Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Приближение функций полиномами с эрмитовской интерполяцией и ограничениями на коэффициенты, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 1, 199–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/im424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:06:14

УДК 517.51

Р. М. Тригуб

Приближение функций полиномами с эрмитовской интерполяцией и ограничениями на коэффициенты

Найден порядок приближения вещественных функций конечной гладкости многочленами с разными ограничениями: приближение функций и их производных с эрмитовской интерполяцией в концевых точках, одностороннее приближение (сверху, например), коэффициентные условия.

Библиография: 16 наименований.

1. Введение. Формулировка результатов. В настоящей статье будем изучать поточечные приближения функций с данным модулем непрерывности r -ой производной на отрезке вещественной оси (см. [1, п. 5.2] или [2, гл. 6]) с разными дополнительными ограничениями.

Первое из этих ограничений – это одновременное приближение функции и ее производных полиномами с эрмитовской интерполяцией любой кратности в заданных точках (об интерполяции в концевых точках см. [3]–[5]). Эти теоремы можно, например, применить к доказательству точных достаточных условий разложения функций в ряд Фурье–Якоби (один важный пример имеется в [6, гл. 4, § 5]).

Второе ограничение – коэффициенты полиномов предполагаются целыми, при этом приходится на функцию накладывать условия арифметического характера. Критерий равномерного приближения такими полиномами предложен в [7]. Первые точные результаты о порядке приближения на отрезке $[0, 1]$ (аналоги теорем Джексона и Бернштейна) получены А. О. Гельфондом [8]. Поточечные приближения на любом отрезке длины меньше четырех изучил автор [9] (см. также обзоры [10] и [11]).

Третье ограничение – это приближение функций полиномами только с одной стороны (сверху или снизу). Прямые теоремы для односторонних интегральных приближений гладких функций получены уже довольно давно, они применялись при доказательстве тауберовых теорем с остаточным членом (см., например, [12, гл. 1]).

И, наконец, недавно в связи с одной задачей о спектре положительного оператора стали изучать равномерные приближения функций полиномами с положительными коэффициентами [13] (первые прямые теоремы с дополнительными ограничениями см. в [14], [15]).

В настоящей статье делается попытка объединить все эти ограничения тогда, когда это возможно.

Приведем теоремы, которые доказываются в настоящей статье. Далее c – некоторая абсолютная положительная константа, а $\gamma(a, b)$ – положительная константа, зависящая лишь от a и b , $P_n(W)$ – множество алгебраических полиномов степени

не выше n с коэффициентами из W , $\mathbb{R}_+ = [0, \infty) = -\mathbb{R}_-$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = -\mathbb{Z}_-$, $\omega(g; h)$ – модуль непрерывности ограниченной функции g шага $h \geq 0$ (см., например, [1] или [2]), $\forall x \in [a, b]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_{n,a,b}(x) = \frac{1}{n} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{b-a}{2n^2},$$

$$\delta_{0,n,a,b}(x) = \min \left\{ \frac{1}{n} \sqrt{(x-a)(b-x)}, \frac{2(x-a)(b-x)}{b-a} \right\}, \quad \delta_n(x) = \delta_{n,-1,1}(x).$$

Рассмотрим приближения функций полиномами $q_n \in P_n(\mathbb{Z})$ с эрмитовской интерполяцией. Пусть $[a, b]$ – отрезок вещественной оси длины меньше четырех, а $\{x_k\}_1^m$ – все целые алгебраические числа, лежащие на $[a, b]$ вместе со всеми алгебраически сопряженными к ним. Как известно (см. [7], а также [10] или [11]), существует полином с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице, такой, что $|X(x)| < 1$ и $X(x) \neq 0$ при $x \neq x_k$, $1 \leq k \leq m$, на $[a, b]$. Предположим еще, что $X(a) = X(b) = 0$ и все нули X лежат на $[a, b]$, $X_1(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C^r[a, b]$ при некотором $r \in \mathbb{Z}_+$ и $b - a < 4$. Если эрмитовский интерполяционный полином $h = h_f$ такой, что выполнены условия: $h^{(\nu)}(x_k) = f^{(\nu)}(x_k)$ при $\nu \in [0, r]$ и $k \in [1, m]$, имеет целые коэффициенты (это и необходимо), то для любого $n \geq (r+1)m - 1$ существует полином $q_n \in P_n(\mathbb{Z})$ такой, что для любых $x \in [a, b]$ и $\nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - q_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, X_1) \left(\min \left\{ \frac{2}{b-a} \delta_{n,a,b}(x), \frac{|X_1(x)|}{(b-a)^m} \right\} \right)^{r-\nu} \times \omega \left(f^{(r)}; \min \left\{ \frac{2}{b-a} \delta_{n,a,b}(x), \frac{|X_1(x)|}{(b-a)^m} \right\} \right).$$

Отметим сначала, что при $X_1(a) = X_1(b) = 0$ и $x \in [a, b]$

$$\min \left\{ \frac{2}{b-a} \delta_{n,a,b}(x), \frac{|X_1(x)|}{(b-a)^m} \right\} \leq \min \left\{ \frac{2}{b-a} \delta_{n,a,b}(x), \frac{(x-a)(b-x)}{(b-a)^2} \right\}$$

$$\leq 8 \min \left\{ \frac{(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}, \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{2(b-a)n} \right\} = \frac{4}{b-a} \delta_{0,n,a,b}(x).$$

Теорема 1 применима, в частности, к функциям на отрезках $[0, 1]$, $[-1, 1]$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $[-1, 2]$ и $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Для последнего отрезка, например, имеем

$$X(x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - 3).$$

Множество отрезков в теореме 1 можно, видимо, расширить, но обязательно в предположении, что концы их – числа алгебраические.

Теперь рассмотрим односторонние приближения функций полиномами со знакопостоянными коэффициентами с эрмитовской интерполяцией в концах отрезка (сначала в интегральной норме с весом Якоби, а затем и поточечно). Ограничимся приближением сверху ($f(x) \leq p_n(x)$ при $x \in [a, b]$), так как переход к приближению снизу очевиден. В силу знакопостоянства коэффициентов приближающих полиномов нужно предполагать, что $[a, b] \subset \mathbb{R}_-$ (при $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ функция должна

быть аналитической в окрестности нуля). Основным является случай $b = 0$ (переход к общему случаю осуществляется сдвигом отрезка влево). Длина отрезка может быть любой (переход к общему случаю осуществляется преобразованием подобия). Поэтому рассмотрим, например, отрезок $[-2, 0]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть r – нечетное. Если функция $f^{(r)}$ убывает на $[-2, 0]$ от единицы до нуля, а $f^{(\nu)}(0) = 0$ при $\nu \in [0, r]$, то для любого $n \geq 2r + 2$ существует полином в $P_n(\mathbb{Z}_+)$, а для любого $n \geq 2r + 3$ и полином в $P_n(\mathbb{Z}_-)$, каждый из которых удовлетворяет на $[-2, 0]$ неравенствам

$$f(x) \leq p_n(x), \quad \int_{-2}^0 \frac{|f(x) - p_n(x)|}{(|x|(x+2))^{(r+1)/2}} dx \leq \frac{\gamma(r)}{n^{r+1}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть r – нечетное. Если $f \in C^r[-2, 0]$ и $f^{(r)}$ убывает, а $f^{(\nu)}(0) = 0$ при $\nu \in [0, r]$, то для любого $n \geq 2r + 2$ существует полином в $P_n(\mathbb{Z}_+)$, а для любого $n \geq 2r + 3$ и полином в $P_n(\mathbb{Z}_-)$, каждый из которых при $0 \leq \nu \leq r$ удовлетворяет на $[-2, 0]$ неравенствам

$$f(x) \leq p_n(x), \quad |f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) \delta_{0,n,-2,0}^{r-\nu}(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{0,n,-2,0}(x)).$$

(Операторы $p_n = p_n(f)$ в теоремах 2 и 3 линейные.)

Отметим сразу, что условие $f^{(\nu)}(0) = 0$ при $\nu \in [0, r]$ является необходимым. Убывание $f^{(r)}$ в теореме 3 (и теореме 2) нельзя заменить возрастанием (см. ниже лемму 15), а при четном r недостаточно возрастания $f^{(r)}$ (см. там же) или убывания $f^{(r)}$ (в качестве контрпримера можно рассмотреть любую такую функцию с условием $f^{(r+1)}(0) = -\infty$; см. лемму 7).

В следующей теореме отрезок $[-1, 0]$ нельзя заменить на $[-1 - \varepsilon, 0]$, $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть r – нечетное. Если $f \in C^r[-1, 0]$ и $f^{(r)}$ убывает и если $\frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$, $\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} \in \mathbb{Z}_+$ при $\nu \in [0, r]$, то для любого $n \geq 2r + 2$ существует полином $q_n \in P_n(\mathbb{Z}_+)$ такой, что $f(x) \leq q_n(x)$ при $x \in [-1, 0]$ и при любом $\nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - q_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) \delta_{0,n,-1,0}^{r-\nu}(x) (\omega(f^{(r)}; \delta_{0,n,-1,0}(x)) + \delta_{0,n,-1,0}(x)).$$

Для доказательства теорем 1 и 4 используются схема доказательства теоремы 1 из [9] и новые леммы 4, 8, 13 и 14 (см. в п. 2). Для доказательства теорем 2 и 3 используются следующее очевидное представление функции на $[-2, 0]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{2r!} \int_{-2}^0 (x-y)^r (\text{sign}(x-y) - 1) df^{(r)}(y),$$

и теорема о приближении sign полиномами с эрмитовской интерполяцией любой кратности в концах отрезка (см. [14, теорема 1], доказательство этой теоремы, приведенной ниже в виде леммы 9, составляет содержание статьи [16]).

