неособо и имеет размерность 5 согласно [11]. Открытость $\mathcal{M}$ в пространстве модулей пучков на Y получается дословно так же, как и в [11, следствие 5.5], с использованием соответствующей релятивизации конструкции Серра.

Существование пучков $\mathcal{T}^i$ в (ii) и билинейной формы в (iii) следует из [12, предложение 2.2] и [14, теорема 1.21,(4)]. Доказательство существования $\mathcal{T}^{p,q}$ получается очевидной модификацией аргументов из [12]. Кососимметричность вытекает из гладкости: квадрат Ионеды $z \circ z$ элемента $z \in \mathrm{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ есть в точности отображение первого препятствия $\mathrm{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, и оно является нулевым в силу гладкости $\mathcal{M}$ в $\mathcal{E}$.

По общим свойствам спектральных последовательностей композиции функторов с кольцевой структурой спаривание Ионеды индуцирует на биградуированном объекте $E_2^{p,q}$ естественную кольцевую структуру

$$H^p(Y, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^q(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \times H^{p'}(Y, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^{q'}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \rightarrow H^{p+p'}(Y, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^{q+q'}(\mathcal{E}, \mathcal{E})).$$

Изотропность $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ вытекает из того факта, что $H^2(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) = 0$ в силу леммы 1.2, (i).

Для того чтобы получить квазисимплектическую структуру, необходимо проверить, что Λ невырождена и что $\mathcal{T}^2$ есть тривиальное линейное расслоение.

Ввиду изотропности $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ невырожденность спаривания $\text{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \times \text{Ext}_Y^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ равносильна невырожденности спаривания

$$H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \times H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)). \quad (2.2)$$

Теперь, используя изоморфизм $\wedge^2 \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X$, можно отождествить $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1))$ с $H^0(\wedge^2 \mathcal{E}(1)) = H^0(\mathcal{O}_X(1))$ посредством естественного отображения $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \rightarrow \wedge^2 \mathcal{E}$. Тот факт, что результирующее отображение является изоморфизмом, следует из разложения

$$H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = H^0(\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(2)) = H^0(\mathcal{O}_X(1)),$$

вытекающего из (1.3) и верхней строки в (1.7).

ЛЕММА 2.2. *Спаривание (2.2) отождествляется посредством вышеуказанного изоморфизма с простым умножением элементов из $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ на линейные формы:*

$$H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \times H^0(\mathcal{O}_X(1)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы показать, что эти два спаривания совпадают, выразим их в локальном базисе в $\mathcal{E}$. Второе спаривание есть просто умножение коэффициентов:

$$\left(\sum a_{ij} e_i \otimes e_j, l \right) \mapsto \sum l a_{ij} e_i \otimes e_j.$$

Выводим теперь локальную формулу для первого спаривания. Заметим, что $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ содержит тривиальное подрасслоение $\wedge^2 \mathcal{E}$ в качестве прямого слагаемого. Согласно предыдущим рассмотрениям $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) = H^0(\wedge^2 \mathcal{E}(1))$. Следовательно, каждое сечение из $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1))$ может быть локально записано как $l(e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2)$. Задавая самодвойственность расслоения $\mathcal{E}$ как тривиализацию $\wedge^2 \mathcal{E}$, можно считать, что $e_2 \wedge e_1 = e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2$ есть тривиализующее сечение, и тогда двойственный базис для $(e_j) = (e_1, e_2)$ есть $((-1)^{\bar{j}} e_{\bar{j}}) = (e_2, -e_1)$, где $\bar{j} = 3 - j$. Поэтому свертка средних членов

$$(a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2) \mapsto \frac{a_2 \wedge b_1}{e_2 \wedge e_1} a_1 \otimes b_2,$$

дающая спаривание Ионеды, есть тождественное отображение $e_i \otimes e_j \mapsto e_i \otimes e_j$ на базисных сечениях. Отсюда вытекает, что спаривание Ионеды задается умножением коэффициентов $(a_{ij}, l) \mapsto l a_{ij}$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Спаривание (2.3) невырождено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно проверить, что для любой линейной формы $l \in H^0(\mathcal{O}_X(1))$ отображение

$$\cdot l: H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)) (\simeq \mathbb{C})$$

сюръективно. По лемме 1.4 последнее отображение отождествляется с

$$\cdot l: H^1(\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(1)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(2)).$$

Используя диаграмму (1.6), подкрученную на $\mathcal{O}(-1)$, и лемму 1.4, (i), можно продолжить последовательность отождествлений:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(1)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathcal{I}_{C/X}^2(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(-1)) & \xleftarrow{\sim} & H^1(\mathcal{O}_C(-1)) \\ \cdot l \downarrow & & \cdot l \downarrow & & \cdot l \downarrow & & \cdot l \downarrow \\ H^1(\mathcal{I}_C \otimes \mathcal{E}(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathcal{I}_{C/X}^2(3)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}) & \xleftarrow{\sim} & H^1(\mathcal{O}_C) \end{array} \quad (2.4)$$

Здесь нужны доказательства лишь изоморфизмы, включающие $\mathcal{I}_{C/X}^2$. Те из них, которые содержат $H^1(\mathcal{I}_{C/X}^2(3))$, установлены в доказательстве леммы 1.5. Проверим теперь изоморфизмы, включающие $H^1(\mathcal{I}_{C/X}^2(2))$. Для этого выпишем диаграмму (1.6), подкрученную на $\mathcal{O}(-1)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(2) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/X}^2(2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(2) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C/X}(2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-1) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(2) & \longrightarrow & \mathcal{N}_{C/X}^*(2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad (2.5)$$

Из левого столбца получаем для вектора $(h^i(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(-1)))$ значения $(0, 0, 5, 0, \dots)$. Аналогично, из левого столбца диаграммы (1.6) получаем $(h^i(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(2))) = (5, 0, 0, \dots)$. Теперь из средней строки в (2.5) имеем $(h^i(\mathcal{I}_{C/X}(2))) = (5, 0, 0, \dots)$. Далее, $\mathcal{N}_{C/X}^*(2) \simeq \mathcal{N}_{C/X}$, и по [11, лемма 5.1, е)] $(h^i(\mathcal{N}_{C/X}^*(2))) = (10, 0, 0, \dots)$. Мы доказали в предыдущем параграфе, что $h^0(\mathcal{I}_{C/X}^2(3)) = 0$, а потому и подавно $h^0(\mathcal{I}_{C/X}^2(2)) = 0$. Следовательно, из первого столбца в (2.5) получаем, что $(h^i(\mathcal{I}_{C/X}^2(2))) = (0, 5, 0, \dots)$.

Доказано, что $h^2(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}(-1)) = h^1(\mathcal{I}_{C/X}^2(2)) = 5$. Теперь проверим, что связывающий гомоморфизм $H^1 \rightarrow H^2$ в первой строке в действительности есть изоморфизм. Рассмотрим второй столбец в (2.5). Согласно [6, предложение V.2.1] имеем $(h^i(\mathcal{N}_{C/\mathbb{P}^4}^*(2))) = (5, 0, 0, \dots)$. Мы видели в предыдущем параграфе, что $h^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(3)) = 0$, и поэтому тем более $h^0(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(2)) = 0$. Следовательно, $(h^i(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^4}^2(2))) = (0, 0, 0, \dots)$. Поэтому все связывающие гомоморфизмы в первой строке являются изоморфизмами.

Теперь, возвращаясь к диаграмме (2.4), мы видим, что вертикальное отображение в правой части очевидным образом сюръективно. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2.4. *Линейное расслоение $\mathcal{T}^2$ на $\mathfrak{M}$ тривиально, а следовательно, кососимметрическое спаривание Λ , определенное в (2.1), есть корректно определенная 2-форма на $\mathfrak{M}$:*

$$\Lambda: \mathcal{T}\mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathfrak{M}}^1, \quad \Lambda \in H^0(\Omega_{\mathfrak{M}}^2). \quad (2.6)$$

Слои естественного отображения $p: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{P}^5: [\mathcal{E}] \mapsto \langle \text{Supp}(\mathcal{E}) \rangle$ являются лагранжесвыми подмногообразиями по отношению к Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.1 для каждой точки $e = [\mathcal{E}] \in \mathfrak{M}$ имеется канонический изоморфизм $\mathcal{T}^2 \otimes \mathbb{C}(e) \simeq \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Достаточно показать, что имеется канонический изоморфизм

$$\alpha: \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{C}. \quad (2.7)$$

С этой целью зафиксируем уравнение $f_Y = 0$ кубики Y в $\mathbb{P}^5$ и возьмем произвольное сечение $h \in H^0(\mathcal{O}_Y(1))$, обращающееся в нуль на $X = \text{Supp}(\mathcal{E})$; это сечение h определяет изоморфизм $\phi_h: \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{X/Y}$ такой, что подстановка $h \mapsto \lambda h$ индуцирует $\phi_h \mapsto \lambda^{-1} \phi_h$.

