Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Стырт, О пространстве орбит трехмерной компактной линейной группы Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 165–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:26:36

УДК 512.815.1

О. Г. Стырт

О пространстве орбит трехмерной компактной линейной группы Ли

Исследуется вопрос о том, является ли топологический фактор вещественного линейного представления простой трехмерной компактной группы Ли многообразием. Получена оценка сверху размерности представления, фактор которого является многообразием; разобрано большинство оставшихся случаев.

Библиография: 1 наименование.

Ключевые слова: группа Ли, топологический фактор действия.

§ 1. Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1]. Прежде всего дадим три следующих базовых определения, игравших ключевую роль и в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Непрерывное отображение гладких многообразий назовем *кусочно гладким*, если оно переводит любое гладкое подмногообразие в конечное объединение гладких подмногообразий.

В частности, всякое собственное гладкое отображение гладких многообразий является кусочно гладким.

Рассмотрим дифференцируемое действие некоторой компактной группы Ли G на гладком многообразии M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем говорить, что фактор действия $G: M$ *диффеоморфен* (*кусочно диффеоморфен*) гладкому многообразию M' , если топологический фактор M/G гомеоморфен M' , причем отображение факторизации $M \rightarrow M'$ гладкое (кусочно гладкое).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Будем говорить, что фактор действия $G: M$ является *гладким многообразием*, если он кусочно диффеоморфен некоторому гладкому многообразию.

Перейдем непосредственно к постановке задачи.

Рассмотрим линейное представление компактной группы Ли G в вещественном пространстве V . Нас по-прежнему (как и в [1]) интересует вопрос о том, является ли фактор V/G этого действия топологическим многообразием, а также является ли он гладким многообразием. Следуя [1], будем далее для краткости называть топологическое многообразие просто *многообразием*.

Через G^0 будем обозначать связную компоненту единицы группы G , а через $\mathfrak{g}$ – ее касательную алгебру.

Случай, когда группа G^0 коммутативна, был разобран в [1]. Настоящая работа посвящена исследованию поставленной проблемы в предположении того, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$.

В пространстве V можно зафиксировать G -инвариантное скалярное умножение. Тогда группа G действует ортогональными операторами: $G \subset O(V)$.

Для любой одномерной подалгебры $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ (или, что то же самое, одномерного подпространства) подмножество $\mathfrak{g}'V \subset V$ является, очевидно, подпространством.

Допустим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, это равносильно тому, что группа G^0 изоморфна одной из групп SU_2 и SO_3 .

Обозначим через $n_1, \dots, n_L$ размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V$ (с учетом кратностей). Если все числа n_i равны 1, то группа G^0 действует на V тождественно и вопрос описания фактора V/G сводится к аналогичному вопросу для действия конечной группы G/G^0 в пространстве V . Поэтому будем считать, что $n_1 \geq \dots \geq n_l > 1 = n_{l+1} = \dots = n_L$, $L = 1, \dots, N$. Число $\left[\frac{n_i}{2}\right]$ является натуральным при $n_i > 1$ и равно нулю при $n_i = 1$. Положим $q(V) := \sum_{i=1}^L \left[\frac{n_i}{2}\right] = \sum_{i=1}^l \left[\frac{n_i}{2}\right] \in \mathbb{N}$.

В § 4 будут доказаны следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G – гладкое многообразие, то $q(V) \leq 4$.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G – многообразие, то $q(V) > 2$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G – гладкое многообразие, то $q(V) \in \{3; 4\}$.*

ТЕОРЕМА 1.3. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, V/G – гладкое многообразие, а среди чисел $\left[\frac{n_i}{2}\right]$, $i = 1, \dots, l$, хотя бы одно нечетно, то $q(V) = 3$.*

В § 5 мы докажем следующие теоремы, описывающие несколько частных случаев.

ТЕОРЕМА 1.4. *Предположим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а для чисел l и $n_1, \dots, n_l$ имеет место одна из следующих комбинаций:*

- 1) $l = 2$, $n_1 = n_2 = 4$;
- 2) $l = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$;
- 3) $l = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$.

Тогда фактор V/G^0 диффеоморфен векторному пространству, причем группа G/G^0 действует на нем линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Теорема 1.4 позволяет в каждом из случаев 1)–3) в ее формулировке свести исходное представление $G: V$ к линейному представлению конечной группы G/G^0 в векторном пространстве V/G^0 (см. лемму 2.1).

ТЕОРЕМА 1.5. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, $l = 2$, $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, то фактор V/G не является гладким многообразием.*

ТЕОРЕМА 1.6. Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, $l = 1$, $n_1 = 7$, то $V/G \cong \mathbb{R}^4$.

ТЕОРЕМА 1.7. Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, $l = 1$, $n_1 = 8$, то $V/G \cong \mathbb{R}^5$.

§ 2. Обозначения и вспомогательные факты

Здесь мы напомним некоторые принятые в [1] определения и обозначения. Кроме того, будут сформулированы несколько результатов (леммы 2.1–2.10), полученных в [1], и их простейших следствий.

ЛЕММА 2.1. Пусть имеется линейное представление компактной группы Ли G в векторном пространстве V . Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы $H \triangleleft G$ фактор V/H диффеоморфен гладкому многообразию M . Тогда факторы M/G и V/G являются или не являются гладкими многообразиями одновременно.

ЛЕММА 2.2. Допустим, что гомотопическая группа π_k ($k > 0$) орбиты общего положения представления $G: V$ нетривиальна, а в V/G любой страт, отличный от главного, имеет коразмерность более $k + 2$. Тогда V/G не является гладким многообразием.

Пусть G_v – стабилизатор вектора $v \in V$, а $\mathfrak{g}_v := \text{Lie } G_v = \{\xi \in \mathfrak{g}: \xi v = 0\}$. Группа G_v переводит в себя подпространства $T_v(Gv) = \mathfrak{g}_v$ и $N_v := (\mathfrak{g}_v)^\perp$. Через M_v будем обозначать ортогональное дополнение в N_v к подпространству $N_v^{G_v}$ неподвижных векторов для действия $G_v: N_v$. Тогда $V = \mathfrak{g}v \oplus N_v^{G_v} \oplus M_v$ и $G_v M_v = M_v$.

ЛЕММА 2.3. Если $v \in V$ – произвольный вектор, а V/G – многообразие (гладкое многообразие), то и N_v/G_v – многообразие (гладкое многообразие).

ЛЕММА 2.4. Любое G^0 -инвариантное подпространство $V' \subset V$ содержит вектор v , для которого $M_v \perp V'$.

Для $g \in G$ положим $\omega(g) := \text{rk}(E - g) - \text{rk}(E - \text{Ad}(g))$. Далее, пусть $\Omega := \{g \in G: \omega(g) \in \{0; 2\}\} \subset G$ и

$$V_0 := \{v \in V: G^0 v = \{v\}\} = \{v \in V: \mathfrak{g}v = 0\} \subset V. \quad (2.1)$$

Для любых вектора $v \in V$ с конечным стабилизатором и элемента $g \in G_v$ имеем $\dim((E - g)N_v) = \omega(g)$.

ЛЕММА 2.5. Если стабилизатор G_v вектора $v \in V$ конечен, а фактор V/G является гладким многообразием, то $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$.

Для подпространства $W \subset V$ обозначим через $G[W] \subset G$ подгруппу Ли всех элементов из G , действующих тождественно на $W^\perp$. Очевидно, что подпространство W инвариантно относительно $G[W]$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $W \subset V$ – ненулевое G^0 -инвариантное подпространство, причем на его единичной сфере группа $G[W]$ действует транзитивно. Тогда V/G не является многообразием.

Пусть P – множество векторов в конечномерном пространстве над произвольным полем. Некоторые из них могут совпадать; кратности учитываются. Количество ненулевых векторов множества P (с учетом кратностей) обозначим через $\|P\|$. Напомним определения q -устойчивых ($q \in \mathbb{N}$) и неразложимых множеств векторов, данные в [1] и необходимые также в настоящей работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди этих линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовем *собственным*. Будем говорить, что множество *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причем для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учетом кратностей своих элементов, назовем q -устойчивым ($q \geq 0$), если его линейная оболочка не меняется при удалении из него любых векторов в количестве не более q (с учетом кратностей).

Теперь предположим, что группа G^0 коммутативна. Любое ее неприводимое представление либо одномерно, либо двумерно. Во втором случае оно обладает G^0 -инвариантной комплексной структурой и ему соответствует вес $\lambda: G^0 \rightarrow \mathbb{T}$, который можно отождествить с его дифференциалом – линейной функцией $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. Последнюю будем понимать как вектор из $\mathfrak{g}$, используя скалярное умножение на $\mathfrak{g}$, инвариантное относительно $\text{Ad}(G)$. Оператор G^0 -инвариантной комплексной структуры данного представления определен с точностью до замены знака; то же можно сказать и о весе $\lambda \in \mathfrak{g}$. Одномерному представлению G^0 сопоставим нулевой вес $\lambda \in \mathfrak{g}$. Через $P \subset \mathfrak{g}$ обозначим множество весов λ , соответствующее разложению V в прямую сумму неприводимых представлений группы G^0 (с учетом кратностей). Это множество не зависит от выбора разложения (с точностью до знаков весов). Подпространство $V_0^\perp$ имеет G^0 -инвариантную структуру комплексного пространства размерности $\|P\|$. Пусть V_λ , $\lambda \in P$, – изотипная компонента представления $G^0: V$, соответствующая неприводимым представлениям с весом λ , а V_Q ($Q \subset P$) – прямая сумма всех компонент V_λ , $\lambda \in Q$. В частности, такое определение V_0 согласуется с определением (2.1), где не требуется коммутативность G^0 .

ЛЕММА 2.7. Если V/G – многообразие, то P – 1-устойчивое множество.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если V/G – многообразие, то $\|P\| \neq 1$.

Множество всех ненулевых весов в P можно разложить в дизъюнктное объединение неразложимых компонент $Q \subset P \setminus \{0\}$.

Для произвольного линейного представления $G: V$ и целого неотрицательного числа d будем, если не оговорено противное, подразумевать под записью $(V \oplus \mathbb{R}^d)/G$ фактор линейного представления

$$G: V \oplus \mathbb{R}^d, \quad g: v + x \rightarrow gv + x, \quad g \in G, \quad v \in V, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

ЛЕММА 2.8. *Допустим, что P – 2-устойчивое множество, а V/G – гладкое многообразие. Тогда для любой неразложимой компоненты $Q \subset P \setminus \{0\}$ найдется число $d \geq 0$ такое, что $(V_Q \oplus \mathbb{R}^d)/G$ – гладкое многообразие.*

Предположим, что $\dim G = 1$ (как следствие, алгебра $\mathfrak{g}$ и группа G^0 одномерны и коммутативны). В этом случае P – неразложимое множество, а его 2-устойчивость эквивалентна тому, что $\|P\| \notin \{1; 2\}$.