Теоремы 2 и 3 анонсированы в [14].

Отметим еще, что в теоремах 2–4 найдена наименьшая из возможных степеней полиномов, а другой переход к односторонним приближениям (случай нелинейных операторов) содержится в [15].

2. Вспомогательные утверждения. Понадобятся некоторые усиления следующей известной теоремы А.Ф. Тимана (см., например, [1] или [2]). Если $f \in C^r[-1, 1]$ при некотором $r \in \mathbb{Z}_+$, то для любого $n \geq \max\{r, 1\}$ существует полином $p_n \in P_n(\mathbb{R})$ такой, что для любого $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \gamma(r) \delta_n^r(x) \omega(f^{(r)}; \delta_n(x)). \quad (1)$$

ЛЕММА 1. Из неравенства (1) следует, что для любого $\nu \in [0, r]$ выполнено

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_1(r) \delta_n^{r-\nu}(x) \omega(f^{(r)}; \delta_n(x)), \quad (2)$$

и для тех же $x \in [-1, 1]$

$$|p_n^{(r+1)}(x)| \leq \gamma_2(r) \frac{\omega(f^{(r)}; \delta_n(x))}{\delta_n(x)}. \quad (3)$$

(См. [9, лемма 1 и замечание 2], см. также, например, [2, гл. 7, §3].)

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C^r[-1, 1]$ и $f^{(\nu)}(x_k) = 0$ при $\nu \in [0, r]$ и $k \in [1, m]$, где $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$. Тогда для любого $n \geq n_0(r, X_1)$ существует p_n такой, что $p_n^{(\nu)}(x_k) = 0$ при $\nu \in [0, r]$, $k \in [1, m]$ и для любого $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \gamma_3(r) \delta_n^r(x) \omega(f^{(r)}; \delta_n(x)).$$

Это утверждение см. в [9, теорема 1] (см. случаи I–III при $p_2(x) = 1$).

ЛЕММА 3. 1) При $y_k = \sin \frac{k\pi}{2n+1}$ и $k \in [0, n-1]$

$$\frac{1}{24n} \sqrt{1 - y_k^2} \leq y_{k+1} - y_k \leq \frac{4\pi}{n} \sqrt{1 - y_{k+1}^2}, \quad \delta_n(y_k) \leq 5\delta_n(y_{k+1}).$$

2) Если $|x - y| \leq c \max\{\delta_n(x), \delta_n(y)\}$, то

$$\max\{\delta_n(x), \delta_n(y)\} \leq 2(c+1) \min\{\delta_n(x), \delta_n(y)\}.$$

3) Если $|y| \leq |z|$, $|z - y| \leq c\delta_n(z)$, $\delta_n(y) \leq c\delta_n(z)$ при некоторых $x, y, z \in [-1, 1]$, то

$$\frac{1}{2c+1} (|x - y| + \delta_n(y)) \leq (|x - y| + \delta_n(z)) \leq (c+1) (|x - y| + \delta_n(y)).$$

Утверждение 1) – это лемма 1 из [16], утверждение 2) – лемма 2, а утверждение 3) – лемма 4 из [15].

ЛЕММА 4. 1) Если полином p_n удовлетворяет неравенству (1) и имеем $p_n^{(\nu)}(x_k) = 0$ при $\nu \in [0, r]$ и $k \in [1, m]$, то при тех же ν и x

$$|f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_4(r) \min\{\delta_n(x), |x - x_1|, \dots, |x - x_m|\}^{r-\nu} \times \omega(f^{(r)}; \min\{\delta_n(x), |x - x_1|, \dots, |x - x_m|\}).$$

2) Если при некотором $r \geq 0$ для любого $x \in [-1, 1]$ выполнено $|p_n(x)| \leq \delta_n^r(x) \omega(\delta_n(x))$, где ω – функция со свойством (4) (см. ниже), $p_n^{(\nu)}(x_k) = 0$, $1 \leq k \leq m$, $0 \leq \nu \leq q$, при некотором $q \geq r$, то для любого $x \in [-1, 1]$

$$|p_n(x)| \leq \gamma(r, q, X_1) \min\{\delta_n(x), |x - x_1|, \dots, |x - x_m|\}^r \times \omega(\min\{\delta_n(x), |x - x_1|, \dots, |x - x_m|\}).$$

Доказательство основано на лемме 1.

1) Рассмотрим значения $x \in [-1, 1]$, для которых указанный минимум равен, например, $|x - x_1|$. Но тогда в силу леммы 3, 2)

$$\max\{\delta_n(x), \delta_n(x_1)\} \leq 4 \min\{\delta_n(x), \delta_n(x_1)\}.$$

В силу формулы Тейлора существуют $y_1, y_2 \in (x_1, x]$ такие, что

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - p_n^{(\nu)}(x)| &= \frac{|x - x_1|^{r-\nu}}{(r-\nu)!} |f^{(r)}(y_1) - p_n^{(r)}(y_1)| \\ &= \frac{|x - x_1|^{r-\nu}}{(r-\nu)!} |(f^{(r)}(y_1) - f^{(r)}(x_1)) + (p_n^{(r)}(x_1) - p_n^{(r)}(y_1))| \\ &\leq \frac{|x - x_1|^{r-\nu}}{(r-\nu)!} (\omega(f^{(r)}; |x - x_1|) + |p_n^{(r+1)}(y_2)| |x_1 - y_1|). \end{aligned}$$

Теперь применим лемму 1 (см. неравенство (3)). В силу известного свойства модуля непрерывности (см., например, [1, п. 3.2] или [2, гл. 3, § 1]) для любого $\lambda > 0$ и $h \in [0, 2/\lambda]$ выполнено

$$\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h) \quad (4)$$

и (как следствие из него) при $0 < h_1 \leq h_2$

$$\omega(h_2) \leq \omega(h_1) \left(\frac{h_2}{h_1} + 1 \right) \leq 2 \frac{h_2}{h_1} \omega(h_1). \quad (5)$$

Так как $|x_1 - y_1| \leq |x - x_1|$ и $|x - x_1| \leq \delta_n(x) \leq 4 \min\{\delta_n(x), \delta_n(x_1)\} \leq 4\delta_n(y_2)$, то

$$\frac{\omega(f^{(r)}; \delta_n(y_2))}{\delta_n(y_2)} \leq 2 \frac{\omega(f^{(r)}; \frac{|x-x_1|}{4})}{\frac{|x-x_1|}{4}} \leq 8 \frac{\omega(f^{(r)}; |x-x_1|)}{|x-x_1|}.$$

2) В силу неравенства Дзядыка–Лебеда–Брудного (см., например, [1, п. 4.8.72] или [2, гл. 6, § 1]) для производной полинома выполнено неравенство

$$|p_n^{(q+1)}(x)| \leq \gamma(r, q) \delta_n^{r-q-1}(x) \omega(\delta_n(x)).$$

Как и при доказательстве утверждения 1), считая $m = 1$ и $|x - x_1| \leq \delta_n(x)$, получаем при некотором $y_1 \in (x_1, x)$, что

$$\begin{aligned} |p_n(x)| &= \frac{|x - x_1|^{q+1}}{(q+1)!} |p_n^{(q+1)}(y_1)| \leq \gamma_1(r, q) |x - x_1|^{q+1} \frac{\omega(\delta_n(y_1))}{\delta_n(y_1)} \frac{1}{\delta_n^{q-r}(y_1)} \\ &\leq \gamma_2(r, q) |x - x_1|^{q+1} \frac{\omega(|x - x_1|)}{|x - x_1|} |x - x_1|^{r-q} = \gamma_2(r, q) |x - x_1|^r \omega(|x - x_1|). \end{aligned}$$

Отметим, что утверждение 2) при $x_1 = -x_2 = 1$ имеется, по сути, в [3], хотя и приведено в более слабой форме, так как

$$\min \left\{ 1 - x^2, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \right\} \leq 2 \min \left\{ 1 - x^2, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right\} \leq 2 \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}. \quad (6)$$

ЛЕММА 5. Пусть $f \in C^r[-1, 1]$ и $\{x_k\}_1^m \subset [-1, 1]$. Если $h = h_{f,m}$ – эрмитовский интерполяционный полином, определяемый условиями $h^{(\nu)}(x_k) = f^{(\nu)}(x_k)$ при $\nu \in [0, r]$ и $k \in [1, m]$ ($h \in P_{m(r+1)-1}(\mathbb{R})$), то $|h^{(r+1)}(x)| \leq \gamma(r, X_1)\omega(f^{(r)}; 2)$ и для любого $\nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - h^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, X_1)\omega(f^{(r)}; \min_k |x - x_k|) \left(\min_k |x - x_k|\right)^{r-\nu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 1$ $h_{f,1}$ – полином Тейлора степени r в точке x_1 и искомые утверждения очевидны. Предположим, что лемма доказана для точек $\{x_k\}_1^{m-1}$. Представим $h_{f,m}$ в виде

$$h_{f,m}(x) = h_{f,m-1}(x) + (x - x_1)^{r+1} \dots (x - x_{m-1})^{r+1} \sum_{k=0}^r a_k (x - x_m)^k$$