Далее, по лемме 1.1 имеет место канонический изоморфизм

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{N}_{X/Y}. \quad (2.8)$$

Возьмем общее сечение $0 \neq s \in H^0(\mathcal{E}(1))$ такое, что $C = (s)_0$ есть гладкая проективно нормальная эллиптическая квинтика. Согласно вычислениям, проведенным в § 1,

$$h^i(\det \mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_{C,H}^2(3)) = h^i(\mathcal{I}_{C,H}^2(3)) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.9)$$

где $H = \langle C \rangle = \langle X \rangle$ – линейная оболочка кривой C , т.е. кубики X в $\mathbb{P}^5$. Это сечение s определяет точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{E}(1) \xrightarrow{\wedge^s} \mathcal{I}_{C,X}(2) \otimes \det \mathcal{E} \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Подкручивая ее на $\mathcal{E}^\vee$ и используя канонический изоморфизм $\mathcal{E}^\vee \otimes \det \mathcal{E} \xrightarrow{\text{can}} \mathcal{E}$, получаем точную тройку $0 \rightarrow \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}(1) \xrightarrow{\varepsilon_s} \mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_{C/X}(2) \rightarrow 0$. Таким образом, мы имеем изоморфизм композиции (Cor.1.3 – изоморфизм, имеющий место согласно следствию 1.3)

$$\begin{aligned} \gamma_1: \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) &\xrightarrow[\text{Cor.1.3}]{\text{can}} H^1(\text{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \xrightarrow{\text{can}} H^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{N}_{X/Y}) \\ &\xrightarrow[\sim]{\phi_h^{-1}} H^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}(1)) \xrightarrow[\sim]{H^1(\varepsilon_s)} H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_{C,X}(2)), \end{aligned} \quad (2.11)$$

который согласно сказанному выше пропорционален¹ h и s . Далее, аналогично (2.10) мы имеем морфизм $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_{C,X}(2) \xrightarrow{\cdot \wedge^s} \mathcal{I}_{C,X}^2(3) \otimes \det \mathcal{E}$, индуцирующий отображение $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_{C,X}(2)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_{C,X}^2(3) \otimes \det \mathcal{E})$, которое в композиции с γ_1 дает изоморфизм

$$\gamma_2: \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{I}_{C,X}^2(3) \otimes \det \mathcal{E}), \quad \gamma_2 \sim (h, s^2). \quad (2.12)$$

Точные тройки $0 \rightarrow \mathcal{I}_{C,H} \xrightarrow{\cdot f_Y} \mathcal{I}_{C,H}^2(3) \rightarrow \mathcal{I}_{C,X}^2(3) \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow \mathcal{I}_{C,H} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ вместе с (2.9) и двойственностью Серра на C дают цепочку канонических изоморфизмов:

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{I}_{C,X}^2(3) \otimes \det \mathcal{E}) &\simeq H^2(\mathcal{I}_{C,H} \otimes \det \mathcal{E}) \simeq H^1(\det \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_C) \\ &\simeq H^0((\det \mathcal{E})^\vee \otimes \omega_C)^\vee. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Далее, отображение $\phi_h: \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{X/Y}$, $\phi_h \sim h$, в композиции с $\psi: \mathcal{N}_{C/X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(1)|_C$, $\psi \sim s$, и каноническими изоморфизмами $\omega_C \simeq \omega_Y \otimes \mathcal{N}_{X/Y} \otimes \det \mathcal{N}_{C/X}$, $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-3)$ дает следующий изоморфизм: $\chi: \omega_C \xrightarrow{\sim} \det \mathcal{E}|_C$, $\chi \sim (h, s^2)$. Взяв его композицию с (2.13), получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} \theta: H^1(\mathcal{I}_{C,X}^2(3) \otimes \det \mathcal{E}) &\xrightarrow{\text{can}} H^0((\det \mathcal{E})^\vee \otimes \omega_C)^\vee \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} H^0((\det \mathcal{E}|_C)^\vee \otimes \det \mathcal{E}|_C) \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{C}, \\ \theta &\sim (h^{-1}, s^{-2}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Далее, композиция изоморфизмов (2.12) и (2.14) дает требуемый изоморфизм α в (2.7) с $\alpha \sim (h^0, s^0)$, т.е. α не зависит от выбора скалярных множителей в h и s . Таким образом, чтобы показать, что α – канонический изоморфизм, достаточно проверить, что α не зависит от выбора точки $z = \mathbb{C}s \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))$. Последнее утверждение очевидно, поскольку по построению изоморфизм α определен для *любой* точки² $z \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))$, тем самым задается морфизм тривиальных расслоений $\alpha: \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))}$. Имеем $\alpha \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))})$,

¹Обозначаем это следующим образом: $\gamma_1 \sim (h, s)$.

²В самом деле, для любого $z = \mathbb{C}s \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))$ из стабильности и локальной свободы $\mathcal{E}$ следует, что схема $C = (s)_0$ нулей сечения s есть локально полное пересечение коразмерности 2 в X , т.е. кривая, и поэтому отображение $\alpha: \text{Ext}_Y^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{C}$ вполне определено.

следовательно, морфизм α постоянен как функция на проективном 5-мерном пространстве $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{E}(1)))$.

Касательное распределение слоев проекции p есть векторное расслоение $\mathcal{T}^{1,0}$, и его изотропность была доказана в предложении 2.1. Отсюда следует, что слои p являются лагранжевыми.

§ 3. Симплектическая структура на $\mathbf{J}_Y$

В этом параграфе через Y будем обозначать неособую 4-мерную кубику в $\mathbb{P}^5$, через $h: \mathbf{J} = \mathbf{J}_Y \rightarrow U$ – относительный промежуточный якобиан семейства $\mathbf{X} \rightarrow U \subset \mathbb{P}^5$ неособых гиперплоских сечений над открытым подмножеством U в двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^5$. Через X будем обозначать произвольное гладкое гиперплоское сечение $H \cap Y$ для $H \in U$, через $\mathbf{X}$ – схему нулей сечения пучка $\mathcal{O}_{\Pi}(3, 0)$ на дивизоре инциденции $\Pi = \{(x, H) \in \mathbb{P}_U^5 \mid x \in H\}$, где $\mathbb{P}_U^5 = \mathbb{P}^5 \times U \subset \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$. Можно зафиксировать это сечение, равно как и кубическую форму, определяющую Y в $\mathbb{P}^5$, и рассматривать все изоморфизмы как зависящие только от этих данных.

Согласно работе [5, 8.22] $\mathbf{J}$ имеет естественную (заданную с точностью до скалярного множителя) симплектическую структуру $\alpha_{\mathbf{J}} \in H^0(\mathbf{J}, \Omega_{\mathbf{J}}^2)$, для которой h – лагранжево расслоение, т. е. слои J_X проекции h – промежуточные якобианы гиперплоских сечений $X = H \cap Y$ – являются лагранжевыми подмногообразиями $\mathbf{J}$. Идея состоит в том, чтобы восстановить симплектическую структуру из изоморфизмов $\mathcal{N}_{L/\mathbf{J}} \simeq \Omega_L^1$, которые она определяет для лагранжевых подмногообразий L . Для любой симплектической структуры α на $\mathbf{J}$, для которой h – лагранжево расслоение, вышеуказанные изоморфизмы для лагранжевых подмногообразий $L = J_X$ склеиваются в изоморфизм векторных расслоений $\sigma(\alpha): \mathcal{T}_U \rightarrow h_*\Omega_{\mathbf{J}/U}^1$.

Обратно, пусть $\sigma \in \text{Hom}(\mathcal{T}_U, h_*\Omega_{\mathbf{J}/U}^1) = H^0(U, \Omega_U^1 \otimes h_*\Omega_{\mathbf{J}/U}^1)$ – произвольный изоморфизм. Естественная точная тройка

$$0 \rightarrow h^*\Omega_U^1 \rightarrow \Omega_{\mathbf{J}}^1 \rightarrow \Omega_{\mathbf{J}/U}^1 \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

влечет другую тройку, получаемую действием $\wedge^2$:

$$0 \rightarrow h^*\Omega_U^2 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow h^*\Omega_U^1 \otimes \Omega_{\mathbf{J}/U}^1 \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{F} \subset \Omega_{\mathbf{J}}^2$ – векторное подрасслоение сечений, для которых $\mathcal{T}_{\mathbf{J}/U}$ – изотропное распределение. Пусть $\delta: H^0(\mathbf{J}, h^*\Omega_U^1 \otimes \Omega_{\mathbf{J}/U}^1) \rightarrow H^1(\mathbf{J}, h^*\Omega_U^2)$ – связывающий гомоморфизм, определенный точной тройкой (3.2). Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 3.1. *Элемент $h^*\sigma$ поднимается в сечение $\alpha \in H^0(\mathbf{J}, \mathcal{F})$, если и только если $\delta(h^*\sigma) = 0$. Подъем α определен с точностью до прибавления 2-формы $h^*\beta$, где $\beta \in H^0(U, \Omega_U^2)$. Подъем становится однозначным, если наложить условие, что нулевое сечение $O \subset B$ – лагранжево подмногообразие (т. е. $\alpha|_O \equiv 0$).*

