Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маринов, О равномерных константах сильной единственности в чебышевских приближениях и основополагающих результатах Н. Г. Чеботарева, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 3, 161–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:36:37

УДК 517.977

А. В. Маринов

О равномерных константах сильной единственности в чебышевских приближениях и основополагающих результатах Н. Г. Чеботарева

В задаче наилучшего равномерного приближения непрерывных вещественных функций $f \in C(Q)$, где Q – компакт, конечномерным чебышевским подпространством $M \subset C(Q)$ исследуется положительность равномерных констант сильной единственности $\gamma(N) = \inf\{\gamma(f): f \in N\}$; здесь через $\gamma(f)$ обозначена константа сильной единственности элемента наилучшего приближения f_M для функции f в подпространстве M , т. е. наибольшая константа $\gamma > 0$, для которой при любом $\varphi \in M$ выполняется неравенство сильной единственности $\|f - \varphi\| \geq \|f - f_M\| + \gamma\|f_M - \varphi\|$. Получена характеристизация подмножеств $N \subset C(Q)$, для которых существует окрестность $O(N)$ множества N со свойством $\gamma(O(N)) > 0$. Подробно обсуждаются опубликованные еще в 1943 г. и совершенно выпавшие из поля зрения специалистов пионерские результаты Н. Г. Чеботарева, касающиеся остроты минимума в минимаксных задачах и сильной единственности алгебраических многочленов наилучшего приближения.

Библиография: 36 наименований.

Ключевые слова: чебышевские приближения, чебышевские подпространства, сильная единственность, острый минимум, равномерные константы сильной единственности.

§ 1. Введение

В работе [1] был установлен весьма интересный количественный вариант классической теоремы П. Л. Чебышева о единственности многочлена наилучшего равномерного приближения, причем получено это в общем случае приближения конечномерным чебышевским подпространством на компакте. Для формулировки данного результата напомним некоторые стандартные обозначения и определения.

Пусть Q – компакт и $C(Q)$ – пространство непрерывных на Q вещественных функций с нормой $\|f\| = \max_{x \in Q} |f(x)|$. Подпространство $M \subset C(Q)$ называется *чебышевским*, если для любой функции $f \in C(Q)$ существует и единствен элемент наилучшего приближения (ЭНП) $f_M \in M$, т. е. такой элемент, на котором реализуется $\inf_{\varphi \in M} \|f - \varphi\|$. Классическим примером чебышевского подпространства является совокупность $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n .

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” (грант № 09-П-1-1013), РФФИ (грант № 11-01-00445) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ РФ” (грант № НШ-1071.2008.1).

© А. В. Маринов, 2011

Интересующий нас результат работы [1] формулируется следующим образом. Пусть $M \subset C(Q)$ – конечномерное чебышевское подпространство. Тогда для любой функции $f \in C(Q)$ ЭНП $f_M \in M$ *сильно единствен* в том смысле, что для f найдется константа $\gamma > 0$ такая, что

$$\|f - \varphi\| \geq \|f - f_M\| + \gamma \|f_M - \varphi\| \quad \forall \varphi \in M. \quad (1.1)$$

Наибольшая константа γ в неравенстве (1.1) – обозначим ее через $\gamma(f)$ – называется *константой сильной единственности*, отвечающей функции f . Из неравенства треугольника легко следует оценка $\gamma(f) \leq 1$. Если $f \in M$, то, очевидно, $\gamma(f) = 1$. Точный результат содержится в [2], [3], где для $f \in C(Q) \setminus M$ и произвольного конечномерного чебышевского подпространства M доказана формула

$$\gamma(f) = \min_{\substack{\varphi \in M \\ \|\varphi\|=1}} \max_{x \in H(f)} \sigma(x) \varphi(x). \quad (1.2)$$

Здесь

$$H(f) = \{x \in Q: |f(x) - f_M(x)| = \|f - f_M\|\}, \\ \sigma(x) = \sigma_f(x) = \text{sign}(f(x) - f_M(x)).$$

После публикации работы [1] вскоре выяснилось, что свойство сильной единственности ЭНП присуще также нелинейным приближениям в пространстве $C[a, b]$ (например, приближениям рациональными дробями, экспонентами и сплайнами), хотя, как правило, в этом случае оно не выполняется на всем пространстве. Свойство сильной единственности ЭНП сразу же нашло многочисленные применения как в теоретических исследованиях, так и при построении алгоритмов нахождения ЭНП, особенно в нелинейных приближениях (через константу сильной единственности оценивается скорость сходимости многих итерационных алгоритмов). Различные формы свойства сильной единственности были обнаружены и в других пространствах (случай комплекснозначных функций рассматривался еще в [1]; получены результаты в пространстве L_p , пространстве векторнозначных функций $C(Q, X)$ и т. д.).

