Общероссийский математический портал

В. А. Клячин, Поверхности нулевой средней кривизны смешанного типа в пространстве Минковского, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 2, 5–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 04:09:14

УДК 517.957+514.752

В. А. Клячин

Поверхности нулевой средней кривизны смешанного типа в пространстве Минковского

Исследуются поверхности нулевой средней кривизны в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^3$, первая квадратичная форма которых меняет сигнатуру. Часть такой поверхности является пространственноподобной, а часть – времениподобной. Получена полная информация о строении множества смены типа поверхности и доказаны соответствующие теоремы существования и единственности.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}_1^{n+1}$ – пространство-время Минковского, т.е. $(n+1)$ -мерное вещественное линейное пространство с метрикой сигнатуры $(1, n)$ [1]. Пусть $x = (x_1, \dots, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\chi = (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ положим

$$|\chi|^2 = -t^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (1)$$

и через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим соответствующее скалярное произведение.

Вектор $\chi \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, $\chi \neq 0$, называется *пространственноподобным* (временноподобным, светоподобным), если $|\chi|^2 > 0$ ($|\chi|^2 < 0$, $|\chi|^2 = 0$).

Пусть M – p -мерное, связанное, ориентируемое многообразие класса C^3 . Рассмотрим поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$, заданную C^3 -погружением $u: M \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$. Поверхность $\mathcal{M}$ называется *пространственноподобной*, если любой касательный к ней вектор пространственноподобен. Поверхность называется *временноподобной*, если каждая ее касательная плоскость содержит времениподобные и пространственноподобные векторы. На поверхности $\mathcal{M}$ форма (1) индуцирует риманову или псевдориманову метрику (в зависимости от ее знакоопределенности) и соответствующую связность ∇ . Стандартную связность в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ будем обозначать через $\bar{\nabla}$. Имеют место формулы [1], [2]

$$\nabla h = (\bar{\nabla} h)^T, \quad (2)$$

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T \quad (3)$$

для произвольной функции $h(m) \in C^1(M)$ и гладких векторных полей X, Y на M . Здесь через $(v)^T$ обозначена ортогональная проекция вектора v на касательную плоскость $T_m \mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта INTAS Ref.No:10170.

Разность $B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ называется *второй фундаментальной формой* поверхности $\mathcal{M}$. Отметим, что $B(X, Y)$ является билинейной, симметричной формой (см. [2, с. 56]). Выберем в касательном пространстве $T_m \mathcal{M}$ ортонормированный базис $\{E_i\}_{i=1}^p$. Вектор

$$H = \operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^p B(E_i, E_i) |E_i|^2$$

называется *вектором средней кривизны* поверхности $\mathcal{M}$.

Поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$ называется *максимальной*, если она пространственноподобна и ее вектор средней кривизны тождественно равен нулю. Это определение связано с тем, что в пространстве Минковского естественно ставится задача на максимум площади, а не на ее минимум, как в евклидовом пространстве. Соответствующее уравнение максимальных поверхностей имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1 - |Df|^2}} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь D – стандартная связность в $\mathbb{R}^n$.

Если график функции $t = f(x)$ задает времениподобную поверхность с нулевой средней кривизной, то это условие выражается уравнением

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{|Df|^2 - 1}} \right) = 0. \quad (5)$$

Исследования по близкой тематике настоящей статьи были, например, в работе [3], где исследовались конформные свойства законоопределенных метрик на плоскости, и в работе [4], где получены теоремы типа теоремы Бернштейна о полных времениподобных поверхностях нулевой средней кривизны в $\mathbb{R}_1^3$.

§ 2. Постановка задачи. Примеры

В настоящей статье рассматриваются поверхности нулевой средней кривизны в трехмерном пространстве Минковского. Если такая поверхность задана графиком функции $t = f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, в области Ω , то имеет место уравнение

$$(1 - f_{x_2}^2) f_{x_1 x_1} + 2 f_{x_2} f_{x_1} f_{x_1 x_2} + (1 - f_{x_1}^2) f_{x_2 x_2} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение, в отличие от уравнений (4), (5), описывает поверхности как с римановой структурой, так и с псевдоримановой.

Введем следующие обозначения. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – решение класса C^3 уравнения (6) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Положим

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{x \in \Omega: |Df(x)| < 1\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega: |Df(x)| > 1\}, \\ \Gamma(f) &= \{x \in \Omega: |Df(x)| = 1\}. \end{aligned}$$

При этом над Ω^+ график является пространственноподобной поверхностью, а над Ω^- – времениподобной. Эти множества в точности соответствуют множествам эллиптичности и гиперболичности уравнения (6). Таким образом, смена типа данного уравнения может происходить в точках множества $\Gamma(f)$. Хотя, как покажут примеры, приведенные далее, существуют точки на $\Gamma(f)$, в которых такая смена типа не происходит.

В настоящей работе мы исследуем строение множества $\Gamma(f)$ и асимптотическое поведение решения $t = f(x)$ уравнения (6) в окрестности $\Gamma(f)$. Одной из трудностей исследования решений квазилинейных уравнений смешанного типа является априорная неопределенность множества $\Gamma(f)$, в точках которого происходит смена типа уравнения. Следует отметить, что задача описания этого множества возникает в различных прикладных задачах [5, гл. 2]. В настоящей работе представлена попытка полного описания строения множества $\Gamma(f)$ для решений уравнения (6) при некоторых весьма слабых предположениях (см. предположение 1). Геометрический источник возникновения этого уравнения несколько облегчает поставленную задачу. В частности, мы пользуемся инвариантностью данного уравнения при лоренцевых преобразованиях пространства $\mathbb{R}_1^3$. Случай, когда множество $\Gamma(f)$ состоит из единственной точки, рассмотрен в работе [7], где обнаружено, что асимптотическое поведение решения уравнения (6) в окрестности такой точки достаточно полно определяет решение в целом. Несомненно, это повышает интерес к исследованию множества $\Gamma(f)$.