Сформулируем результат Донаги–Маркмана в форме, удобной для наших целей. Пусть Z – “схема Фано” кубики Y , т. е. схема Гильберта, параметризующая

все прямые на Y . Она является гладким проективным 4-мерным многообразием. Бовиль и Донаги [2] доказали, что Z является неприводимым симплектическим многообразием, деформационно эквивалентным 4-мерному многообразию Фуджик-Бовиля $S^{[2]}$ для КЗ-поверхности S . Пусть α_Z – его симплектическая структура, единственная с точностью до пропорциональности. Пусть $\pi: \mathbf{F} \rightarrow U$ – относительная поверхность Фано для $\mathbf{X}$ над U , т.е. семейство поверхностей $F(X)$, параметризующих прямые в гиперплоских сечениях $X = H \cap Y$, где $H \in U$. По результатам [4] $\mathbf{J}/U$ канонически изоморфно относительному многообразию Альбанезе $\text{Alb}(\mathbf{F}/U)$ и многообразию $\text{Pic}^0(\mathbf{F}/U)$. Согласно работе [16] поверхности Фано $F(X)$ являются лагранжевыми в Z и образуют открытое подмножество схемы Гильберта многообразия Z . В силу теоремы из [5] относительное многообразие Пикара $P = \text{Pic}(\mathbf{L}/B)$ универсального семейства лагранжевых подмногообразий гладкого проективного симплектического многообразия V над открытым множеством $B \subset \text{Hilb}(V)$ имеет также симплектическую структуру, для которой P/B – лагранжево расслоение. Применение этого результата к семейству $\mathbf{F}/U$ дает симплектическое 10-мерное многообразие $\text{Pic}^0(\mathbf{F}/U) = \text{Alb}(\mathbf{F}/U) = \mathbf{J}$.

ТЕОРЕМА (Донаги–Маркмана). *Для любого $H \in U$ пусть $X = Y \cap H$, $F = F(X)$, $\sigma_H: \mathcal{N}_{F/Z} \rightarrow \Omega_F^1$ – изоморфизм, индуцированный формой α_Z , и $H^0(\sigma_H): H^0(\mathcal{N}_{F/Z}) \rightarrow H^0(\Omega_F^1)$ – индуцированное отображение на глобальных сечениях. Ввиду естественных отождествлений*

$$H^0(F, \mathcal{N}_{F/Z}) = T_{[F]} \text{Hilb}(Z) = T_{[F]}U, \quad H^0(F, \Omega_F^1) = \Omega_{\text{Alb}(F)}^1|_0 = \Omega_{\mathbf{J}(X)}^1|_0$$

пусть $\sigma: \mathcal{I}_U \rightarrow h_\Omega_{\mathbf{J}/U}^1$ – изоморфизм, полученный релятивизацией конструкции пространства $H^0(\sigma_H)$ над U . Тогда σ удовлетворяет предположению леммы 3.1 и, следовательно, поднимается в единственную симплектическую структуру $\alpha_{\mathbf{J}}$ на $\mathbf{J}$, для которой слои и нулевое сечение проекции h являются лагранжевыми подмногообразиями.*

Теперь наша цель – идентифицировать σ как канонический изоморфизм, построенный в лемме 3.2 (см. ниже).

Пусть pr_1, pr_2 – естественные проекции на сомножители в $\mathbb{P}^5 \times U$ и $\mathcal{O}(i, j) = \text{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(i) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(j)$.

ЛЕММА 3.2. *Имеют место канонические изоморфизмы*

$$h_*\Omega_{\mathbf{J}/U}^1 = \pi_*\Omega_{\mathbf{F}/U}^1 = R^1 \text{pr}_{2*} \Omega_{\mathbf{X}/U}^2 = \text{pr}_{2*} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1, 1) = \mathcal{I}_U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два изоморфизма следуют из определений промежуточного якобиана и многообразия Альбанезе, равно как и отождествление $\mathbf{J} = \text{Alb}(\mathbf{F}/U)$, упомянутое выше. Третий изоморфизм является относительной версией формулы для касательного расслоения промежуточного якобиана 3-мерной кубики. Чтобы это доказать, запишем точную последовательность относительных конормальных расслоений пары $\mathbf{X} \subset \Pi$ над U , возведенную в третью внешнюю степень и подкрученную на $\mathcal{N}_{\mathbf{X}/\Pi}$:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbf{X}/U}^2 \rightarrow \Omega_{\Pi/U}^3 \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{X}/\Pi} \rightarrow \Omega_{\mathbf{X}/U}^3 \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{X}/\Pi} \rightarrow 0.$$

Применяя $R^i \operatorname{pr}_{2*}$ и используя формулы Ботта, получаем канонический изоморфизм

$$\operatorname{pr}_{2*}(\Omega_{\mathbf{X}/U}^3 \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{X}/\Pi}) \xrightarrow{\sim} R^1 \operatorname{pr}_{2*} \Omega_{\mathbf{X}/U}^2. \quad (3.3)$$

Имеем $\mathcal{N}_{\mathbf{X}/\Pi} = \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(3, 0) = \mathcal{O}_{\Pi}(3, 0)|_{\mathbf{X}}$, $\Omega_{\mathbf{X}/U}^3 = \omega_{\Pi/U} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{X}/\Pi}$ и $\omega_{\Pi/U} = \mathcal{O}_{\Pi}(-5, 1)$, поэтому оба пучка в (3.3) канонически изоморфны $\operatorname{pr}_{2*} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1, 1)$.

Хорошо известно также, что дивизор инцидентности Π отождествляется с проективизированным кокасательным расслоением к U : $\Pi = \mathbb{P}(\mathcal{T}_U^\vee)$, следовательно, имеют место канонические изоморфизмы $\mathcal{T}_U^\vee = \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{O}_{\Pi/U}(1) = \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{O}_{\Pi}(1, 1) = \operatorname{pr}_{2*} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1, 1)$.

Теорема Клеменса–Гриффитса о касательном расслоении для поверхности Фано $F(X)$ 3-мерной кубики X утверждает, что имеет место изоморфизм $\mathcal{T}_{F(X)} \simeq \mathcal{S}_{G(1, \mathbb{P}^4)}|_{F(X)}$, где $G(1, \mathbb{P}^n)$ – грассманиан прямых в $\mathbb{P}^n$, а $\mathcal{S}_{G(1, \mathbb{P}^n)}$ – универсальное векторное расслоение ранга 2 на нем. Мы собираемся релятивизировать этот результат, чтобы вычислить пучок $\Omega_{\mathbf{F}/U}^1$.

Пусть $G = G(1, \mathbb{P}^5)$, $\mathcal{S}_G$ – универсальное векторное расслоение, $\mathbb{P}^5 \xleftarrow{q} G \xrightarrow{p} G$ – универсальное семейство прямых, $Y \xleftarrow{q} \Gamma \xrightarrow{p} Z$ – его ограничение на прямые в Y и $\mathbf{X} \xleftarrow{q} \Gamma \xrightarrow{p} \mathbf{F}$ – релятивизация над U . Пусть p_i – проекция на три сомножителя в $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \times G$ и $\mathcal{O}(i, j, k) = p_1^* \mathcal{O}(i) \otimes p_2^* \mathcal{O}(j) \otimes p_3^* \mathcal{O}(k)$. Обозначим через Γ_u , F_u , X_u , $H_u = \mathbb{P}_u^4$ слои над $u \in U$ семейств Γ , $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$, Π соответственно.

