Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Касательные граничные значения преобразований Лапласа. Применение к аппроксимации типа Мюнца–Саса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 177–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/im423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 09:40:12

УДК 517.5

А. М. Седлецкий

Касательные граничные значения преобразований Лапласа. Применение к аппроксимации типа Мюнца–Саса

Рассматриваются преобразования Лапласа (ПЛ) функций из $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1 < q \leq 2$, с медленно меняющимся весом. Доказано, что при определенном условии на вес каждое ПЛ данного класса имеет почти всюду на мнимой оси касательные граничные значения, причем структура соответствующих окрестностей зависит только от веса. С применением этого результата выделен широкий класс таких весовых пространств L^p на полупрямой, что известное условие Саса не является необходимым для полноты в них системы $\exp(-\lambda_n t)$.

Библиография: 22 наименования.

1. Введение. Одним из важнейших результатов теории класса Неванлинны N является факт существования у функций этого класса (и, в частности, у функций классов Харди H^p) угловых граничных значений почти всюду (п.в.) на границе (см., например, [1]–[3]).

Рассмотрим степенной ряд

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Если $(c_n) \in l^2$, то $G(z) \in H^2$ и, следовательно, $G(z)$ имеет п.в. на окружности $|z| = 1$ угловые граничные значения. Если же $(c_n) \in l^1$, то функция $G(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

В работе [4] были предъявлены классы степенных рядов, промежуточные между указанными классами в том смысле, что принадлежащие им функции имеют п.в. на окружности *касательные* (тангенциальные) граничные значения. (Если угловое граничное значение функции в точке $e^{i\theta}$ определяется пределом по базе угловых окрестностей (углов Штольца) этой точки, то касательное граничное значение задается пределом по базе окрестностей $\{U\}$, границы которых касаются окружности в точке $e^{i\theta}$.) Эти классы таковы:

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^\alpha} z^n, \quad (c_n) \in l^2, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-01-00396).

причем соответствующие окрестности U зависят только от α . Касательные граничные значения функций с конечным интегралом Дирихле изучались в [5]. Широкий класс гармонических функций в полуплоскости, имеющих п.в. на ее границе касательные граничные значения, описан в работе [6]. Список более поздних публикаций на эту тему содержится в статье [7].

Рассмотрим преобразование Лапласа (ПЛ)

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} f(t) \omega(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1)$$

функции $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$ с положительным весом $\omega(t)$. Если $\omega \equiv 1$, то, как и в случае степенного ряда, при $q = 2$ функция $F(z)$ п.в. на мнимой оси имеет угловые граничные значения, а при $q = 1$ функция $F(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Из результатов статьи [6] следует (подробности см. ниже), что если $1 < q \leq 2$, а $\omega(t) = (1 + t^2)^{-\alpha/2}$, где $0 < \alpha < 1/p = 1 - 1/q$, то ПЛ (1) п.в. на мнимой оси имеет касательные граничные значения (структура соответствующих окрестностей U зависит только от α и q).

Однако класс степенных весов состоит из достаточно быстро убывающих функций. Поэтому (а также в связи с аппроксимационными приложениями) возникает естественная задача о нахождении класса более медленно убывающих весов $\omega(t)$, гарантирующих для ПЛ (1) существование п.в. на мнимой оси касательных граничных значений. Для этого в первой части настоящей статьи получен следующий результат. Пусть $1 < q \leq 2$, а $\omega(t) = l(t)$, где $l(t)$ – невозрастающая, медленно меняющаяся функция (в смысле Караматы [8]) с условием

$$\int_1^\infty \frac{l(t)}{t} dt < +\infty. \quad (2)$$

Тогда ПЛ (1) п.в. на мнимой оси имеет касательные граничные значения (структура соответствующих окрестностей U зависит от $l(t)$, но не от $f(t)$).

Рассмотрен также случай $\omega(t) = l(t)/t^\alpha$, где $0 < \alpha < 1/p$, а $l(t)$ – медленно меняющаяся функция. В качестве следствий получены утверждения о касательных граничных значениях степенных рядов.

В заключительной части статьи (пп. 8, 9) результат, относящийся к случаю $\omega(t) = l(t)$, применяется к аппроксимации типа Мюнца–Саса.

2. Случай степенного веса. Следуя [6], назовем функцию $K(t)$ *ядром*, если: 1) $K(t) \geq 0$, 2) $K(t)$ четна, 3) $K(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 4) $K(t)$ не возрастает, $t > 0$.

Через $P_x(y)$ обозначаем *ядро Пуассона* для правой полуплоскости, т.е.

$$P_x(y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

а через $K_x(y)$ – *свертку ядра Пуассона* с ядром K , т.е. следующую гармоническую в правой полуплоскости функцию:

$$K_x(y) = (P_x * K)(y) = \int_{\mathbb{R}} P_x(y - t) K(t) dt, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

При $1 \leq p < \infty$ рассмотрим функцию

$$v(z) = K_x * f = (K * P_x * f)(y), \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad z = x + iy, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА А₁ [6]. *Функция (3) почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел*

$$\lim_{U \ni z \rightarrow iy_0} v(z), \quad (4)$$

где при любом $\beta > 0$

$$U = (z : |y - y_0|^{1/p} \|K_x(y)\|_q < \beta); \quad (5)$$

здесь $\|K_x\|_q = \|K_x(y)\|_q$ – норма функции $K_x(y)$ (при фиксированном $x > 0$) в $L^q(\mathbb{R})$.

Интересен только случай $K \notin L^q$ (если $K \in L^q$, то $K * f \in C(\mathbb{R})$ и функция (3) непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z = x \geq 0$); тогда окрестности (5) касаются мнимой оси в точке iy_0 (см. [6]).

Через $\hat{f}$ обозначим преобразование Фурье функции f (с коэффициентом 1 перед интегралом и со знаком минус в экспоненте). Пусть

$$G_\alpha(t) = \widehat{(1+t^2)^{-\alpha/2}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Тогда G_α – ядро [9], и с применением теоремы А₁ в статье [6] доказана

ТЕОРЕМА А₂. *Если $K = G_\alpha$, то функция (3) почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (4), где*

$$\begin{aligned} U &= (z : c|y - y_0|^{1/(1-\alpha p)} < x), & 0 < \alpha < 1/p, & \quad 1 \leq p < \infty, \\ U &= (z : \exp(-c|y - y_0|^{1-q}) < x), & \alpha &= 1/p, & \quad 1 < p < \infty, \\ U &= (z : \exp(-c|y - y_0|^{-1}) < x), & \alpha &= p = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где c – любое положительное число, а $1/p + 1/q = 1$.

Теперь остается сделать только один шаг, чтобы получить упомянутый во введении результат о граничном поведении ПЛ (1). Так как $f \in L^q$, $1 < q \leq 2$, то по теореме Хаусдорфа–Юнга $\hat{f}$ существует и $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Пусть $\omega(t) = (1+t^2)^{-\alpha/2}$. Считая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$, записывая (1) в виде

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} e^{-x|t|} f(t) (1+t^2)^{-\alpha/2} dt$$

и учитывая, что

$$\widehat{\exp(-x|t|)} = P_x(y), \quad x > 0, \quad (7)$$

по свойству свертки получаем, что $F(z) = (G_\alpha * P_x * f)(y)$, т.е. $F(z) = v(z)$, где $K = G_\alpha$. Таким образом, из теоремы А₂ вытекает

ТЕОРЕМА А₃. Если $f \in L^q$, $1 < q \leq 2$, а $\omega(t) = (1 + t^2)^{-\alpha/2}$, то почти в каждой точке iy_0 мнимой оси ПЛ (1) имеет предел

$$\lim_{U \ni z \rightarrow iy_0} F(z), \quad (8)$$

где U – множество из теоремы А₂.

Стоит отметить, что при $\alpha > 1/p$ ПЛ (1) непрерывно в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, так как $\omega(t) \in L^p$, а $f \in L^q$.