Приведем примеры решений уравнения (6) с характерным строением множества $\Gamma(f)$.

ПРИМЕР 1. Пусть $t = f(x) = \arctg \frac{x_2}{x_1}$, $\Omega = \{x: x_1 \neq 0\}$. Графиком этой функции является хорошо известная поверхность – геликоид. В этом случае $|Df|^2 = 1/(x_1^2 + x_2^2)$, и поэтому $\Gamma(f) = \{x: x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ – единичная окружность, в точках которой, очевидно, происходит смена типа с эллиптического (при $x_1^2 + x_2^2 > 1$) на гиперболический (при $x_1^2 + x_2^2 < 1$).

ПРИМЕР 2. Пусть

$$t = f(x_1, x_2) = \sqrt{\sin^2 x_1 + x_2^2}.$$

Прямým подсчетом убеждаемся, что эта функция является решением уравнения (6) в области $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0, x_1 = \pm \pi k, k = 0, 1, 2, \dots\}$. При этом

$$|Df|^2 = \frac{\cos^2 x_1 \sin^2 x_1 + x_2^2}{\sin^2 x_1 + x_2^2}.$$

Поэтому всюду $|Df|^2 \leq 1$, а $\Gamma(f) = \{x: x_1 = \pm \pi k, k = 0, 1, 2, \dots\}$. Заметим, что вне прямых $x_1 = \pm \pi k$ уравнение (6) имеет эллиптический тип и в точках множества $\Gamma(f)$ смена типа не происходит, но уравнение вырождается.

ПРИМЕР 3. Пусть $t = f(x_1, x_2) = x_2 + h(x_1)$, где $h(x_1) \in C^2(\mathbb{R})$. Поскольку $f_{x_1} = h'(x_1)$, $f_{x_2} = 1$, $f_{x_1 x_1} = h''(x_1)$, $f_{x_1 x_2} = 0$, $f_{x_2 x_2} = 0$, то функция $f(x)$ является решением уравнения (6). При этом $|Df|^2 = 1 + h'^2(x_1) \geq 1$ и $\Gamma(f) = \{x: h'(x_1) = 0\}$. Для этого примера уравнение (6) всюду имеет гиперболический тип, кроме точек $\Gamma(f)$, где смены типа не происходит.

ПРИМЕР 4. Наконец, рассмотрим C^2 -гладкую функцию $t = f(x_1, x_2)$ такую, что $|Df|^2 \equiv 1$ в некоторой области Ω . Тогда, дифференцируя это тождество по x_1 и x_2 , получим

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1} f_{x_1} + f_{x_2 x_1} f_{x_2} &= 0, \\ f_{x_1 x_2} f_{x_1} + f_{x_2 x_2} f_{x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое равенство на f_{x_1} , второе на f_{x_2} и суммируя, получаем уравнение

$$\sum_{i,j=1}^2 f_{x_i x_j} f_{x_i} f_{x_j} = 0, \quad (7)$$

из которого следует выполнение равенства (6). Таким образом, функция $t = f(x)$ является примером решения уравнения (6) с $\Gamma(f) = \Omega$. Отметим, что уравнение (7) исследовалось Аронсоном, например в его работе [6], в связи с исследованием задачи о продолжении липшицевых функций.

§ 3. Основные результаты

Введем обозначение $\Delta(\gamma) = \{z \in \Omega \mid \exists x, y \in \gamma: z = (x + y)/2\}$ для произвольного подмножества $\gamma \subset \Omega$.

Точку $z \in \Gamma(f)$ назовем точкой *смены типа уравнения* (6), если $z \in \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^- \cap \Omega$. Кроме этого, всюду в статье под выпуклой кривой понимаем связную часть границы выпуклой области. При этом говорим, что *кривая выпукла в сторону дополнения этой области*.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Всюду ниже считаем, что каждая точка z смены типа имеет некоторую окрестность $U(z)$, что пересечение $U(z) \cap \Gamma(f)$ полностью состоит из точек смены типа уравнения и, кроме этого, для некоторых $\xi = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$, $1 > \theta > 0$, $\delta > 0$ множество*

$$K(\xi, \theta, \delta) = \{x: (1 - \theta)|x| < \langle \xi, x \rangle < |x|, |x - z| < \delta\}$$

полностью лежит в Ω^- .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В настоящее время автору неизвестно, насколько данное предположение ограничивает общность. Все найденные примеры решений уравнения (6) имеют множества $\Gamma(f)$, описанные в теореме 1. В то же время условие предположения заведомо выполнено, если $\Gamma(f)$ – кусочно-липшицева кривая в окрестности каждой точки смены типа уравнения (6). Построение поверхности нулевой средней кривизны с множеством $\Gamma(f)$, имеющим более сложную структуру, по всей видимости представляет трудную, но весьма интересную задачу.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $t = f(x) - C^3$ -гладкое решение уравнения (6) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда если множество $\Gamma(f)$ нигде не плотно в Ω и относительно него выполнено предположение 1, то оно есть объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся кривых γ_i , $i = 1, 2, \dots$, каждая из которых есть:*

1) либо вещественно-аналитическая кривая, выпуклая в сторону Ω^+ , в точках которой происходит смена типа уравнения (6);

2) либо прямолинейный отрезок с концами на $\partial\Omega$.

При этом в случае 1) решение $f(x_1, x_2)$ аналитично в $\Omega^+ \cup (\bigcup_{i=1}^{+\infty} \Delta(\gamma_i))$, график которого может быть задан параметрически

$$t = \tau, \quad x_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{d\tau^{2k}} a^j(\tau) \sigma^k, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

где $x_1 = a^1(\tau)$, $x_2 = a^2(\tau)$ – натуральная параметризация кривой γ_i . В обоих случаях, 1) и 2), кривая γ_i есть линия градиента решения $t = f(x)$.