Обобщение свойства сильной единственности ЭНП на экстремальные задачи появилось намного позднее [4] и получило название *острого минимума* или *минимума первого порядка*. Острота минимума характерна для задач математического программирования и для минимаксных задач. Рассмотрение отдельных прикладных и теоретических аспектов свойств сильной единственности ЭНП и остроты минимума функционала можно найти, например, в монографиях [4]–[6].

Однако приходится констатировать, что из поля зрения специалистов полностью выпали¹ самые первые результаты, касающиеся острого минимума и сильной единственности ЭНП. Мы имеем в виду опубликованную еще в 1943 г. небольшую заметку Н. Г. Чеботарева [8] (см. также [9]), посвященную получению необходимых и достаточных условий минимакса. В ней рассматривались как общая минимаксная задача, так и ее частный случай – приближение функций $f \in C[-1, 1]$ алгебраическими многочленами.

¹По-видимому, впервые внимание на это историческое упущение было обращено в [7].

Для случая общей (невыпуклой) минимаксной задачи в работе [8], задолго до появления понятия острого минимума функционала и его частного случая – сильной единственности элемента наилучшего приближения, найдено достаточное условие минимума, известное сейчас как колмогоровский критерий локального острого минимума. Фактически в [8] показано, что упомянутое условие влечет неравенство, выражающее собой наличие *локального по направлениям острого минимума* – намного более слабый результат, нежели существование локального острого минимума. Однако следует заметить, что на самом деле при сделанных в [8] предположениях нетрудно получить именно последнее.

Кроме того, Н. Г. Чеботаревым указаны еще два эквивалентных колмогоровскому критерию достаточных условия, которые также известны сейчас как критерии локального острого минимума в терминах центра масс и в терминах принадлежности нуля внутренности выпуклой оболочки соответствующих градиентов.

В качестве примера выполнения найденных им достаточных условий в [8] рассмотрена задача аппроксимации функций $f \in C[-1, 1]$ подпространством $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n . Тем самым, в этом случае, во-первых, оказалась установлена выполнимость, в частности, колмогоровского критерия сильной единственности ЭНП, а во-вторых, фактически доказана *локальная по направлениям сильная единственность* ЭНП. При этом ввиду выпуклости функционала нормы само неравенство сильной единственности (1.1), как нетрудно заметить, является непосредственным следствием локальной по направлениям сильной единственности ЭНП (причем даже с максимально возможной константой $\gamma = \gamma(f)$).

Таким образом, свойство сильной единственности ЭНП, которое открыли Д. Дж. Ньюмен и Г. С. Шапиро 20 лет спустя после появления работы Н. Г. Чеботарева, в какой то мере уже содержится в последней в форме различных эквивалентных утверждений, в том числе как непосредственное следствие фактически установленной в [8] локальной по направлениям сильной единственности ЭНП. И хотя в [8] рассматривался лишь частный случай приближения подпространством алгебраических многочленов $\mathcal{P}_n$, все проведенные в этой работе выкладки практически без изменений переносятся на общий случай аппроксимации конечномерным чебышевским подпространством.

Однако следует заметить, что с формальной точки зрения в [8] вообще нет никаких неравенств типа сильной единственности или острого минимума, тем не менее при ближайшем рассмотрении выясняется, что именно неравенство, определяющее локальный по направлениям острый минимум, лежит в основе доказательства достаточности общей теоремы Н. Г. Чеботарева.

Конечно, подобные выводы требуют более серьезной аргументации, и мы постараемся ее представить. Для этого нам потребуется несколько подробнее рассмотреть² содержание работы [8].

²В статье автора [10] также проведен довольно подробный разбор содержания работы [8], но изложение в настоящей статье существенно отличается и по сделанным выводам, и по предложенной аргументации.

§ 2. Результаты Н. Г. Чеботарева, касающиеся остроты минимума и сильной единственности

2.1. Формулировка основного результата и несколько предварительных замечаний. Упомянутым в заголовке параграфа результатам посвящена только одна небольшая заметка Н. Г. Чеботарева [8], в которой исследуются необходимые и достаточные условия минимума в общей (невыпуклой) минимаксной задаче

$$\Phi(A) = \max_{x \in X} F(x, A) \rightarrow \inf, \quad A \in D, \quad (2.1)$$

где X – компакт в $\mathbb{R}^k$, D – область в $\mathbb{R}^n$, а функция $F(x, A)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по координатам точки $A = (a_1, \dots, a_n)$ на произведении $X \times D$.