ЛЕММА 2.9. *Если P – 2-устойчивое множество, $\dim G = 1$, $V_0 = 0 \neq V$, а фактор $(V \oplus \mathbb{R}^d)/G$ является гладким многообразием для некоторого d , то $\|P\| = 3$.*

ЛЕММА 2.10. *Если P – 2-устойчивое множество, $\dim G = 1$, $\text{Ad}(G) = \{E\}$ и $V_0 \neq V$, то V/G не является гладким многообразием.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Допустим, что $\dim G = 1$, а V/G – гладкое многообразие. Тогда:*

- 1) число $\|P\|$ не превосходит 3;
- 2) если $\text{Ad}(G) = \{E\}$, то $\|P\| \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|P\| < 3$, то утверждения 1), 2) верны.

Далее будем считать, что $\|P\| \geq 3$. В таком случае $V_0 \neq V$, а P – 2-устойчивое множество. Теперь утверждение 1) вытекает из лемм 2.8, 2.9 (при $Q := P \setminus \{0\}$), а утверждение 2) – из леммы 2.10.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Предположим, что $\dim G = 1$. Тогда:*

- 1) если V/G – многообразие, то $\dim(\mathfrak{g}V) \neq 2$;
- 2) если V/G – гладкое многообразие, то $\dim(\mathfrak{g}V) \leq 6$;
- 3) если $\text{Ad}(G) = \{E\}$, а V/G – гладкое многообразие, то $\dim(\mathfrak{g}V) \leq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\dim(\mathfrak{g}V) = \dim V_0^\perp = 2 \dim_{\mathbb{C}} V_0^\perp = 2\|P\|$. Осталось воспользоваться следствиями 2.1, 2.2.

§ 3. Представления трехмерных групп

Здесь будут перечислены основные свойства неприводимых вещественных представлений групп SU_2 и SO_3 .

Пусть $V(m)$, $m \in \mathbb{N}$, – комплексное представление группы SU_2 на пространстве однородных многочленов из $\mathbb{C}[x, y]$ степени $m - 1$ сдвигом аргумента.

Размерность каждого неприводимого представления группы SU_2 либо кратна 4, либо нечетна. Неприводимое представление размерности $4m$ – это оеществление комплексного представления $V(2m)$. Неприводимое представление размерности $2m + 1$ – это вещественная форма $V_{\mathbb{R}}(2m + 1)$ комплексного

представления $V(2m+1)$, состоящая из всех многочленов $\sum_{|k| \leq m} c_k x^{m+k} y^{m-k}$ таких, что $c_{-k} = (-1)^k \overline{c_k}$. Любое неприводимое представление нечетной размерности абсолютно неприводимо, а тело его эндоморфизмов есть $\{cE : c \in \mathbb{R}\}$.

Всякое неприводимое представление группы SO_3 имеет нечетную размерность и получается из неприводимого представления SU_2 той же размерности факторизацией $SU_2 \twoheadrightarrow SU_2 / \{\pm E\} \cong SO_3$ по его ядру неэффективности $\{\pm E\} \subset SU_2$.

ЛЕММА 3.1. *Рассмотрим $(2m+1)$ -мерное неприводимое представление группы, изоморфной SU_2 либо SO_3 .*

1) *Если число m нечетно, то существует вектор, стабилизатор которого является одномерным тором.*

2) *Если $m > 1$, то найдется вектор с нетривиальным конечным стабилизатором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно отождествить данное $(2m+1)$ -мерное неприводимое представление с $V_{\mathbb{R}}(2m+1)$. Положим $f := x^m y^m \in V_{\mathbb{R}}(2m+1)$.

1) Подгруппа всех элементов из SU_2 , переводящих в себя прямую $\mathbb{R}f$, совпадает с подгруппой всех диагональных и побочно диагональных матриц. Все диагональные матрицы из SU_2 переводят f в себя, а побочно диагональные – в многочлен $(-1)^m f$. Таким образом, f – искомый многочлен в утверждении 1).

2) По условию $m > 1$. Всякий многочлен из $V_{\mathbb{R}}(2m+1)$ с бесконечным стабилизатором в группе SU_2 лежит в одной орбите с некоторым многочленом из $\mathbb{R}f$ и потому имеет кратные корни. Следовательно, многочлен $x^{2m} + (-1)^m y^{2m} \in V_{\mathbb{R}}(2m+1)$ является требуемым: он не имеет кратных корней и переходит в себя под действием элемента $\text{diag}(e^{\pi i/m}; e^{-\pi i/m}) \in SU_2 \setminus \{\pm E\}$.

Часто оказывается удобным отождествлять группу SU_2 с группой $\{\lambda \in \mathbb{H} : |\lambda| = 1\}$ по умножению. Ее трехмерное неприводимое представление можно интерпретировать как тавтологическое представление $SO_3 : \mathbb{R}^3$ или как действие группы кватернионов с модулем 1 на пространстве $\mathbb{H}_0$ чисто мнимых кватернионов сопряжениями. Четырехмерное неприводимое представление группы SU_2 можно понимать как действие группы кватернионов с модулем 1 на пространстве кватернионов правыми сдвигами, а тело его эндоморфизмов есть тело операторов левых сдвигов на всевозможные кватернионы. В данных двух случаях действие группы на единичной сфере пространства представления транзитивно.

Как известно, при стереографической проекции $\mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ проективизация тавтологического представления $SU_2 : \mathbb{C}^2$ становится тавтологическим действием $SO_3 : S^2$. Разлагая на линейные множители все ненулевые многочлены комплексного пространства $V(m)$, $m \in \mathbb{N}$, можно отождествить множество его прямых с симметрической степенью $SP^{m-1}(\mathbb{C}P^1)$. При этом проективизация комплексного представления $SU_2 : V(m)$ совпадает с тавтологическим действием $SO_3 : SP^{m-1}(S^2)$, поскольку при действии элемента $g \in SU_2$ на проективном пространстве $PV(m)$ вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, соответствующий линейному множителю $\bar{a}x + \bar{b}y$, умножается слева на матрицу g . Допустим, что число m

нечетно. Тогда разложение на линейные множители любого ненулевого многочлена $f \in V_{\mathbb{R}}(m)$ вместе с множителем $ax + by$ включает в себя и $(-\bar{b}x + \bar{a}y)$; это равносильно тому, что соответствующий неупорядоченный набор из $m - 1$ точек сферы S^2 сохраняется при замене каждой точки на диаметрально противоположную ей. Если многочлен $f \in V(m) \setminus \{0\}$ удовлетворяет импликации $(ax + by) \mid f \iff (-\bar{b}x + \bar{a}y) \mid f$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$, то все числа $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что $\lambda f \in V_{\mathbb{R}}(m)$, образуют прямую в $\mathbb{C}$. Следовательно, проективизация вещественного представления $\mathrm{SO}_3: V_{\mathbb{R}}(m) \rightarrow \mathbb{CP}^{m-1}$ — это то же самое, что тавтологическое действие $\mathrm{SO}_3: SP^{\frac{m-1}{2}}(\mathbb{RP}^2)$.

§ 4. Доказательства основных результатов

В настоящем параграфе докажем теоремы 1.1–1.3.

Далее (до конца работы) будем считать, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, т. е. группа G^0 изоморфна SU_2 либо SO_3 . В обозначениях и соглашениях из § 1 имеем $L - l = \dim V_0$, $V_0 \neq V$, а числа $n_1, \dots, n_l$ — размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ (с учетом кратностей), причем каждое из них либо кратно 4, либо нечетно.

Любая собственная подалгебра $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ одномерна, а подпространство $\mathfrak{g}'V$ имеет размерность $2q(V)$. Если $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$, то $\xi V_0 = 0$, $\xi V = \xi V_0^\perp \subset V_0^\perp$, $\dim(\xi V_0^\perp) = \dim(\xi V) = 2q(V)$, а также

$$\dim(\mathrm{Ker}(\xi|_{V_0^\perp})) = \dim V_0^\perp - 2q(V) = \sum_{i=1}^l n_i - 2 \sum_{i=1}^l \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor = 2 \sum_{i=1}^l \left\{ \frac{n_i}{2} \right\}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Гомотопическая группа $\pi_3(G)$ нетривиальна, так как существует накрытие $\mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$, а группа SU_2 гомеоморфна трехмерной сфере.

Достаточно доказать теорему при дополнительном предположении, что группа G действует на V_0 тождественно. В самом деле, найдется вектор $v \in V_0$, для которого $M_v \subset V_0^\perp$. Тогда $\mathfrak{g}v = 0$, $\mathrm{Lie} G_v = \mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$, $N_v = V$, $V^{G_v} = N_v^{G_v} = M_v^\perp \supset V_0$. Если V/G — гладкое многообразие, то и $V/G_v = N_v/G_v$ — гладкое многообразие. При переходе от представления $G: V$ к представлению $G_v: V$ остаются прежними представление алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_v$ в пространстве V , подпространство V_0 и число $q(V)$. Наконец, группа G_v действует тождественно на V_0 .

В дальнейшем будем считать, что V/G — гладкое многообразие, а G действует на V_0 тождественно. Требуется доказать, что $q(V) \leq 4$.

Допустим, что существует вектор $v \in V$ с одномерным стабилизатором в G . Согласно лемме 2.3 фактор N_v/G_v является гладким многообразием. В силу следствия 2.3 имеем $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \leq 6$. Кроме того, $\dim(\mathfrak{g}v) = 2$ и $\mathfrak{g}_v V = \mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) \oplus \mathfrak{g}_v N_v$, поэтому $\dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 8$, $q(V) = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 4$.

Теперь предположим, что в пространстве V нет ни одного вектора с одномерным стабилизатором. Для любого вектора $v \in V \setminus V_0$ алгебра $\mathfrak{g}_v$ не является

одномерной и не совпадает с $\mathfrak{g}$, значит, $\mathfrak{g}_v = 0$, $\dim(\mathfrak{g}_v) = 3$. Отсюда всякое $\mathfrak{g}$ -инвариантное подпространство размерности не более 2 содержится в V_0 .

Допустим, что $q(V) > 4$. Покажем, что $\Omega = \{E\}$, т. е. произвольный оператор $g \in \Omega$ тождественный.

Если $\text{Ad}(g) = E$, то оператор g коммутирует со всеми операторами из $\mathfrak{g}$, следовательно, подпространство $(E - g)V$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Оно имеет размерность $\text{rk}(E - g) = \omega(g) \leq 2$ и потому содержится в V_0 . Отсюда $(E - g)V = (E - g)V_0 = 0$, $g = E$.

Если $\text{Ad}(g) \neq E$, то $\text{rk}(E - \text{Ad}(g)) = 2$ и $\text{rk}(E - g) = \omega(g) + 2 \leq 4$. Рассмотрим вектор $\xi \in \mathfrak{g}$, для которого $\eta := (E - \text{Ad}(g))\xi \neq 0$. Тогда

$$\eta V^g = (\eta + \text{Ad}(g)\xi(E - g))V^g = (E - g)(\xi V^g).$$

Значит, каждое из подпространств V^g и $(E - g)V$ под действием η переходит в подпространство размерности не более $\text{rk}(E - g) \leq 4$. Для оператора $g \in O(V)$ выполнено равенство $V = V^g \oplus (E - g)V$, откуда $\dim(\eta V) \leq 8$, $q(V) = \frac{1}{2} \dim(\eta V) \leq 4$. Противоречие. Тем самым мы доказали, что $\Omega = \{E\}$.