и проверим, что

$$\max_{1 \leq k \leq r} |a_k| \leq \gamma_1(r, X_1)\omega(f^{(r)}; 2). \quad (7)$$

Очевидно, что при $k \in [0, r]$

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{1}{k!} \left| \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{h_{f,m}(x) - h_{f,m-1}(x)}{(x - x_1)^{r+1} \dots (x - x_{m-1})^{r+1}} \right) \right|_{x=x_m} \\ &= \frac{1}{k!} \left| \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{f(x) - h_{f,m-1}(x)}{(x - x_1)^{r+1} \dots (x - x_{m-1})^{r+1}} \right) \right|_{x=x_m} \\ &\leq \gamma_0(r, X_1) \sum_{\nu=0}^k |f^{(\nu)}(x_m) - h_{f,m-1}^{(\nu)}(x_m)|. \end{aligned}$$

Но в силу предположения индукции

$$|f^{(\nu)}(x) - h_{f,m-1}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, \{x_k\}_1^{m-1}) 2^{r-\nu} \omega(f^{(r)}; 2) \leq 2^r \gamma \omega(f^{(r)}; 2)$$

и неравенство (7) установлено. Из него и предположения индукции сразу получаем

$$|h_{f,m}^{(r+1)}(x)| \leq |h_{f,m-1}^{(r+1)}(x)| + \gamma_2(r, X_1)\omega(f^{(r)}; 2) \leq \gamma_3(r, X_1)\omega(f^{(r)}; 2).$$

Теперь для любых x_k и $\nu \in [0, r]$ существуют $y_1, y_2 \in (x_k, x]$ такие, что

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - h_{f,m}^{(\nu)}(x)| &= \frac{|x - x_k|^{r-\nu}}{(r - \nu)!} |f^{(r)}(y_1) - h_{f,m}^{(r)}(y_1)| \\ &\leq \frac{|x - x_k|^{r-\nu}}{(r - \nu)!} (\omega(f^{(r)}; |x - x_k|) + |h_{f,m}^{(r+1)}(y_2)| |x - x_k|) \\ &\leq \gamma(r, X_1) (\omega(f^{(r)}; |x - x_k|) + \omega(f^{(r)}; 2) |x - x_k|) |x - x_k|^{r-\nu}. \end{aligned}$$

Осталось учесть, что в силу (5) при $|x - x_k| \leq 2$ имеем

$$\omega(f^{(r)}; 2) |x - x_k| \leq 4\omega(f^{(r)}; |x - x_k|).$$

ЛЕММА 6. Для любой монотонной на $[0, 1]$ функции f и для любых $a, b \in (0, 1]$

$$\left| \int_0^b \frac{df(y)}{\sqrt{a+y}} \right| \leq 5 \frac{\omega(f; \sqrt{ab})}{\sqrt{a}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем для определенности, что f возрастает и $f(0) = 0$. При $b \leq a$ в силу монотонности модуля ω имеем

$$\int_0^b \frac{df(y)}{\sqrt{a+y}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^b df(y) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \omega(f; b) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \omega(f; \sqrt{ab}).$$

Если же $a < b$, то после интегрирования по частям в интеграле Стилтеса, учитывая, что $f(0) = 0$, а оценка интеграла по $[0, a]$ уже получена, получаем

$$\int_a^b \frac{df(y)}{\sqrt{a+y}} \leq \int_a^b \frac{df(y)}{\sqrt{y}} \leq \frac{f(b)}{\sqrt{b}} + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{f(y)dy}{y^{3/2}} \leq \frac{\omega(f; b)}{\sqrt{b}} + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\omega(f; y)}{y^{3/2}} dy.$$

Применяя дважды неравенство (4) при $h = \sqrt{ab}$, имеем

$$\frac{\omega(f; \sqrt{ab})}{\sqrt{a}} \left[\sqrt{\frac{a}{b}} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + 1 \right) + \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_a^b \frac{y/\sqrt{ab} + 1}{y^{3/2}} dy \right].$$

Первое слагаемое в квадратной скобке меньше двух, второе слагаемое после вычисления интеграла не больше

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{2}{\sqrt{a}} \right) = 2.$$

Переходим к односторонним приближениям функций полиномами с эрмитовской интерполяцией. Как видно из следующей леммы, для функции $f_1(x) = |x-1|^{r+1/2}$ вообще не существует полинома p с условиями: $p^{(\nu)}(1) = f_1^{(\nu)}(1)$, $0 \leq \nu \leq r$, и $f_1(x) \leq p(x)$ при любом $x \in [-1, 1]$. При четном r для функции $f_2(x) = |x|^{r+1+\delta}$, $\delta \in [0, 1)$, не существует полинома p с условиями: $p^{(\nu)}(0) = f_2^{(\nu)}(0)$, $0 \leq \nu \leq r$, и $f_2(x) \leq p(x)$ при любом $x \in [-1, 1]$.

ЛЕММА 7. Пусть $x_1 \in [-1, 1]$, а $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет r производных в точке x_1 . Для того чтобы существовал полином p с условиями: $p^{(\nu)}(x_1) = f^{(\nu)}(x_1)$, $0 \leq \nu \leq r$, и $f(x) \leq p(x)$ при любом $x \in [-1, 1]$, необходимо, а если $x_1 = 1$, или $x_1 = -1$, или $x_1 \in (-1, 1)$ и r — нечетное, то и достаточно, чтобы f была ограничена сверху и

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_1} |x - x_1|^{-r-1} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu \right) < \infty.$$

Если при четном r и $x_1 \in (-1, 1)$ $f(x) \leq p(x)$ при любом $x \in [-1, 1]$, то и

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow x_1+0} |x - x_1|^{-r-1} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu \right) &\leq \frac{p^{(r+1)}(x_1)}{(r+1)!} \\ &\leq - \overline{\lim}_{x \rightarrow x_1-0} |x - x_1|^{-r-1} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* в общем случае очевидна, так как эти условия выполняются для любого полинома ($f = p$).

Достаточность. Если f ограничена сверху и верхний предел конечен, то существует число M такое, что для любого $x \in [-1, 1]$, $x \neq x_1$, выполнено

$$|x - x_1|^{-r-1} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu \right) \leq M$$

и, значит, для любого $x \neq x_1$

$$f(x) \leq \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu + M|x - x_1|^{r+1}.$$

Но и второе слагаемое в указанных случаях является полиномом (степени $r + 1$). Необходимость дополнительного условия при четном r следует из того, что

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{x \rightarrow x_1+0} |x - x_1|^{-r-1} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu \right) \\ & \leq \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{p(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{p^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu}{(x - x_1)^{r+1}} = \frac{p^{(r+1)}(x_1)}{(r+1)!}, \\ & \overline{\lim}_{x \rightarrow x_1-0} |x - x_1|^{-r-1} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu \right) \\ & \leq \lim_{x \rightarrow x_1-0} \frac{p(x) - \sum_{\nu=0}^r \frac{p^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} (x - x_1)^\nu}{|x - x_1|^{r+1}} = -\frac{p^{(r+1)}(x_1)}{(r+1)!}. \end{aligned}$$

Лемму 7 легко сформулировать для любого числа узлов интерполяции.

Будем считать далее, что имеем две точки интерполяции в концах отрезка, и добавим условия на коэффициенты эрмитовских полиномов.

ЛЕММА 8. Пусть r – нечетное и $f^{(r)}(0) \leq f^{(r)}(x) \leq f^{(r)}(-1)$ на отрезке $[-1, 0]$.

1) Если $f^{(\nu)}(0) \geq 0$ при $\nu \in [0, r]$, то существует полином $h \in P_{2r+2}(\mathbb{R}_+)$ такой, что $f(x) \leq h(x)$ на отрезке $[-1, 0]$ и при $\nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(x) - h^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) |x(x+1)|^{r+1-\nu} \omega(f^{(r)}; 1). \quad (8)$$

2) Если $f^{(\nu)}(0) \leq 0$ при $\nu \in [0, r]$, то существует полином $h \in P_{2r+3}(\mathbb{Z}_-)$ такой, что на отрезке $[-1, 0]$ $f(x) \leq h(x)$ и при $\nu \in [0, r]$ имеет место (8).

Если в утверждениях 1) или 2) $\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}, \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \nu \leq r$, то коэффициенты h можно считать еще и целыми. При этом в (8) нужно вместо $\omega(f^{(r)}; 1)$ поставить $\omega(f^{(r)}; 1) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сразу, что степени $(2r+2)$ и $(2r+3)$ – наименьшие из возможных, а подобный результат справедлив и при четном r .