В дальнейшем нам понадобится следующее расширение теоремы А₁.

ТЕОРЕМА А₄. Пусть функция $M(t)$ измерима и

$$|M(t)| \leq K(t), \quad t \neq 0, \quad (9)$$

где K – ядро. Тогда функция

$$v(z) = (M * P_x * f)(y), \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad 1 \leq p < \infty, \\ z = x + iy, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (8), где U задано посредством (5).

Теорема А₄ по существу доказана в [6]. Действительно, доказательство теоремы А₁ основано на оценках $|v(z)|$ сверху через ядро K . Но в силу (9) мы и в условиях теоремы А₄ получаем для $|v(z)|$ точно такие же оценки, после чего все рассуждения повторяются.

3. Леммы о медленно меняющихся функциях. Измеримая положительная на некоторой полупрямой $t > A$ функция $l(t)$ называется *медленно меняющейся* (м.м.ф.) [8], если для любого $\lambda > 0$

$$\frac{l(\lambda t)}{l(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Будем писать $f(t) \sim g(t)$, $t \rightarrow a$, если $f(t)/g(t) \rightarrow 1$, $t \rightarrow a$.

ЛЕММА 1. Для м.м.ф. свойство (10) равномерно относительно $\lambda \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$.

ЛЕММА 2. Пусть $l(t)$ – м.м.ф. Тогда найдется непрерывная м.м.ф. $l_1(t)$ такая, что $l_1(t) \sim l(t)$, $t \rightarrow +\infty$. При этом если $l(t)$ монотонна, то и $l_1(t)$ монотонна с тем же характером монотонности. Кроме того, при любом $\varepsilon > 0$ функция $l_1(t)/t^\varepsilon$ убывает, а функция $l_1(t)t^\varepsilon$ возрастает при всех достаточно больших t .

ЛЕММА 3. Если $l(t)$ – м.м.ф., то $t^{-\varepsilon}l(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$ ($\forall \varepsilon > 0$).

ЛЕММА 4. Пусть $l(t)$ – м.м.ф. с условием (2), и пусть

$$L(t) = \int_0^t \frac{1}{u} l\left(\frac{1}{u}\right) du, \quad t > 0. \quad (11)$$

Тогда $L(1/t)$ – м.м.ф., причем $l(1/t) = o(L(t))$, $t \rightarrow +0$.

ЛЕММА 5. Пусть м.м.ф. $l(t)$ ограничена на каждом интервале вида $(0, A)$, $0 < A < \infty$. Пусть, далее, $t^{-\eta} f(t) \in L^1(0, a)$ при некотором $\eta > 0$. Тогда

$$\int_0^a f(t) l(xt) dt = l(x) \left(\int_0^a f(t) dt + o(1) \right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad 0 < a < \infty.$$

Леммы 1–5 содержатся в [8].

Рассмотрим ПЛ

$$B_\alpha(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \frac{l(t)}{t^\alpha} dt, \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (12)$$

ЛЕММА 6. Пусть $l(t)$ – м.м.ф., ограниченная на каждом интервале вида $(0, A)$, $0 < A < \infty$, и такая, что функция $l(t)/t^\alpha$ не возрастает при всех достаточно больших t . Пусть, кроме того, $l(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$, если $\alpha = 0$. Тогда функция $B_\alpha(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z > 0$, непрерывна при $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq 0$, и при любом $a > 0$

$$B_\alpha(z) = O\left(\frac{1}{r^{1-\alpha}} l\left(\frac{1}{r}\right)\right), \quad 0 < r = |z| \leq a, \quad \operatorname{Re} z \geq 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитичность $B_\alpha(z)$ очевидна. Непрерывность есть следствие равномерной сходимости интеграла (12) на множестве $D = (z = re^{i\theta}: r \geq \delta > 0, \pi/4 \leq |\theta| \leq \pi/2)$, интегрируемости функции $l(t)/t^\alpha$ на $(0, A)$ и непрерывности функции e^{-zt} на множестве $(|z| \leq R, 0 \leq t \leq A)$ для любых $A, R \in \mathbb{R}_+$. Равномерная сходимость имеет место по признаку Дирихле. Проверим выполнение его условий; этим доказательство непрерывности $B_\alpha(z)$ будет закончено.

Предварительно заметив, что функция $l(t)/t^\alpha$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ (в случае $\alpha > 0$ надо учесть лемму 3), и записав $B_\alpha(z)$ в виде

$$\int_{\mathbb{R}_+} \cos(rt \sin \theta) e^{-rt \cos \theta} (l(t)/t^\alpha) dt - i \int_{\mathbb{R}_+} \sin(rt \sin \theta) e^{-rt \cos \theta} (l(t)/t^\alpha) dt, \quad (14)$$

убеждаемся, что интегралы

$$\int_0^A \cos(rt \sin \theta) dt, \quad \int_0^A \sin(rt \sin \theta) dt, \quad A > 0,$$

ограничены в совокупности на D , а функция $\exp(-rt \cos \theta) l(t)/t^\alpha$ монотонна при всех r, θ таких, что $re^{i\theta} \in D$, и равномерно на D стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Итак, для интегралов (14) условия признака Дирихле выполнены. Непрерывность $B_\alpha(z)$ доказана.

Докажем оценку (13). При $|\theta| \leq \pi/2$ имеем

$$B_\alpha(re^{i\theta}) = \frac{1}{r^{1-\alpha}} \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \exp(-te^{i\theta}) l\left(\frac{t}{r}\right) \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{r^{1-\alpha}} (I_1 + I_2). \quad (15)$$

По лемме 5 $I_1 = O(l(1/r))$, $0 < r < 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. В I_2 интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{e^{i\theta}} \int_1^\infty l\left(\frac{t}{r}\right) \frac{1}{t^\alpha} d \exp(-te^{i\theta}) \\ &= e^{-i\theta} \exp(-e^{i\theta}) l\left(\frac{1}{r}\right) + e^{-i\theta} \int_1^\infty \exp(-te^{i\theta}) d\left(l\left(\frac{t}{r}\right) \frac{1}{t^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Если $a > 0$ достаточно мало, а $0 < r \leq a$, то функция $l(t/r)/(t/r)^\alpha$, а значит, и функция $l(t/r)/t^\alpha$ не возрастают на полупрямой $t \geq 1$. Кроме того, $l(t/r)/t^\alpha \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Значит,

$$\operatorname{var}(l(t/r)/t^\alpha : t \geq 1) = l(1/r),$$

и потому для I_2 верна та же оценка, что и для I_1 , т.е. $I_j = O(l(1/r))$, $j = 1, 2$. Отсюда и из соотношения (15) вытекает требуемая оценка (13), где пока a достаточно мало. Но функция $B_\alpha(z)$ непрерывна в каждом полукольце $a \leq |z| \leq R$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, и потому оценка (13) верна для всех $a > 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7 (см. [10], [11]). Пусть $l(t)$ – м.м.ф. Тогда найдется аналитическая при $\operatorname{Re} z \geq 0$ функция $A(z)$ такая, что

$$A(z) \sim l(r), \quad r = |z| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$$

4. Случай $\omega(t) = l(t)$. Обозначим через Ψ класс возрастающих, вогнутых на $[0, 1]$, дифференцируемых на $(0, 1]$ функций $\psi(t)$ таких, что $\psi(0) = \psi(+0) = 0$ и

$$\int_0^1 \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty.$$

Пусть функция $L(t)$ определена равенством (11), где $l(t)$ – положительная функция со свойством (2). Введем при любом $c > 0$ “параболические окрестности”

$$U = U(iy_0) = U(iy_0, l, c) = \{z : c|y - y_0| \psi(L(|y - y_0|)) < x\} \quad (16)$$