Согласно (4.1)

$$\begin{aligned} \dim V_0^\perp &\geq 2q(V) > 8, & \dim V > \dim V_0 + 8, \\ \dim(V/G) &\geq \dim V - \dim G = \dim V - 3 > \dim V_0 + 5. \end{aligned}$$

Для любого вектора $v \in V \setminus V_0$ алгебра $\mathfrak{g}_v$ тривиальна, т. е. стабилизатор G_v конечен. В силу леммы 2.5 он порожден своим пересечением с Ω и поэтому тривиален. Следовательно, все векторы из $V \setminus V_0$ лежат в главном страте, стабилизатор общего положения тривиален, орбита общего положения гомеоморфна G , а ее гомотопическая группа π_3 нетривиальна. Всякий страт в V , отличный от главного, содержится в V_0 . Значит, все страты фактора V/G , кроме главного, имеют размерность не более $\dim(V_0/G) = \dim V_0$ и коразмерность не менее $\dim(V/G) - \dim V_0 > 5$. Применяя лемму 2.2 при $k := 3$, приходим к противоречию с тем, что V/G – гладкое многообразие. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Допустим, что $q(V) \leq 2$. Рассмотрим два случая.

1. Если $q(V) = 1$, то $l = 1$ и $\lceil \frac{n_1}{2} \rceil = 1$, $n_1 = 3$.

2. Если пространство V не содержит ни одного вектора с одномерным стабилизатором в G , то ограничение любого оператора $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ на подпространство $V_0^\perp$ невырождено. В силу (4.1) числа $n_1, \dots, n_l$ кратны 4, а также $\sum_{i=1}^l n_i = \dim V_0^\perp = 2q(V) \leq 4$, откуда $l = 1$ и $n_1 = 4$.

В каждом из случаев 1, 2 пространство $V_0^\perp$ является трехмерным либо четырехмерным неприводимым представлением G^0 и на его единичной сфере группа G^0 , содержащаяся в $G[V_0^\perp]$, действует транзитивно. Пользуясь леммой 2.6, приходим к противоречию с тем, что V/G – многообразие. Значит, $q(V) = 2$, причем существует вектор $v \in V$ с одномерным стабилизатором G_v . Согласно лемме 2.3 фактор N_v/G_v является многообразием. В силу следствия 2.3 имеем $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \neq 2$. С другой стороны, $\dim(\mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}_v)) = \dim(\mathfrak{g}_v) = 2$

и $\mathfrak{g}_v V = \mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) \oplus \mathfrak{g}_v N_v$, поэтому $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) = 2q(V) - 2 = 2$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 1.1, 1.2 сразу вытекает следствие 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Предположим, что группа G изоморфна одной из групп SU_2 и SO_3 , фактор V/G является гладким многообразием, а число $m := \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ нечетно для некоторого $i \in \{1, \dots, l\}$. Тогда $n_i = 2m + 1$, поскольку $2m$ – четное число, не кратное 4. Одна из неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ имеет размерность $2m + 1$ и по лемме 3.1 содержит вектор v с одномерным коммутативным стабилизатором. Согласно лемме 2.3 фактор N_v/G_v является гладким многообразием. В силу следствия 2.3 имеем $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \leq 4$. Кроме того, $\dim(\mathfrak{g}v) = 2$ и $\mathfrak{g}_v V = \mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) \oplus \mathfrak{g}_v N_v$, откуда $\dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 6$, $q(V) = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 3$. Осталось воспользоваться следствием 1.1. Тем самым теорема доказана.

§ 5. Разбор частных случаев

В настоящем параграфе докажем теоремы 1.4–1.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Все автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$ внутренние, и, значит, подгруппа $\mathcal{Z}(G^0) = \{g \in G: \text{Ad}(g) = E\}$ пересекает все связные компоненты группы G . Поэтому достаточно доказать, что фактор действия $G^0: V$ диффеоморфен векторному пространству, причем на нем действует линейно любой ортогональный оператор в V , перестановочный с указанным действием. Далее, можно считать, что $V_0 = 0$, поскольку V_0 и $V_0^\perp$ – G -инвариантные подпространства, а действие $G^0: V_0$ тождественно. Тогда размерности неприводимых компонент представления $G^0: V$ (с учетом кратностей) суть $n_1, \dots, n_l$.

Далее для доказательства теоремы потребуется следующее вспомогательное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Для любых чисел $k \in \mathbb{N}$, $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ существует единственное вещественное число t , удовлетворяющее условиям $t + d_i \geq 0$ для любого i и $\prod_{i=1}^k (t + d_i) = d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $d_1 \leq \dots \leq d_k$. Ясно, что

$$\forall i \quad t + d_i \geq 0 \iff t \geq -d_1.$$

Ограничение полиномиальной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \rightarrow \prod_{i=1}^k (t + d_i)$ на интервал $[-d_1, +\infty)$ строго возрастает, обращается в нуль в точке $-d_1$, стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и потому принимает каждое неотрицательное значение ровно в одной точке. В частности, существует и единственно $t \in [-d_1, +\infty)$ такое, что $f(t) = d$.

Дальнейшая часть доказательства теоремы будет проходить отдельно для каждого из случаев 1)–3), указанных в ее формулировке.

Случай 1): $l = 2$, $n_1 = n_2 = 4$. Для каждой прямоугольной матрицы $A = (a_{ij})$ над телом $\mathbb{H}$ определена прямоугольная матрица $A^* := (\bar{A})^T$. Если число столбцов матрицы A_1 равно числу строк матрицы A_2 , то $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$.

Пространство V можно отождествить с пространством $\text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{H})$, в котором всякий вектор z имеет скалярный квадрат $z^* z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, а кватернион h с модулем 1, рассматриваемый как элемент группы SU_2 , действует умножением (2×1) -матриц справа на (1×1) -матрицу с единственным элементом h^{-1} , т.е. правым умножением координат вектор-столбцов на h^{-1} .

Выясним, как устроен фактор V/G^0 . Если два вектор-столбца $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $z_i, w_i \in \mathbb{H}$, лежат в одной орбите действия $G^0: V$, то $|z_i| = |w_i|$, $i = 1, 2$, и $z_1 \bar{z}_2 = w_1 \bar{w}_2$. Обратное утверждение тоже верно. В самом деле, если модули координат векторов z и w попарно равны и среди этих модулей есть нулевой, то $w \in G^0 z$, а если модули их координат попарно равны и все отличны от нуля, то $w \in G^0 z \iff z_1 \bar{z}_2 = w_1 \bar{w}_2$.

Отображение $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow (|z_1|^2; |z_2|^2; z_1 \bar{z}_2)$ постоянно на орбитах действия $G^0: V$ и разделяет их, а его образом является подмножество

$$M := \{(d_1; d_2; \lambda): d_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda \in \mathbb{H}, d_1 d_2 = |\lambda|^2\} \subset \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}.$$

Далее, отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, $(d_1; d_2; \lambda) \rightarrow (d_1 - d_2; \lambda)$ биективно: прообраз вектора $(d; \lambda) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$ совпадает с подмножеством $\{(t + d; t; \lambda): t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t + d \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t(t + d) = |\lambda|^2\} \subset M$ и согласно утверждению 5.1 состоит ровно из одного элемента. Значит, гладкое отображение

$$\pi': V \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow (|z_1|^2 - |z_2|^2; z_1 \bar{z}_2),$$

равное $\varphi \circ \pi$, сюръективно, постоянно на орбитах группы G^0 и разделяет их. Утверждение 1) теоремы доказано.

Подпространство $S \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$ всех эрмитовых кватернионных матриц содержит прямую $\mathbb{R}E$; диагональные элементы любой матрицы из S вещественны. Линейное отображение $S \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, $D \rightarrow (d_{11} - d_{22}; d_{12})$ сюръективно, имеет ядро $\mathbb{R}E$ и потому индуцирует линейный изоморфизм $S/(\mathbb{R}E) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, при помощи которого можно отождествить фактор V/G^0 с пространством $S/(\mathbb{R}E)$. Отображение факторизации $\pi': V \rightarrow S/(\mathbb{R}E)$ примет вид

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1 \bar{z}_2 \\ z_2 \bar{z}_1 & |z_2|^2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}E,$$

т.е. $z \rightarrow zz^* + \mathbb{R}E$ (ясно, что $zz^* \in S$).

Ассоциативная алгебра эндоморфизмов представления $G^0: V$ канонически отождествляется с ассоциативной алгеброй $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$, действующей на пространстве $V = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{H})$ умножениями слева. Предположим, что оператор $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$ в пространстве V ортогонален. Тогда $BB^* = E$. Если $z \in \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{H})$ — произвольный вектор, то $Bz(Bz)^* = B(zz^*)B^*$. Поскольку линейный оператор $S \rightarrow S$, $D \rightarrow BDB^* = BDB^{-1}$ переводит в себя матрицу E и прямую $\mathbb{R}E$, оператор B действует линейно на факторе $V/G^0 \cong S/(\mathbb{R}E)$.

Случай 2): $l = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$. Доказательство во многом повторяет доказательство случая 1).

Пространство V можно отождествить с пространством $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}_0$ (см. § 3), в котором всякий вектор $(z; z_0)$ имеет скалярный квадрат $|z|^2 + |z_0|^2$, а кватернион h с модулем 1, рассматриваемый как элемент группы SU_2 , действует по формуле $(z; z_0) \rightarrow (zh^{-1}; hz_0h^{-1})$.

Выясним, как устроен фактор V/G^0 . Если два вектора $(z; z_0)$ и $(w; w_0)$ из $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}_0$ лежат в одной орбите действия $G^0: V$, то $|z| = |w|$, $|z_0| = |w_0|$ и $zz_0\bar{z} = ww_0\bar{w}$. Обратное утверждение тоже верно. В самом деле, если модули координат векторов $(z; z_0)$ и $(w; w_0)$ по прямым слагаемым $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_0$ попарно равны и среди этих модулей есть нулевой, то $(w; w_0) \in G^0(z; z_0)$, а если модули их координат попарно равны и все отличны от нуля, то $(w; w_0) \in G^0(z; z_0) \iff zz_0\bar{z} = ww_0\bar{w}$.

Отображение $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}_0$, $(z; z_0) \rightarrow (|z|^2; |z_0|^2; zz_0\bar{z})$ постоянно на орбитах действия $G^0: V$ и разделяет их, а его образом является подмножество

$$M := \{(d; d_0; \lambda): d, d_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda \in \mathbb{H}_0, d^2 d_0 = |\lambda|^2\} \subset \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}_0.$$

Далее, отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, $(d; d_0; \lambda) \rightarrow (d - d_0; \lambda)$ биективно: прообраз вектора $(d; \lambda) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$ совпадает с подмножеством $\{(t + d; t; \lambda): t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t + d \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t(t + d)^2 = |\lambda|^2\} \subset M$ и согласно утверждению 5.1 состоит только из одного элемента. Значит, гладкое отображение $\pi': V \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, $(z; z_0) \rightarrow (|z|^2 - |z_0|^2; zz_0\bar{z})$, равное $\varphi \circ \pi$, сюръективно, постоянно на орбитах группы G^0 и разделяет их.