Обозначим через h_f эрмитовский интерполяционный полином, определяемый условиями $h_f^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1)$ и $h_f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ при $\nu \in [0, r]$ (его степень не более $2r+1$). Тогда при некоторых числовых коэффициентах

$$h_f(x) = \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + x^{r+1} \sum_{k=0}^r a_k (x+1)^k = \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + x^{r+1} \sum_{k=0}^r b_k x^k.$$

В силу неравенства (7) имеем $|a_k| \leq \gamma_1(r) \omega(f^{(r)}; 1)$, а значит, и $|b_k| \leq \gamma_2(r) \times \omega(f^{(r)}; 1)$, $0 \leq k \leq r$. Аналогично,

$$h_f(x) = \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(-1)}{\nu!} (x+1)^\nu + (x+1)^{r+1} \sum_{k=0}^r \tilde{a}_k x^k.$$

1) Проверим, что при $x \in [-1, 0]$

$$f(x) \leq h_f(x) + \gamma_3(r) |x(x+1)|^{r+1} \omega(f^{(r)}; 1).$$

Пусть для определенности $x \in [-1/2, 0]$. Существует $y \in (x, 0)$ такой, что

$$\begin{aligned} f(x) - h_f(x) &= \frac{x^{r+1}}{r!} (f^{(r)}(y) - f^{(r)}(0)) + \sum_{k=0}^r b_k x^{k+r+1} \leq \sum_{k=0}^r b_k x^{k+r+1} \\ &\leq x^{r+1} \sum_{k=0}^r |b_k| \leq (r+1) \gamma_2(r) x^{r+1} \omega(f^{(r)}; 1) \\ &\leq \gamma_3(r) |x(x+1)|^{r+1} \omega(f^{(r)}; 1). \end{aligned}$$

Не всегда $b_k \geq 0$ для любого $k \in [0, r]$. Если же $b_k < 0$, то воспользуемся неравенством

$$b_k x^{k+r+1} \leq b_k x^{k+r+1} + |b_k| x^{r+1} (x+1)^{r+1}$$

(справа – полином с положительными коэффициентами, а при целом b_k – и с целыми). Имеем

$$h_{2r+2}(x) = h_f(x) + x^{r+1} (x+1)^{r+1} \sum_{k: b_k < 0} |b_k| + \gamma_3(r) x^{r+1} (x+1)^{r+1} \omega(f^{(r)}; 1)$$

(при целых b_k нужно заменить $\gamma_3(r) \omega(f^{(r)}; 1)$ на $[\gamma_3(r) \omega(f^{(r)}; 1)] + 1$). Неравенство (8) следует теперь из леммы 5.

2) Теперь вместо h_f возьмем полином $\tilde{h}_f$, определяемый условиями $\tilde{h}_f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$, $\tilde{h}_f^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1)$ при $\nu \in [0, r]$ и $\tilde{h}_f^{(r+1)}(0) = 0$ (его степень не более $2r+2$),

$$\tilde{h}_f(x) = \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + x^{r+2} \sum_{k=0}^r c_k (x+1)^k = \sum_{\nu=0}^r \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu + x^{r+2} \sum_{k=0}^r d_k x^k.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $f^{(\nu)}(0) = 0$ при $\nu \in [0, r]$. Тогда коэффициент

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \{x^{-r-2} \tilde{h}_f(x)\}_{x=-1} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \{x^{-r-2} f(x)\}_{x=-1}$$

есть линейная комбинация производных $f^{(\nu)}(-1)$, $0 \leq \nu \leq r$. Однако при $\nu \in [0, r]$

$$|f^{(\nu)}(-1)| = |f^{(\nu)}(-1) - f^{(\nu)}(0)| \leq \frac{\omega(f^{(r)}; 1)}{(r - \nu)!}.$$

Поэтому $|c_k|$, а значит, и $|d_k|$ не превышают $\gamma_4(r)\omega(f^{(r)}; 1)$. Как и в случае 1), получаем

$$f(x) \leq \tilde{h}_f(x) + \gamma_5(r)|x|^{r+2}(x+1)^{r+1}\omega(f^{(r)}; 1).$$

Но теперь к $\tilde{h}_f$ добавляется полином с отрицательными коэффициентами, а если $d_k > 0$, то воспользуемся неравенством

$$d_k x^{k+r+2} \leq d_k x^{k+r+2} + d_k |x|^{r+2}(x+1)^{r+1}.$$

Положим теперь для любых $x, y \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ и $s, t, r \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \Delta_n(x, y, s, t, r) &= \left(\frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 1 - y^2 + n^{-2} |\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y|} \right)^s \\ &\times \left(\frac{\delta_n(y)}{|x - y| + \delta_n(y)} \right)^t |x - y|^r. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что Δ_n как функция от (x, y) симметрична относительно $(0, 0)$, убывает с ростом s и t и почти убывает с ростом r .

ЛЕММА 9. *Для любых $s, t \in \mathbb{R}_+$, любого $y \in (-1, 1)$ и $n > 2s$ существует полином $p_n = p_{n,y}$ по x степени не выше n , удовлетворяющий на отрезке $[-1, 1]$ неравенству*

$$|\operatorname{sign}(x - y) - p_n(x)| \leq \gamma(s, t) \Delta_n(x, y, s, t, 0).$$

При этом полином p_n на $[-1, 1]$ возрастает от -1 до 1 , а все нули производной p'_n лежат на $[-1, 1]$. Степень полинома p_n нечетная, а старший коэффициент можно считать положительным или отрицательным. Коэффициенты p_n как функции от y кусочно непрерывны.

(См. [14], доказательство этой леммы составляет содержание статьи [16].)

ЛЕММА 10. *Для любых $x, y \in [-1, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 1 - y^2 + n^{-2} |\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y|} \right)^{1/2} \times \\ &\times \frac{\delta_n(x) + \delta_n(y)}{|x - y| + \delta_n(x) + \delta_n(y)} |x - y| \leq 3 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $xy < 0$. Учитывая вид $\delta_n(x)$ (см. п. 1), перепишем левую часть искомого неравенства следующим образом:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + 2n^{-1}}{(1-x^2 + 1-y^2 + 2n^{-2})^{1/2}} \right) \left(\frac{|x-y|}{|x-y| + \delta_n(x) + \delta_n(y)} \right).$$

Последний из трех множителей не больше единицы.

Используя в знаменателе неравенство

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{1/2} \geq \frac{a + b + c}{3},$$

получаем

$$\begin{aligned} (1-x^2 + 1-y^2 + 2n^{-2})^{1/2} &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{2}n^{-1}) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + 2n^{-1}), \end{aligned}$$

и искомое неравенство доказано с константой $\sqrt{6} < 3$.

Пусть теперь $xy \geq 0$. Используя неравенства $\delta_n(x) \geq \frac{1}{n^2}$ и $|x-y| \leq 1-x^2 + 1-y^2$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{1}{(1-x^2 + 1-y^2)^{1/2}} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + 2n^{-1}) \frac{|x-y|}{|x-y| + 2n^{-2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{1}{(1-x^2 + 1-y^2)^{1/2}} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + 2n^{-1}) \\ &\quad \times \frac{1-x^2 + 1-y^2}{1-x^2 + 1-y^2 + 2n^{-2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{(1-x^2 + 1-y^2)^{1/2} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + 2n^{-1})}{1-x^2 + 1-y^2 + 2n^{-2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} (x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

где $x_1 = \sqrt{1-x^2}$, $x_2 = \sqrt{1-y^2}$ и $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{n}$. Но эта функция однородная нулевой степени, а на единичной сфере выполнено $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, значит,

$$x_1 + x_2 \leq \sqrt{2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leq \sqrt{2}, \quad x_3 \leq 1.$$

Поэтому $g(x_1, x_2, x_3) \leq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} < 3$.

ЛЕММА 11. Для любого $y \in [-1, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^1 \frac{\delta_n^2(x) + \delta_n^2(y)}{(x-y)^2 + \delta_n^2(x) + \delta_n^2(y)} (1-x^2)^{-1/2} dx \leq \frac{c}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем далее, что $y \in [0, 1]$ (случай $y \in [-1, 0]$ сводится к рассматриваемому заменой в интеграле x на $-x$). Интеграл разобьем на два: по $[-1, 0]$ и $[0, 1]$. Первый из них не больше второго, так как при $x \leq 0$ и $y \in [0, 1]$ имеем $|x + y| \leq |x - y|$. Остается рассмотреть интеграл по $[0, 1]$. Очевидно, что при $x \in [0, 1]$ имеем $1 - x \leq 1 - x^2 \leq 2(1 - x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \delta_n^2(x) + \delta_n^2(y) &= \left((1 - x^2)^{1/2} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 + \left((1 - y^2)^{1/2} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\frac{1 - x}{n^2} + \frac{1 - y}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) \leq 4 \left(\frac{2(1 - y)}{n^2} + \frac{|x - y|}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right). \end{aligned}$$

В случаях $1/n^2 \leq 1 - y$ и $1 - y \leq 1/n^2$ из трех слагаемых остаются два. Но функция $\phi(t) = t/(a + t)$, где $a > 0$, возрастает и полуаддитивна на $[0, \infty)$ ($\phi(t_1 + t_2) \leq \phi(t_1) + \phi(t_2)$). Таким образом, достаточно доказать, что каждый из следующих трех интегралов является $O(1/n)$ равномерно по y (последний – в предположении $1 - y \leq 1/n^2$):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{((1 - y)/n^2)(1 - x)^{-1/2}}{(x - y)^2 + (1 - y)/n^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{(|x - y|/n^2)(1 - x)^{-1/2}}{(x - y)^2 + |x - y|/n^2} dx, \\ \int_0^1 \frac{(1/n^4)(1 - x)^{-1/2}}{(x - y)^2 + 1/n^4} dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл разобьем на два. В одном из них $0 \leq x \leq (1 + y)/2$ и, значит, $1 - x \geq (1 - y)/2$, а в другом $(1 + y)/2 \leq x \leq 1$ и, значит, $x - y \geq (1 - y)/2$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{(1+y)/2} \frac{(1 - y)^{1/2}}{n^2(x - y)^2 + 1} dx + \int_{(1+y)/2}^1 \frac{(1 - x)^{-1/2}}{n^2(1 - y)/4 + 1} dx \\ = \frac{\sqrt{1 - y}}{n} [\operatorname{arctg} n(x - y)]_0^{(1+y)/2} + \frac{\sqrt{2}}{n} \frac{2\sqrt{n^2(1 - y)/4}}{n^2(1 - y)/4 + 1} \leq \frac{\pi + \sqrt{2}}{n}. \end{aligned}$$