Через $R(A)$ обозначим компакт $\{x \in X : F(x, A) = \Phi(A)\}$. Положим

$$\nabla F(x, A) = \left(\frac{\partial F(x, A)}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial F(x, A)}{\partial a_n} \right).$$

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение³. Основным результатом статьи [8] является следующая

ТЕОРЕМА (Н. Г. Чеботарев). *Если для всякого ненулевого вектора $C \in \mathbb{R}^n$ найдется пара точек $x_1, x_2 \in R(A_0)$ таких, что скалярные произведения $\langle C, \nabla F(x_i, A_0) \rangle$, $i = 1, 2$, имеют разные знаки, то точка A_0 является точкой минимума функционала $\Phi(A)$. Если же существует вектор C , для которого все скалярные произведения $\langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle$ при $x \in R(A_0)$ одного знака, то $\Phi(A)$ не имеет минимума в точке A_0 .*

Н. Г. Чеботарев не уточняет, что он имеет в виду, когда говорит о минимуме (невыпуклого) функционала Φ в точке A_0 . Анализ доказательства показывает, что это отнюдь не традиционный локальный (строгий) минимум в точке A_0 , а гораздо более слабое понятие: локальный по направлениям строгий минимум, т. е. когда строгое неравенство $\Phi(A) > \Phi(A_0)$ выполняется на пересечении каждой прямой, проходящей через точку A_0 , с некоторой проколотой окрестностью этой точки, причем размер окрестности зависит от выбора прямой.

Как видно из формулировки теоремы, в качестве достаточного условия минимума Н. Г. Чеботарев предложил условие, которое очевидным образом переписывается в форме хорошо известного сейчас колмогоровского критерия острого локального минимума в минимаксных задачах:

$$\max_{x \in R(A_0)} \langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle > 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (2.2)$$

Им были указаны и две другие эквивалентные формы записи этого условия, которые также хорошо известны как критерий острого локального минимума

³При изложении содержания работы [8] мы заменили некоторые обозначения на более стандартные; многочисленные неточности и опечатки исправлены без оговорок.

в терминах центра масс⁴ и критерий в терминах принадлежности нуля внутренней выпуклой оболочки градиентов. Позднее все три критерия были переоткрыты в целом ряде работ (см., например, [11]–[17]), в которых рассматривался широкий спектр экстремальных задач, включая и задачи аппроксимации; некоторые из данных критериев получили в этих работах дальнейшее развитие.

Таким образом, Н. Г. Чеботарев первым выделил свойство остроты минимума в экстремальных задачах, однако не в форме неравенства острого минимума, а в виде трех эквивалентных ему условий⁵.

Заметим, что условие (2.2) и предположение о непрерывности вторых частных производных функций $F(x, A)$ позволяло Н. Г. Чеботареву без особого труда доказать наличие острого локального минимума функционала Φ в точке A_0 , т. е. существование чисел $\beta > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ таких, что

$$\Phi(A) \geq \Phi(A_0) + \beta \|A - A_0\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^n: \|A - A_0\|_2 < \varepsilon_0, \quad (2.3)$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Однако он этого не сделал. Впервые свойство остроты минимума в форме неравенства (2.3) появилось в виде своего частного случая – свойства сильной единственности ЭНП (1.1) – лишь 20 лет спустя в статье [1].

Тем не менее, несмотря на то, что формально в статье Н. Г. Чеботарева вообще нет никаких неравенств типа острого минимума (2.3), именно они играют центральную роль в доказательстве теоремы, и потому можно смело говорить о том, что неравенства типа (2.3) там фактически получены, хотя и в очень слабой форме. Их отсутствие в [8] можно объяснить тем, что Н. Г. Чеботарев рассматривал подобные неравенства лишь как средство, позволяющее установить существование минимума (а точнее, локального по направлениям строгого минимума) функционала Φ в точке A_0 . Поэтому в том месте доказательства, где он на самом деле получает такое неравенство, он приводит не его, а вытекающее из него строгое неравенство $\Phi(A) > \Phi(A_0)$. Поясним это подробнее.