Рассмотрим произвольный эндоморфизм B представления $G^0: V$. Он переводит в себя изотипные компоненты $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_0$ этого представления, действуя на первой из них левым сдвигом на кватернион b , а на второй – скалярным оператором $b_0 E$, $b_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что $B \in O(V)$. Тогда $|b| = |b_0| = 1$. Оператор B действует на факторе $V/G^0 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$ линейным преобразованием $(d; \lambda) \rightarrow (d; b_0 b \lambda \bar{b})$: если $(z; z_0) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}_0$ – некоторый вектор, то $B(z; z_0) = (bz; b_0 z_0)$, причем $|bz|^2 - |b_0 z_0|^2 = |z|^2 - |z_0|^2$ и $(bz)(b_0 z_0)(\overline{bz}) = b_0 \cdot b(zz_0\bar{z})\bar{b}$.

Случай 3): $l = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$. Пространство V можно отождествить с пространством $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, в котором скалярное умножение имеет вид $(A_1, A_2) = \text{tr}(A_1 A_2^T)$, а группа SO_3 действует по формуле $C: A \rightarrow AC^{-1}$. Ассоциативная алгебра эндоморфизмов представления $G^0: V$ канонически отождествляется с ассоциативной алгеброй $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, действующей на пространстве $V = \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ умножениями слева. Оператор $B \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ в пространстве V ортогонален тогда и только тогда, когда $BB^T = E$, $B \in O_3$.

Далее для доказательства теоремы понадобится следующая более общая конструкция. Пусть W – конечномерное евклидово (соответственно, эрмитово) пространство над полем $\mathbb{F}$, равным $\mathbb{R}$ (соответственно, $\mathbb{C}$), а $A^* \in \text{End}(W)$ – оператор, сопряженный произвольному оператору $A \in \text{End}(W)$. В пространстве $\text{End}(W)$ над полем $\mathbb{F}$ все самосопряженные операторы образуют вещественное подпространство $S \subset \text{End}(W)$. В этом пространстве рассмотрим подмножество S_+ всех неотрицательно определенных самосопряженных операторов.

ров, а в пространстве $\text{End}(W) \oplus \mathbb{F}$ – замкнутое подмножество $M := \{(D; \lambda) \in S_+ \times \mathbb{F} : \det D = |\lambda|^2\}$.

В группе Ли $\text{GL}(W)$ над полем $\mathbb{F}$ все линейные операторы, сохраняющие скалярные произведения, образуют компактную вещественную подгруппу Ли $\text{O}(W) := \{C \in \text{End}(W) : CC^* = E\} \subset \text{GL}(W)$. В пространстве $\text{End}(W)$ компактная подгруппа Ли $\text{SO}(W) := \text{O}(W) \cap \text{SL}(W)$ действует линейно по формуле

$$\text{SO}(W) : \text{End}(W), \quad C : A \rightarrow AC^{-1}. \quad (5.1)$$

Для всякого $B \in \text{End}(W)$ оператор $\text{End}(W) \rightarrow \text{End}(W)$, $A \rightarrow BA$ перестановочен с действием (5.1).

Сформулируем теорему, являющуюся обобщением теоремы 1.4 в случае 3).

ТЕОРЕМА 5.1. *Фактор действия (5.1) диффеоморфен векторному пространству, причем на нем действует линейно любой оператор*

$$\text{End}(W) \rightarrow \text{End}(W), \quad A \rightarrow BA, \quad (5.2)$$

где $B \in \text{O}(W)$.

Следующее утверждение является известным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Отображение $\pi : \text{End}(W) \rightarrow S \oplus \mathbb{F}$, $A \rightarrow (AA^*; \det A)$ постоянно на орбитах действия (5.1) и разделяет их, а его образом является подмножество $M \subset S \oplus \mathbb{F}$.*

Очевидно, что вещественное пространство S содержит прямую $\mathbb{R}E$.

ЛЕММА 5.1. *Отображение $\varphi : M \rightarrow (S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$, $(D; \lambda) \rightarrow (D + \mathbb{R}E; \lambda)$ биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прообраз вектора $(D + \mathbb{R}E; \lambda) \in (S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$, где $D \in S$, $\lambda \in \mathbb{F}$, под действием φ совпадает с подмножеством $\{(tE + D; \lambda) : t \in \mathbb{R}, tE + D \in S_+, \det(tE + D) = |\lambda|^2\} \subset M$.

Требуется доказать, что для любых оператора $D \in S$ и числа $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ существует единственное вещественное число t , удовлетворяющее условиям $tE + D \in S_+$ и $\det(tE + D) = d$.

Оператор D в некотором ортонормированном базисе пространства W записывается матрицей $\text{diag}(d_1, \dots, d_k)$, где $k := \dim_{\mathbb{F}} W$, $d_i \in \mathbb{R}$. Если $t \in \mathbb{R}$, то

$$tE + D \in S_+ \iff \forall i \quad t + d_i \geq 0,$$

а также $\det(tE + D) = \prod_{i=1}^k (t + d_i)$. Осталось применить утверждение 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Прежде всего, фактор действия (5.1) диффеоморфен векторному пространству $(S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$, причем факторизацию можно задать формулой

$$\pi' : \text{End}(W) \rightarrow (S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}, \quad A \rightarrow (AA^* + \mathbb{R}E; \det A).$$

Чтобы это доказать, достаточно воспользоваться утверждением 5.2 и леммой 5.1, после чего положить $\pi' := \varphi \circ \pi$.

Пусть теперь $B \in O(W)$. Если $A \in \text{End}(W)$, то $BA(BA)^* = B(AA^*)B^*$, $\det(BA) = (\det B)(\det A)$. Линейный оператор $S \rightarrow S$, $D \rightarrow BDB^* = BDB^{-1}$ переводит в себя матрицу E и прямую $\mathbb{R}E$. Следовательно, оператор (5.2) действует линейно на факторе действия (5.1), диффеоморфном $(S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$. Теорема доказана.

Таким образом, нами доказана теорема 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Предположим, что группа G изоморфна одной из групп SU_2 и SO_3 , фактор ее действия $G: V$ является гладким многообразием, а представление $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ есть прямая сумма неприводимых представлений $\mathfrak{g}: V_1$ и $\mathfrak{g}: V_2$ размерностей 5 и 4 соответственно. Поскольку все неприводимые представления группы SO_3 имеют нечетную размерность, группа G на самом деле изоморфна SU_2 . Согласно лемме 3.1 найдется вектор $v \in V_1$ с нетривиальным конечным стабилизатором. В силу леммы 2.5 пересечение $G_v \cap \Omega$ содержит некоторый нетривиальный элемент $g \in G$. Кроме того, $\mathfrak{g}v \subset V_1$, $V_2 \subset N_v$, откуда $\dim((E - g)V_2) \leq \dim((E - g)N_v) = \omega(g) \leq 2$. С другой стороны, если отождествить группу SU_2 с группой $\{\lambda \in \mathbb{H}: |\lambda| = 1\}$, то $g \neq 1$, $\mathbb{H}(1 - g^{-1}) = \mathbb{H}$, $(E - g)V_2 = V_2$, что противоречит неравенству $\dim((E - g)V_2) \leq 2$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Можно считать, что подпространство V_0 тривиально, поскольку группа $G = G^0$ действует на нем тождественно.

Итак, $G: V$ – неприводимое представление размерности $n_1 = 7$. Оно совпадает с представлением $SO_3: V_{\mathbb{R}}(7)$, а его проективизация непрерывно отождествляется с тавтологическим действием $SO_3: SP^3(\mathbb{R}P^2)$. Исходя из этого, опишем фактор проективного действия $SO_3: PV_{\mathbb{R}}(7)$.

Топологическое пространство $SP^3(\mathbb{R}P^2)$ удобно понимать как фактор декартова куба единичной сферы евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ по действию конечной группы H , порожденной всевозможными перестановками векторов и сменами их знаков. Действие $H: (S^2)^3$ перестановочно с тавтологическим действием $O_3: (S^2)^3$. Кроме того, $O_3 = SO_3 \times \{\pm E\}$, а оператор $(-E)$ действует на $(S^2)^3$ так же, как и элемент группы H , меняющий знаки всех трех векторов. Следовательно, фактор пространства $SP^3(\mathbb{R}P^2)$ по действию SO_3 гомеоморфен фактору индуцированного действия группы H на факторе $(S^2)^3/O_3$. Отображение факторизации $(S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/O_3$ задается формулой

$$\rho: (S^2)^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (v_1; v_2; v_3) \rightarrow ((v_2, v_3); (v_3, v_1); (v_1, v_2)), \quad (5.3)$$

причем

$$D := \rho((S^2)^3) = \{x \in \mathbb{R}^3: A(x) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3, \quad A(x) := \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 1 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

При перестановке векторов v_1, v_2, v_3 их попарные скалярные произведения также переставляются, а при смене знака одного из этих векторов два попарных скалярных произведения меняют знак, а третье остается прежним. Значит, индуцированное действие группы H на $(S^2)^3/O_3 \cong D$ совпадает с ограничением действия $H': \mathbb{R}^3$ линейной группы H' , порожденной всевозможными перестановками координат и сменами их знаков в четном количестве, на инвариантное подмножество $D \subset \mathbb{R}^3$. Другими словами, H' – конечная группа отражений, соответствующая системе корней $\Delta := \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j : i \neq j\}$, где $\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^3$.

Подмножество $C := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \geq |x_3|\} \subset \mathbb{R}^3$ является камерой Вейля, отвечающей системе простых корней $\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2; \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \varepsilon_2 + \varepsilon_3\} \subset \Delta$ и потому пересекает каждую орбиту действия $H': \mathbb{R}^3$ ровно в одной точке. Следовательно, фактор D/H' гомеоморфен $M := C \cap D \subset \mathbb{R}^3$, откуда $(SP^3(\mathbb{R}P^2))/SO_3 \cong ((S^2)^3/O_3)/H \cong M$.

Отображения факторизации $\rho: (S^2)^3 \rightarrow (S^2)^3/O_3 \cong D$, $\theta: D \rightarrow D/H' \cong M$, $\theta': (S^2)^3 \rightarrow (S^2)^3/H \cong SP^3(\mathbb{R}P^2)$ и $\rho': SP^3(\mathbb{R}P^2) \rightarrow (SP^3(\mathbb{R}P^2))/SO_3 \cong M$ удовлетворяют равенству $\rho' \circ \theta' \equiv \theta \circ \rho$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (S^2)^3 & \xrightarrow{\rho} & D \\ \theta' \downarrow & & \downarrow \theta \\ SP^3(\mathbb{R}P^2) & \xrightarrow{\rho'} & M \end{array} \quad (5.5)$$

коммутативна.