точки iy_0 мнимой оси, $z = x + iy$. Функция $L(t)$ положительна, возрастает в правой окрестности нуля и $L(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +0$. Значит, если $\psi \in \Psi$, то теми же свойствами обладает и композиция $\psi(L(t))$. Поэтому граница множества (16) касается мнимой оси в точке iy_0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega(t) = l(t)$ – м.м.ф., ограниченная на каждом интервале вида $(0, A)$, $0 < A < \infty$, невозрастающая при всех достаточно больших t и такая, что выполнено условие (2). Пусть $f \in L^q$, $1 < q \leq 2$. Тогда, какова бы ни была функция $\psi \in \Psi$, ПЛ (1) почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (8), где U задается формулой (16), а $L(t)$ – равенством (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $l_1(t)$ – непрерывная, невозрастающая м.м.ф. такая, что $l_1(t) \sim l(t)$, $t \rightarrow +\infty$, и функция $(1/t)l_1(1/t)$ убывает в некоторой правой окрестности нуля; такая функция существует по лемме 2. Условие (2) для $l_1(t)$ выполняется. Если мы заменим в теореме 1 $l(t)$ на $l_1(t)$, то класс ПЛ (1), где f принадлежит L^q , сохранится. Докажем, что

$$U(iy_0, l_1, c) \supset U(iy_0, l, 2c). \quad (17)$$

Для этого обозначим через $L_1(t)$ функцию (11), где $l(t)$ заменена на $l_1(t)$. Из вогнутости ψ и из равенства $\psi(0) = 0$ следует, что

$$\psi(t) > (1/2)\psi(2t), \quad 0 < t < 1/2. \quad (18)$$

Значит, при малых $t > 0$, когда $l_1(t) < 2l(t)$, в силу монотонности функции ψ имеем

$$ct\psi(L_1(t)) < ct\psi(2L(t)) < 2ct\psi(L(t)),$$

и (17) верно. В силу того, что в (16) $c > 0$ – любое, это означает, что множество окрестностей $U(iy_0, l_1, c)$ содержит в себе множество окрестностей $U(iy_0, l, c)$. Таким образом, можно считать, что $l(t)$ непрерывна, $t > T$, а $(1/t)l(1/t)$ убывает, $0 < t \leq t_0$. Из условия (2) и из невозрастания функции $l(t)$ следует, что $l(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Итак, для $l(t)$ выполнены условия леммы 6 с $\alpha = 0$. Изменение $l(t)$ на $(0, A)$ с сохранением ограниченности изменяет $F(z)$ на целую функцию, что не влияет на утверждение теоремы. Поэтому можно считать, что $l(t)$ не возрастает на $[0, \infty)$.

2. При фиксированном $x > 0$ обозначим $l_x(t) = e^{-xt}l(t)$, $t > 0$; $l_x(t) = 0$, $t < 0$. Так как $f \in L^q$, $1 < q \leq 2$, то по теореме Хаусдорфа–Юнга $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$. Учитывая, что

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} f(t) l_x(t) dt, \quad x > 0,$$

и применяя равенство Парсеваля в форме

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} f(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{g}(y - u) du$$

с $g(t) = l_x(t)$, получаем

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \hat{l}_x(y - u) du, \quad x > 0. \quad (19)$$

3. Пусть $\psi \in \Psi$. Из условия (2) следует, что

$$\int_0^h \frac{1}{t\psi(L(t))} l\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^h \frac{dL(t)}{\psi(L(t))} = \int_0^H \frac{du}{\psi(u)} < +\infty.$$

Значит, функция

$$\frac{l(1/t)}{t\psi(L(t))} \quad (20)$$

интегрируема в правой окрестности нуля. Так как $l(t)$ не возрастает, а $\psi(L(t)) \downarrow 0$, $t \rightarrow +0$, то мы не увеличим значение положительной функции (20), заменив под знаком функции l переменную $1/t$ на большее значение $1/(t\psi(t))$, $0 < t < t_0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{|t|\psi(L(|t|))} l\left(\frac{1}{|t|\psi(L(|t|))}\right) \in L^1(-h, h) \quad (21)$$

при некотором $h > 0$.

4. Фиксируем произвольный интервал (ia, ib) мнимой оси так, чтобы $b - a < h$, и рассмотрим интеграл

$$\int_a^b |\hat{f}(t)| \frac{1}{|y - t|\psi(L(|y - t|))} l\left(\frac{1}{|y - t|\psi(L(|y - t|))}\right) dt. \quad (22)$$

Пусть $f_1(t) = |\hat{f}(t)|$, $t \in (a, b)$; $f_1(t) = 0$, $t \notin (a, b)$, а функция $g_1(t)$ совпадает с функцией (21) при $0 < |t| < b - a$ и $g_1(t) = 0$ при $|t| > b - a$. Тогда при $y \in (a, b)$ интеграл (22) есть сужение на (a, b) свертки $f_1 * g_1$. Но $f_1, g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ (надо учесть (21) и свойство $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$), и потому эта свертка существует почти всюду на прямой. В частности, существует измеримое множество $E \subset (a, b)$ такое, что $\text{mes } E = b - a$ и интеграл (22) существует в любой точке множества E .

Фиксируем $y_0 \in E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что если $I = I_\gamma = (y_0 - \gamma, y_0 + \gamma)$, то

$$\int_I |\hat{f}(t)| \frac{1}{|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|))} l\left(\frac{1}{|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|))}\right) dt < \varepsilon. \quad (23)$$

5. В силу непрерывности $l(t)$ из (11) следует, что $L'(t) = (1/t)l(1/t)$. Поэтому с использованием леммы 4 имеем

$$(y\psi(L(y)))' = \psi(L(y)) + \psi'(L(y))l\left(\frac{1}{y}\right) = \psi(L(y)) + o(1)\psi'(L(y))L(y), \quad y \rightarrow +0.$$

Но для вогнутой, положительной и дифференцируемой функции ψ с условием $\psi(+0) = 0$ выполняется очевидное свойство $y\psi'(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow +0$. Значит,

$$(y\psi(L(y)))' \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +0. \quad (24)$$

Пусть $z \in U = U(iy_0)$, где $c > 0$ фиксировано, $y_0 \neq t \in I_\gamma$. Тогда если $\gamma > 0$ достаточно мало, то

$$|z - it| \geq \text{dist}(it; U) = |z^* - it|,$$

где $z^* = z^*(t) = x^* + iy^*$ — такая точка на “параболе”

$$x = c|y - y_0|\psi(L(|y - y_0|)),$$

что касательная в этой точке ортогональна отрезку $[it, z^*]$. Из (24) следует, что при $t \rightarrow y_0$

$$|z^* - it| \sim x^*, \quad |y^* - y_0| \sim |t - y_0|. \quad (25)$$

Поэтому $|z - it| \geq (c/2)|y^* - y_0|\psi(L(|y^* - y_0|))$, откуда, используя второе соотношение из (25), монотонность функции ψ , лемму 1 (применимую к $L(t)$ в силу леммы 4), а также свойство (18), находим, что при достаточно малом γ

$$|z - it| \geq \frac{c}{4}|y_0 - t|\psi\left(\frac{1}{2}L(|y_0 - t|)\right) \geq \frac{c}{8}|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|)). \quad (26)$$

Итак, при $0 < \gamma < \gamma_0$ верны обе оценки (23) и (26).

6. Пусть $I = I_\gamma$, $J = (-A, A) \setminus I$, где A достаточно велико. Учитывая формулу (19), запишем

$$F(z) = \left(\int_I + \int_J + \int_{|t| > A} \right) \hat{f}(t) \hat{l}_x(y - t) dt = F_1 + F_2 + F_3. \quad (27)$$

Так как $\hat{l}_x(y) = B_0(z)$, то в силу леммы 6 получаем

$$|F_1| \leq C_1 \int_I |\hat{f}(t)| \frac{1}{|z - it|} l\left(\frac{1}{|z - it|}\right) dt, \quad (28)$$

где C_1 зависит только от $l(t)$.