Как следствие, получаем следующую теорему единственности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – C^3 -решения уравнения (6), причем $\Gamma(f) \cap \Gamma(g) = \gamma$ – строго выпуклая кривая. Тогда найдется постоянная c такая, что $f(x) - g(x) \equiv c$ в $\Delta(\gamma) \cup \gamma \cup \Omega_1^+$, где Ω_1^+ – компонента связности Ω^+ , граница которой содержит γ .

Следующая теорема показывает, что область единственности, описанная в теореме 2, в некотором смысле максимальна.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \in \Gamma(f)$, в окрестности которой множество $\Gamma(f)$ представляет собой строго выпуклую кривую. Тогда существуют окрестность $U(x_0)$ и решение $g \in C^3(U(x_0))$ уравнения (6) такие, что

$$f \equiv g \quad \text{в} \quad (\Omega^+ \cup \Delta(\gamma)) \cap U(x_0), \quad (9)$$

$$f \neq g \quad \text{в} \quad U(x_0) \setminus (\Omega^+ \cup \Delta(\gamma)). \quad (10)$$

Наконец, в следующей теореме мы даем способ построения решения уравнения (6) по кривой $\Gamma(f)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть γ – вещественно-аналитическая кривая в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что кривизна кривой ни в одной точке не равна нулю. Тогда существует решение $f(x)$ уравнения (6), определенное в окрестности γ и такое, что:

1) $\Gamma(f) = \gamma$;

2) в направлении выпуклости γ график решения задает пространственно-подобную поверхность, а в противоположном направлении – времениподобную.

§ 4. Предварительные результаты

Пусть $\{e_i\}$, $i = 0, 1, 2$, – стандартный базис в $\mathbb{R}_1^3$. Через Δ будем обозначать оператор Лапласа–Бельтрами в метрике поверхности $\mathcal{M}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{M}$ – 2-мерная максимальная поверхность в $\mathbb{R}_1^3$. Тогда:

1) $\nabla x_i = e_i^T$, $\nabla f = -e_0^T$;

2) $\Delta f = \Delta x_i = 0$;

3) $\sum_{i=1}^2 |\nabla x_i|^2 - |\nabla f|^2 = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1), 2) доказываются так же, как и в [2, примечание 14] для минимальных поверхностей с использованием формул (2) и (3). Докажем равенство 3). Пусть $\{E_1, E_2\}$ – ортонормированный базис в касательной плоскости к поверхности $\mathcal{M}$. На основании 1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\nabla x_i|^2 - |\nabla f|^2 &= \sum_{i=1}^n |e_i^T|^2 - |e_0^T|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (\langle e_i, E_j \rangle)^2 - \sum_{j=1}^2 (\langle e_0, E_j \rangle)^2 \\ &= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n (\langle e_i, E_j \rangle)^2 - (\langle e_0, E_j \rangle)^2 = 2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $z \in \Gamma(f)$ такая, что $D|Df|^2 \neq 0$, то эта точка является точкой смены типа уравнения (6) и в некоторой ее окрестности множество $\Gamma(f)$ представляет собой C^2 -гладкую кривую γ , выпуклую в сторону Ω^+ . При этом вдоль γ градиент Df касается этой кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $x_0 \in \Gamma(f)$ такова, что $D|Df|^2(x_0) \neq 0$, то это справедливо и в некоторой окрестности точки x_0 . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} |Df|^2 = 2(f_{x_1} f_{x_1 x_1} + f_{x_2} f_{x_2 x_1}), \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} |Df|^2 = 2(f_{x_1} f_{x_1 x_2} + f_{x_2} f_{x_2 x_2}). \quad (12)$$

Согласно теореме о неявной функции [8], в некоторой окрестности точки x_0 множество $\Gamma(f)$ как множество $\{x: |Df(x)|^2 = 1\}$ является C^2 -гладкой кривой γ . Поскольку $|Df| = \text{const}$ вдоль $\Gamma(f)$, то вектор $D(|Df|^2)$ ортогонален этой кривой. Из (6) имеем

$$f_{x_1 x_1} f_{x_1}^2 + 2f_{x_1 x_2} f_{x_2} f_{x_1} + f_{x_2 x_2} f_{x_2}^2 = 0.$$

Вместе с (11) и (12) это означает ортогональность векторов Df и $D|Df|^2$. Следовательно, градиент Df касается $\Gamma(f)$.

Докажем теперь выпуклость этой кривой в сторону Ω^+ . Если это не так, то найдется отрезок, лежащий в Ω^+ , с концами на $\Gamma(f)$. Интегрируя градиент $|Df|$ вдоль части $\Gamma(f)$, соединяющей концы отрезка, получим, что приращение функции $f(x)$ равно длине соответствующей дуги $\Gamma(f)$ (Df касается $\Gamma(f)$). С другой стороны, в силу пространственноподобности графика $t = f(x)$ в Ω^+ это приращение должно быть не больше длины найденного отрезка (см. [9]). Но длина дуги $\Gamma(f)$ строго больше длины этого отрезка. Полученное противоречие означает, что γ должно быть прямолинейным отрезком.

Вычисляя кривизну кривой γ , получим, что она равна в точности $\frac{1}{2} D|Df|^2 \neq 0$. Следовательно, кривая γ не содержит прямолинейных отрезков. Лемма доказана.

Исследование строения множества $\Gamma(f)$ начнем с точек смены типа уравнения (6). Зафиксируем такую точку $x_0 \in \Gamma(f)$ и найдем такую ее окрестность $U(x_0)$, что все точки $\Gamma(f) \cap U(x_0)$ являются точками смены типа (см. предположение 1).