Из определений подмножеств C и D вытекает замкнутость и выпуклость каждого из них, а значит, и их пересечения M . Поскольку камера C соответствует системе положительных корней $\{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : i < j\} \subset \Delta$, подмножество M задается системой неравенств

$$x_i + x_j \geq 0, \quad x_i - x_j \geq 0, \quad i < j, \quad (5.6)$$

$$1 + x_i \geq 0, \quad 1 - x_i \geq 0, \quad (5.7)$$

$$\delta(x) \geq 0, \quad \delta(x) := \det A(x). \quad (5.8)$$

Докажем, что точка x множества M принадлежит его границе тогда и только тогда, когда в ней по крайней мере одно из неравенств (5.6)–(5.8) обращается в равенство. Необходимость следует из того, что в левых частях этих неравенств стоят непрерывные функции. Докажем достаточность. Если $x \in \text{Int } M$, то в точке x все линейные неравенства (5.6) и (5.7) являются строгими, в частности

$$1 > x_1 > x_2 > \pm x_3, \quad 1 > x_1 > x_2 > |x_3| \geq 0, \quad x_1 > x_2|x_3| = |x_2x_3| \geq x_2x_3,$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1x_2x_3 + 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) = 2(x_2x_3 - x_1) < 0, \quad \nabla_x \delta \neq 0,$$

вследствие чего неравенство (5.8) оказывается строгим в точке x .

Допустим, что в точке $x \in M$ одно из неравенств (5.7) обращается в равенство. Тогда в этой точке обращается в равенство по крайней мере одно из неравенств (5.6). Действительно, если $x \in M$, $x_i = \pm 1$ и $\{i; j; k\} = \{1; 2; 3\}$, то

$$0 \leq \delta(x) = 2x_i x_j x_k + 1 - (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) = \pm 2x_j x_k - x_j^2 - x_k^2 = -(x_j \mp x_k)^2, \\ (x_j \mp x_k)^2 \leq 0, \quad x_j \mp x_k = 0.$$

Таким образом, фактор $(SP^3(\mathbb{R}P^2))/SO_3$ гомеоморфен выпуклому компакт-у $M = C \cap D \subset \mathbb{R}^3$, задаваемому неравенствами (5.6)–(5.8), причем ∂M есть подмножество всех векторов из M , для которых по крайней мере одно из неравенств (5.6) и (5.8) обращается в равенство:

$$\partial M = \{x \in M : (x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) \det A(x) = 0\}. \quad (5.9)$$

Снова рассмотрим исходное представление $G: V$. Для всякого подмножества $U \subset V$, замкнутого относительно умножения на числа из $\mathbb{R}^*$, будем обозначать через $PU \subset PV$ множество прямых пространства V , содержащихся в $U \cup \{0\}$.

Положим $U := \{v \in V : -v \notin Gv\} \subset V$, $F := V \setminus U = \{v \in V : -v \in Gv\} \subset V$.

Очевидно, что $GU = \mathbb{R}^*U = U$ и $GF = \mathbb{R}^*F = F$. Группа G при действии на единичной сфере $S \subset V$ переводит в себя подмножества $S \cap U$ и $S \cap F$, а при проективном действии на PV – подмножества PU и PF , причем

$$S = (S \cap U) \sqcup (S \cap F), \quad S/G = (S \cap U)/G \sqcup (S \cap F)/G, \\ PV = PU \sqcup PF, \quad PV/G = PU/G \sqcup PF/G.$$

Двулистное накрытие $S \rightarrow PV$, $v \rightarrow \mathbb{R}v$ перестановочно с действием группы G . Индуцированное отображение $S/G \rightarrow PV/G$ при ограничении на $(S \cap F)/G$ дает гомеоморфизм $(S \cap F)/G \rightarrow PF/G$, а при ограничении на $(S \cap U)/G$ – двулистное накрытие $(S \cap U)/G \rightarrow PU/G$.

В группе SU_2 каждый класс сопряженности имеет непустое пересечение с подгруппой $\mathbb{T} := \{\text{diag}(\lambda; \bar{\lambda}) : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\} \subset SU_2$. Поэтому $F = GF'$, где $F' := \{v \in V : -v \in \mathbb{T}v\} \subset V$. Кроме того, $\mathbb{R}^*F' = F'$, $PF = G(PF')$.

Многочлен $f = \sum_{|k| \leq 3} c_k x^{3+k} y^{3-k} \in V_{\mathbb{R}}(7)$ принадлежит F' тогда и только тогда, когда найдется такое число $\lambda \in \mathbb{C}$ с модулем 1, что $(\lambda^{2k} + 1)c_k = 0$ для всех k , $|k| \leq 3$. Последнее, в свою очередь, эквивалентно тому, что все числа k , удовлетворяющие условиям $|k| \leq 3$ и $c_k \neq 0$, отличны от нуля и включают в свое разложение на простые множители число 2 с одной и той же кратностью, т. е. что многочлен f принадлежит объединению комплексных подпространств $W_1 := \langle x^{3+k} y^{3-k} : |k| \in \{1; 3\} \rangle_{\mathbb{C}}$ и $W_2 := \langle x^{3+k} y^{3-k} : |k| = 2 \rangle_{\mathbb{C}}$ пространства $V(7)$.

Итак, $F' = (W_1 \cup W_2) \cap V_{\mathbb{R}}(7) = F'_1 \cup F'_2$, где $F'_i := W_i \cap V_{\mathbb{R}}(7)$. Далее, $PF' = PF'_1 \cup PF'_2$,

$$PF = G(PF') = G(PF'_1) \cup G(PF'_2). \quad (5.10)$$

Теперь опишем PF , PF' , PF'_i и $G(PF'_i)$, $i = 1, 2$, как подмножества топологического пространства $SP^3(\mathbb{R}P^2)$ с учетом гомеоморфизма SO_3 -пространств PV

и $SP^3(\mathbb{R}P^2)$. Очевидно, что равенство (5.10), выполняющееся на пространстве PV , имеет место и на $SP^3(\mathbb{R}P^2)$.

Многочлен $f \in V_{\mathbb{R}}(7)$ принадлежит $W_1 = \langle x^6; x^4y^2; x^2y^4; y^6 \rangle_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда его разложение на линейные множители вместе с любым множителем $ax + by$ включает в себя и $ax - by$; это равносильно тому, что соответствующая неупорядоченная тройка прямых в $\mathbb{R}^3$ переходит в себя при повороте на угол π вокруг вертикальной прямой. Следовательно, $PF'_1 \subset SP^3(\mathbb{R}P^2)$ – подмножество всех неупорядоченных троек прямых, переходящих в себя при повороте на угол π вокруг вертикальной прямой, а $G(PF'_1) \subset SP^3(\mathbb{R}P^2)$ – подмножество всех неупорядоченных троек прямых, переходящих в себя при повороте на угол π вокруг некоторой прямой.

Многочлен $f = \sum_{|k| \leq 3} c_k x^{3+k} y^{3-k} \in V_{\mathbb{R}}(7)$ принадлежит $W_2 = \langle x^5y; xy^5 \rangle_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} f &= c_2 x^5 y + c_{-2} x y^5 = xy(c_2 x^4 + c_{-2} y^4) = xy(c_2 x^4 + \overline{c_2} y^4) \\ &= xy(ax + by)(ax + iby)(ax - by)(ax - iby), \end{aligned} \quad (5.11)$$

причем $a^4 = c_2$, $b^4 = -\overline{c_2}$, $|a| = |b|$. Пользуясь разложением (5.11) многочлена f на линейные множители, получаем, что $PF'_2 \subset SP^3(\mathbb{R}P^2)$ – подмножество всех неупорядоченных троек прямых, одна из которых вертикальна, а две другие горизонтальны и ортогональны друг другу, т.е. всех неупорядоченных троек попарно ортогональных прямых, одна из которых вертикальна. В свою очередь, $G(PF'_2) \subset SP^3(\mathbb{R}P^2)$ – подмножество всех неупорядоченных троек попарно ортогональных прямых.

Согласно (5.10) подмножество $PF \subset SP^3(\mathbb{R}P^2)$ состоит в точности из всех неупорядоченных троек прямых, переходящих в себя при повороте на угол π вокруг некоторой прямой либо включающих в себя три попарно ортогональные прямые.

Докажем, что тройка прямых в $\mathbb{R}^3$ принадлежит PF тогда и только тогда, когда либо все три прямые лежат в одной плоскости, либо из трех попарных углов между ними найдутся два равных.

Если все три прямые лежат в одной плоскости, то при повороте на угол π вокруг прямой, ортогональной этой плоскости, каждая из них переходит в себя. Если два из трех попарных углов между ними равны, то можно выбрать на каждой прямой по вектору единичной длины так, чтобы выбранные векторы v_1, v_2, v_3 удовлетворяли равенству $(v_1, v_3) = (v_2, v_3)$. Тогда подпространство всех векторов, ортогональных векторам $v_1 + v_2$ и v_3 , нетривиально и содержит вектор $v_1 - v_2$, а значит, и некоторую прямую, проходящую через $v_1 - v_2$. Пусть R – поворот на угол π вокруг этой прямой. Ясно, что $R(v_1 - v_2) = v_1 - v_2$, $R(v_1 + v_2) = -(v_1 + v_2)$, $Rv_3 = -v_3$, $Rv_1 = -v_2$, $Rv_2 = -v_1$, $R(\mathbb{R}v_1) = \mathbb{R}v_2$, $R(\mathbb{R}v_2) = \mathbb{R}v_1$, $R(\mathbb{R}v_3) = \mathbb{R}v_3$.

Обратно, предположим, что все три попарных угла между прямыми $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2, \mathbb{R}v_3$, где $v_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, различны. Тогда одна из прямых $\mathbb{R}v_i$ неортогональна двум другим. Можно считать, что

$$(v_1, v_3) \neq 0, \quad (v_2, v_3) \neq 0. \quad (5.12)$$

В частности, указанные три прямые не могут быть попарно ортогональными. Допустим, что ортогональный нескаларный оператор R переводит в себя их неупорядоченную тройку. Он сохраняет углы между прямыми, откуда $R(\mathbb{R}v_i) = \mathbb{R}v_i$, $Rv_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. Согласно (5.12) имеем $\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, т.е. ограничение оператора R на линейную оболочку векторов v_1, v_2, v_3 есть скалярный оператор. Следовательно, прямые $\mathbb{R}v_i$, $i = 1, 2, 3$ лежат в одной плоскости.