Для $z \in U = U(iy_0)$ в силу оценки (26) и убывания функции $(1/t)l(1/t)$ имеем

$$\frac{1}{|z - it|} l\left(\frac{1}{|z - it|}\right) \leq \frac{8/c}{|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|))} l\left(\frac{8/c}{|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|))}\right). \quad (29)$$

По лемме 1 при достаточно малом γ

$$l\left(\frac{8/c}{|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|))}\right) < 2l\left(\frac{1}{|y_0 - t|\psi(L(|y_0 - t|))}\right).$$

Подставляя это неравенство сначала в (29), а затем полученное в (28) и используя (23), видим, что при достаточно малом γ

$$|F_1(z)| < (C_2/c)\varepsilon, \quad z \in U = U(iy_0), \quad (30)$$

где C_2 зависит только от $l(t)$.

Если $x \geq 0$, то $\text{var}(l_x(t): t \geq 0) = l(0) < +\infty$, и интегрирование по частям показывает, что $|\hat{l}_x(y - t)| \leq C/|y - t|$, где C от z, t не зависит. Используя это, свойство $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ и неравенство Гёльдера, делаем вывод, что при достаточно большом A

$$|F_3(z)| < \varepsilon, \quad |y - y_0| < 1, \quad \text{Re } z \geq 0, \quad y = \text{Im } z. \quad (31)$$

Интеграл $F_2(z)$ представляет функцию, непрерывную в точке iy_0 ; действительно, $\hat{f}(t) \in L^1(J)$, а по лемме 6 функция $\hat{l}_x(y) = B_0(z)$ непрерывна при $\text{Re } z = x \geq 0$, $z \neq 0$. Из соотношений (27), (30), (31) и из непрерывности $F_2(z)$ в точке iy_0 по критерию Коши следует существование предела (8). Теорема 1 доказана.

5. Случай $\omega(t) = l(t)/t^\alpha$, $\alpha > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L^q$, $1 < q \leq 2$, и пусть $\omega(t) = l(t)/t^\alpha$, где $l(t)$ — м.м.ф., ограниченная на каждом интервале вида $(0, A)$, $0 < A < \infty$, а $0 < \alpha < 1/p = 1 - 1/q$. Тогда для любого $c > 0$ ПЛ (1) почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (8), где

$$U = U(iy_0) = \left(z = x + iy: c|y - y_0| < x^{1-\alpha p}/l^p\left(\frac{1}{x}\right) \right). \quad (32)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Окрестности (32) касаются мнимой оси, что следует из леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $l(t) \equiv 1$ окрестности (32) переходят в окрестности (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применяя неравенство Гёльдера и лемму 3, видим, что $f(t)l(t)/t^\alpha \in L^1(0, 1)$, $L^q(1, \infty)$. Значит, ПЛ (1) существует при $\text{Re } z > 0$. Замена функции $l(t)$ на эквивалентную ей функцию не меняет ни класса ПЛ, ни множества окрестностей (32). Поэтому в силу леммы 2 можно считать, что функция $l(t)/t^\alpha$ убывает на $[A, \infty)$ при некотором $A > 0$, а функция $l(1/t)/t^{1-\alpha}$ убывает при всех достаточно малых $t > 0$. На $(0, A)$ переопределим $l(t)$ так, чтобы $l(t) = t^\alpha l(A)/A^\alpha$, $0 < t < A$; это не повлияет на утверждение теоремы 2 (см. начало доказательства теоремы 1). Тогда функция $l(t)/t^\alpha$ положительна и имеет ограниченную вариацию на полупрямой $(0, +\infty)$. Для $l(t)$ выполнены условия леммы 6.

Считаем, что $f(t) = l(t) = 0$ при $t < 0$. Как уже отмечалось, $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Обозначим через $b(y)$ преобразование Фурье функции $l(t)/t^\alpha$, т.е. (см. (12)) $b(y) = B_\alpha(iy)$. Поскольку

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} (e^{-x|t|} f(t)(l(t)/t^\alpha)) dt = \widehat{e^{ix|t|} f(t)(l(t)/t^\alpha)},$$

то по свойству свертки и с учетом равенства (7) получим

$$F(z) = (P_x * b * \hat{f})(y), \quad x > 0.$$

Пусть $a > 0$ достаточно мало. Пусть $b_1(y) = b(y)$, $|y| < a$, и $b_1(y) = 0$, $|y| > a$; $b_2(y) = 0$, $|y| < a$, и $b_2(y) = b(y)$, $|y| > a$. Тогда

$$F(z) = (P_x * b_1 * \hat{f})(y) + (P_x * b_2 * \hat{f})(y) = F_1 + F_2.$$

Так как $b(y)$ – преобразование Фурье функции, имеющей ограниченную вариацию, то $b(y) = O(1/|y|)$. Но $b_2(y) = 0$ в окрестности нуля, а вне ее $b_2(y) = b(y)$. Значит, $b_2(y) \in L^q(\mathbb{R})$, и так как $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$, то свертка $b_2 * \hat{f}$ ограничена и непрерывна на прямой. По известному свойству интеграла Пуассона функция $F_2(z)$ непрерывна в полуплоскости $x \geq 0$. Следовательно, теорему 2 достаточно доказать для функции $F_1(z)$.

По лемме 6 верно неравенство

$$|b_1(t)| \leq C \frac{1}{|t|^{1-\alpha}} l\left(\frac{1}{|t|}\right), \quad 0 < |t| < a,$$

и $b_1(t) = 0$, $|t| > a$, по определению функции $b_1(t)$. Обозначим

$$K(t) = C \frac{1}{|t|^{1-\alpha}} l\left(\frac{1}{|t|}\right), \quad |t| < a; \quad K(t) = 0, \quad |t| > a. \quad (33)$$

По построению $K(t)$ не возрастает на $(0, a)$ при достаточно малом $a > 0$. В силу леммы 3 функция $K(t)$ интегрируема на $(-a, a)$, а значит, и на $\mathbb{R}$. Таким образом, $K(t)$ есть ядро. Поэтому для $M(t) = b_1(t)$ выполнены условия теоремы А₄. По ней функция $F_1(z)$ почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (8), где U задано формулой (5), и нам надлежит оценить $\|K_x\|_q$. Можно считать, что в (33) $C = 1$.

Пусть $A(z)$ – функция из леммы 7. Тогда

$$\frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} = \frac{l(1/r)(1+o(1))}{r^{1-\alpha} e^{i\theta(1-\alpha)}}, \quad r \rightarrow 0, \quad z = re^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (34)$$

$$\operatorname{Re} \frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} = \frac{l(1/r)}{r^{1-\alpha}} (1+o(1)) \cos \theta(1-\alpha), \quad (35)$$

$$\left| \frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} \right| \leq 2 \frac{l(1/r)}{r^{1-\alpha}}, \quad 0 < r = |z| < 2a, \quad (36)$$

при достаточно малом a . Пусть

$$(it)^{1-\alpha} = |t|^{1-\alpha} \exp\left(i \frac{\pi}{2} (1-\alpha) \operatorname{sign} t\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Тогда при $\theta = \pm\pi/2$ из (35) имеем

$$\frac{l(1/|t|)}{|t|^{1-\alpha}} \leq c_\alpha \operatorname{Re} \frac{A(1/(it))}{(it)^{1-\alpha}}, \quad c_\alpha = \frac{2}{\cos \frac{\pi}{2} (1-\alpha)} > 0, \quad |t| < a. \quad (37)$$

Фиксируем a столь малым, чтобы одновременно выполнялись оценки (36) и (37).

Теперь обоснуем формулу

$$\frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{A(1/(it))}{(it)^{1-\alpha}} P_x(y-t) dt, \quad x = \operatorname{Re} z > 0. \quad (38)$$

Известно, что для представления аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывной при $\operatorname{Re} z \geq 0$ функции $H(z)$ интегралом Пуассона от $H(it)$ достаточно выполнения следующих условий (см. [12, гл. 5, § 2]):

а) $|H(z)| = O(|z|)$, $|z| \rightarrow \infty$;

б) $H(x)/x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$;

в) $H(iy)/(1+y^2) \in L^1(\mathbb{R})$.