ЛЕММА 3.3. *Имеется канонический изоморфизм $\mathcal{T}_{\mathbf{F}/U} = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(-1) \boxtimes \mathcal{S}_G)|_{\mathbf{F}}$, где операция $\boxtimes$ дает пучок на многообразии $\mathbb{P}^5 \times G$, содержащем естественным образом семейство $\mathbf{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественные вложения $\Gamma \subset \mathbf{X} \times_U \mathbf{F} \subset \Pi \times_U \mathbf{F}$ дают следующие точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}} \rightarrow \mathcal{N}_{\Gamma/\Pi \times_U \mathbf{F}} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}/\Pi \times_U \mathbf{F}}|_{\Gamma} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{T}_{\Gamma/\mathbf{F}} \rightarrow (p_1 \times p_2)^* \mathcal{T}_{\Pi/U}|_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{N}_{\Gamma/\Pi \times_U \mathbf{F}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Имеем $\mathcal{T}_{\Gamma/\mathbf{F}} = (p_1 \times p_3)^* \mathcal{T}_{\Gamma_G/G}$. Последовательность Эйлера

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow q_G^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1) \otimes p_G^* \mathcal{S}_G \rightarrow \mathcal{T}_{\Gamma_G/G} \rightarrow 0$$

влечет $\det \mathcal{T}_{\Gamma_G/G} = q_G^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1) \otimes p_G^* \mathcal{O}_G(-1)$. Находим последовательно детерминанты:

$$\begin{aligned} \det \mathcal{T}_{\Gamma/\mathbf{F}} &= \mathcal{O}_{\Gamma}(2, 0, -1), \quad \det (p_1 \times p_2)^* \mathcal{T}_{\Pi/U}|_{\Gamma} = \mathcal{O}_{\Gamma}(5, -1, 0), \\ \det \mathcal{N}_{\Gamma/\Pi \times_U \mathbf{F}} &= \mathcal{O}_{\Gamma}(3, -1, 1), \\ \mathcal{N}_{\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}/\Pi \times_U \mathbf{F}}|_{\Gamma} &= p_1^* \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^5}|_{\Gamma} = \mathcal{O}_{\Gamma}(3, 0, 0), \quad \det \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}} = \mathcal{O}_{\Gamma}(0, -1, 1). \end{aligned}$$

Дуализируя (3.4) и умножая тензорно на $\det \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}}$, получаем точную тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma}(-3, -1, 1) \rightarrow \mathcal{N}_{\Gamma/\Pi \times_U \mathbf{F}}^\vee(0, -1, -1) \rightarrow \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}} \rightarrow 0,$$

которая дает канонический изоморфизм

$$\mathbf{p}_* \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}} \xrightarrow{\sim} R^1 \mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\Gamma}(-3, -1, 1).$$

Поскольку $\mathbf{p}_* \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}} = \mathcal{T}_{\mathbf{F}/U}$, то по относительной двойственности Серра получаем канонический изоморфизм

$$\mathcal{T}_{\mathbf{F}/U} = (\mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\Gamma}(1, 1, 0))^{\vee}.$$

Естественное отождествление $\mathcal{S}_G = (p_G^* q_G^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1))^{\vee}$ индуцирует канонический изоморфизм $(\mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\Gamma}(1, 1, 0))^* = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(-1) \boxtimes \mathcal{S}_G)|_{\mathbf{F}}$, из которого следует утверждение леммы.

Следующая лемма релятивизирует изоморфизм $\mathcal{N}_{F_u/Z} \simeq \mathcal{S}_G^{\vee}|_{F_u}$, вытекающий из равенства $\mathcal{N}_{G(1, \mathbb{P}_u^4)/G(1, \mathbb{P}^5)} = \mathcal{S}_G^{\vee}|_{G(1, \mathbb{P}_u^4)}$.

ЛЕММА 3.4. *Имеют место канонические изоморфизмы*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{F}/\mathbb{P}^5 \times Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1) \boxtimes \mathcal{S}_G^{\vee}|_{\mathbf{F}} = \Omega_{\mathbf{F}/U}^1.$$

Более того, применяя π_* , получаем изоморфизм $\pi_* \mathcal{N}_{\mathbf{F}/\mathbb{P}^5 \times Z} = \pi_* \Omega_{\mathbf{F}/U}^1$, совпадающий с изоморфизмом леммы 3.2 ввиду естественного отождествления $\pi_* \mathcal{N}_{\mathbf{F}/\mathbb{P}^5 \times Z} = \mathcal{T}_U$, вытекающего из интерпретации $\mathbf{F}/U$ как универсального семейства над открытым множеством $U \subset \text{Hilb}(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $\mathbf{F}$ как полное пересечение $\sigma_{11} \cap (U \times Z)$, где

$$\sigma_{11} = \{(u, l) \in \mathbb{P}^5 \times G \mid l \subset H_u\}$$

– универсальное шубертово многообразие σ_{11} над $\mathbb{P}^5$. Это – схема нулей сечения $(q_G \times \text{id})_*(p_G \times \text{id})^* \tau_0$, где $\tau_0 \in H^0(\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5}(1, 1))$, а $\tau_0 = 0$ – уравнение дивизора Π . Так как $(q_G \times \text{id})_*(p_G \times \text{id})^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5}(1, 1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1) \boxtimes \mathcal{S}_G^{\vee}$, то получаем доказательство первого утверждения.

Второе утверждение следует немедленно из вычисления Клеменса–Велтерса дифференциала отображения Абеля–Якоби (см. [17, §2] либо диаграмму (5.5) в §5).

§4. Симплектическая структура на многообразии Фано Z четырехмерной кубики Y

Рассмотрим конструкцию симплектической структуры. Пусть $\overline{\mathbf{F}}$ и $\overline{\Gamma}$ – замыкания $\mathbf{F}$ в $\mathbb{P}^5 \times G$ и Γ в $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \times G$ соответственно.

Имеем диаграмму естественных вложений

$$\begin{array}{ccc} Y \times \overline{\mathbf{F}} & \subset & \mathbb{P}^5 \times \overline{\mathbf{F}} \\ \cup & & \cup \\ \overline{\Gamma} \subset \mathbf{X} \times_{\mathbb{P}^5} \overline{\mathbf{F}} & \subset & \Pi \times_{\mathbb{P}^5} \overline{\mathbf{F}} \end{array} \quad (4.1)$$

Заметим, что $\bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\Gamma}$ – неособые многообразия размерностей 7 и 8 соответственно. Это следует из того факта, что $\bar{\mathbf{F}}$ допускает естественный гладкий морфизм на Z со слоями $\mathbb{P}^3$, а $\bar{\Gamma}/\bar{\mathbf{F}}$ гладко со слоем $\mathbb{P}^1$. Выпишем точные последовательности нормальных расслоений:

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/Y \times \bar{\mathbf{F}}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}} \longrightarrow \mathcal{N}_{Y \times \bar{\mathbf{F}}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}}|_{\bar{\Gamma}} \longrightarrow 0. \quad (4.2)$$

Применяя операцию $\wedge^2$ и используя изоморфизм $\mathcal{N}_{Y \times \bar{\mathbf{F}}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}}|_{\bar{\Gamma}} \simeq \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}(3, 0, 0)$, получаем точную тройку

$$0 \longrightarrow \wedge^2 \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/Y \times \bar{\mathbf{F}}} \longrightarrow \wedge^2 \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/Y \times \bar{\mathbf{F}}}(3, 0, 0) \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

Теперь из доказательства леммы 3.3 следует, что

$$\begin{aligned} \det \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}} &= \det \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbf{X} \times_{\mathbb{P}^5} \bar{\mathbf{F}}} \otimes \det \mathcal{N}_{Y \times \bar{\mathbf{F}}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}}|_{\bar{\Gamma}} = \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}(1, 0, 1), \\ \omega_{\bar{\Gamma}/\bar{\mathbf{F}}} &= \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}(-2, 0, 1). \end{aligned}$$

Используя эти формулы и подкручивая последнюю точную тройку на $\mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}(-3, 0, 0)$, получаем

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/Y \times \bar{\mathbf{F}}}^\vee \otimes \omega_{\bar{\Gamma}/\bar{\mathbf{F}}} \longrightarrow \wedge^2 \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}}(-3, 0, 0) \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/Y \times \bar{\mathbf{F}}} \longrightarrow 0. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Gamma} & \xrightarrow{\tilde{\kappa}} & \Gamma \\ \downarrow \mathbf{p} & & \downarrow p \\ \bar{\mathbf{F}} & \xrightarrow{\kappa} & Z \end{array} \quad (4.5)$$

где $\tilde{\kappa}$ – ограничение на $\bar{\Gamma}$ естественной проекции $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5 \times G \rightarrow \mathbb{P}^5 \times G$. Тогда (4.4) получается применением $\tilde{\kappa}^*$ к тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/Y \times Z}^\vee \otimes \omega_{\Gamma/Z} \rightarrow \wedge^2 \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbb{P}^5 \times Z}(-3, 0) \rightarrow \mathcal{N}_{\Gamma/Y \times Z} \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Для любой точки $z \in \bar{\mathbf{F}}$, соответственно, $l \in Z$, имеем

$$\wedge^2 \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}}(-3, 0, 0)|_{\mathbf{p}^{-1}(z)} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 6},$$

соответственно,

$$\wedge^2 \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbb{P}^5 \times Z}(-3, 0)|_{p^{-1}(l)} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 6},$$

поэтому замена базы влечет

$$R^i \mathbf{p}_*(\wedge^2 \mathcal{N}_{\bar{\Gamma}/\mathbb{P}^5 \times \bar{\mathbf{F}}}(-3, 0, 0)) = 0, \quad R^i p_*(\wedge^2 \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbb{P}^5 \times Z}(-3, 0)) = 0, \quad i \geq 0. \quad (4.7)$$

Применяя $R^i p_*$ к (4.6) и, соответственно, $R^i \mathbf{p}_*$ к (4.4) и используя (4.7), относительную двойственность Серра, замечание 4.2 и изоморфизм $p_* \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbb{P}^5 \times Z} \simeq \mathcal{T}Z$, получаем изоморфизмы

$$\wedge_Z: \mathcal{T}Z \xrightarrow{\sim} \Omega_Z \quad (4.8)$$

и, соответственно,

$$\kappa^* \wedge_Z: \kappa^* \mathcal{T}Z \xrightarrow{\sim} \kappa^* \Omega_Z. \quad (4.9)$$