Итак, $PF \subset SP^3(\mathbb{R}P^2)$ – подмножество всех неупорядоченных троек прямых, лежащих в одной плоскости либо образующих три попарных угла, среди которых найдутся два равных. Теперь, пользуясь коммутативной диаграммой (5.5), найдем образ этого подмножества при отображении факторизации $\rho': SP^3(\mathbb{R}P^2) \rightarrow M$. Легко видеть, что $(\theta')^{-1}(PF) \subset (S^2)^3$ – подмножество всех упорядоченных троек векторов $v_1, v_2, v_3 \in S^2$, линейно зависимых либо удовлетворяющих равенству

$$((v_1, v_2)^2 - (v_2, v_3)^2)((v_2, v_3)^2 - (v_3, v_1)^2)((v_3, v_1)^2 - (v_1, v_2)^2) = 0.$$

Далее,

$$\rho((\theta')^{-1}(PF)) = \{x \in D: (x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) \det A(x) = 0\} \subset D.$$

Учитывая равенство $M = C \cap D$ и формулу (5.9), получим $\rho((\theta')^{-1}(PF)) \cap C = \partial M$. Образ H' -инвариантного подмножества $\rho((\theta')^{-1}(PF))$ при отображении $\theta: D \rightarrow D/H' \cong M$ совпадает с $\rho((\theta')^{-1}(PF)) \cap C = \partial M$. Поэтому

$$\rho'(PF) = \rho' \circ \theta'((\theta')^{-1}(PF)) = \theta \circ \rho((\theta')^{-1}(PF)) = \partial M.$$

Из вышеизложенного можно заключить, что существует гомеоморфизм $PV/G \rightarrow M$, переводящий подмножества PF/G и PU/G соответственно в ∂M и $\text{Int } M$. Подмножество $\text{Int } M \subset \mathbb{R}^3$ выпукло как внутренность выпуклого подмножества $M \subset \mathbb{R}^3$, а значит, односвязно. Гомеоморфное ему подмножество $PU/G \subset PV/G$ также односвязно. Напомним, что отображение $S/G \twoheadrightarrow PV/G$, $Gv \rightarrow G(\mathbb{R}v)$ при ограничении на $(S \cap F)/G$ дает гомеоморфизм $(S \cap F)/G \rightarrow PF/G$, а при ограничении на $(S \cap U)/G$ – двулистное накрытие $(S \cap U)/G \twoheadrightarrow PU/G$. Данное накрытие тривиально, поскольку его база PU/G односвязна. Отсюда фактор S/G гомеоморфен топологическому пространству $(M \times \{0; 1\})/\{(x, 0) \sim (x, 1): x \in \partial M\}$. Кроме того, имеется гомеоморфизм из трехмерного замкнутого шара в подмножество $M \subset \mathbb{R}^3$, переводящий граничную сферу в ∂M . Следовательно, фактор сферы S по действию G гомеоморфен несвязному объединению двух экземпляров трехмерного замкнутого шара с отождествлением двух экземпляров каждой граничной точки. Таким образом, $S/G \cong S^3$ и $V/G \cong \mathbb{R}^4$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.7. Аналогично доказательству теоремы 1.6 можно считать, что $V_0 = 0$ и $G: V$ – неприводимое представление размерности $n_1 = 8$, т.е. тавтологическое представление $\text{SU}_2: V(4)$. Достаточно доказать, что фактор единичной сферы $S \subset V$ по действию G гомеоморфен S^4 .

Будем обозначать через S^3 единичную сферу эрмитова пространства $\mathbb{C}^2 = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(v_1, v_2) := v_1^* v_2$, а через U – подмножество $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3 \subset (\mathbb{C}^2)^3$.

Каждый многочлен из $V(4) \setminus \{0\}$ разлагается на линейные множители единственным образом с точностью до их перестановки и умножения на комплексные числа, произведение которых равно 1. Следовательно, непрерывное отображение $\pi: U \rightarrow V \setminus \{0\}$, определенное по формуле $(\pi(v_1; v_2; v_3))(v) := \prod_{j=1}^3 (v_j, v)$, $v \in \mathbb{C}^2$, сюръективно, а его слои суть орбиты действия на U группы H_0 всех преобразований $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\lambda_1 v_{\sigma(1)}; \lambda_2 v_{\sigma(2)}; \lambda_3 v_{\sigma(3)})$, где $\sigma \in S_3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. В соответствии с действием $\text{SU}_2: U, g: (v_1; v_2; v_3) \rightarrow (gv_1; gv_2; gv_3)$ отображение π является отображением G -множеств U и $V \setminus \{0\}$.

Непрерывная функция $r: U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow \prod_{j=1}^3 \|v_j\|$ постоянна на орбитах действий $H_0: U$ и $G: U$. Поэтому существует непрерывная функция $r': V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, постоянная на орбитах действия $G: (V \setminus \{0\})$ и такая, что $r' \circ \pi \equiv r$. Имеем

$$r(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) = \left(\prod_{j=1}^3 |\lambda_j| \right) r(v_1; v_2; v_3),$$

$$\pi(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) = \left(\prod_{j=1}^3 \overline{\lambda_j} \right) \pi(v_1; v_2; v_3),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ и $v_j \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, откуда $r'(\lambda f) = |\lambda| r'(f)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и $f \in V \setminus \{0\}$. Значит, G -инвариантное подмножество $S' := (r')^{-1}(1) \subset V \setminus \{0\}$ пересекает каждое подмножество $(\mathbb{R}_{>0})v$, $v \in V \setminus \{0\}$, ровно в одной точке, а расслоение $V \setminus \{0\} \rightarrow S$, $v \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ при ограничении на S' дает гомеоморфизм G -пространств S' и S .

Следовательно, $S/G \cong S'/G$, и задача свелась к доказательству соотношения $S'/G \cong S^4$.

Заметим, что $\pi^{-1}(S') = r^{-1}(1) = H_0((S^3)^3)$, $S' = \pi(H_0((S^3)^3)) = \pi((S^3)^3)$. Слои отображения $\pi|_{(S^3)^3}$ суть пересечения орбит действия $H_0: U$ с подмножеством $(S^3)^3$, т.е. орбиты действия на $(S^3)^3$ группы всех преобразований $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\lambda_1 v_{\sigma(1)}; \lambda_2 v_{\sigma(2)}; \lambda_3 v_{\sigma(3)})$, где $\sigma \in S_3$, $\lambda_j \in \mathbb{T}$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Поэтому фактор S'/G гомеоморфен фактору действия на $(S^3)^3$ группы H всех преобразований

$$(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\lambda_1 g v_{\sigma(1)}; \lambda_2 g v_{\sigma(2)}; \lambda_3 g v_{\sigma(3)}),$$

$$\sigma \in S_3, \quad g \in \text{SU}_2, \quad \lambda_j \in \mathbb{T}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (5.13)$$

Теперь осталось доказать, что $(S^3)^3/H \cong S^4$.

Канонический гомоморфизм $\text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_3$ и тавтологическое действие $\text{SO}_3: S^2$ определяют действие $H: (S^2)^3$, при котором преобразование (5.13) переводит точку $(v_1; v_2; v_3)$, где $v_j \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, в точку $(g v_{\sigma(1)}; g v_{\sigma(2)}; g v_{\sigma(3)})$. Композиция отображения $S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{C}P^1$, $v \rightarrow \mathbb{C}v$ и стереографической проекции $\mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ (известная как расслоение Хопфа $S^3 \twoheadrightarrow S^2$) индуцирует отображение $\theta': (S^3)^3 \rightarrow (S^2)^3$, перестановочное с действием H .

Фактор действия $H: (S^2)^3$ гомеоморфен фактору тавтологического действия $SO_3: SP^3(S^2)$. Напомним, что фактор тавтологического действия $O_3: (S^2)^3$ гомеоморфен выпуклому компактному подмножеству $D \subset \mathbb{R}^3$, определенному в (5.4), причем отображение факторизации $\rho: (S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/O_3 \cong D$ задается формулой (5.3). Фактор тавтологического действия $O_3: SP^3(S^2)$ гомеоморфен фактору ограничения действия линейной группы всевозможных перестановок координат в $\mathbb{R}^3$ на инвариантное подмножество $D \subset \mathbb{R}^3$, т.е. выпуклому компактному $M := \{x \in D: x_1 \geq x_2 \geq x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

Орбита действия $O_3: SP^3(S^2)$, содержащая неупорядоченную тройку векторов $v_1, v_2, v_3 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, есть объединение орбит неупорядоченных троек $(v_1; v_2; v_3)$ и $(-v_1; -v_2; -v_3)$ для действия $SO_3: SP^3(S^2)$. Эти орбиты совпадают тогда и только тогда, когда либо векторы v_1, v_2, v_3 лежат в одной плоскости, либо из трех попарных углов между ними найдутся два равных. Следовательно, прообраз точки $x \in M \subset \mathbb{R}^3$ при естественном отображении $(SP^3(S^2))/SO_3 \twoheadrightarrow (SP^3(S^2))/O_3 \cong M$ состоит из одной точки, если $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \det A(x) = 0$ (что равносильно включению $x \in \partial M$), и из двух точек в противном случае. Значит, указанное отображение при ограничении на прообраз ∂M дает гомеоморфизм, а при ограничении на прообраз $\text{Int } M$ — двулистное накрытие. Данное накрытие тривиально, поскольку его база $\text{Int } M$ односвязна. Отсюда имеем

$$(SP^3(S^2))/SO_3 \cong \widehat{M} := (M \times \{0; 1\})/\{(x, 0) \sim (x, 1): x \in \partial M\},$$

$$(S^2)^3/H \cong (SP^3(S^2))/SO_3 \cong \widehat{M}. \quad (5.14)$$

Можно рассматривать ∂M как подмножество пространства $\widehat{M}$: в последнем два экземпляра границы ∂M склеены в один.

Пусть $\widehat{\rho}: (S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/H \cong \widehat{M}$ — отображение факторизации. Отображение $\theta: (S^3)^3 \twoheadrightarrow \widehat{M}$, равное $\widehat{\rho} \circ \theta'$, постоянно на орбитах действия $H: (S^3)^3$ и, более того,

$$\forall p \in (S^3)^3 \quad \theta^{-1}(\theta(p)) = (\theta')^{-1}(H\theta'(p)) = (\theta')^{-1}(\theta'(Hp)), \quad (5.15)$$

так как θ' — отображение H -пространств $(S^3)^3$ и $(S^2)^3$. Ясно, что

$$\forall p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3 \quad (\theta')^{-1}(\theta'(p)) = \{(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3): \lambda_j \in \mathbb{T}\}. \quad (5.16)$$

Для векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2 = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{C})$ обозначим через $|v_1, v_2|$ определитель матрицы $(v_1 | v_2) \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

Рассмотрим непрерывные функции $\theta'_j, \theta_j: (S^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, определенные формулами

$$\theta'_1(v_1; v_2; v_3) := (v_3, v_1)|v_3, v_2| + (v_3, v_2)|v_3, v_1|, \quad \theta'_2(v_1; v_2; v_3) := |v_1, v_2|^2,$$

$$\theta_j(v_1; v_2; v_3) := \theta'_j(v_1; v_2; v_3)\theta'_j(v_2; v_3; v_1)\theta'_j(v_3; v_1; v_2), \quad j = 1, 2.$$

Отображения θ_1 и θ_2 постоянны на орбитах действия $H: (S^3)^3$, т.е.

$$\forall j = 1, 2, \quad \forall p \in (S^3)^3 \quad \theta_j|_{Hp} \equiv \theta_j(p). \quad (5.17)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \forall j = 1, 2, \quad \forall p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{T} \\ \theta_j(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2j} \theta_j(p). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Выясним, как устроены подмножества $\theta_1^{-1}(0), \theta_2^{-1}(0) \subset (S^3)^3$.