К функции $H(z) = A(1/z)/z^{1-\alpha}$ эта теорема неприменима (в точке $z = 0$ нарушается непрерывность), но она применима к функции $H(z + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Запишем $H(z + \varepsilon)$ в виде интеграла Пуассона от $H(it + \varepsilon)$ и при фиксированном z таком, что $\operatorname{Re} z > 0$, перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$. Переход к пределу под знаком интеграла возможен благодаря наличию интегрируемой мажоранты:

$$|H(it + \varepsilon)| P_x(y-t) \leq C \frac{N(t)}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где C зависит только от z , а

$$N(t) \leq C_1/|t|^{1-\alpha}, \quad |t| > a; \quad N(t) \leq C_2 l(1/|t|)/|t|^{1-\alpha}, \quad |t| < a, \quad t \neq 0.$$

Итогом предельного перехода и станет формула (38).

Обозначим через $I_x(y)$ часть интеграла в (38), относящуюся к множеству $|t| > a$. Так как модуль $A(1/z)$ ограничен вне окрестности нуля, то $I_x(y)$ есть интеграл Пуассона от функции $g(t)$ такой, что $g(t) = 0$, $|t| < a$, и $g(t) = O(1/|t|^{1-\alpha})$, $|t| > a$. Так как $1 - \alpha > 1/q$, то $g \in L^q(\mathbb{R})$, и по свойству интеграла Пуассона

$$\|I_x(y)\|_q \leq C < +\infty, \quad x > 0, \quad (39)$$

где C от x не зависит.

Теперь по смыслу функции $K_x(y)$ и с использованием соотношений (37), (38) находим

$$\begin{aligned} K_x(y) &= \int_{-a}^a \frac{l(1/|t|)}{|t|^{1-\alpha}} P_x(y-t) dt \leq c_\alpha \int_{-a}^a \operatorname{Re} \frac{A(1/(it))}{(it)^{1-\alpha}} P_x(y-t) dt = \\ &= c_\alpha \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{A(1/(it))}{(it)^{1-\alpha}} P_x(y-t) dt - c_\alpha \operatorname{Re} I_x(y) = c_\alpha \operatorname{Re} \left(\frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} - I_x(y) \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (39) следует, что

$$\|K_x(y)\|_q \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} \right|^q dy \right)^{1/q} + C_2. \quad (40)$$

Модуль $A(1/z)$ ограничен вне любой окрестности нуля в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Поэтому если x достаточно мало, а $|y| > a$, то $|A(1/z)/z^{1-\alpha}| \leq C/|y|^{1-\alpha}$, и поскольку $0 < \alpha < 1 - 1/q$, то часть интеграла в (40), относящаяся к множеству $|y| > a$, дает ограниченную величину и, стало быть,

$$\|K_x(y)\|_q \leq C_1 \left(\int_{-a}^a \left| \frac{A(1/z)}{z^{1-\alpha}} \right|^q dy \right)^{1/q} + C_3, \quad 0 < x < \delta.$$

В силу неравенства (36) при малых $x > 0$

$$\|K_x(y)\|_q \leq C_4 \left(\int_0^a \frac{l^q(1/\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{(x^2+y^2)^{(1-\alpha)q}}} dy \right)^{1/q} + C_3 = C_4 I^{1/q} + C_3. \quad (41)$$

Полагая $y = tx$, находим

$$x^{(1-\alpha)q-1} I \leq \int_0^\infty \frac{l^q(1/(x\sqrt{1+t^2}))}{\sqrt{(1+t^2)^{(1-\alpha)q}}} dt = J, \quad (42)$$

и после подстановки $1/\sqrt{1+t^2} = u$ на основании леммы 5 получаем

$$J = \int_0^1 l^q\left(\frac{u}{x}\right) \frac{du}{u^{2-(1-\alpha)q}\sqrt{1-u^2}} \sim Cl^q\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0, \quad C > 0$$

(по условию $2 - (1-\alpha)q < 1$). Подставляя это в (42), а затем полученное – в (41), видим, что

$$\|K_x(y)\|_q \leq Cl\left(\frac{1}{x}\right) / x^{1/p-\alpha},$$

где C от $x > 0$ не зависит. Остается сослаться на теорему А₄. Теорема 2 доказана.

6. Случай $q > 2$. Здесь в роли веса выступает функция

$$\omega(t) = \frac{l(t)}{t^{\alpha+1/2-1/q}}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}. \quad (43)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in L^q$, $2 < q < \infty$, а вес $\omega(t)$ имеет вид (43), где $l(t)$ – м.м.ф., ограниченная на каждом интервале вида $(0, A)$, $0 < A < \infty$, и такая, что

$$\int_0^\infty \frac{l^s(t)}{t} dt < +\infty, \quad s = \frac{2q}{3q-2} \quad \left(= \frac{2p}{p+2} \right). \quad (44)$$

Пусть, кроме того, если $\alpha = 0$, то $l(t)$ не возрастает при всех достаточно больших t . Тогда ПЛ (1) почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (8), где U задается посредством формул (16) для $\alpha = 0$ и (32) для $\alpha > 0$, в которых следует заменить $l(t)$ на $l^s(t)$, а p – на 2.

Уточним, что замена $l(t)$ на $l^s(t)$, естественно, относится и к формуле (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ПЛ (1) имеет смысл при $\operatorname{Re} z > 0$, так как $f(t)\omega(t) \in L^1(0, 1)$ (по неравенству Гёльдера), и $f(t)\omega(t) \in L^q(1, \infty)$. Будем рассматривать ПЛ вида

$$F(z) = \int_1^\infty e^{-zt} f(t) \frac{l(t)}{t^{\alpha+1/2-1/q}} dt, \quad (45)$$

так как оно отличается от (1) на целую функцию, и, следовательно, утверждение следствия верно для ПЛ (1) и (45) одновременно.

Определим функцию $f_1(t)$ равенством

$$f_1(t)l^s(t) = f(t)l(t)/t^{1/2-1/q}, \quad t > 1. \quad (46)$$

Покажем, что $f_1 \in L^2(1, \infty)$. Для этого обозначим через r показатель, сопряженный с $q/2$, т.е. $1/r + 2/q = 1$, $r = q/(q-2)$. По неравенству Гёльдера и в силу условия (44) имеем

$$\int_1^\infty |f_1(t)|^2 dt = \int_1^\infty |f(t)|^2 \frac{l^{2(1-s)}(t)}{t^{(q-2)/q}} dt \leq \|f\|_q^2 \left(\int_1^\infty \frac{l^s(t)}{t} dt \right)^{\frac{q-2}{q}} < +\infty,$$

и, действительно, $f_1 \in L^2(1, \infty)$.

Положим $l(t) = l(1)$, $f(t) = 0$ при $0 < t < 1$. Тогда в силу равенства (46) функция из (45) запишется в виде

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} f_1(t) \frac{l^s(t)}{t^\alpha} dt, \quad f_1 \in L^2, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2},$$

и для нее выполнены условия теорем 1, 2 с $p = 2$, в которых $f(t)$, $l(t)$ заменены соответственно на $f_1(t)$, $l^s(t)$. С учетом этой замены из теорем 1, 2 получаем утверждения следствия 1.