Поскольку согласно [2] Z есть неприводимое симплектическое многообразие, из принципа Бохнера для неприводимых симплектических многообразий [3] вытекает, что изоморфизм (4.8) есть симплектическая форма на Z . Таким образом, получаем явную конструкцию симплектической структуры на Z , формулируемую в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.2. *Симплектическая структура на Z есть связывающий гомоморфизм (4.8) в длинной точной последовательности функторов $R^i p_*$, ассоциированной с точной тройкой (4.6).*

Напомним, что согласно результатам, полученным в предыдущем параграфе,

$$\mathbf{p}_* \mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}} = \mathcal{T}\mathbf{F}/U, \quad \mathbf{p}_* \mathcal{O}_{\Gamma}(1, 1, 0) = \mathcal{N}_{\mathbf{F}/U \times Z}. \quad (4.10)$$

По относительной двойственности Серра имеем

$$R^1 \mathbf{p}_*(\mathcal{N}_{\Gamma/\mathbf{X} \times_U \mathbf{F}}^\vee \otimes \omega_{\Gamma/\mathbf{F}}) = \Omega_{\mathbf{F}/U}, \quad R^1 \mathbf{p}_*(\mathcal{O}_{\Gamma}(1, 1, 0)^\vee \otimes \omega_{\Gamma/\mathbf{F}}) = \mathcal{N}_{\mathbf{F}/U \times Z}^\vee. \quad (4.11)$$

Таким образом, используя (3.14), (3.15), (3.13) и применяя $R^i \mathbf{p}_*$ к (4.4), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}\mathbf{F}/U & \longrightarrow & \kappa^* \mathcal{T}Z & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\mathbf{F}/U \times Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \kappa^* \wedge_Z \downarrow & & \sigma_0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\mathbf{F}/U \times Z}^\vee & \longrightarrow & \kappa^* \Omega_Z & \longrightarrow & \Omega_{\mathbf{F}/U} \longrightarrow 0. \end{array} \quad (4.12)$$

По теореме 4.3 $\wedge_Z$ есть симплектическая форма; кроме того, по конструкции, σ_0 есть изоморфизм из леммы 3.4. Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 4.3. *Коммутативная диаграмма (4.12) антиавтотдуальна, и изоморфизм σ_0 в этой диаграмме совпадает с каноническим изоморфизмом леммы 3.4.*

В частности, композиция $\mathcal{T}\mathbf{F}/U \rightarrow \kappa^* \mathcal{T}Z \xrightarrow{\kappa^* \wedge_Z} \kappa^* \Omega_Z \rightarrow \Omega_{\mathbf{F}/U}$ в этой диаграмме есть нулевое отображение. Это дает другое доказательство результата Вуазен [16] о том, что поверхности Фано гиперплоских сечений Y являются лагранжевыми подмногообразиями симплектической структуры на Z .

§ 5. Связь между симплектическими структурами на $\mathfrak{M}_Y$ и $\mathbf{J}_Y$

5.1. Кодифференциал отображения Абеля–Якоби. Напомним следующую интерпретацию Клеменса–Велтерса кодифференциала $d\Phi^\vee$ отображения Абеля–Якоби $\Phi: B \rightarrow J(X)$, где B – база некоторого семейства кривых на гладком гиперплоском сечении $X = Y \cap \mathbb{P}^4$ кубики Y (см. [17, § 2]). Пусть $[C]$ – точка в B , соответствующая кривой – локально полному пересечению $C \subset X$, и пусть $y = \Phi(C)$. Применяя $\wedge^3$ к точной тройке $0 \rightarrow \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4}^\vee \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^4}^1|_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$ и подкручивая на $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4} = \mathcal{O}_X(3)$, получаем точную тройку

$$0 \rightarrow \Omega_X^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^4}^3 \otimes \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4} \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Переходя к когомологиям этой последовательности, получаем кограничный изоморфизм

$$R: H^0(\mathcal{O}_X(1)) \xrightarrow{\sim} H^1(\Omega_X^2). \quad (5.2)$$

Заметим, что, по конструкции, R есть ограничение на слой $\mathbb{P}^4$ изоморфизма $\mathrm{rg}_{2*} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1, 1) = R^1 \mathrm{rg}_{2*} \Omega_{\mathbf{X}/U}^2$ из леммы 3.2.

Далее, тройка (5.1), ограниченная на C , очевидно, включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \Omega_X^2|_C & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}^4}^3 \otimes \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^4}|_C & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(1) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\ 0 \longrightarrow & \Omega_X^3 \otimes N_{C/X} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}^4}^3 \otimes N_{C/\mathbb{P}^4} & \longrightarrow & \Omega_X^3 \otimes N_{X/\mathbb{P}^4}|_C & \longrightarrow 0. \end{array} \quad (5.3)$$

Очевидно, что для кривой (являющейся локально полным пересечением) $C \subset X$ верно:

$$\Omega_X^3 \otimes N_{C/X} = \omega_X \otimes N_{C/X} = \omega_X \otimes \det N_{C/X} \otimes N_{C/X}^\vee = \omega_C \otimes N_{C/X}^\vee,$$

так что по двойственности Серра $H^1(\Omega_X^3 \otimes N_{C/X}) = H^0(N_{C/X})^\vee$. Следовательно, переходя к когомологиям нижней тройки, получаем отображение

$$\beta_C: H^0(\mathcal{O}_C(1)) \rightarrow H^0(N_{C/X})^\vee. \quad (5.4)$$

Согласно [17, § 2] кодифференциал $d\Phi^\vee|_{[C]}$ в точке $[C]$ отображения Абеля–Якоби $\Phi: B \rightarrow J(X)$ удовлетворяет коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_X(1)) & \xrightarrow[\sim]{R} & H^1(\Omega_X^2) \\ \downarrow \otimes \mathcal{O}_C & & \downarrow \wr \\ H^0(\mathcal{O}_C(1)) & \xrightarrow{\beta_C} H^0(\mathcal{N}_{C/X})^\vee \xleftarrow{d\Phi^\vee|_{\{C\}}} \Omega_{J(X)}^1|_y. \end{array} \quad (5.5)$$

Теперь, как и в § 3, пусть $U = \{\mathbb{P}^4 \in \check{\mathbb{P}}^5 \mid X = Y \cap \mathbb{P}^4 \text{ гладко}\}$, $h: \mathbf{J} \rightarrow U$ и $\pi: \mathbf{F} \rightarrow U$ — проекции, а $\sigma = \pi_* \sigma_0: \pi_* \mathcal{N}_{\mathbf{F}/\check{\mathbb{P}}^5 \times Z}|U \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega_{\mathbf{F}/\check{\mathbb{P}}^5}^1|U \simeq h_* \Omega_{\mathbf{J}/U}^1$ — канонический изоморфизм (см. леммы 3.2 и 3.4). Возьмем точку $y \in h^{-1}(U)$, и пусть $X = \mathbb{P}^4 \cap Y$, где $\mathbb{P}^4 = h(y)$. Заметим, что по лемме 3.4 имеется естественное отождествление $H^0(\mathcal{O}_X(1)) \simeq h^* \pi_* \mathcal{N}_{\mathbf{F}/\check{\mathbb{P}}^5 \times Z}|y$. Эти изоморфизмы вместе с (5.5) и соответствующими изоморфизмами замены базы дают коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_X(1)) & \xrightarrow{\sim} & h^* \pi_* \mathcal{N}_{\mathbf{F}/\check{\mathbb{P}}^5 \times Z}|y \\ R \downarrow \wr & & \wr \downarrow h^* \sigma \\ H^1(\Omega_X^2) \simeq \Omega_{\mathbf{J}/U}^1|y & \simeq & h^* h_* \Omega_{\mathbf{J}/U}^1|y. \end{array} \quad (5.6)$$

Здесь $H^0(\mathcal{O}_X(1)) = h^* \mathcal{T}U|y$, и изоморфизм R глобализуется в изоморфизм

$$\mathcal{R}: h^* \mathcal{T}U \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{J}/U}^1. \quad (5.7)$$

Теперь рассмотрим симплектическую структуру Донаги–Маркмана $\wedge_{\mathbf{J}}: \mathcal{T}\mathbf{J} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{J}}^1$, индуцируемую на $\mathbf{J}$ симплектической структурой $\wedge_Z$ на Z . Тогда, собирая вместе (5.6) и коммутативный квадрат в правой части (4.12), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. *Имеет место антиавтотдуальная коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}\mathbf{J}/U & \longrightarrow & \mathcal{T}\mathbf{J} & \longrightarrow & h^* \mathcal{T}U \longrightarrow 0 \\ & & \wr & & \wedge_{\mathbf{J}} \wr & & \mathcal{R} \wr \\ 0 & \longrightarrow & h^* \Omega_U^1 & \longrightarrow & \Omega_{\mathbf{J}}^1 & \longrightarrow & \Omega_{\mathbf{J}/U}^1 \longrightarrow 0. \end{array} \quad (5.8)$$