ЛЕММА 3. Если $\partial\Omega^+ \cap U(x_0)$ не является отрезком прямой, то множество точек $z \in \partial\Omega^+ \cap U(x_0)$, в которых $D|Df|^2 \neq 0$, всюду плотно на $\partial\Omega^+ \cap U(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

А. Пусть в окрестности $U(x_0)$ выбранной точки $x_0 \in \Gamma(f)$ граница $\partial\Omega^+$ выпукла в сторону Ω^- . Зафиксируем $x' \in U(x_0) \cap \Omega^+$ и рассмотрим функцию

$$l(x', x) = |x - x'|^2 - |f(x) - f(x')|^2.$$

Согласно лемме 1 в метрике графика функции $t = f(x)$

$$\Delta l(x', x) = 4.$$

Поскольку $U(x_0) \cap \Omega^+$ выпукло, то из необходимого признака пространственно-подобности поверхностей [9] следует, что функция $l(x', x) > 0$ для всех $x' \neq x \in U(x_0) \cap \Omega^+$. Другими словами, все отрезки с концами на рассматриваемой части графика являются пространственноподобными. В частности, из этого следует, что градиент функции $l(x', x)$ в метрике поверхности имеет квадрат длины $|\nabla l|^2 \geq 4l$. Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что при ортогональном проектировании пространственноподобного вектора его длина не уменьшается (в отличие от евклидова пространства $\mathbb{R}^3$). Положим

$$l_0 = \sup\{l: \{l(x', x) < l\} \subseteq \Omega^+ \cap U(x_0)\}.$$

Предположим сначала, что величина l_0 достигается функцией $l(x', x)$ в некоторой внутренней точке x'' кривой $\partial\Omega^+ \cap U(x_0)$. Рассмотрим функцию

$$w(x) = \log \frac{l_0}{l}$$

и компоненту связности B' множества $\{x: w(x) > 0\}$ такую, что $x'' \in \partial B'$. Имеем

$$\Delta w(x) = -\frac{\Delta l(x)}{l(x)} + \frac{|\nabla l(x)|^2}{l^2} = \frac{4l - |\nabla l|^2}{l^2} \geq 0.$$

Таким образом, функция $w(x)$ является субгармонической в метрике поверхности $\mathcal{M}$.

Пусть теперь

$$h(x) = \frac{1}{2} \log \frac{\cosh \alpha + 1}{\cosh \alpha - 1}, \quad \cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - |Df|^2}}.$$

В работе [7] показано, что эта функция является гармонической в метрике поверхности $\mathcal{M}$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} S_\delta &= \{x \in B': w(x) = \delta\}, \\ B'' &= \{x \in B': w(x) < \delta\} \end{aligned}$$

для некоторого $\delta > 0$. Положим $h_0 = \inf_{S_\delta} h$ и $0 < \varepsilon < h_0/\delta$. Тогда $h(x) \geq \varepsilon w(x)$ на S_δ . Аналогичное неравенство на $\partial B'$ очевидно. На основании принципа максимума будем иметь

$$h(x) \geq \varepsilon w(x)$$

всюду в $B'' \cap B'$. Перепишем это неравенство в виде

$$\frac{1 + \sqrt{1 - |Df(x)|^2}}{1 - \sqrt{1 - |Df(x)|^2}} \geq \left(1 + \frac{l(x) - l(x'')}{l_0}\right)^{2\alpha}$$

для некоторого положительного α . Из этого неравенства следует, что найдется вектор η такой, что

$$\sqrt{1 - |Df|^2} \geq \langle \eta, (x - x'') \rangle + o(|x - x''|).$$

Предположим, что $D|Df|^2(x'') = 0$. Прежде всего заметим, что в точке x'' градиент $Dl(x', x'')$ не равен нулю. В противном случае мы получили бы $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''|$, что противоречило бы пространственной подобности графика решения $f(x)$. Тогда граница множества B' в окрестности точки x'' представляет собой гладкую кривую. Используя этот факт, а также то, что $f \in C^3(\Omega)$, из последнего неравенства получим, что главная часть функции $1 - |Df(x)|^2$ при $x \rightarrow x''$ является квадратичной. Последнее противоречит предположению 1 и тому, что в окрестности точки $x_0 \in \Gamma(f)$ функция $1 - |Df|^2$ меняет знак. Таким образом, $D|Df|^2(x'') \neq 0$.

Пусть теперь x'' не принадлежит $\Gamma(f)$. Выберем последовательность $x_n \rightarrow x_0$. Пусть x''_n — соответствующие точки, в которых достигается максимум функции $l(x_n, x)$. Если ни одна из точек x''_n не является внутренней для $\partial\Omega^+ \cap U(x_0)$, то можно найти подпоследовательность x_{n_k} , сходящуюся к точке x''_0 , также не являющейся внутренней. По построению ясно, что $l(x_0, x''_0) = 0$. Но последнее равенство возможно, только если отрезок $(f(x_0) - f(x''_0), x_0 - x''_0)$ светоподобен и лежит на поверхности $\mathcal{M}$. Таким образом, мы приходим к противоречию с предположением о том, что $\partial\Omega^+ \cap U(x_0)$ не является отрезком прямой.

Б. Если $\partial\Omega^+$ не является выпуклой в окрестности $U(x_0)$, то можно найти точку $x' \in \Gamma(f)$ такую, что некоторый отрезок I проходит через x' , а его концы лежат в Ω^+ .

Рассмотрим функцию $l(x) = \langle v, x - x' \rangle$, где вектор v , $|v| = 1$, ортогонален I и направлен в сторону D^+ . В метрике поверхности $\mathcal{M}$ эта функция в силу леммы 1 является гармонической. Используя рассуждения, проводимые в п. А, приходим так же к соотношению $D|Df|^2(x') \neq 0$. Осталось применить лемму 2. Лемма доказана полностью.