Пусть $I'_1, I''_1, I_2 \subset \partial M \subset \widehat{M}$ – образы непрерывных инъективных отображений

$$\begin{aligned} \gamma'_1: \left[-1; -\frac{1}{2}\right] &\rightarrow \partial M, & t &\rightarrow (2t^2 - 1; t; t), \\ \gamma''_1: \left[-\frac{1}{2}; 1\right] &\rightarrow \partial M, & t &\rightarrow (t; t; 2t^2 - 1), \\ \gamma_2: [-1; 1] &\rightarrow \partial M, & t &\rightarrow (1; t; t) \end{aligned}$$

соответственно и $I_1 := I'_1 \cup I''_1 \subset \partial M \subset \widehat{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Справедливы равенства $\theta_j^{-1}(0) = \theta^{-1}(I_j)$, $j = 1, 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\theta_2^{-1}(0) \subset (S^3)^3$ – это подмножество всех троек векторов из $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, среди которых найдутся два пропорциональных, т.е. прообраз под действием θ' подмножества всех троек векторов двумерной сферы S^2 , по крайней мере два из которых равны. Указанное подмножество в $(S^2)^3$ совпадает с $(\widehat{\rho})^{-1}(I_2)$.

Далее, для точки $p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3$ равенство $\theta'_1(p) = 0$ эквивалентно тому, что $\theta'(p) \in (S^2)^3$ есть тройка векторов, первые два из которых симметричны относительно прямой, натянутой на третий. Доказательство этого факта сводится к рассмотрению случая $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ при помощи оператора из SU_2 , переводящего вектор v_3 в вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (такой оператор существует). Если же $v_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, 3$, $a_3 = 1$, $b_3 = 0$, то $\theta'_1(p) = a_1 b_2 + a_2 b_1$, что влечет требуемое.

Значит, подмножество $\theta_1^{-1}(0) \subset (S^3)^3$ совпадает с прообразом под действием θ' подмножества всех троек векторов сферы S^2 , какие-либо два из которых симметричны относительно прямой, натянутой на третий. Данное подмножество в $(S^2)^3$ и есть $(\widehat{\rho})^{-1}(I_1)$.

Осталось воспользоваться соотношением $\theta = \widehat{\rho} \circ \theta'$ и получить нужные равенства. (Всюду при доказательстве использовался гомеоморфизм (5.14).) Предложение доказано.

Из определений подмножеств $I'_1, I''_1, I_2 \subset \partial M$ вытекает, что указанные подмножества гомеоморфны отрезку, причем

$$I'_1 \cap I''_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}, \quad I'_1 \cap I_2 = \{(1; -1; -1)\}, \quad I''_1 \cap I_2 = \{(1; 1; 1)\}.$$

Следовательно, $I_1 \cong I_2 \cong [0, 1]$ и $I_1 \cap I_2 = \{(1; 1; 1); (1; -1; -1)\}$. Существует гомеоморфизм из подмножества $M \subset \mathbb{R}^3$ в единичный замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^3$, переводящий ∂M в единичную сферу S^2 , а подмножества

$I_{1,2} \subset \partial M$ – в полуокружности соответственно $\{y \in \mathbb{R}^3: y_2 = \pm\sqrt{1-y_1^2}, y_3 = 0\} \subset S^2$. В свою очередь, существует гомеоморфизм из пространства $\widehat{M}$ в сферу $S^3 = \{y \in \mathbb{R}^4: (y, y) = 1\}$, переводящий подмножество ∂M в двумерную сферу $\{y \in S^3: y_4 = 0\}$, а подмножества $I_{1,2}$ – в полуокружности соответственно $\{y \in \mathbb{R}^4: y_2 = \pm\sqrt{1-y_1^2}, y_3 = y_4 = 0\}$. Этот гомеоморфизм позволяет отождествить пространство $\widehat{M}$ со сферой S^3 , подмножества I_1 и I_2 – с полуокружностями в S^3 , задаваемыми уравнениями $y_2 = \sqrt{1-y_1^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-y_1^2}$ соответственно, а отображение θ рассматривать как отображение $\theta: (S^3)^3 \rightarrow S^3$, удовлетворяющее условиям $\theta_j^{-1}(0) = \theta^{-1}(I_j)$, $j = 1, 2$.

Из формул (5.15)–(5.18) можно заключить, что:

- 1) отображения $(S^3)^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p \rightarrow |\theta_j(p)|$, $j = 1, 2$, и $(S^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $p \rightarrow (\theta_1(p))^2(\theta_2(p))$ постоянны на слоях θ , а значит, имеют вид соответственно $\alpha_1 \circ \theta$, $\alpha_2 \circ \theta$, $\alpha \circ \theta$ для непрерывных отображений $\alpha_1, \alpha_2: S^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $\alpha: S^3 \rightarrow \mathbb{C}$;
- 2) если $K \subset S^3 \times \mathbb{C}^2$ – образ непрерывного отображения $\tilde{\theta}: (S^3)^3 \rightarrow S^3 \times \mathbb{C}^2$, $p \rightarrow (\theta(p); \theta_1(p); \theta_2(p))$, то

$$\forall p \in (S^3)^3 \quad K \cap (\{\theta(p)\} \times \mathbb{C}^2) = \{(\theta(p); \lambda\theta_1(p); \lambda^2\theta_2(p)): \lambda \in \mathbb{T}\}. \quad (5.19)$$

ЛЕММА 5.2. Фактор $(S^3)^3/H$ гомеоморфен пространству K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\tilde{\theta}: (S^3)^3 \rightarrow K$ постоянно на орбитах действия $H: (S^3)^3$. Осталось доказать, что оно их разделяет.

Предположим, что $p_0, p \in (S^3)^3$ и $\tilde{\theta}(p_0) = \tilde{\theta}(p)$, т.е. $\theta(p_0) = \theta(p)$, $\theta_1(p_0) = \theta_1(p)$, $\theta_2(p_0) = \theta_2(p)$. Нужно доказать, что $p \in Hp_0$. Последнее эквивалентно тому, что многочлены $\pi(p_0), \pi(p) \in S'$ принадлежат одной орбите действия $G: S'$.

Будем считать, что $p_0 = (v_1; v_2; v_3)$ и $p = (\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3)$, где $\lambda_j \in \mathbb{T}$; согласно (5.15) и (5.16) общий случай сводится к этому заменой точек p_0 и p точками соответственно hp_0 и p для некоторого $h \in H$.

Ясно, что $\pi(p) = \bar{\lambda}_0 \pi(p_0)$, где $\lambda_0 := \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \in \mathbb{T}$. В силу (5.18) имеем $\theta_1(p_0) = \theta_1(p) = \lambda_0^2 \theta_1(p_0)$, т.е. либо $\lambda_0^2 = 1$, либо $\theta_1(p_0) = 0$. Если $\lambda_0 = \pm 1$, то многочлен $\pi(p_0)$ переходит в $\pi(p)$ под действием элемента $\pm E \in \text{SU}_2$.

Допустим, что $\theta_1(p_0) = 0$. Поскольку группа H включает в себя всевозможные перестановки трех векторов сферы S^3 , а тавтологическое действие $\text{SU}_2: S^3$ транзитивно, можно считать, что $\theta'_1(v_1; v_2; v_3) = 0$, $v_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, 3$, $a_3 = 1$, $b_3 = 0$.

Имеем $a_1 b_2 + a_2 b_1 = \theta'_1(p_0) = 0$. Значит,

$$\theta_2(p_0) = b_1^2 b_2^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = -4 b_1^2 b_2^2 (a_1 b_2)(a_2 b_1) = -4(a_1 a_2)(b_1 b_2)^3,$$

а коэффициенты многочлена $\pi(p_0)$, расположенные в порядке убывания степени вхождения в моном первой координаты, суть $(\overline{a_1 a_2}), 0, (\overline{b_1 b_2}), 0$. Согласно (5.18) имеем $\theta_2(p_0) = \theta_2(p) = \lambda_0^4 \theta_2(p_0)$, $(a_1 a_2)(b_1 b_2)^3 = \lambda_0^4 (a_1 a_2)(b_1 b_2)^3$. Таким образом,

$$|a_1 a_2| = |\lambda_0 a_1 a_2|, \quad |b_1 b_2| = |\lambda_0 b_1 b_2|, \quad (a_1 a_2)(b_1 b_2)^3 = (\lambda_0 a_1 a_2)(\lambda_0 b_1 b_2)^3.$$

Следовательно, найдется число $\lambda \in \mathbb{T}$, для которого $(\lambda_0 a_1 a_2) = \lambda^3(a_1 a_2)$ и $(\lambda_0 b_1 b_2) = \lambda^{-1}(b_1 b_2)$. Заметим, что элемент $g := \text{diag}(\lambda; \bar{\lambda}) \in \text{SU}_2$ переводит многочлен $\pi(p_0)$ в многочлен с коэффициентами $(\overline{\lambda^3 a_1 a_2}, 0, \overline{\lambda^{-1} b_1 b_2}, 0)$, т.е. $g\pi(p_0) = \bar{\lambda}_0 \pi(p_0) = \pi(p)$. Лемма доказана.

Напомним, что требовалось доказать соотношение $(S^3)^3/H \cong S^4$. Теперь задача свелась к доказательству того, что $K \cong S^4$.

Ясно, что $I_j = \alpha_j^{-1}(0)$, $j = 1, 2$. Рассмотрим подмножества $U_1 := S^3 \setminus I_1$, $U_2 := S^3 \setminus I_2$ и $U := U_1 \cap U_2 = \alpha^{-1}(\mathbb{C}^*)$ сферы S^3 . Подмножество $U = S^3 \setminus (I_1 \cup I_2) = \{y \in S^3 : y_1^2 + y_2^2 < 1\}$ гомеоморфно декартову произведению открытого круга на окружность. Отображение $\alpha|_U : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ индуцирует гомоморфизм $\alpha_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$, причем $\pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Гомоморфизм $\alpha_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что образ гомоморфизма α_* содержит образующий элемент группы $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

Фиксируем вещественные числа a и b такие, что $a > b > 0$ и $a^2 + b^2 = 1$, и векторы $v_{1,2} := \begin{pmatrix} a \\ \pm b \end{pmatrix} \in S^3$. Далее, произвольным числам $t \in [0, 1]$, $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ сопоставим вектор $v_3(\beta; t) := \begin{pmatrix} \cos \beta \\ e^{2\pi i t} \sin \beta \end{pmatrix} \in S^3$ (очевидно, непрерывно зависящий от этих чисел).