5.2. Локальные подъемы структуры $\wedge_{\mathbf{J}}$ на $\mathfrak{M}$. Рассмотрим открытое подмножество $\mathcal{H}' = \{c \in \text{Hilb}_Y^{5n} \mid C \text{ — гладкая проективно нормальная квинтика}\}$ в Hilb_Y^{5n} с проекцией $\rho': \mathcal{H}' \rightarrow \check{\mathbb{P}}^5: C \mapsto \langle C \rangle$. Пусть Y — достаточно общая четырехмерная кубика, так что согласно [11] $\mathcal{H}'$ есть гладкое неприводимое открытое подмножество в $\check{\mathbb{P}}^5$, $\dim \mathcal{H}' = 15$, $\rho(\mathcal{H}')$ является плотным открытым подмножеством в $\check{\mathbb{P}}^5$, и существуют плотное открытое подмножество $U \subset \check{\mathbb{P}}^5$ и, соответственно, плотное открытое подмножество $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H} \subset \rho'^{-1}(U)$, такие, что любое $X \in U$ есть гладкое гиперплоское сечение Y и $\rho = \rho' \mid \mathcal{H}: \mathcal{H} \rightarrow U$ есть гладкий морфизм относительной размерности 10. Для любой точки $C \in \mathcal{H}$ существует локальное аналитическое (или локальное в этальной топологии) сечение проекции ρ , проходящее через C , т.е. аналитическая (соответственно, этальная) окрестность $\mathcal{U} \ni \rho(C)$ и голоморфное (соответственно, регулярное) отображение $s = s_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$ такое, что $s(\mathcal{U}) \ni C$. Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \rho^{-1}(\mathcal{U})$, $\mathbf{J}_{\mathcal{U}} = h^{-1}(\mathcal{U})$, $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}} = p^{-1}(\mathcal{U})$, где $p: \mathfrak{M} \rightarrow \check{\mathbb{P}}^5: \mathcal{E} \mapsto \langle \text{Supp}(\mathcal{E}) \rangle$ есть проекция, и обозначим $p_{\mathcal{U}} = p|_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}$. Сечение s определяет относительное отображение Абеля–Якоби $\Phi_s: \mathcal{H}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{J}_{\mathcal{U}}: C \mapsto \Phi_{X,s}(C)$, где $\Phi_{X,s}: \rho^{-1}(X) \rightarrow J_X: C \mapsto \Phi(C -$

$s(X)$) есть обычное отображение Абеля–Якоби, а $J_X = h^{-1}(X)$. По [11, теорема 5.6] отображение $\Phi_{\mathcal{U}}$ обладает факторизацией Штейна $\Phi_{\mathcal{U}} = \Psi_{\mathcal{U}} \circ \phi_{\mathcal{U}}$, где $\phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{H}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ – гладкое голоморфное отображение относительной размерности 5, а $\Psi_{\mathcal{U}} : \mathfrak{M}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{J}_{\mathcal{U}}$ – этальное голоморфное отображение.

Далее, переходя к $\wedge^2$ в нижней тройке (5.8), получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & h^* \Omega_{\mathcal{U}}^2 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbf{J}}^2 & \xrightarrow{e_{\mathbf{J}}} & \Omega_{\mathbf{J}/\mathcal{U}}^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \varepsilon_{\mathbf{J}} \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{H}om(h^* \mathcal{F}_{\mathcal{U}}, \Omega_{\mathbf{J}/\mathcal{U}}^1) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array} \quad (5.9)$$

Аналогично, имеем на $\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & p_{\mathcal{U}}^* \Omega_{\mathcal{U}}^2 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \Omega_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}^2 & \xrightarrow{e_{\mathfrak{M}}} & \Omega_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}/\mathcal{U}}^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \varepsilon \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{H}om(p_{\mathcal{U}}^* \mathcal{F}_{\mathcal{U}}, \Omega_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}^1) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array} \quad (5.10)$$

и поскольку $\Psi_{\mathcal{U}} : \mathfrak{M}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{J}_{\mathcal{U}}$ этально, диаграмма (5.10) получается из (5.9) применением $\Psi_{\mathcal{U}}^*$:

$$(5.10) = \Psi_{\mathcal{U}}^* (5.9). \quad (5.11)$$

Теперь пусть $\Lambda_{\mathbf{J}} \in H^0(\Omega_{\mathbf{J}}^2)$ – симплектическая структура Донаги–Маркмана на $\mathbf{J}$ и $\Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}} = \Lambda_{\mathbf{J}}|_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}$ – ее ограничение на $\mathbf{J}_{\mathcal{U}}$, и пусть $\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}} = \Lambda|_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}$, где Λ – квазисимплектическая форма Ионеды, введенная ранее в предложении 2.1. Согласно

предложению 2.1 для любого $[\mathcal{E}] \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ векторное пространство $T_{[\mathcal{E}]} \mathfrak{M}_{\mathcal{U}} / \mathcal{U} \subset T_{[\mathcal{E}]} \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ изотропно относительно $\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}$, следовательно,

$$e_{\mathfrak{M}}(\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}) = 0. \quad (5.12)$$

По той же причине

$$e_{\mathbf{J}}(\Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}}) = 0. \quad (5.13)$$

Из условий (5.12) и (5.13) вытекает, что $\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}} \in H^0(\mathcal{G})$ и, соответственно, $\Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}} \in H^0(\mathcal{F})$. Теперь докажем, что

$$\varepsilon(\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}) = \Psi_{\mathcal{U}}^* \varepsilon_{\mathbf{J}}(\Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}}), \quad (5.14)$$

или, что то же самое в силу (5.11), что

$$\varepsilon(\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}} - \Psi_{\mathcal{U}}^* \Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}}) = 0. \quad (5.15)$$

Чтобы доказать (5.14), возьмем произвольное $[\mathcal{E}] \in \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$, и пусть $y = \Psi_{\mathcal{U}}([\mathcal{E}])$, $X = h(y)$. В силу отождествлений $T_{[\mathcal{E}]} \mathfrak{M}_{\mathcal{U}} / \mathcal{U} = H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$, $p_{\mathcal{U}}^* \mathcal{T}_{\mathcal{U}}|_{[\mathcal{E}]} = H^0(\mathcal{O}_X(1))$ имеем изоморфизм $\sharp \Lambda := \varepsilon(\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}})|_{[\mathcal{E}]}: H^0(\mathcal{O}_X(1)) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})^\vee$. По теореме 5.2 вместе с отождествлениями $T_y \mathbf{J}_{\mathcal{U}} / \mathcal{U} = H^1(\Omega_X^2)^\vee$, $h^* \mathcal{T}_{\mathcal{U}}|_y = H^0(\mathcal{O}_X(1))$ имеем изоморфизм $R = \varepsilon_{\mathbf{J}}(\Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}})|_y: H^0(\mathcal{O}_X(1)) \xrightarrow{\sim} H^1(\Omega_X^2)$. Поэтому в силу (5.5) равенство (5.14) сводится к коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega_X^2) & \xrightarrow{d\Psi_{\mathcal{U}}^\vee} & H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E})^\vee \\ R \uparrow \wr & \nearrow \sharp \Lambda & \\ H^0(\mathcal{O}_X(1)) & & \end{array} \quad (5.16)$$

т. е., после дуализации и использования (5.5), к коммутативности квадрата

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{N}_{C/X}) & \xrightarrow{d\Phi_{X,s}|_{[C]}} & H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \\ \beta_C^\vee \downarrow & & \downarrow (\sharp \Lambda)^\vee \\ H^0(\mathcal{O}_C(1))^\vee & \xrightarrow{\sim} & H^0(\mathcal{O}_X(1))^\vee, \end{array} \quad (5.17)$$

где C – любая кривая в $\phi_{\mathcal{U}}^{-1}([\mathcal{E}])$.

По лемме 2.2 и диаграмме (2.4) диаграмма (5.17) эквивалентна квадрату

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{N}_{C/X}) \otimes H^0(\mathcal{O}_C(1)) & \xrightarrow{m} & H^0(\mathcal{N}_{C/X}(1)) \\ d\Phi_{X,s}|_{[C]} \otimes (\text{res}^{-1}) \downarrow & & \downarrow \tilde{\delta} \\ H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \otimes H^0(\mathcal{O}_X(1)) & \xrightarrow{m} & H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)), \end{array} \quad (5.18)$$

где m – обычное умножение, $\tilde{\delta}$ – композиция,

$$\tilde{\delta}: H^0(\mathcal{N}_{C/X}(1)) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{I}_{C,X}^2(3)) \xrightarrow[\sim]{\gamma_1} H^1(\mathcal{I}_{C,X}(2) \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow[\sim]{\gamma_2} H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1)),$$

δ – связывающее отображение в когомологиях точной тройки $0 \rightarrow \mathcal{I}_{C,X}^2(3) \rightarrow \mathcal{I}_{C,X}(3) \rightarrow \mathcal{N}_{C/X}(1) \rightarrow 0$, а изоморфизмы γ_1, γ_2 получаются из троек $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \rightarrow \mathcal{I}_{C,X}(2) \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}_{C,X}^2(3) \rightarrow 0$, $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}(1) \rightarrow \mathcal{I}_{C,X}(2) \otimes \mathcal{E} \rightarrow 0$ с использованием равенств $h^i(\mathcal{O}_X(1)) = 0$, $h^i(\mathcal{E}) = 0$, $i = 1, 2$. Коммутативность (5.18) очевидна. Следовательно, получаем (5.14).