Теперь в области $U(x_0) \cap \Omega^+$ построим подобласть G следующим образом. Поскольку $|Df(x_0)| = 1 \neq 0$, то окрестность $U(x_0)$ можно выбрать так, чтобы всюду в $U(x_0)$ градиент Df был не равен нулю. Рассмотрим совокупность линий уровня $\Sigma(t) = \{x \in \Omega: f(x) = t\}$. Положим $A = \partial\Omega^+ \cap U(x_0)$. Обозначим через γ_t ту компоненту связности пересечения $\Sigma(t) \cap U(x_0) \cap \Omega^+$, которая имеет граничную точку из множества A . Положим $G = \bigcup_{t, \gamma_t \neq \emptyset} \gamma_t$. По построению ясно, что G — связное односвязное открытое множество, причем $\partial G \setminus \partial U(x_0) \subset \partial\Omega^+$.

Введем в G новые координаты, полагая

$$t = f(x), \quad (13)$$

$$s = c + \int_{x_0}^x -\frac{f_{x_2}}{\sqrt{1-|Df|^2}} dx_1 + \frac{f_{x_1}}{\sqrt{1-|Df|^2}} dx_2, \quad (14)$$

где постоянную c мы выберем позже.

Рассмотрим в окрестности точки x_0 автономную систему

$$\dot{x} = Df(x). \quad (15)$$

Поскольку

$$\langle Ds, Df \rangle = \frac{-f_{x_1}f_{x_2} + f_{x_2}f_{x_1}}{\sqrt{1-|Df|^2}} = 0,$$

то функция $s(x)$ постоянна на интегральных кривых системы (15). Более того, эта функция монотонно меняется вдоль кривой γ_t .

ЛЕММА 4. *В метрике поверхности $\mathcal{M}$ функция $s(x)$ является гармонической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 координатные функции t, x_1, x_2 являются гармоническими в метрике поверхности нулевой средней кривизны. Тогда, в частности, дифференциальная форма $*dt$ является замкнутой ($*$ – оператор Ходжа [10]). Следовательно, существует функция s^* такая, что

$$ds^* = *dt. \quad (16)$$

Заметим, что функция s^* в силу (16) постоянна на линиях градиента функции t . Более того, если $\Sigma(t)$ – некоторая линия уровня функции t и $x', x'' \in \Sigma(t)$, то

$$\begin{aligned} s^*(x'') - s^*(x') &= \int_{x'}^{x''} ds^* = \int_{x'}^{x''} *dt = \int_{x'}^{x''} |\nabla f| \\ &= \int_{x'}^{x''} \frac{|Df|}{\sqrt{1-|Df|^2}} = s(x'') - s(x'). \end{aligned}$$

Здесь интегрирование ведется по дуге кривой $\Sigma(t)$, соединяющей точки x' и x'' . Таким образом, функции s и s^* отличаются на постоянную. Поскольку сопряженная к гармонической функции функция s^* является гармонической, то и функция $s(x)$ гармонична в метрике поверхности $\mathcal{M}$. Лемма доказана.

Заметим, что в окрестности тех точек $z \in \partial G \setminus \partial U(x_0)$, в которых $D|Df|^2 \neq 0$, построенная функция $s(x)$ принимает постоянное значение на дуге, являющейся пересечением окрестности точки z и $\partial G \setminus \partial U(x_0)$. Это следует из того, что функция $s(x)$ постоянна на линиях градиента Df и интеграл в (14) сходится (так как $D|Df|^2 \neq 0$). Для исследования свойств отображения $f(x) + is(x): G \rightarrow \mathbb{C}$ введем следующую величину:

$$\lambda(t) = \int_{\gamma_t} \frac{1}{\sqrt{1-|Df|^2}}.$$

Положим

$$(\alpha, \beta) = \{t: \gamma_t \neq \emptyset\}.$$

Выбор окрестности $U(x_0)$ позволяет предположить, что множество справа связно.

ЛЕММА 5. Для точки $x'_0 \in \partial G \setminus \partial U(x_0) \cap \gamma_{t_0}$ выполнено $D|Df|^2(x'_0) \neq 0$, если и только если выполнено $\lambda(t_0) < +\infty$, где $t_0 = f(x'_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x'_0 – указанная в формулировке леммы точка пересечения $\gamma_{t_0} \cap \partial G \setminus \partial U(x_0)$. В силу условия $f(x) \in C^3$ найдутся линейная форма A и билинейная форма B такие, что

$$1 - |Df|^2 = A(x - x'_0) + B(x - x'_0, x - x'_0) + o(|x - x'_0|^2).$$

Ясно, что $A \equiv 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\gamma_{t_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - |Df|^2}} = +\infty.$$

Осталось заметить, что условие $D|Df|^2 = 0$ эквивалентно условию $A \equiv 0$.

ЛЕММА 6. Имеет место альтернатива:

- 1) или для всех $t \in (\alpha, \beta)$ выполнено $\lambda(t) < +\infty$;
- 2) или для всех $t \in (\alpha, \beta)$ выполнено $\lambda(t) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что множество $L = \{t \in (\alpha, \beta) : \lambda(t) < +\infty\}$ открыто. Это следует из предыдущей леммы, а также из леммы 2 и леммы 3. Покажем, что это множество замкнуто. Пусть $t_0 \in L$ и интервал $(t_1, t_0) \subseteq (\alpha, \beta)$ такой, что $\lambda(t) < +\infty \ \forall t \in (t_1, t_0)$, а $\lambda(t_0) = +\infty$. Рассмотрим область

$$\Omega(t_1, t_0) = U(x_0) \cap \{x : t_1 < f(x) < t_0\}.$$

Согласно лемме 3 и лемме 5 функция $s(x)$ принимает конечное постоянное значение на $\partial G \setminus \partial U(x_0) \cap \partial \Omega(t_1, t_0)$. Заметим, что отображение $f + is$ является конформным в любой подобласти, содержащей подобласть $\Omega(t_1, t_0)$. При этом по построению функция $s(x)$ не ограничена на γ_{t_0} в силу условия $\lambda(t_0) = +\infty$. Последнее противоречит принципу сохранения областей для конформных отображений. Таким образом, $\lambda(t_0) < +\infty$. Поэтому $L = (\alpha, \beta)$ или $L = \emptyset$. Лемма доказана.