7. Касательные граничные значения степенных рядов. Рассмотрим степенной ряд

$$G(w) = \sum_{n=1}^\infty c_n \frac{l(n)}{n^\alpha} w^n, \quad |w| < 1, \quad (47)$$

где $(c_n) \in l^q$, $1 < q \leq 2$, $0 \leq \alpha < 1/p$, а функция $l(t)$ удовлетворяет условиям теорем 1, 2 соответственно при $\alpha = 0$ и $\alpha > 0$. Положим $f(t) = 0$, $l_1(t) = l(1)$, $0 < t < 1$, и

$$f(t) = (c_n/n^\alpha)t^\alpha, \quad l_1(t) = l(n), \quad n \leq t < n+1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f \in L^q(\mathbb{R}_+)$, а так как

$$l_1(t)/l(t) = l(n)/l(n+\tau), \quad n \leq t < n+1, \quad 0 \leq \tau = \tau(t) \leq 1,$$

то по лемме 1 $l_1(t) \sim l(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Значит, $l_1(t)$ – м.м.ф., причем если $\alpha = 0$, то $l_1(t)$ не возрастает и для $l_1(t)$ выполнено условие (2), т.е. для $l_1(t)$ выполнены

условия теорем 1, 2, относящиеся к $l(t)$. Обозначим через $L_1(t)$ функцию (11), где $l(t)$ заменена на $l_1(t)$. По теореме 1, 2 у функции

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} f(t) \frac{l_1(t)}{t^\alpha} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

почти в каждой точке iy_0 мнимой оси существует предел (8), где $U(iy_0)$ задается соотношениями (16) и (32) с $l = l_1$, $L = L_1$. Но в формулах (16), (32) мы можем писать $l(t)$ вместо $l_1(t)$. Действительно, если $\alpha > 0$, то достаточно применить эквивалентность $l_1 \sim l$. Если же $\alpha = 0$, то из $l_1(t) \leq l(t)$ и из монотонности ψ следует, что $\psi(L_1(y)) \leq \psi(L(y))$, $y > 0$, т.е. мы не расширим окрестности (16), если заменим $l_1(t)$ на $l(t)$.

Теперь заметим, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{l(n)}{n^\alpha} \int_n^{n+1} e^{-zt} dt = \frac{1 - e^{-z}}{z} G(e^{-z}).$$

Но функция $(1 - e^{-z})/z$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \geq 0$ и не обращается в нуль, если $z \neq 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, у функции $G(w)$ почти в каждой точке $e^{i\theta_0}$ окружности $|w| = 1$ существует предел

$$\lim_{V \ni w \rightarrow e^{i\theta_0}} G(w), \quad (48)$$

где $V = V(e^{i\theta_0})$ – образ множества (16) или (32) при отображении $w = e^{-z}$ полуполосы $\operatorname{Re} z > 0$, $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ на круг $|w| < 1$.

Пусть $e^{i\theta}$, $e^{i\theta_0}$ – образы точек iy , iy_0 ($\theta = -y$, $\theta_0 = -y_0$). Поскольку $r = |w| = e^{-x}$, $x = \log(1/r)$, то уравнение границы множества V имеет вид

$$\begin{aligned} c|\theta - \theta_0| \psi(L(|\theta - \theta_0|)) &= \log(1/r), & \alpha = 0, \\ c|\theta - \theta_0| &= (\log(1/r))^{1-\alpha p} / l^p(1/\log(1/r)), & \alpha > 0. \end{aligned}$$

Однако $\log(1/r) \sim 1-r$, $r \rightarrow 1-0$, а $c > 0$ любое. Поэтому с учетом леммы 1 можно в качестве V рассматривать при любом $c > 0$ “параболические окрестности”

$$V = V(e^{i\theta_0}) = (w = re^{i\theta} : c|\theta - \theta_0| \psi(L(|\theta - \theta_0|)) < 1 - r), \quad (49)$$

$$V = V(e^{i\theta_0}) = (w = re^{i\theta} : c|\theta - \theta_0| < (1 - r)^{1-\alpha p} / l^p(1/(1 - r))). \quad (50)$$

Нами доказано

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть:

- а) $(c_n) \in l^2$, a $l(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, если $\alpha = 0$;
- б) $(c_n) \in l^q$, $1 < q \leq 2$, a $l(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, если $0 < \alpha < 1/p$.

Тогда степенной ряд (47) почти в каждой точке $e^{i\theta_0}$ окружности $|w| = 1$ имеет предел (48), где V задается формулой (49) или (50) соответственно, причем ψ и L имеют тот же смысл, что и в теореме 1.

При $0 < \alpha < 1/2$, $l(t) \equiv 1$ утверждение следствия 2 содержится в [6].

Аналогично, из следствия 1 выводится

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $(c_n) \in l^q$, $2 < q < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/2$, а $l(t)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Тогда степенной ряд

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{l(n)}{n^{\alpha+1/2-1/q}} w^n, \quad |w| < 1, \quad (51)$$

почти в каждой точке $e^{i\theta_0}$ окружности $|w| = 1$ имеет предел (48), где V задается формулами (49) при $\alpha = 0$ и (50) при $\alpha > 0$, в которых следует заменить $l(t)$ на $l^s(t)$ и положить $p = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Более слабое (по сравнению с (44)) условие

$$\int_0^{\infty} \frac{l^{2q/(q-2)}(t)}{t} dt < +\infty$$

по неравенству Гёльдера влечет принадлежность степенного ряда (51) с $\alpha = 0$ классу H^2 и, следовательно, существование у $G(w)$ угловых граничных значений п.в. на окружности.

Стоит отметить, что в работах [4], [5] исключительное множество (состоящее из точек границы, в которых касательные граничные значения могут не существовать) имеет не только меру нуль, но и нулевую емкость. В статье [6] теорема A_1 подвергается соответствующему уточнению в случае, когда K есть свертка двух ядер; при этом вводится специальная емкость, ассоциированная с K и p . Но мы в настоящей статье на подобном аспекте теории не останавливаемся.

8. Аппроксимация типа Мюнца–Саса. Имеющая своим истоком аппроксимационную теорему Вейерштрасса задача об условиях полноты системы степеней

$$(x^{\mu_n})_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re} \mu_n > -1/p, \quad (52)$$

в пространствах $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, и $C_0[0, 1] = \{f \in C[0, 1]: f(0) = 0\}$ (в случае C_0 в (52) следует считать $p = \infty$) в первую очередь ассоциируется с именами Ч. Мюнца и О. Саса, которые первыми рассмотрели эту задачу и доказали теоремы [13], [14], значительно расширяющие теорему Вейерштрасса. После замены $x = e^{-t}$ эта задача переходит в задачу об условиях полноты системы экспонент

$$(e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty}, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0, \quad (53)$$

с $\lambda_n = \mu_n + 1/p$ в пространствах $L^p = L^p(\mathbb{R}_+)$ и $C_0 = \{f \in C[0, \infty): f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\}$.

Известно (см., например, [15]), что для полноты системы (53) в L^p условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = +\infty \quad (54)$$

необходимо при $1 \leq p \leq 2$ и достаточно при $2 \leq p < \infty$ и в случае пространства C_0 . В частности, при $p = 2$ получаем теорему Саса [13] (см. также [16]): полнота

системы (53) в L^2 равносильна условию (54). Условие (54) не является достаточным для полноты системы (53) в L^p при $1 \leq p < 2$ (см. [17], [18]) и не является необходимым в случае пространства C_0 (см. [19]).

Вопрос о достаточных условиях полноты системы (53) в L^p , $1 \leq p < 2$, был рассмотрен в работе [20]. Для доказательства были привлечены весовые пространства L_α^p с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p t^\alpha dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha > -1.$$

В результате оказалось полезным рассматривать вопрос о полноте системы (53) и в самих пространствах L_α^p . В статье [21] было доказано (см. также [22]), что если $1 \leq p < \infty$, то условие (54):

- а) необходимо для полноты системы (53) в L_α^p при $\alpha \geq \max(0, p-2)$;
- б) достаточно при $-1 < \alpha \leq \min(0, p-2)$;
- в) не является достаточным при $\alpha > \min(0, p/2 - 1)$.

Здесь с помощью доказанной теоремы 1 будет выделен широкий класс весовых пространств на полупрямой $\mathbb{R}_+$ таких, что условие (54) не является необходимым для полноты в них системы (53). Из полученного результата, в частности, следует, что при $-1 < \alpha < \min(0, p/2 - 1)$, $p > 1$, условие (54) не является необходимым для полноты системы (53) в L_α^p .