Обозначим $\Lambda_{\mathcal{U},s} = \Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}} - \Psi_{\mathcal{U}}^* \Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}}$. Из (5.15) и (5.9) следует, что форма³ $\Lambda_{\mathcal{U},s}$ принадлежит $H^0(p_{\mathcal{U}}^* \Omega_{\mathcal{U}}^2)$. Таким образом, получаем следующую теорему, связывающую квазисимплектические структуры $\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}}$ и $\Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}}$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для данных $(\mathcal{U}, s)$, обозначенных выше, существует 2-форма $\Lambda_{\mathcal{U},s} \in H^0(p_{\mathcal{U}}^* \Omega_{\mathcal{U}}^2)$ такая, что*

$$\Lambda_{\mathfrak{M}_{\mathcal{U}}} = \Psi_{\mathcal{U}}^* \Lambda_{\mathbf{J}_{\mathcal{U}}} + \Lambda_{\mathcal{U},s}. \quad (5.19)$$

5.3. Симплектическая структура на $\mathfrak{M}$. Только в этом пункте мы воспользуемся следующим результатом из [8].

ТЕОРЕМА 5.3. *Для любой неособой трехмерной кубики X отображение $\Psi: M_X \rightarrow J^2(X)$ есть открытое вложение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 3.2 и следствия 3.3, 5.1 из [8].

Из этой теоремы следует, что отображения $\Psi_{\mathcal{U}}: \mathfrak{M}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{J}_{\mathcal{U}}$, определенные локальными сечениями $s_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$ проекции $\rho: \mathcal{H} \rightarrow U$, также являются открытыми вложениями. Пусть $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ – открытое покрытие U в классической либо этальной топологии такое, что существуют локальные сечения $s_{\alpha}: \mathcal{U}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{H}$ проекции ρ , и пусть $\sigma_{\alpha}: \mathcal{U}_{\alpha} \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{U}}$ – соответствующие сечения отображения Ψ . Тогда $c = (\sigma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in I}$, где $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}$ есть 1-коцикл покрытия $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}$ со значениями в пучке $\underline{\mathbf{J}}$ голоморфных (либо регулярных) сечений $\mathbf{J}$, а $\mathfrak{M}$ естественно отождествляется с открытым подмножеством тора $\mathbf{J}^c$, построенного по c . Следующая лемма суммирует некоторые простые факты о соотношении между структурами лагранжеевых расслоений на абелевой схеме и ее торах.

ЛЕММА 5.4. *Пусть B – неособое многообразие размерности n и $f: A \rightarrow B$ – гладкое семейство связных коммутативных алгебраических групп (либо комплексных групп Ли) такие, что общий слой A_b есть абелево многообразие (либо компактный комплексный тор) размерности n . Пусть c – произвольный класс когомологий из $H^1(B, \underline{A})$ в этальной (либо классической) топологии и $g: X = A^c \rightarrow B$ – торсор, построенный по c . Тогда выполнены следующие утверждения.*

³Ясно, что форма $\Lambda_{\mathcal{U},s}$ зависит от выбора сечения $s: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$.

(i) Пусть X обладает квазисимплектической структурой Λ_X такой, что g есть лагранжево расслоение по отношению к Λ_X . Тогда A также обладает квазисимплектической структурой Λ_A , для которой f является лагранжевым расслоением, и для любого локального сечения $s: V \rightarrow X$ проекции g , индуцирующего изоморфизм $i_s: X_V = g^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} A_V = f^{-1}(V)$, существует 2-форма $\omega_V \in H^0(V, \Omega^2)$ такая, что $\Lambda_X - i_s^* \Lambda_A = g^* \omega_V$ на V . Будем говорить, что такие квазисимплектические структуры Λ_X , Λ_A ассоциированы друг другу.

(ii) Если Λ_X , Λ_A – ассоциированные квазисимплектические структуры, то любая пара $\Lambda_{1,X} \in \Lambda_X + g^* H^0(B, \Omega^2)$, $\Lambda_{1,A} \in \Lambda_A + f^* H^0(B, \Omega^2)$ есть также пара ассоциированных квазисимплектических структур. Более того, всегда существует такая структура $\Lambda_{1,A}$, которая является симплектической.

В частности, если $H^0(B, \Omega^2) = 0$ и если существует пара Λ_X , Λ_A ассоциированных квазисимплектических структур, то она единственна, и Λ_A на самом деле является симплектической.

Структура Λ_A , ассоциированная с данной структурой Λ_X , также единственна и симплектична, если мы наложим дополнительное условие, что ограничение Λ_A на сечение из нейтральных элементов слоев проекции f тождественно равно нулю.

(iii) Обратно, пусть A обладает квазисимплектической структурой Λ_A такой, что f есть лагранжево расслоение по отношению к Λ_A . Пусть также выполнено по крайней мере одно из двух условий: $H^1(B, \Omega^2) = 0$ или s имеет конечный порядок. Тогда X обладает квазисимплектической структурой Λ_X , ассоциированной с Λ_A . В случае, когда s имеет конечный порядок, можно выбрать симплектическую структуру Λ_X .

(iv) В алгебраической категории $H_{\text{ét}}^1(B, \underline{A})$ является группой кручения и любой торсор с квазисимплектической лагранжевой структурой также имеет симплектическую структуру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждений (i), (ii) см. предложения 2.3, 2.6 в [10]. В самом деле, условия этих предложений сформулированы там для симплектических структур, но доказательства остаются верными также для квазисимплектических структур. Предложение 2.6 из [10] рассматривает случай утверждения (iii), когда $H^1(B, \Omega^2) = 0$. Нам необходимо ввести некоторые пункты этого доказательства для объяснения случая, когда s имеет конечный порядок.

Для любого $b \in B$ и для достаточно малой окрестности V точки b существуют локальные параметры $u_1, \dots, u_n$ на V и локальное сечение s_V проекции $g_V: X_V \rightarrow V$, отождествляющее X_V с A_V таким образом, что s_V становится сечением e из нейтральных элементов слоев проекции f . Можно реализовать A_V как фактор $\Omega_V^1 / \mathcal{L}$ кокасательного расслоения к V по локальной системе $\mathcal{L}$ ранга $2n$ в общей точке. Пусть $z_1, \dots, z_n$ – координаты в Ω_B^1 , двойственные к $du_1, \dots, du_n$. Тогда ограничение структуры Λ_A на A_V может быть записано в форме

$$\Lambda_X = \sum_p du_p \wedge dz_p + \beta, \quad \beta = \sum_{p,q} \beta_{pq}(u) du_p \wedge du_q. \quad (5.20)$$

Здесь β не зависит от z , как было доказано в [10]. Пусть $\Lambda_{0,A} = \sum_p du_p \wedge dz_p = \Lambda_X - \beta$. Инвариантность $\Lambda_{0,A}$ относительно сдвигов на сечения из $\mathcal{L}$ эквивалентна равенству

$$d\left(\sum_p \gamma_p du_p\right) = 0, \quad (5.21)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – любое локальное сечение пучка $\mathcal{L}$. Следовательно, мы имеем также инвариантность относительно сдвигов на сечения из $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{L}$, откуда следует случай конечного порядка.

Утверждение (iv) получается последовательным применением утверждений (i) и (iii).

Теперь можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.5. *Существует симплектическая структура $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$ на $\mathfrak{M}$ такая, что выполнены следующие два условия:*

- (a) $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{M}} - \Lambda_{\mathfrak{M}} \in H^0(U, p^* \Omega_U^2)$, следовательно, p есть лагранжево расслоение относительно $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$, и $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$ также удовлетворяет заключению теоремы 5.2;
- (b) $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$ продолжается до симплектической структуры $\Lambda_{\mathbf{J}^c}$, ассоциированной с $\Lambda_{\mathbf{J}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы находимся в алгебраической ситуации, поэтому можно применить лемму 5.7, (iii) для построения симплектической структуры $\Lambda_{\mathbf{J}^c}$, ассоциированной с формой Донаги–Маркмана $\Lambda_{\mathbf{J}}$. Положим $\tilde{\Lambda}_{\mathfrak{M}} = \Lambda_{\mathbf{J}^c}|_{\mathfrak{M}}$, так что выполнено условие (b). Определение отношения ассоциированности в лемме 5.4, (i) и теорема 5.2 также дают утверждение (a).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Мы высказываем гипотезу, что $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ является симплектической структурой.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Класс этальных когомологий s , определяющий $\mathbf{J}^c$, имеет порядок 3, поскольку кривая $3C$ может быть отображена в $J^2(X)$, где $C \subset X = Y \cap H$ есть нормальная эллиптическая квинтика, каноническим образом, используя пятикратное плоское сечение кубики Y в качестве кривой отсчета для определения отображения Абеля–Якоби. Поэтому, кроме тривиального тора $\mathbf{J}$ и тора $\mathbf{J}^c$, существует еще один более интересный торсор $\mathbf{J}^{c^2}$. Какова геометрическая интерпретация этого тора?