Заметим, что согласно лемме 3 множество точек смены типа, для которых $\lambda(t) < +\infty$, всюду плотно. Из леммы 6 следует, что это множество образует все значения функции f на рассматриваемой части $\Gamma(f)$. Таким образом, можно сделать вывод, который мы сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 5. В окрестности точек смены типа сигнатуры метрики C^3 -решения уравнения (6) в области Ω множество $\Gamma(f) = \{x \in \Omega : |Df| = 1\}$ является выпуклой в сторону Ω^+ C^2 -кривой либо прямолинейным отрезком.

Ближайшая наша цель – показать, что в окрестности точек смены типа кривая $\Gamma(f)$ представляет собой вещественно-аналитическую кривую. Кроме этого, мы выведем формулы параметрического описания решения $f(x)$ в окрестности кривой $\Gamma(f)$, если она не представляет собой прямолинейный отрезок.

Для начала договоримся о том, что константа c в (14) выбрана так, чтобы $s(x) = 0$ на $\Gamma(f)$. Это всегда можно сделать в силу того, что функция $s(x)$ постоянна на линиях градиента решения $f(x)$, а в рассматриваемой окрестности $\Gamma(f)$ касается $Df(x)$. Таким образом, мы построим область $V^+ \subset \mathbb{R}^2$ изменения параметров s, t , граница которой содержит отрезок $s = 0, t_1 < t < t_2$. Здесь

$$t_2 = \sup_{U(x_0) \cap \Gamma(f)} f(x), \quad t_1 = \inf_{U(x_0) \cap \Gamma(f)} f(x).$$

ЛЕММА 7. Пусть $x_i(s, t)$ – координатные функции поверхности $\mathcal{M}$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial x_i}{\partial s} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенства (14) по переменным s и t , получим

$$\begin{aligned} 0 &= f_{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + f_{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s}, \\ 1 &= -\frac{f_{x_2}}{\sqrt{1 - |Df|^2}} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{f_{x_1}}{\sqrt{1 - |Df|^2}} \frac{\partial x_2}{\partial s}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = -\frac{f_{x_2} \sqrt{1 - |Df|^2}}{|Df|^2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{f_{x_1} \sqrt{1 - |Df|^2}}{|Df|^2}. \quad (17)$$

Поступая аналогично, приходим к равенствам

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{f_{x_1}}{|Df|^2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{f_{x_2}}{|Df|^2}. \quad (18)$$

Поскольку при $s \rightarrow 0$ точка приближается к $\Gamma(f)$, то получаем требуемое. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Кривая $\Gamma(f) \cap U(x_0) = \gamma$ является вещественно-аналитической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функции $x_i(s, t)$, $i = 1, 2$, гармонические (в координатах s, t) при $s > 0$, то таковыми будут и функции $\partial x_i / \partial s$. Поскольку согласно лемме 7 $\partial x_i / \partial s = 0$ при $s = 0$, то в силу принципа симметрии [11] функцию $\partial x_i / \partial s$ можно продолжить в область $s < 0$. Поэтому функции $x_i(s, t)$ аналитичны вплоть до отрезка $s = 0$. Следовательно, кривая γ задается вещественно-аналитическим радиус-вектором $(x_1(0, t), x_2(0, t))$. Регулярность кривой следует из того, что согласно (18)

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{|Df|^2} = 1 \neq 0. \quad (19)$$

Теорема доказана.

Из доказанного свойства аналитичности функций $x_i(s, t)$, $i = 1, 2$, следует, что эти функции могут быть разложены в ряды

$$x_i(s, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^i(t) s^k,$$

где параметры s, t изменяются в некоторой подобласти $V_1^+ \subset V^+$, также содержащей весь отрезок $s = 0$, $t_1, t < t_2$. Из гармоничности функций $x_i(s, t)$, $i = 1, 2$, и конформности координат s, t получаем

$$0 = \frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{d^2 a_k^i(t)}{dt^2} s^k + a_k^i(t) k(k-1) s^{k-2} \right).$$

Поэтому

$$\frac{d^2 a_k^i(t)}{dt^2} + a_k^i(t)k(k+2)s^{k-2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда, учитывая, что $\partial x_i / \partial s = 0$ при $s = 0$, окончательно имеем

$$x_i(s, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} a_0^i(t) s^{2k}.$$

Таким образом, в пересечении области Ω^+ и некоторой окрестности точки x_0 решение уравнения (6) может быть представлено параметрически:

$$t = \tau, \tag{20}$$

$$x_1(s, \tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} a_0^1(t) s^{2k}, \tag{21}$$

$$x_2(s, \tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} a_0^2(t) s^{2k}.$$

При этом на основании (19) заметим, что $(a_0^1(t), a_0^2(t))$ есть естественная параметризация кривой $\Gamma(f) \cap U(x_0)$.

Чтобы полностью исследовать строение решения в окрестности точек смены типа уравнения (6), рассмотрим часть окрестности $U(x_0)$, расположенную в Ω^- . В этом случае условие гармоничности в конформной метрике вида $\lambda(ds^2 - dt^2)$ запишется в виде

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = 0.$$

Тогда из формулы Даламбера [12] при $(s, t) \in V^- = \{s < 0, t_1 < t - s < t_2, t_1 < t + s < t_2\}$ имеют место формулы

$$x_i(s, t) = \frac{1}{2} (a_0^i(t + s) - a_0^i(t - s)), \quad i = 1, 2.$$

Раскладывая $x_i(s, t)$ в ряды Тейлора, получим

$$x_i(s, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} a_0^i(t) s^{2k}, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Сравнивая (21), (22) и вводя новую переменную $\sigma = s^2$, $s > 0$, $\sigma = -s^2$, $s < 0$, приходим к единому разложению координатных функций и, как следствие, параметрическому заданию

$$t = \tau, \quad x_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{d\tau^{2k}} a_0^i(\tau) \sigma^k, \quad i = 1, 2, \tag{23}$$

где $\sigma = s^2$, $s > 0$, $\sigma = -s^2$, $s < 0$, и $(s, t) \in V^- \cup V_1^+ \cup \{s = 0, t_1 < t < t_2\}$.