И второй интеграл разбиваем на два. В одном из них $|x - y| \geq 1 - x$, а в другом $1 - x \geq |x - y|$. Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1 - x)^{-1/2}}{n^2|x - y| + 1} dx &\leq \int_0^1 \frac{(1 - x)^{-1/2}}{n^2(1 - x) + 1} dx + \int_0^1 \frac{|x - y|^{-1/2}}{n^2|x - y| + 1} dx \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{n^2|t| + 1} dt = \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

При $n \geq 2$ и третий интеграл разбиваем на два: по $[0, 1 - 2/n^2]$ и $[1 - 2/n^2, 1]$. Оставляя в знаменателе каждого из них одно слагаемое из двух и учитывая при этом, что в первом $y - x \geq 1 - 1/n^2 - x \geq (1 - x)/2$ при $y \in [1 - 1/n^2, 1]$, получаем

$$\int_0^{1-2/n^2} \frac{(1 - x)^{-1/2}}{n^4(1 - x)^2/4} dx + \int_{1-2/n^2}^1 (1 - x)^{-1/2} dx = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ЛЕММА 12. При $y_k = \sin \frac{k\pi}{2n+1}$ и $k \in [-n, n-1]$ (определение $\Delta_n(x, y, s, t, r)$ см. в (9)) выполнено неравенство

$$(y_{k+1} - y_k) \max_{y_k \leq y \leq y_{k+1}} \Delta_n(x, y, s, t, r) \leq \gamma(s, t, r) \int_{y_k}^{y_{k+1}} \Delta_n(x, y, s, t, r) dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\Delta_n(x, y, s, t, r) = \Delta_n(x, y, s, t, 0)|x - y|^r$. Докажем сначала, что

$$\max_{y_k \leq y \leq y_{k+1}} \Delta_n(x, y, s, t, 0) \leq c^{s+t} \min_{y_k \leq y \leq y_{k+1}} \Delta_n(x, y, s, t, 0).$$

В силу симметрии функции Δ_n можно ограничиться рассмотрением случая $0 \leq y_k \leq y \leq y_{k+1}$. Очевидно, что можно ограничиться значениями $s = 1$, $t = 0$ и $s = 0$, $t = 1$, т.е. доказать только то, что отношение максимума выражения в одной из круглых скобок в (9) к его минимуму ограничено абсолютной константой.

Для дроби в первой скобке выражения (9) имеем

$$\frac{1 - x^2 + 1 - y_k^2 + n^{-2}|\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y|}{1 - x^2 + 1 - y_{k+1}^2 + n^{-2}|\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y|} \leq \frac{1 - y_k^2}{1 - y_{k+1}^2},$$

и нужно воспользоваться леммой 3, 1). К выражению во второй скобке применим лемму 3, 3) при $y \in [y_k, y_{k+1}]$ и $z = y_{k+1}$. Получим при $c = 4\pi$ для любого $x \in [-1, 1]$

$$\frac{1}{2c+1}(|x - y| + \delta_n(y)) \leq |x - y_{k+1}| + \delta_n(y_{k+1}) \leq (c+1)(|x - y| + \delta_n(y)).$$

Остается доказать, что для любого $r \in \mathbb{R}_+$ и любого $x \in [-1, 1]$ выполнено неравенство

$$\gamma(r)(y_{k+1} - y_k) \max_{y_k \leq y \leq y_{k+1}} |x - y|^r \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - y|^r dy.$$

Пусть сначала $x \notin [y_k, y_{k+1}]$. Тогда

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - y|^r dy = \frac{1}{r+1} ||x - y_k|^{r+1} - |x - y_{k+1}|^{r+1}|.$$

Но при $0 \leq a \leq b$ и $r \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{2}(b-a)(a^r + b^r) \leq (b-a)b^r \leq b^{r+1} - a^{r+1},$$

так что

$$\begin{aligned} \int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - y|^r dy &\geq \frac{y_{k+1} - y_k}{2(r+1)} (|x - y_k|^r + |x - y_{k+1}|^r) \\ &\geq \frac{y_{k+1} - y_k}{2(r+1)} \max_{y_k \leq y \leq y_{k+1}} |x - y|^r. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \in [y_k, y_{k+1}]$. Считаем для определенности, что $x \in [z_k, y_{k+1}]$, где $z_k = \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1})$. В силу предыдущего

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - y|^r dy \geq \int_{y_k}^{z_k} |x - y|^r dy \geq \frac{(z_k - y_k)}{2(r+1)} (|x - y_k|^r + |x - z_k|^r).$$

Но $z_k - y_k = \frac{1}{2}(y_{k+1} - y_k)$, а $\max |x - y| = |x - y_k|$. Поэтому и в этом случае

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} |x - y|^r dy \geq \frac{y_{k+1} - y_k}{4(r+1)} \max_{y_k \leq y \leq y_{k+1}} |x - y|^r.$$

ЛЕММА 13. Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $\gamma(k, m)$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует полином p_n , удовлетворяющий на $[0, 1]$ неравенству

$$0 \leq x^k - x^{k+m} p_n(x) \leq \gamma(k, m) \min \left\{ \frac{1}{n^2}, x \right\}^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $k = 1$, а затем возвести это неравенство в степень $k \geq 2$.

При $1 \leq n \leq m$ можно взять $p_n = 1$. Считая далее $n \geq m + 1$, применим лемму 2'' из [9]: существует полином p_{n-m} такой, что для любого $x \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$|x - x^{m+1} p_{n-m}(x)| \leq \frac{\gamma_1(m)}{n^2}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и разделив на x , получим утверждение леммы при $k = 1$. Действительно, к полиному

$$s(x) = s_{2n-m-1}(x) = (x - x^{m+1} p_{n-m}(x))^2$$

с условиями

$$|s(x)| \leq \frac{\gamma_1^2}{n^4}, \quad s(0) = s'(0) = 0,$$

применяем лемму 4, 2) на отрезке $[0, 1]$ (при $x_1 = r = 0$, $q = 1$, $\omega(h) = 1$). Тогда

$$|s(x)| \leq 4\gamma_1^2 \min \left\{ x^2, \frac{1}{n^4} \right\} \left(\frac{2n-m-1}{n} \right)^4 \leq 64\gamma_1^2 \min \left\{ x^2, \frac{1}{n^4} \right\}$$

и

$$0 \leq \frac{s(x)}{x} \leq \frac{64\gamma_1^2}{x} \min \left\{ x^2, \frac{1}{n^4} \right\} \leq 64\gamma_1^2 \min \left\{ x, \frac{1}{n^2} \right\}.$$

ЛЕММА 14. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует полином $q_n^+ \in P_n(\mathbb{Z}_+)$ такой, что при $x \in [-1, 0]$

$$0 \leq -x - x^2 q_n^+(x) \leq c \min \left\{ \frac{1}{n^2}, |x(x+1)| \right\}.$$

При этом до степени $[n/2]$ коэффициенты q_n не равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2^s \leq n < 2^{s+1}$ при $s \in \mathbb{Z}_+$. Если полином Чебышева равен $T_n(x) = \cos n \arccos x$ на $[-1, 1]$, то искомым полином равен

$$\frac{T_{2^s}(1) - T_{2^s}(2x+1)}{2T'_{2^s}(1)} = -x - \dots$$

При любом $k \in [1, 2^s]$ коэффициент при x^k равен $-2^{k-1} \frac{T_{2^s}^{(k)}(1)}{T'_{2^s}(1)}$. То, что эти числа целые, легко доказать индукцией по s , если заметить, что в силу формулы двойного угла для косинуса $T_{2n}(x) = 2T_n^2(x) - 1$.

Далее очевидно, что $|T_n(x)| \leq 1 = T_n(1)$, а максимум модуля указанного полинома на $[-1, 0]$ равен $(T'_{2^s}(1))^{-1} = 4^{-s} < 4n^{-2}$. Поскольку этот полином равен нулю при $x = -1$ и $x = 0$, то, как и при доказательстве леммы 13, получаем нужную оценку ($c = 4$).

ЛЕММА 15. 1) Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Для любых $p \in (0, +\infty]$ и $n \geq r+1$ имеем

$$\sup \|f^{(r)}\|_\infty^{-1} \inf_{\substack{p_n: p_n(x) \geq f(x) \\ (-1)^\nu f^{(\nu)}(1) \geq (-1)^\nu p^{(\nu)}(1) \\ 0 \leq \nu \leq r}} \left(\int_{-1}^1 |f(x) - p_n(x)|^p dx \right)^{1/p} = +\infty.$$

Здесь верхняя грань берется по всем функциям $f \in C^r[-1, 1]$, у которых $(-1)^\nu f^{(\nu)}$ при $\nu \in [0, r]$ убывают.

2) Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geq r+1$

$$\sup \|f^{(r)}\|_\infty^{-1} \inf_{\substack{p_n: p_n(x) \geq f(x) \\ f^{(\nu)}(1) = p^{(\nu)}(1) \\ 0 \leq \nu \leq r}} \|f - p_n\|_\infty = +\infty.$$

Здесь верхняя грань берется по всем функциям $f \in C^r[-1, 1]$, у которых $(-1)^r f^{(r)}$ убывает на $[-1, 1]$.

Утверждение 2) является очевидным следствием 1) ($\|f\|_\infty$ – суп-норма).

Положим при $\varepsilon \in (0, 1)$

$$f_y(x) = |y - x|^\varepsilon (\max\{y - x, 0\})^r.$$

Так как $f_y^{(r+1)}(1) = 0$ при $y \in [-1, 1)$, то в силу леммы 7 для любого $n \geq r+1$ существует полином p_n такой, что $f(x) \leq p_n(x)$ для любого $x \in [-1, 1]$. Кроме того,

$$f_y^{(r)}(x) = (r + \varepsilon)(r + \varepsilon - 1) \dots (1 + \varepsilon)(\max\{y - x, 0\})^\varepsilon (-1)^r$$

и, значит, $\|f_y^{(r)}\|_\infty = (r + \varepsilon)(r + \varepsilon - 1) \dots (1 + \varepsilon)(1 + y)^\varepsilon \leq (r + 1)! 2^\varepsilon$ при $y \in [0, 1)$, а $\|f_y\|_p \leq \|f_y\|_\infty \leq 2^{r+\varepsilon}$. Предположим теперь, что существуют $b \in \mathbb{R}$, $n \geq r+1$ и $p \in (0, +\infty]$ такие, что для любого $y \in [0, 1)$ найдется полином $p_n = p_{n,y}$ такой, что

$$\int_{-1}^1 |f_y - p_{n,y}|^p dx \leq b^p, \quad f_y(x) \leq p_{n,y}(x), \quad (-1)^\nu p_{n,y}^{(\nu)}(1) \leq (-1)^\nu f_y^{(\nu)}(1) = 0$$

при $\nu \in [0, r]$. В силу неравенства Гёльдера можно ограничиться случаем $p \in (0, 1]$. В силу неравенства треугольника имеем

$$\int_{-1}^1 |p_{n,y}(x)|^p dx \leq b^p + \int_{-1}^1 |f_y(x)|^p dx \leq b^p + 2^{(r+\varepsilon)p+1}.$$

Применяя неравенство А. А. Маркова и неравенство разных метрик (см., например, [1, п. 4.8.7]), получаем

$$\|p_n^{(r+1)}\|_\infty \leq n^{2(r+1)} \|p_n\|_\infty \leq n^{2(r+1)+2/p} (b^p + 2^{(r+\varepsilon)p+1})^{1/p} \leq \gamma(p, n, r, b).$$

Используя формулу Тейлора, теперь имеем

$$\begin{aligned} (1 - y)^{r+\varepsilon} &= f_y(2y - 1) - f_y(1) \leq p_n(2y - 1) - p_n(1) \\ &= \sum_{\nu=1}^r \frac{(-1)^\nu p_n^{(\nu)}(1)}{\nu!} (1 - y)^\nu 2^\nu + \frac{p_n^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} (2y - 2)^{r+1} \\ &\leq \frac{p_n^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} 2^{r+1} (y - 1)^{r+1} \leq \frac{\gamma(p, n, r, b)}{(r+1)!} 2^{r+1} (1 - y)^{r+1}. \end{aligned}$$

При $y \rightarrow 1 - 0$ получаем противоречие с предположением.

3. Доказательства теорем 1–4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу леммы 2 для любого $n \geq n_0(r, X_1)$ существует полином p_n такой, что $p_n^{(\nu)}(x_k) = f^{(\nu)}(x_k)$, $0 \leq \nu \leq r$, $1 \leq k \leq m$, и на $[a, b]$ выполнено неравенство

$$|f(x) - h_f(x) - p_n(x)| \leq \gamma(r, X_1) \delta_{n,a,b}^r(x) \omega(f^{(r)} - h_f^{(r)}; \delta_{n,a,b}(x)),$$

а в силу леммы 5 и соотношения (5) при $h \in [0, b-a]$ выполнено

$$\begin{aligned} \omega(f^{(r)} - h_f^{(r)}; h) &\leq \omega(f^{(r)}; h) + \|h_f^{(r+1)}\|_{\infty} h \leq \omega(f^{(r)}; h) \\ &+ \gamma_1(r, X_1) \frac{2}{b-a} \omega(f^{(r)}; b-a) h \leq (1 + \gamma_1) \omega(f^{(r)}; h). \end{aligned}$$

Так как полином p_n делится без остатка на X_1^{r+1} , то на основании леммы 13 с заменой x на X_1 приближаем его полиномом с целыми коэффициентами и полиномом, делящимся уже на X_1^{2r+2} . Затем последний из них на основании леммы 3 из [9] приближаем полиномом с целыми коэффициентами (см. [9] или ниже доказательство теоремы 4). Получаем

$$|f(x) - h_f(x) - q_n(x)| \leq \gamma_2(r, X_1) \left(\delta_{n,a,b}^r(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{n,a,b}(x)) + \frac{(b-a)^{r+1}}{n^{2r+2}} \right).$$

При этом $h_f^{(\nu)}(x_k) + q_n^{(\nu)}(x_k) = f^{(\nu)}(x_k)$, $0 \leq \nu \leq r$, $1 \leq k \leq m$. Применяем лемму 4, и теорема 1 доказана для $n \geq n_1(r, X_1)$. При $(r+1)m-1 \leq n < n_1(r, X_1)$ в качестве искомого полинома приближения можно взять просто h_f (см. лемму 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заменим отрезок $[-2, 0]$ на $[-1, 1]$ (сдвиг на единицу). Теперь по условию имеем $f^{(\nu)}(1) = 0$, $0 \leq \nu \leq r$, и нужно построить два полинома p_n с условиями $p_n^{(\nu)}(1) \geq 0$ и $p_n^{(\nu)}(1) \leq 0$ для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что

$$f(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_x^1 (y-x)^r df^{(r)}(y) = \int_{-1}^1 h_{r,y}(x) df^{(r)}(y),$$

где $h_{r,y}(x) = \frac{(x-y)^r}{2r!} (\text{sign}(x-y) - 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Для приближения функции $h_{r,y}$ полиномами применяем лемму 9 ($n > 2s$):

$$\left| h_{r,y}(x) - \frac{(x-y)^r}{2r!} (p_{n,y}(x) - 1) \right| \leq \frac{\gamma(s, t)}{2r!} \Delta_n(x, y, s, t, r).$$

Полагаем теперь при $N = n + r$

$$p_N(x) = \int_{-1}^1 \frac{(x-y)^r}{2r!} (p_{n,y}(x) - 1) df^{(r)}(y).$$

Так как все нули производной $p'_{n,y}$, а значит, и всех следующих производных лежат на отрезке $[-1, 1]$, то знаки $p_{n,y}^{(\nu)}(1)$, $0 \leq \nu \leq n$, совпадают со знаком старшего коэффициента $p_{n,y}$, который можно выбирать по своему желанию.

Так как r – нечетное число, то указанные полиномы приближают $h_{r,y}$ снизу. Учитывая убывание $f^{(r)}$, получаем, что $f(x) \leq p_n(x)$ для любого $x \in [-1, 1]$. Имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{p_N(x) - f(x)}{(1-x^2)^{\frac{r+1}{2}}} dx \leq \frac{\gamma(s, t)}{2r!} \int_{-1}^1 df^{(r)}(y) \int_{-1}^1 \frac{\Delta_n(x, y, s, t, r)}{(1-x^2)^{\frac{r+1}{2}}} dx.$$

Выберем $s = \frac{r}{2}$ и $t = \frac{r+2}{2}$. Тогда

$$\Delta_n(x, y, r/2, r+2, r) = (\Delta_n(x, y, 1/2, 1, 1))^r \Delta_n(x, y, 0, 2, 0).$$

Применяя к первому множителю лемму 10, а ко второму – лемму 11, получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{\Delta_n(x, y, r/2, r+2, r)}{(1-x^2)^{\frac{r+1}{2}}} dx \leq \frac{3^r}{n^r} \int_{-1}^1 \frac{\Delta_n(x, y, 0, 2, 0)}{(1-x^2)^{1/2}} dx \leq \frac{3^r c}{n^{r+1}}.$$

При этом $n > 2s = r$, а $N = n + r \geq 2r + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Проведем рассуждения для отрезка $[-1, 1]$ (замена $f(x)$ на $f(x-1)$). Тогда при $x \in [-1, 1]$ имеем $f(x) = \int_{-1}^1 h_{r,y}(x) df^{(r)}(y)$ и, как и выше, при $N = n + r$ полагаем

$$p_N(x) = \int_{-1}^1 \frac{(x-y)^r}{2r!} (p_{n,y}(x) - 1) df^{(r)}(y), \quad (10)$$

где $p_{n,y}$ – полином из леммы 9 (любой из двух). Тогда $f(x) \leq p_N(x)$ при $x \in [-1, 1]$ и все коэффициенты в разложении p_N по степеням $(x-1)$ одного знака. Кроме того,

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{\gamma(s, t)}{2r!} \left| \int_{-1}^1 \Delta_n(x, y, s, t, r) df^{(r)}(y) \right|, \quad (11)$$

где $s, t \in \mathbb{R}_+$ определим позже, а $n > 2s$.