Непрерывная функция

$$\theta_3 : (S^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\theta'_1(v_2; v_3; v_1)\theta'_1(v_3; v_1; v_2))^2 \overline{(\theta_2(v_1; v_2; v_3))}$$

удовлетворяет соотношению

$$\forall p \in (S^3)^3 \quad (\alpha \circ \theta)(p) = (\theta'_1(p))^2 \theta_3(p). \quad (5.20)$$

Заметим, что $\theta'_1(v_2; v_3(0; 0); v_1) = -b(3a^2 - b^2)$, $\theta'_1(v_3(0; 0); v_1; v_2) = b(3a^2 - b^2)$, $\theta_2(v_1; v_2; v_3(0; 0)) = 4a^2 b^6$, откуда $\theta_3(v_1; v_2; v_3(0; 0)) \neq 0$. Открытое подмножество $\theta_3^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset (S^3)^3$, включающее в себя точку $(v_1; v_2; v_3(0; 0))$, содержит и односвязное подмножество $\{(v_1; v_2; v_3(\beta; t)) : t \in [0, 1], \beta \in [0, \beta_0]\} \subset (S^3)^3$ для некоторого $\beta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Следовательно, петля $\gamma : [0, 1] \rightarrow (S^3)^3$, $t \mapsto (v_1; v_2; v_3(\beta_0; t))$ стягиваема в $\theta_3^{-1}(\mathbb{C}^*)$, а значит, $(\theta_3 \circ \gamma)([0, 1]) \subset \mathbb{C}^*$ и $[\theta_3 \circ \gamma] = 0 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Кроме того, $(\theta'_1 \circ \gamma)([0, 1]) \subset \mathbb{C}^*$ и $[\theta'_1 \circ \gamma] = 1 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$, поскольку

$$\begin{aligned} \theta'_1(\gamma(t)) &= (a \cos \beta_0 + b(\sin \beta_0)e^{-2\pi i t})(-b \cos \beta_0 - a(\sin \beta_0)e^{2\pi i t}) \\ &\quad + (a \cos \beta_0 - b(\sin \beta_0)e^{-2\pi i t})(b \cos \beta_0 - a(\sin \beta_0)e^{2\pi i t}) \\ &= -2 \cos \beta_0 \sin \beta_0 (a^2 e^{2\pi i t} + b^2 e^{-2\pi i t}) \end{aligned}$$

и $|a^2 e^{2\pi i t}| > |b^2 e^{-2\pi i t}|$ для $t \in [0, 1]$.

Согласно (5.20) имеем $(\alpha \circ \theta \circ \gamma)([0, 1]) \subset \mathbb{C}^*$ и $[\alpha \circ \theta \circ \gamma] = 2[\theta'_1 \circ \gamma] + [\theta_3 \circ \gamma] = 2 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Другими словами, петля $\theta \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow S^3$ целиком содержится в подмножестве $U \subset S^3$, а образ элемента $[\theta \circ \gamma] \in \pi_1(U)$ при гомоморфизме α_* равен $2 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

Пусть $g := \text{diag}(i; -i) \in \text{SU}_2$. Для любого $t \in [0, \frac{1}{2}]$ имеем $gv_1 = iv_2$, $gv_2 = iv_1$, $gv_3(\beta_0; t) = iv_3(\beta_0; t + \frac{1}{2})$, откуда $(\theta \circ \gamma)(t + \frac{1}{2}) = (\theta \circ \gamma)(t)$. Значит, $[\theta \circ \gamma] = 2c$, где $c \in \pi_1(U)$. Элемент c является искомым: $2\alpha_*(c) = \alpha_*(2c) = \alpha_*[\theta \circ \gamma] = 2 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$, $\alpha_*(c) = 1 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Предложение доказано.

Непрерывное отображение $U \rightarrow \mathbb{C}^*$, $y \rightarrow y_3 + y_4 i$ также индуцирует изоморфизм $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$. Можем считать, что он совпадает с α_* , сделав при необходимости замену координат $(y_1; y_2; y_3; y_4) \rightarrow (y_1; y_2; y_3; -y_4)$: группы $\pi_1(U)$ и $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ изоморфны группе $\mathbb{Z}$, имеющей только два автоморфизма.

Существует непрерывное отображение $s: U \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенству $\text{Arg } \alpha(y) = s(y) + \text{Arg}(y_3 + y_4 i)$ для всякого $y \in U$.

Перейдем к построению гомеоморфизма пространства K и сферы S^4 . Последнюю будет удобно понимать как сферу $\{(z_0; z_1; z_2) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}^2: z_0^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ пространства $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}^2$.

Отображение $\varphi_0: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданное формулой

$$\varphi_0(z_1; z_2) := \begin{cases} \left(\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}; \frac{2 \text{Re}(z_1^2 \bar{z}_2)}{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}; \frac{2 \text{Im}(z_1^2 \bar{z}_2)}{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \right), & z_1 \neq 0, \\ (|z_2|; 0; 0), & z_1 = 0, \end{cases}$$

непрерывно, сюръективно, сохраняет длины векторов соответствующих евклидовых пространств, а его слои суть орбиты действия $\mathbb{T}: \mathbb{C}^2$, $\lambda: (z_1; z_2) \rightarrow (\lambda z_1; \lambda^2 z_2)$. Прообразы подмножеств $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{(0; 0)\}$ и $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{(0; 0)\}$ пространства $\mathbb{R}^3$ под действием φ_0 совпадают с подмножествами $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ соответственно. Следовательно, отображение $\varphi: S^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, $(z_0; z_1; z_2) \rightarrow (z_0; \varphi_0(z_1; z_2))$ непрерывно, его образом является единичная сфера S^3 пространства $\mathbb{R}^4$, а слоями – орбиты действия $\mathbb{T}: S^4$, $\lambda: (z_0; z_1; z_2) \rightarrow (z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2)$, т. е.

$$\forall z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4 \quad \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \{(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2): \lambda \in \mathbb{T}\}. \quad (5.21)$$

Кроме того, $\varphi^{-1}(I_j) = \{(z_0; z_1; z_2) \in S^4: z_j = 0\}$ и $\varphi^{-1}(U_j) = \{(z_0; z_1; z_2) \in S^4: z_j \neq 0\}$, $j = 1, 2$.

Существует непрерывная функция $s_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, равная нулю в некоторой (односторонней) окрестности точки 1 и удовлетворяющая равенству $s_0(t) + s_0(1 - t) = 1$ для всех $t \in [0, 1]$. Пусть $j = 1, 2$, а $s_j: \varphi^{-1}(U_j) \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, принимающая в точке $z = (z_0; z_1; z_2) \in \varphi^{-1}(U_j)$ значение

$$s_j(z) := \begin{cases} \frac{(-1)^j j}{2} s(\varphi(z)) s_0\left(\frac{|z_j|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right), & z \in \varphi^{-1}(U), \\ 0, & z \in \varphi^{-1}(U_j \setminus U). \end{cases}$$

Функция s_j непрерывна: она равна нулю в некоторой окрестности подмножества $\varphi^{-1}(U_j \setminus U)$, поскольку для любой точки z этого подмножества число $\frac{|z_j|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ равно 1. Функция

$$\varphi_j: S^4 \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = (z_0; z_1; z_2) \rightarrow \begin{cases} \alpha_j(\varphi(z)) \frac{z_j}{|z_j|} \exp(-is_j(z)), & z_j \neq 0, \\ 0, & z_j = 0, \end{cases}$$

непрерывна, так как $\alpha_j|_{I_j} \equiv 0$.

Если $z = (z_0; z_1; z_2) \in \varphi^{-1}(U)$ и $y := \varphi(z) \in S^3$, то $s_0\left(\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right) + s_0\left(\frac{|z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right) = 1$, $s_2(z) - 2s_1(z) = s(y)$, комплексное число $y_3 + y_4i$ равно $\frac{2z_1^2 \bar{z}_2}{|z_1|\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}$ и

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Arg}(\varphi_1(z)) - \operatorname{Arg}(\varphi_2(z)) &= \operatorname{Arg}(z_1^2 \bar{z}_2) + (s_2(z) - 2s_1(z)) \\ &= \operatorname{Arg}(y_3 + y_4i) + s(y) = \operatorname{Arg} \alpha(y). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Рассмотрим непрерывное отображение $\tilde{\varphi}: S^4 \rightarrow S^3 \times \mathbb{C}^2$, $z \rightarrow (\varphi(z); \varphi_1(z); \varphi_2(z))$.

ЛЕММА 5.3. *Отображение $\tilde{\varphi}$ инъективно, а его образ есть K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K' := \tilde{\varphi}(S^4) \subset S^3 \times \mathbb{C}^2$. Из (5.21) следует, что

$$\begin{aligned} \forall j = 1, 2, \quad \forall z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4, \quad \forall \lambda \in \mathbb{T} \quad \varphi_j(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2) &= \lambda^j \varphi_j(z), \\ \forall z \in S^4 \quad K' \cap (\{\varphi(z)\} \times \mathbb{C}^2) &= \{(\varphi(z); \lambda \varphi_1(z); \lambda^2 \varphi_2(z)): \lambda \in \mathbb{T}\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Значит, любые две точки одного и того же слоя отображения $\tilde{\varphi}$ имеют вид $z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4$ и $(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2) \in S^4$, $\lambda \in \mathbb{T}$, причем $\lambda^j \varphi_j(z) = \varphi_j(z)$, $j = 1, 2$. Однако $\varphi_j(z) = 0 \iff \alpha_j(\varphi(z)) = 0 \iff \varphi(z) \in I_j \iff z_j = 0$, откуда $\lambda^j z_j = z_j$, $j = 1, 2$, т. е. $(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2) = z$. Тем самым доказана инъективность отображения $\tilde{\varphi}$.

Пусть $y \in S^3$. Докажем, что подмножества $K_y := \{w \in \mathbb{C}^2: (y; w) \in K\} \subset \mathbb{C}^2$ и $K'_y := \{w \in \mathbb{C}^2: (y; w) \in K'\} \subset \mathbb{C}^2$ совпадают.

Найдутся точки $p \in (S^3)^3$ и $z \in S^4$ такие, что $\theta(p) = \varphi(z) = y$. В силу соотношений (5.19) и (5.23) подмножества K_y и K'_y являются орбитами действия $\mathbb{T}: \mathbb{C}^2$, $\lambda: (w_1; w_2) \rightarrow (\lambda w_1; \lambda^2 w_2)$, содержащими точки $(\theta_1(p); \theta_2(p))$ и $(\varphi_1(z); \varphi_2(z))$ соответственно. Заметим, что $|\theta_j(p)| = \alpha_j(y) = |\varphi_j(z)|$, $j = 1, 2$, а если $\alpha_1(y), \alpha_2(y) \neq 0$, то аргумент числа $(\varphi_1(z))^2 \overline{(\varphi_2(z))}$ согласно (5.22) равен аргументу числа $\alpha(y) = (\theta_1(p))^2 \overline{(\theta_2(p))}$. Поэтому $K_y = K'_y$.

Ввиду произвольного выбора точки $y \in S^3$ подмножество $K \subset S^3 \times \mathbb{C}^2$ совпадает с $K' = \tilde{\varphi}(S^4)$. Лемма доказана.

Теперь, когда построен гомеоморфизм $\tilde{\varphi}: S^4 \rightarrow K$, теорема 1.7 полностью доказана.

Список литературы

1. О. Г. Стырт, “О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой”, Тр. ММО, **70**, УРСС, М., 2009, 235–287; англ. пер.: O. G. Styrty, “On the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2009, 171–206.

О. Г. СТЫРТ (O. G. STYRT)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: oleg_styrt@mail.ru

Поступило в редакцию

14.09.2009