Пусть $\omega(t)$ – положительный вес, $t \in (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Через $L^p((a, b); \omega(t) dt)$ обозначаем пространство измеримых функций с нормой

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть $B_1 = B_1(0, 1)$ – банахово пространство функций, определенных на $(0, 1)$, такое, что преобразование Лапласа произвольного функционала $\varphi \in B_1^*$

$$(\varphi, e^{-zt}) = (\varphi(t), e^{-zt}) = \Phi(z) \quad (55)$$

есть целая функция экспоненциального типа, не большего 1, со свойством единственности: $\Phi(z) \equiv 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Класс таких пространств обозначим через $\mathcal{L}$. Класс $\mathcal{L}$ содержит в себе, например, такие пространства, как $L^p(0, 1)$, $W_p^m(0, 1)$ (пространства Соболева), $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $C[0, 1]$, $C^m[0, 1]$, $L^p((0, 1); \omega(t) dt)$, где $0 < \omega(t) \in L^1(0, 1)$. Речь пойдет о полноте системы (53) в прямом произведении пространств

$$B = B_1(0, 1) \otimes L^p((1, \infty); \omega(t) dt), \quad (56)$$

т.е. в пространстве B с нормой

$$\|f\|_B = \|f_1\|_{B_1} + \|f_2\|_{L^p((1, \infty); \omega(t) dt)},$$

где f_1, f_2 – сужения f соответственно на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $B_1 \in \mathcal{L}$, а вес $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\omega^{1/p}(t) = O(l(t)), \quad 2 \leq p < \infty, \quad (57)$$

$$\omega^{1/p}(t) = O(t^{1/2-1/p}l(t)), \quad 1 < p \leq 2, \quad (58)$$

где $l(t)$ – невозрастающая, ограниченная, м.м.ф. с условием (2) при $2 \leq p < \infty$ и с условием (44) при $1 < p \leq 2$. Тогда (54) не является необходимым условием полноты системы (53) в пространстве (56).

Мы видим, что для теоремы 3 определяющим фактором является поведение веса $\omega(t)$ на бесконечности, в то время как первая компонента пространства B достаточно произвольна.

При $\omega(t) = t^\alpha$, $B_1 = L^p((0, 1); t^\alpha dt)$ из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. При $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \min(0, p/2 - 1)$ условие (54) не является необходимым для полноты системы (53) в L_α^p .

Действительно, во-первых, условие $\alpha > -1$ обеспечивает интегрируемость веса t^α в правой окрестности нуля и, значит, $B_1 \in \mathcal{L}$. Во-вторых, вес $\omega(t) = t^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 3. В самом деле, если $2 \leq p < \infty$, то $\alpha < 0$, а если $1 < p \leq 2$, то $\alpha < p/2 - 1 = p/2 - 1 - \varepsilon p$ при подходящем $\varepsilon > 0$, т.е.

$$\omega^{1/p}(t) = t^{\alpha/p} \quad (\alpha < 0, \quad p \geq 2), \quad \omega^{1/p}(t) = t^{1/2-1/p}t^{-\varepsilon} \quad (p \leq 2),$$

и, значит, по лемме 3 $\omega^{1/p}(t)$ имеет соответственно вид (57) и (58) с любой м.м.ф. $l(t)$ и в том числе с невозрастающей функцией, удовлетворяющей условию (2) (условию (44)).

9. Доказательство теоремы 3. Рассмотрим последовательность

$$\Lambda = \left(\left(\alpha_k + \frac{in}{l_k} \right)_{n=-\infty}^{\infty} \right)_{k=1}^{\infty}, \quad \alpha_k, l_k > 0; \quad \alpha_k, \frac{1}{l_k} \rightarrow 0, \quad (59)$$

с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k l_k < +\infty. \quad (60)$$

В работе [19], откуда и заимствован вид (59) последовательности Λ , показано, что условие (60) влечет для последовательности Λ условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} < +\infty.$$

Убедимся в том, что при подходящем выборе α_k, l_k с условием (60) соответствующая система (53) полна в B . Этим доказательство теоремы 3 будет закончено.

Предположим, что система (53) неполна в B . Тогда найдется нетривиальный функционал $h \in B^*$ такой, что $(h, e^{-\lambda_n t}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. преобразование Лапласа $H(z)$ функционала h обращается в нуль в точках Λ .

В силу структуры (56) пространства B функционал $h \in B^*$ представляет собой упорядоченную пару φ, g , где $\varphi \in B_1^*$, $g \in (L^p((1, \infty); \omega(t) dt))^* = L^q((1, \infty); \omega^{-q/p}(t) dt)$ и $(h, \beta) = (\varphi, \beta_1) + (g, \beta_2)$, $\beta \in B$, β_1, β_2 — сужения β на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. Значит, отождествляя функционал g с функцией $g \in L^q((1, \infty); \omega^{-q/p}(t) dt)$, его представляющей, получаем

$$H(z) = (h, e^{-zt}) = (\varphi, e^{-zt}) + \int_1^\infty e^{-zt} g(t) dt = \Phi(z) + F(z), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (61)$$

По предположению $H(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Запишем

$$F(z) = \int_1^\infty e^{-zt} f(t) l(t) dt, \quad 2 \leq p < \infty, \quad (62)$$

$$F(z) = \int_1^\infty e^{-zt} f(t) \frac{l(t)}{t^{1/2-1/q}} dt, \quad 1 < p \leq 2. \quad (63)$$

Тогда из содержащейся в (61) формуле для $F(z)$, где $g(t)\omega^{-1/p}(t) \in L^q(1, \infty)$, и из условий (57), (58) следует, что $f \in L^q(1, \infty)$. Далее будет также важно, что

$$f(t)l(t)/t^{1/2-1/q} \in L^2(1, \infty), \quad 1 < p \leq 2 \quad (64)$$

(в начале доказательства следствия 1 мы проверили, что $f(t)l^{1-s}(t)/t^{1/2-1/q} \in L^2(1, \infty)$; отсюда, из ограниченности $l(t)$ и из $s > 0$ следует (64)).

По теореме 1 (при $2 \leq p < \infty$) и по следствию 1 (при $1 < p \leq 2$) $F(z)$ почти в каждой точке iy_0 мнимой оси имеет предел (8), где U задается соотношениями (16) и (32) соответственно, причем в (32) следует заменить $l(t)$ на $l^s(t)$ и положить $\alpha = 0$, $p = 2$. Фиксируем точку iy_0 , в которой такой предел существует. Переходя к функции $F(z + iy_0)$, можно считать, что $y_0 = 0$.

Окрестность (32) может быть записана в виде

$$U = U(0, c) = \{z: c|y| < x/\gamma(x)\}, \quad \gamma(x) \rightarrow +0, \quad x \rightarrow +0; \quad c > 0 \text{ любое}, \quad (65)$$

причем U не зависит от функционала h , а зависит только от $l(t)$. Далее, так как функция $x = y\psi(L(y))$ возрастает на $[0, \delta]$ при некотором $\delta > 0$ и $L(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +0$, то при переходе к обратной функции видно, что и окрестность (16) записывается в виде (65).

Итак, в обоих случаях $p \geq 2$ окрестности (16), (32) допускают единообразную запись (65), где $x/\gamma(x) \rightarrow +0$, $x \rightarrow +0$.

Пользуясь тем, что $\gamma(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow +0$, выберем $\alpha_k \rightarrow 0$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\alpha_k) < +\infty,$$

и положим

$$l_k = \gamma(\alpha_k)/\alpha_k. \quad (66)$$

Тогда $l_k \rightarrow +\infty$ и выполнено условие (60).