Чтобы оценить интеграл сверху, разобьем его на сумму интегралов по отрезкам $[y_k, y_{k+1}]$, где $y_k = \sin \frac{k\pi}{2n+1}$ при $|k| \leq n$ и $y_{n+1} = -y_{-n-1} = 1$. Очевидно, что если $\phi \in C[a, b]$ и $\phi(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, а

$$\max_{a \leq y \leq b} \phi(y) \leq \frac{c}{b-a} \int_a^b \phi(y) dy,$$

то при любой возрастающей на $[a, b]$ функции g имеем

$$\int_a^b \phi(y) dg(y) \leq c \frac{g(b) - g(a)}{b-a} \int_a^b \phi(y) dy.$$

Именно таким свойством обладает подынтегральная функция Δ_n как функция от y на каждом из отрезков $[y_k, y_{k+1}]$ при $k \in [-n, n-1]$ (см. лемму 12). Таким образом, имеем следующую оценку сверху интеграла в (11) (без окрестностей концевых точек):

$$\gamma_1(s, t, r) \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{f^{(r)}(y_k) - f^{(r)}(y_{k+1})}{y_{k+1} - y_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \Delta_n(x, y, s, t, r) dy.$$

Применяя лемму 3, 1) и свойство модуля ω (см. (5)), получаем неравенство

$$\frac{f^{(r)}(y_k) - f^{(r)}(y_{k+1})}{y_{k+1} - y_k} \leq \frac{\omega(f^{(r)}; y_{k+1} - y_k)}{y_{k+1} - y_k} \leq 48 \frac{\omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-y^2}}{24n}\right)}{\frac{\sqrt{1-y^2}}{24n}}$$

и общую оценку

$$\begin{aligned} 48\gamma_1(s, t, r) \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{n}{\sqrt{1-y^2}} \omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-y^2}}{n}\right) \Delta_n(x, y, s, t, r) dy \\ \leq 48\gamma_1(s, t, r) \int_{-1}^1 \frac{n}{\sqrt{1-y^2}} \omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-y^2}}{n}\right) \Delta_n(x, y, s, t, r) dy. \end{aligned}$$

В силу неравенства (4) при $x \in (-1, 1)$ имеем

$$\omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-y^2}}{n}\right) \leq \omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) \left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right).$$

Теперь нужно доказать, что при достаточно больших s и t выполнено

$$\int_{-1}^1 \Delta_n(x, y, s, t, r) \left(\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{n}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy \leq \gamma_2(s, t, r) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r.$$

Выберем $s \geq \frac{r+1}{2}$ и $t = r + 2$; тогда

$$\Delta_n\left(x, y, \frac{r+1}{2}, r+2, r\right) = \left(\Delta_n\left(x, y, \frac{1}{2}, 1, 1\right)\right)^r \Delta_n\left(x, y, \frac{1}{2}, 2, 0\right).$$

Учитывая возрастание функции $\phi(t) = \frac{t}{t+a}$, $a > 0$, на $\mathbb{R}_+$, к первому множителю можно применить лемму 10. Далее,

$$\frac{\Delta_n(x, y, 1/2, 2, 0)}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\Delta_n(x, y, 0, 2, 0)}{\sqrt{1-y^2}},$$

и в силу леммы 11

$$\int_{-1}^1 \frac{\Delta_n(x, y, 0, 2, 0)}{\sqrt{1-y^2}} dy = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Остается оценить в (11) интегралы по отрезкам $[-1, -y_n]$ и $[y_n, 1]$.

Очевидно, что $1 - y_n^2 \in [1/9n^2, 1/n^2]$, и в случае отрезка $[y_n, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{y_n}^1 \Delta_n\left(x, y, \frac{r+1}{2}, r+2, r\right) df^{(r)}(y) \right| \\ \leq 3^r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^r \left| \int_{y_n}^1 \Delta_n\left(x, y, \frac{1}{2}, 2, 0\right) df^{(r)}(y) \right|. \end{aligned}$$

При замене $x \in [-1, 0]$ на $-x$ интеграл возрастает. Поэтому считаем далее $x \in [0, 1]$. Пусть сначала $x \in [0, y_n]$. Тогда

$$\left| \int_{y_n}^1 \Delta_n \left(x, y, \frac{1}{2}, 2, 0 \right) df^{(r)}(y) \right| \leq \left| \int_{y_n}^1 df^{(r)}(y) \right| \leq \omega(f^{(r)}; 1 - y_n)$$

и $1 - y_n \leq \sqrt{1-x}\sqrt{1-y_n} \leq \frac{\sqrt{1-x}}{n}$.

Если же $x \in [y_n, 1]$, то имеем

$$\left| \int_{y_n}^1 \Delta_n \left(x, y, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) df^{(r)}(y) \right| \leq \left| \int_{y_n}^1 \left(\frac{1-x^2}{1-x^2+1-y^2} \right)^{1/2} df^{(r)}(y) \right|.$$

Применяя лемму 6 после замены $1-y=t$ при $a=1-x^2$ и $b=1-y_n$ и учитывая еще, что $1-x^2 \leq 2(1-x) \leq 2(1-y_n)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{1-y_n} \left(\frac{1-x^2}{1-x^2+t} \right)^{1/2} df^{(r)}(1-t) &\leq 5\omega(f^{(r)}; \sqrt{1-y_n}\sqrt{1-x^2}) \\ &\leq 5\omega\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right). \end{aligned}$$

При $\nu = 0$ теорема 3 доказана.

Чтобы применить теперь лемму 4, 1) при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, проверим, что для построенного полинома p_N имеют место равенства $p_N^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1)$, $p_N^{(\nu)}(1) = f^{(\nu)}(1)$ при $\nu \in [0, r]$.

Как видно из формулировки леммы 9, при $y \in (-1, 1)$ и $m < s$

$$\frac{d^m}{dx^m} \{p_{n,y}(x) - 1\}_{x=1} = \frac{d^m}{dx^m} \{p_{n,y}(x) - 1\}_{x=-1} = 0.$$

Поэтому $p_n^{(m)}(1) = 0 = f^{(m)}(1)$ при $m < s$ и $m \leq r$ (см. (10)). Выбираем $s = r + 1$. Тогда при $m \leq r$ имеем

$$\begin{aligned} p_N^{(m)}(-1) &= \frac{1}{r!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \frac{1}{2} (x-y)^r (p_{N,y}(x) + 1) - (x-y)^r \right\}_{x=-1} df^{(r)}(y) \\ &= \frac{(-1)^{r+1-m}}{(r-m)!} \int_{-1}^1 (1+y)^{r-m} df^{(r)}(y) = 0 = f^{(m)}(-1) \end{aligned}$$

(последнее равенство проверяется интегрированием по частям), $N = n + r > 2s + r = 3r + 2$. При $2r + 2 \leq n \leq 3r + 2$ для доказательства теоремы подходят два полинома из леммы 8, интерполирующие f в точках -1 и 0 с кратностью $r + 1$ и с коэффициентами одного знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Сначала приблизим функцию f сверху полиномами q_n из $P_n(\mathbb{Z})$, а затем и из $P_n(\mathbb{Z}_+)$. В силу теоремы 3, примененной к функции $f(x) - \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ на $[-1, 0]$, при $n \geq 2r + 2$ существует полином p_n такой, что $p_n^{(\nu)}(-1) = f^{(\nu)}(-1)$, $p_n^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$, $0 \leq \nu \leq r$, и

$$0 \leq p_n(x) - f(x) \leq \gamma_0(r) \delta_{0,n,-1,0}^r(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{0,n,-1,0}(x)). \quad (12)$$

Перейдем к отрезку $[0, 1]$ заменой x на $-x$. По условию теоремы теперь $\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$ и $\frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \nu \leq r$, и, значит, эрмитовский полином h , определяемый условиями $h^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$, $h^{(\nu)}(1) = f^{(\nu)}(1)$, $0 \leq \nu \leq r$, имеет целые коэффициенты.

Полагаем $X(x) = x(1-x)$. На отрезке $[0, 1]$ имеем $0 \leq X(x) \leq 1/4$. Учитывая, что $(p_n - h)^{(\nu)}(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $\nu \in [0, r]$, разложим полином $h - p_n$ по степеням полинома X :

$$(h - p_n)(x) = \sum_{k=r+1}^{N_1} (a_k x + b_k(1-x)) X^k(x), \quad N_1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Применим лемму 13 при $r+1 \leq k < k+m = 3r+3$, заменяя x на X при $x \in [0, 1]$, $\{c\} = c - [c] \in [0, 1)$. Имеем

$$0 \leq (\{a_k\}x + \{b_k\}(1-x))(X^k(x) - X^{3r+3}(x)s(X(x))) \leq \gamma_1(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2k}}, X^k(x) \right\}.$$