Заметим, что из (23) якобиан замены

$$x_1 = x_1(\sigma, \tau), \quad x_2 = x_2(\sigma, \tau)$$

при $\sigma = 0$ равен

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \frac{\partial x_2}{\partial \tau} = -(a_0^1)'(\tau)(a_0^2)''(\tau) + (a_0^2)'(\tau)(a_0^1)''(\tau).$$

Поскольку $|Df| = 1$ вдоль γ , то параметр τ является натуральным для γ . Тогда, как нетрудно заметить из последней формулы, якобиан рассматриваемой замены равен значению кривизны кривой γ . С другой стороны, кривая $\Gamma(f)$ есть линия градиента Df , поэтому кривизна этой кривой равна $\frac{1}{2}|D(|Df|^2)|$. Действительно, согласно известным формулам Френе кривизна кривой есть длина вектора

$$D_{Df}Df = \frac{\partial Df}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial Df}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} f_{x_1} + f_{x_1 x_2} f_{x_2} \\ f_{x_2 x_1} f_{x_1} + f_{x_2 x_2} f_{x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} D|Df|^2. \quad (24)$$

Согласно лемме 3 и лемме 6 этот вектор ненулевой. Здесь мы также предполагаем, что $\Gamma(f) \cap U(x_0)$ не является прямолинейным отрезком.

Далее, при $\sigma \neq 0$ согласно (17) и (18) имеем

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \frac{\partial x_2}{\partial \tau} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \frac{\sqrt{|1 - |Df|^2|}}{|Df|^2} \neq 0.$$

Поскольку функции $x_i(s, t)$ вещественно-аналитические при $(s, t) \in V^- \cup V_1^+ \cup \{s = 0, t_1 < t < t_2\}$, то из изложенного выше можно заключить, что решение $t = f(x_1, x_2)$ вещественно-аналитично в $\Delta(\gamma) \cup \Omega_1^+$, где, напомним,

$$\Delta(\gamma) = \{x \in U(x_0) \mid \exists y, z \in \gamma: x = (y + z)/2\},$$

и Ω_1^+ – некоторая подобласть в $U(x_0) \cap \Omega^+$, граница которой содержит кривую γ .

Исследуем теперь те точки $x_0 \in \Gamma(f)$, в которых не происходит смены знака метрики графика решения. Имеет место

ЛЕММА 8. *Если в точке $x_0 \in \Gamma(f)$ метрика графика C^3 -решения $f(x)$ не меняет знак, то в некоторой окрестности этой точки множество $\Gamma(f)$ представляет собой отрезок прямой, касающийся градиента $Df(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такую, что в каждой точке $\Gamma(f) \cap U(x_0)$ метрика графика не меняет сигнатуру. Покажем сначала, что $\Gamma(f)$ – линия градиента данного решения. Заметим прежде, что введенная выше функция $\lambda(t) \equiv +\infty$. Действительно, в противном случае существовала бы точка на $\Gamma(f) \cap U(x_0)$, в которой $D|Df|^2 \neq 0$. Тогда из леммы 2 следует, что метрика в окрестности этой точки меняет знак.

Рассмотрим интегральную кривую γ системы (15), проходящую через точку x_0 . Предположим, что найдется точка y , принадлежащая $U(x_0) \setminus \Gamma(f)$ и γ . Пусть $z \in \Gamma(f) \cap \gamma \cap U(x_0)$ – ближайшая к y точка. Выберем точки y', z' , лежащие в одной компоненте связности $U(x_0) \setminus \Gamma(f)$ и на одной линии градиента Df , такие, что

$y, y' \in \Sigma(t')$, $z, z' \in \Sigma(t'')$ для некоторых t', t'' . Не ограничивая общности, будем считать, что криволинейный четырехугольник, образованный отрезками кривых $\Sigma(t')$, $\Sigma(t'')$, γ и линией градиента, соединяющей точки y', z' , пересекается с $\Gamma(f)$ только в точке z . Этого всегда можно добиться подходящим выбором точки x_0 . На основании формулы Грина из уравнения (6) видно, что

$$\int_{z, z'} \frac{1}{\sqrt{|1 - |Df|^2|}} = \int_{y, y'} \frac{1}{\sqrt{|1 - |Df|^2|}} < +\infty,$$

что противоречит предположению $\lambda(t'') = +\infty$. Следовательно, $\gamma \subset \Gamma(f)$.

Поскольку $f(x) \in C^3(\Omega)$ и $|Df| \geq 1$, то вдоль γ будем иметь $D|Df|^2 = 0$. Тогда из выражения (24) заключаем, что кривизна γ равна нулю, что и доказывает необходимое.

§ 5. Доказательства сформулированных теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 непосредственно следует из теорем 5, 6, лемм 2, 8 и формул (8), (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим, что в силу выполнения равенства $|Df| = |Dg| = 1$ вдоль γ существуют точка $x_0 \in \gamma$ и окрестность $U(x_0)$ такие, что $f - g \equiv \text{const}$ в $U(x_0) \cap \gamma$. Из (8) следует, что $f - g \equiv \text{const}$ в $U(x_0)$. В силу аналитичности обоих решений в $\Omega_i^+ \cup \Delta(\gamma)$ получаем требуемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем предварительно следующую лемму.