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Можно продолжить нашу конструкцию на большее открытое множество $\bar{U}$ такое, что $\text{codim } \mathbb{P}^5 \setminus \bar{U} \geq 2$. Получим те же теоремы 5.2, 5.5 для (квази)симплектических структур $\Lambda_{\mathbf{J}}$, $\Lambda_{\bar{\mathbf{J}}^c}$, $\Lambda_{\bar{\mathfrak{M}}}$. Поскольку $H^0(\bar{U}, \Omega^2) = 0$, ассоциированные квазисимплектические структуры на продолженных семействах $\bar{h}: \bar{\mathbf{J}} \rightarrow \bar{U}$, $\bar{h}^c: \bar{\mathbf{J}}^c \rightarrow \bar{U}$ единственны и симплектичны.

Рассмотрим в качестве $\bar{U}$ множество гиперплоскостей H таких, что $H \cap Y$ имеет не более одной невырожденной двойной точки в качестве особенности. Любая кубика X , имеющая лишь одну изолированную особую точку, содержит нормальную эллиптическую квинтику, не проходящую через особую точку. Чтобы это увидеть, возьмем гиперплоское сечение кубики X , являющееся гладкой кубической поверхностью $S \subset \mathbb{P}^3$. Оно содержит 5-мерную линейную систему квинтик

арифметического рода 1, и ее общий член есть неособая пространственная эллиптическая кривая C . По лемме 2.7, с) из [11], доказательство которой использует лишь гладкость X в точках поверхности S , имеем $h^0(\mathcal{N}_{C/X}) = 10$, $h^1(\mathcal{N}_{C/X}) = 0$. Следовательно, схема Гильберта кубики X неособа размерности 10 в точке $[C]$. Семейство квинтик рода 1 в гиперплоских сечениях кубики X 9-мерно, так что видно, что C деформируется в кривую, не лежащую в 3-мерном пространстве, которая и есть желаемая нормальная эллиптическая квинтика.

Определим теперь M_X как подмножество в пространстве модулей пучков на X , состоящее из векторных расслоений ранга 2, полученных конструкцией Серра из всех нормальных эллиптических квинтик на X , не проходящих через особую точку кубики X , и пусть $\bar{\mathcal{M}}$ есть объединение множеств M_X по всем $X = Y \cap H$ с $H \in \bar{U}$. Все наши доказательства, касающиеся размерности и неособости M_X , $\bar{\mathcal{M}}$, равно как и определение и доказательство невырожденности формы $\Lambda_{\bar{\mathcal{M}}}$, остаются справедливыми после замены $\mathcal{M}$ на $\bar{\mathcal{M}}$ для всех $H \in \bar{U}$. Поэтому мы получаем квазисимплектическую структуру Ионеды $\Lambda_{\bar{\mathcal{M}}}$ на $\bar{\mathcal{M}}$.

Донаги и Маркман [5, пример 8.22] замечают, что их симплектическая структура продолжается до 2-формы $\bar{\Lambda}_{\bar{\mathcal{J}}}$ на обобщенном относительном промежуточном якобиане $\bar{h}: \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \bar{U}$. Они указывают, что нетрудно видеть, что она не вырождена на границе. Это также легко следует из нашего рассмотрения.

В самом деле, невырожденность формы $\Lambda_{\bar{\mathcal{M}}}$ влечет, что вертикальное касательное расслоение для $\bar{\mathcal{M}}$ изоморфно $\Omega_{\bar{U}}^1$, следовательно, ассоциированная групповая схема $\bar{\mathcal{J}}$ изоморфна $\Omega_{\bar{U}}^1/\mathcal{L}$, как и в доказательстве леммы 5.4. Стандартная симплектическая структура кокасательного расслоения к $\bar{U}$ спускается на фактор по $\mathcal{L}$ над U , а значит, также и над $\bar{U}$, поскольку условие спуска (5.21) продолжается по непрерывности. Таким образом, мы получаем симплектическую структуру $\Lambda_{\bar{\mathcal{J}}}$ на $\bar{\mathcal{J}}$. Так как ограничения форм $\Lambda_{\bar{\mathcal{J}}}$, $\bar{\Lambda}_{\bar{\mathcal{J}}}$ на U ассоциированы с одной и той же квазисимплектической структурой на $\mathcal{J}^c$, то они отличаются на поднятую 2-форму с U . Следовательно, они определяют один и тот же изоморфизм между $\Omega_{\bar{U}}^1$ и $\mathcal{T}_{\bar{\mathcal{J}}/\bar{U}}$ над U , который является тождественным для $\Lambda_{\bar{\mathcal{J}}}$. По непрерывности это выполняется также над $\bar{U}$. Следовательно, $\bar{\Lambda}_{\bar{\mathcal{J}}}$ невырождена. Поскольку $H^0(\bar{U}, \Omega^2) = 0$, мы имеем единственность над $\bar{U}$, следовательно, $\bar{\Lambda}_{\bar{\mathcal{J}}} = \Lambda_{\bar{\mathcal{J}}}$.

Продолжение теоремы 5.2 на U вытекает из следующего наблюдения: если регулярное сечение $\Lambda_{\bar{\mathcal{M}}} - \Psi_{\mathcal{U}}^* \Lambda_{\bar{\mathcal{J}}}$ векторного расслоения $\Omega_{\bar{\mathcal{M}}}^2$ над $\mathcal{U}$ принадлежит векторному подрасслоению $\bar{p}^* \Omega_{\bar{U}}^2$ над $U \cap \mathcal{U}$, то оно принадлежит ему над всем $\mathcal{U}$.

Список литературы

1. Beauville A. Variétés Kaehleriennes dont la première classe de Chern est nulle // J. Differ. Geom. 1983. V. 18. P. 755–782.
2. Beauville A., Donagi R. La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4 // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1985. V. 301. № 14. P. 703–706.
3. Bottacin F. Poisson structures on moduli spaces of sheaves over Poisson surfaces // Invent. Math. 1995. V. 121. P. 421–436.
4. Clemens C. H., Griffiths P. A. The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Annals of Math. 1972. V. 95. P. 281–356.
5. Donagi R., Markman E. Spectral covers, algebraically completely integrable Hamiltonian systems, and moduli of bundles // Integrable systems and quantum groups. CIME Lectures.

- Italy, June 14–22, 1993 / Ed. M. Francaviglia. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 1–119.
6. *Hulek K.* Projective geometry of elliptic curves // *Astérisque*. 1986. V. 137.
 7. *Huybrechts D., Lehn M.* The geometry of moduli spaces of sheaves. Aspects of Mathematics. E31. Braunschweig: Vieweg, 1997.
 8. *Iliev A., Markusevich D.* The Abel–Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14 // *Doc. Math.* 2000. V. 5. P. 23–47.
 9. *Kobayashi S.* Simple vector bundles over symplectic Kaehler manifolds // *Proc. Japan Acad. Ser. A*. 1986. V. 62. P. 21–24.
 10. *Markusevich D.* Lagrangian families of Jacobians of genus 2 curves // *J. Math. Sciences*. 1996. V. 82. № 1. P. 3268–3284.
 11. *Markusevich D., Tikhomirov A. S.* The Abel–Jacobi map of a moduli component of vector bundles on the cubic threefold // *J. Alg. Geom.* 2001. V. 10. P. 37–62.
 12. *Mukai S.* Symplectic structure of the moduli of sheaves on an abelian or K3 surface // *Invent. Math.* 1984. V. 77. P. 101–116.
 13. *O’Grady K. G.* Algebro-geometric analogues of Donaldson’s polynomials // *Invent. Math.* 1992. V. 107. P. 351–395.
 14. *Simpson C. T.* Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I // *Publ. Math. I. H. E. S.* 1994. V. 79. P. 47–129.
 15. *Тюрин А. Н.* Симплектические структуры на многообразиях модулей векторных рассматриваний на поверхностях $p_g > 0$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1988. Т. 52. № 4. С. 813–852.
 16. *Voisin C.* Sur la stabilité des sous-variétés lagrangiennes des variétés symplectiques holomorphes // *Complex Projective Geometry*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. P. 294–303.
 17. *Welters G. E.* Abel–Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds // *Mathematical Centre Tracts*. V. 141. Amsterdam, 1981.