Поэтому при некоторых новых коэффициентах

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(x) - p_n(x) - \sum_{k=r+1}^{3r+2} ([a_k]x + [b_k](1-x)) X^k(x) \\ &\leq \sum_{k=3r+3}^{N_1} (a_{1,k}x + b_{1,k}(1-x)) X^k(x) + \gamma_1(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2r+2}}, X^{r+1}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Вынося из суммы множитель X^{r+1} (при $N_1 < 3r+3$ суммы нет) и переразлагая полином, получаем ($N_2 = N_1 - r - 1$)

$$X^{r+1}(x) \sum_{k=2r+2}^{N_2} (c_k x + d_k(1-x)) X^k(x) (1-X(x))^{N_2-k}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq h(x) - p_n(x) - \sum_{k=r+1}^{3r+2} ([a_k]x + [b_k](1-x)) X^k(x) \\ &\quad - X^{r+1}(x) \sum_{k=2r+2}^{N_2} ([c_k]x + [d_k](1-x)) X^k(x) (1-X(x))^{N_2-k} \\ &\leq \gamma_1(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2r+2}}, X^{r+1}(x) \right\} + X^{r+1}(x) \sum_{k=2r+2}^{N_2} X^k(x) (1-X(x))^{N_2-k}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое не больше

$$\begin{aligned} X^{r+1}(x) & \left(\sum_{k=2r+2}^{N_2-2r-2} X^k(x) (1-X(x))^{N_2-k} \frac{\binom{N_2}{k}}{\binom{N_2}{2r+2}} + \sum_{k=N_2-2r-1}^{\infty} X^k(x) \right) \\ & \leq X^{r+1}(x) \left(\frac{1}{\binom{N_2}{2r+2}} + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{N_2-2r-1} \right) \\ & \leq \gamma_2(r) \left(\frac{X(x)}{n^2} \right)^{r+1} \leq \gamma_2(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2r+2}}, X^{r+1}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, построен полином $q_n \in P_n(\mathbb{Z})$ такой, что на отрезке $[0, 1]$

$$0 \leq q_n(x) - p_n(x) \leq \gamma_3(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2r+2}}, X^{r+1}(x) \right\} \quad (13)$$

и $q_n^{(\nu)}(x) = p_n^{(\nu)}(x)$ при $x = 0, x = 1, \nu \in [0, r]$.

В силу леммы 4, 2) при $x \in [0, 1]$ и $\nu \in [0, r]$ имеем

$$|p_n^{(\nu)}(x) - q_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_4(r) \min \left\{ \frac{1}{n^{2(r+1-\nu)}}, X^{r+1-\nu}(x) \right\}. \quad (14)$$

Из соотношений (12) и (13) получаем

$$\begin{aligned} 0 & \leq q_n(x) - f(x) \\ & \leq \gamma_5(r) \left(\delta_{0,n,0,1}^r(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{0,n,0,1}(x)) + \min \left\{ \frac{1}{n^{2(r+1)}}, X^{r+1}(x) \right\} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

а в силу леммы 1, леммы 4, 1) и неравенства (14) имеем при $1 \leq \nu \leq r$

$$\begin{aligned} & |f^{(\nu)}(x) - q_n^{(\nu)}(x)| \\ & \leq \gamma_6(r) \left(\delta_{0,n,0,1}^{r-\nu}(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{0,n,0,1}(x)) + \min \left\{ \frac{1}{n^{2(r+1-\nu)}}, X^{r+1-\nu}(x) \right\} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$|q_n^{r+1}(x)| \leq \gamma_7(r) \left(\frac{\omega(f^{(r)}; \delta_{n,0,1}(x))}{\delta_{n,0,1}(x)} + 1 \right). \quad (17)$$

Теперь вернемся к отрезку $[-1, 0]$ и приблизим $q_n(-x)$ сверху полиномами из $P_n(\mathbb{Z}_+)$. В силу (17) и (5) при $x \in [-1, 0]$ имеем

$$|q_n^{r+1}(-x)| \leq \gamma_8(r) \left(n^2 \omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} \right) + 1 \right).$$

Но тогда в силу неравенства В. А. Маркова (см., например, [1, п. 4.8.8]) при $\nu \in [0, n - r - 1]$ получаем

$$|q_n^{(r+1+\nu)}(0)| \leq \gamma_8(r) \left(n^2 \omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} \right) + 1 \right) 2^\nu T_{n-r-1}^{(\nu)}(1), \quad (18)$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

Заменим в неравенствах (15) и (16), где вместо x можно поставить $-x \in [0, 1]$, $q_n(-x)$ на

$$q_n(-x) + \left(\gamma_8(r) \left(n^2 \omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} \right) + 1 \right) + 1 \right) \times (T_n(2x+1) + 1) (x + x^2 q_n^+(x))^{r+1}; \quad (19)$$

здесь q_n^+ – полином из леммы 14. Так как $T_n(2x+1) + 1 \geq 0$ при $x \in [-1, 0]$, а r – нечетное, то график этого полинома выше графика $q_n(-x)$, а все его коэффициенты целые, поскольку таковыми являются коэффициенты q_n^+ и $T_n(x+1)$.

Проверим, что все коэффициенты этого полинома положительные. При $\nu \in [0, r]$ нужно лишь учесть, что $q_n^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ и воспользоваться условием теоремы. Так как $T_n^{(\nu)}(1)$ возрастает вместе с ν на $[0, n]$ и n , то при $\nu \in [0, n-r-1]$ в силу (18) имеем

$$|q_n^{(r+1+\nu)}(0)| \leq \gamma_8(r) \left(n^2 \omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} \right) + 1 \right) 2^\nu T_n^{(\nu+r+1)}(1) \\ = \gamma_8(r) \left(n^2 \omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} \right) + 1 \right) \frac{d^{\nu+r+1}}{dx^{\nu+r+1}} \{T_n(2x+1)\}_{x=0} 2^{-r-1},$$

а поскольку коэффициенты q_n^+ положительные, то и все коэффициенты указанного полинома (степени не выше $(n+2)(r+1)+n$) положительные.

Разность между производными порядка $\nu \in [0, r]$ функции и этого полинома по модулю (см. (16), (19) и леммы 14 и 4, 2)) не больше

$$\gamma_9(r) \left(\delta_{0,n,-1,0}^{r-\nu}(x) \omega(f^{(r)}; \delta_{0,n,-1,0}(x)) + \min \left\{ \frac{1}{n^{2(r+1-\nu)}}, (|x|(x+1))^{r+1-\nu} \right\} \right) \\ + \left(n^2 \omega \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^2} \right) + 1 \right) \min \left\{ \frac{1}{n^{2(r+1-\nu)}}, (|x|(x+1))^{r+1-\nu} \right\}.$$

В силу (5) при $\delta \geq 0$ и $h \geq 0$

$$n^2 \omega \left(\frac{1}{n^2} \right) \min \left\{ \frac{1}{n^2}, h \right\}^{1+\delta} \leq 2 \omega \left(\min \left\{ \frac{1}{n^2}, h \right\} \right) \min \left\{ \frac{1}{n^2}, h \right\}^\delta,$$

а

$$\min \left\{ \frac{1}{n^2}, |x|(x+1) \right\} \leq \min \left\{ |x|(x+1), \frac{\sqrt{|x|(x+1)}}{n} \right\} \leq 2 \delta_{0,n,-1,0}(x).$$

Теорема 4 доказана для степеней $n \geq n_0(r)$, а при $2r+2 \leq n < n_0(r)$ можно взять интерполяционный полином h_{2r+2} из леммы 8, 2).

Отметим еще, что функцию $f_1(x) = x/2$ на любом отрезке $[-\delta, \delta]$, $\delta > 0$, нельзя приблизить с одной стороны полиномами с целыми коэффициентами, а для функции $f_2(x) = x^3$ вообще не существует полинома p_4 с отрицательными коэффициентами и условиями $f_2^{(\nu)}(-1) = p_4^{(\nu)}(-1)$, $f_2^{(\nu)}(0) = p_4^{(\nu)}(0)$, $\nu = 0, 1$, и $p_4(x) \geq f_2(x)$ на $[-1, 0]$.

Список литературы

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Наука, 1960.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
3. *Гопенгауз И. Е.* К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 163–172.
4. *Gopengauz I. E.* Pointwise Estimates of the Hermitian Interpolation // J. Appr. Theory. 1994. V. 77. № 1. P. 31–41.
5. *Brudnyi Yu. A.* Timans type result on approximation by algebraic polynomials // Operator Theory. Advances and Applications. 1997. V. 98. P. 92–101.
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
7. *Hewitt E., Zuckerman H.* Approximation by polynomials with integral coefficients a reformulation of the Stone–Weierstrass theorem // Duke Math. J. 1959. V. 26. P. 305–324.
8. *Гельфонд А. О.* О равномерных приближениях многочленами с целыми коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 41–65.
9. *Тригуб Р. М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 2. С. 261–280.
10. *Тригуб Р. М.* Приближение функций с диофантовыми условиями многочленами с целыми коэффициентами // Метрические вопросы теории функций и отображений. № 2. Киев: Наукова думка, 1971. С. 267–333.
11. *Ferguson B. O.* Approximation by Polynomials with Integral Coefficients // Math. Surveys. № 17. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1980.
12. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком. М.: Наука, 1976.
13. *Toland J. E.* Self-adjoint operators and cones // J. London Math. Soc. 1996. V. 53. № 2. P. 167–183.
14. *Тригуб Р. М.* Односторонние и комонотонные приближения гладких функций алгебраическими полиномами с положительными коэффициентами // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 2. С. 168–170.
15. *Тригуб Р. М.* Теорія наближення функцій та її застосування // Праці Інституту матем. НАН України. Т. 31. Київ: Ін-т матем. НАН України, 2000. С. 461–476.
16. *Тригуб Р. М.* Приближение индикатора интервала алгебраическими полиномами с эрмитовской интерполяцией в двух точках // Тр. Ин-та прикл. мат. и мех. Т. 4. Донецк, 1999. С. 186–194.

Поступило в редакцию
16.V.2001