Из (66) и (65) следует, что точка $z_k = \alpha_k + i/l_k \in \Lambda$ лежит на границе окрестности $U(0, 1)$, но тогда $z_k \in U(0, 1/2)$. Так как $\alpha_k \rightarrow 0$, то это означает, что в окрестности $U(0, 1/2)$ найдется точка $\lambda_n \in \Lambda$, сколь угодно близкая к точке $z = 0$ и такая, что $H(\lambda_n) = 0$. Но функция $H(z)$, отличаясь от $F(z)$ на целую функцию, также имеет предел (8). Поэтому

$$\lim_{U \ni z \rightarrow 0} H(z) = 0, \quad U = U(0, 1/2).$$

Итак, п.в. на мнимой оси касательные (в частности, и угловые) граничные значения функции $H(z)$, аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$, равны нулю: $H(iy) = 0$, $iy \in E \subset i\mathbb{R}$, $\operatorname{mes}(i\mathbb{R} \setminus E) = 0$. По теореме Лузина–Привалова (см. [2], [3]) $H(z) \equiv 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, значит, в силу (61)

$$\Phi(z) = -F(z), \quad z \in (\operatorname{Re} z > 0) \cup E. \quad (67)$$

Пусть сначала $2 \leq p < \infty$. Тогда $f(t)$, $f(t)l(t) \in L^q(1, \infty)$, $1 < q \leq 2$. По теореме Хаусдорфа–Юнга $F \in H^p = H^p(x > 0)$ (F задается формулой (62)). Тогда и $\Phi \in H^p$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

$$\Phi_\varepsilon(z) := \Phi(z) \frac{1 - e^{-\varepsilon z}}{\varepsilon z} \in H^2, \quad F_\varepsilon(z) := F(z) \frac{1 - e^{-\varepsilon z}}{\varepsilon z} \in H^2.$$

Пусть $s_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ при $t \in (0, \varepsilon)$ и $s_\varepsilon(t) = 0$ при $t \notin (0, \varepsilon)$. Тогда носитель свертки

$$f_\varepsilon(t) = (f(t)l(t)) * s_\varepsilon(t)$$

не выходит за пределы полупрямой $[1, +\infty)$, и так как функция $(1 - e^{-\varepsilon z})/(\varepsilon z)$ является преобразованием Лапласа функции $s_\varepsilon(t)$, то

$$F_\varepsilon(z) = \int_1^\infty e^{-zt} f_\varepsilon(t) dt, \quad f_\varepsilon \in L^2(1, \infty).$$

Далее, по теореме Пэли–Винера $\Phi_\varepsilon(z)$ есть ПЛ некоторой функции $\varphi_\varepsilon(t) \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Но $\Phi_\varepsilon(z)$ имеет экспоненциальный тип, не больший $1 + \varepsilon$, поэтому носитель функции $\varphi_\varepsilon(t)$ не выходит за пределы отрезка $[0, 1 + \varepsilon]$. Значит, вытекающее из (67) равенство $\Phi_\varepsilon(iy) = -F_\varepsilon(iy)$ п.в. записывается в виде

$$\int_0^{1+\varepsilon} e^{-iyt} \varphi_\varepsilon(t) dt + \int_1^\infty e^{-iyt} f_\varepsilon(t) dt = 0 \quad \text{п.в.} \quad (68)$$

По свойству единственности для преобразования Фурье отсюда $f_\varepsilon(t) = 0$ при $t > 1 + \varepsilon$. Тогда

$$\Phi(z) \frac{1 - e^{-\varepsilon z}}{\varepsilon z} = - \int_1^{1+\varepsilon} e^{-zt} f_\varepsilon(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (69)$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как

$$\|f_\varepsilon\|_{L^q(1, 1+\varepsilon)} \leq \|f(t)l(t)\|_{L^q(1, 1+\varepsilon)} \|s_\varepsilon(t)\|_{L^1(0, \varepsilon)} \rightarrow 0,$$

то правая, а значит, и левая части (69) стремятся к нулю в каждой точке z такой, что $\operatorname{Re} z > 0$. Однако $(1 - e^{-\varepsilon z})/(\varepsilon z) \rightarrow 1$, поэтому $\Phi(z) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. По свойству единственности, содержащемуся в определении класса $\mathcal{L}$, отсюда $\varphi = 0$. В силу (67) $F(z) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Учитывая формулу (62) и применяя свойство единственности для ПЛ, заключаем сначала, что $f(t)l(t) = 0$, а затем и $f(t) = 0$, $t > 1$, так как $l(t) > 0$. В итоге любой функционал $h \in B^*$, аннулирующий систему (53), оказывается тривиальным, и потому эта система полна в B . Случай $2 \leq p < \infty$ разобран.

При $1 < p < 2$ заключительная часть доказательства проще. Теперь $F(z)$ задается формулой (63); по свойству (64) и по теореме Пэли–Винера $F(z) \in H^2$. В силу равенства (67) функция $\Phi(z)$ также принадлежит H^2 . Итак, обе функции $F(z)$, $\Phi(z)$ лежат в H^2 , и, применяя предыдущие рассуждения при $\varepsilon = 0$ к $F_\varepsilon(z) = F(z)$, $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z)$, получаем (68) с $\varepsilon = 0$, $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t) \in L^2(0, 1)$, $f_\varepsilon(t) = f(t)l(t)/t^{1/2-1/q} \in L^2(1, \infty)$. Отсюда $\varphi \equiv 0$, $f \equiv 0$, и функционал h тривиален. Случай $1 < p < 2$ также разобран. Теорема 3 доказана.

10. Индивидуальные касательные граничные значения. Для полноты изложения отметим еще любопытный факт существования у функций классов H^p в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ индивидуальных касательных граничных значений п.в. на мнимой оси, $1 \leq p < \infty$. В работе [6] показано, что для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, найдутся ядро K и функция $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ такие, что $f = K * \varphi$. Но тогда по теореме А₁ интеграл Пуассона $F(z) = (P_x * f)(y) = (P_x * K * \varphi)(y)$, $x > 0$, п.в. на мнимой оси имеет предел (8), где касательные окрестности U задаются посредством (5). Так как произвольная функция $F(z) \in H^p$, $1 \leq p < \infty$, представима в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ интегралом Пуассона от функции своих угловых граничных значений, принадлежащей L^p , то сформулированное утверждение верно для любой функции $F(z)$ класса H^p , $1 \leq p < \infty$, и в том числе для преобразований Лапласа функций из L^q , $1 < q \leq 2$. Подчеркнем, что в этом случае окрестности (5) (подобно ядру K) зависят от f , и потому для наших аппроксимационных целей (а именно, для доказательства теоремы 3) этот факт недостаточен.

Список литературы

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1941.
2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1950.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
4. Kinney J. R. Tangential limits of functions of the class S_α // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 68–70.

5. *Cruzeiro A. B.* Convergence quasi partout dans des domaines paraboliques des fonctions d'intégrale de Dirichlet finie // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1982. V. 294. P. 13–16.
6. *Nagel A., Rudin W., Shapiro J. H.* Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces // Ann. Math. 1982. V. 116. P. 331–360.
7. *Кротов В. Г.* О касательном граничном поведении функций многих переменных // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 230–248.
8. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
9. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
10. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
11. *Седлецкий А. М.* О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 299–309.
12. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
13. *Müntz Ch.* Über den Approximationssatz von Weierstrass // H. A. Schwartz Festschrift. Berlin. 1914. P. 303–312.
14. *Szász O.* Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 482–496.
15. *Schwartz L.* Étude des sommes d'exponentielles. Paris: Hermann, 1959.
16. *Ахуезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
17. *Grum M.* On the theorems of Müntz and Szász // J. London Math. Soc. 1956. V. 31. P. 433–437.
18. *Grum M.* On the theorems of Müntz and Szász. Corrigendum and addendum // J. London Math. Soc. 1957. V. 32. P. 517.
19. *Siegel A.* On the Müntz–Szász theorem for $C[0, 1]$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 36. P. 161–166.
20. *Седлецкий А. М.* Проблема Мюнца–Саса и нули аналитических функций // Тр. 3-ей Саратов. зим. шк. “Теор. функц. и приближ.” 27 янв.–7 февр. 1986 г. Ч. 1. Саратов, 1987. С. 59–63.
21. *Седлецкий А. М.* О полноте систем экспонент на полупрямой // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 88–96.
22. *Sedletskii A. M.* Fourier transforms and approximations. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

Поступило в редакцию
28.II.2002