ЛЕММА 9. Пусть $r(\tau)$ – радиус-вектор выпуклой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ класса $C^3([0, L])$, где τ – ее натуральный параметр. Предположим, что кривизна кривой не равна нулю. Тогда радиус-вектор

$$R(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}(r(\sigma + \tau) - r(\tau - \sigma)) + \tau e_0$$

задает график C^3 -решения $g(x)$ уравнения (6) в

$$\Delta(\gamma) = \{x \in U(x_0) \mid \exists y, z \in \gamma: x = (y + z)/2\}.$$

При этом $\gamma \subset \Gamma(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что координаты σ, τ конформны. Действительно,

$$\begin{aligned} |R_\sigma|^2 &= \left| \frac{1}{2}(r'(\sigma + \tau) + r'(\tau - \sigma)) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \langle r'(\sigma + \tau), r'(\tau - \sigma) \rangle), \\ |R_\tau|^2 &= \left| \frac{1}{2}(r'(\sigma + \tau) - r'(\tau - \sigma)) + e_0 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(-1 - \langle r'(\sigma + \tau), r'(\tau - \sigma) \rangle) = -|R_\sigma|^2. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\langle R_\sigma, R_\tau \rangle = \frac{1}{4}(1 + \langle r'(\sigma + \tau), r'(\tau - \sigma) \rangle - \langle r'(\sigma + \tau), r'(\tau - \sigma) \rangle - 1) = 0.$$

Гармоничность радиус-вектора очевидна по его построению. Нетрудно видеть из построения радиус-вектора $R(\sigma, \tau)$, что полученная поверхность есть график функции в $\Delta(\gamma) = \{x \in U(x_0) \mid \exists y, z \in \gamma: x = (y + z)/2\}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Для этого продолжим C^3 -гладкую кривую $\Gamma(f) \cap U(x_0)$ до выпуклой кривой на окрестность $U(x_0)$. По лемме 9 найдем решение $g(x)$. Поскольку такое продолжение произвольно, то мы получаем различные функции g . Дополним функцию g значениями функции $f(x)$ для $x \in \Omega^+$. Таким образом построенная функция, очевидно, удовлетворяет необходимым требованиям (9) и (10). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Решение $t = f(x)$ будем искать в параметрическом виде:

$$U(\sigma, \tau) = R(\sigma, \tau) + \tau e_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} r^{(2k)}(\tau) \sigma^k + \tau e_0. \quad (25)$$

Предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 10. В метрике поверхности (25) координаты $s = \sigma^2$, t конформны при $\sigma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$U(s, \tau) = R(s, \tau) + \tau e_0.$$

По построению вектора $R(\sigma, \tau)$ радиус-вектор $U(s, \tau)$ является гармоническим. Простыми вычислениями несложно проверить, что комплекснозначная функция

$$U_\tau^2 - U_s^2 + 2i\langle U_\tau, U_s \rangle$$

является голоморфной. При этом

$$U_\tau(s, \tau) = r'(\tau) + \tau e_0 + o(s), \quad (26)$$

$$U_s(s, \tau) = -r''(\tau)s + o(s). \quad (27)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U_s(0, \tau) &= 0, \quad |U_\tau(0, \tau)|^2 = |r'(\tau)|^2 - 1 = 0, \\ \langle U_s(0, \tau), U_\tau(0, \tau) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $t_1 < \tau < t_2$ и $s = 0$ построенная голоморфная функция равна нулю. По теореме единственности для аналитических функций [13] делаем вывод, что эта функция равна нулю тождественно. Последнее означает конформность построенных координат.

Продолжим доказательство теоремы 4. Из доказанной леммы и гармоничности радиус-вектора (25) следует, что поверхность, заданная таким образом, является максимальной при $\sigma > 0$. При $\sigma < 0$ ряд (25) легко суммируется. Полагая $\sigma = -s^2$, получим

$$R(s, \tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} r^{(2k)}(\tau) s^{2k} = \frac{1}{2} (r(\tau + s) - r(\tau - s)).$$

Как и в лемме 9, убеждаемся в том, что при $\sigma < 0$ радиус-вектор (25) задает времениподобную поверхность нулевой средней кривизны. Согласно (26) и (27) получим

$$U_\sigma(0, \tau) = -\frac{1}{2} r''(\tau), \quad U_\tau(0, \tau) = r'(\tau).$$

Поскольку кривизна кривой γ не равна нулю по условию теоремы, то векторы $r'(\tau)$, $r''(\tau)$ линейно независимы, и поэтому параметризация (25) регулярна в некоторой окрестности кривой γ . Поскольку вдоль γ касательные плоскости изотропны, то в некоторой окрестности кривой γ поверхность (25) является графиком функции, а следовательно, графиком решения уравнения (6). Теорема доказана.

Список литературы

1. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
3. Weinstein T. Inextendible conformal realizations of Lorentz surfaces in Minkowski 3-space // Michigan Math. J. 1993. V. 40. P. 545–559.
4. Milnor T. K. Entire timelike minimal surfaces in E_1^3 3-space // Michigan Math. J. 1990. V. 37. P. 163–177.
5. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яценко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Aronson G. Extension of functions satisfying Lipschitz conditions // Arkiv för Matematik. 1967. V. 6. № 28. P. 551–561.
7. Клячин В. А., Миклюков В. М. Геометрическое строение трубок и лент нулевой средней кривизны в пространстве Минковского // Научные школы ВолГУ. Геометрический анализ. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 1999. С. 204–244.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1990.
9. Клячин А. А., Миклюков В. М. Существование решений с особенностями уравнения максимальных поверхностей в пространстве Минковского // Матем. сб. 1995. Т. 80. № 1. С. 87–104.
10. Warner F. W. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
11. Бицадзе А. В. Введение в теорию аналитических функций комплексной переменной. М.: Наука, 1984.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
13. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985.

Поступило в редакцию
13.III.2002