2.2. Ключевая роль локальной по направлениям остроты минимума функционала Φ в доказательстве теоремы Н. Г. Чеботарева. В [8] при доказательстве достаточности фактически показано, что если зафиксировать произвольный вектор $C \in \mathbb{R}^n$, $C \neq 0$, и, пользуясь условием (2.2), выбрать $x_C \in R(A_0)$ так, чтобы скалярное произведение $\langle C, \nabla F(x_C, A_0) \rangle$ оказалось положительным, то для таких C и x_C выполняется неравенство

$$F(x_C, A_0 + \varepsilon C) > F(x_C, A_0) + \frac{\varepsilon}{2} \langle C, \nabla F(x_C, A_0) \rangle \quad (2.4)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, т. е. при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(C, x_C)$, где величина $\varepsilon_0(C, x_C)$ зависит от C и x_C .

Хотя Н. Г. Чеботарев и не выписал неравенство (2.4), тем не менее из контекста ясно, что именно на нем основан его вывод о том, что “... при всяком достаточно малом изменении A_0 функция $F(x_C, A)$ принимает большие значения,

⁴В формулировке этого критерия в [8] пропущено важное условие тотальности системы градиентов с положительными массами, т. е. система таких градиентов должна разделять точки из $\mathbb{R}^n$.

⁵Безусловно, было бы справедливо как-то связать перечисленные критерии как для острого минимума, так и для сильной единственности с именем Н. Г. Чеботарева.

чем наибольшее значение функции $F(x_C, A)$ при $A = A_0$, т. е. чем $\Phi(A_0)$. Таким образом, при $A = A_0$ функция $\Phi(A)$ приобретает минимум".

В последней фразе уже имеется в виду непосредственно вытекающее из (2.4) неравенство

$$\Phi(A_0 + \varepsilon C) > \Phi(A_0) + \frac{\varepsilon}{2} \langle C, \nabla F(x_C, A_0) \rangle \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0(C, x_C)), \quad (2.5)$$

означающее согласно $\langle C, \nabla F(x_C, A_0) \rangle > 0$ наличие в точке A_0 не только локального по направлениям строгого минимума функционала Φ , но и локального по направлениям острого минимума, поскольку при любом $C \in \mathbb{R}^n$, $\|C\|_2 = 1$, после замены $A = A_0 + \varepsilon C$ получаем, очевидно, неравенство острого минимума (2.3) на одномерном подпространстве $\text{lin } C$ с константой β , равной минимуму из величин $\langle C, \nabla F(x_C, A_0) \rangle$ и $\langle -C, \nabla F(x_{-C}, A_0) \rangle$, и $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_0(C, x_C), \varepsilon_0(-C, x_{-C}))$.

Однако если мы выписали неравенство (2.5), то нельзя не заметить, что в отношении него явно напрашивается естественное усиление, заключающееся в максимизации в нем скалярного произведения $\langle C, \nabla F(x_C, A_0) \rangle$ по точкам $x_C \in R(A_0)$:

$$\Phi(A_0 + \varepsilon C) > \Phi(A_0) + \frac{\varepsilon}{2} \max_{x \in R(A_0)} \langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0(C, \bar{x}_C)), \quad (2.6)$$

где $\bar{x}_C \in R(A_0)$ взять из условия $\langle C, \nabla F(\bar{x}_C, A_0) \rangle = \max_{x \in R(A_0)} \langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle$. Отсюда, в свою очередь, для любых $C \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|C\|_2 = 1$, непосредственно следует неравенство

$$\Phi(A_0 + \varepsilon C) \geq \Phi(A_0) + \frac{\lambda}{2} \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(C, \bar{x}_C)) \quad (2.7)$$

с константой

$$\lambda = \inf_{\|C\|_2=1} \max_{x \in R(A_0)} \langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle > 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что положительность величины λ стандартным образом вытекает из условия (2.2) с использованием компактности единичной сферы пространства $\mathbb{R}^n$ и очевидной непрерывности по C минимизируемой в (2.8) функции максимума⁶.

Итак, неравенства (2.6), (2.7) вполне можно считать результатами (во всяком случае, непосредственными следствиями) доказательства теоремы Н. Г. Чеботарева в части достаточности. При этом неравенство (2.7), безусловно, являлось бы неравенством локального острого минимума, если бы не одно обстоятельство: из доказательства Н. Г. Чеботарева не ясно, имеет ли место равномерность этого неравенства по всем единичным направлениям, т. е. можно ли утверждать существование $\varepsilon_0 > 0$ такого, что при надлежащем выборе точек $\bar{x}_C \in R(A_0)$ выполняется неравенство $\inf_{\|C\|=1} \varepsilon_0(C, \bar{x}_C) \geq \varepsilon_0$. В результате

⁶Рассматриваемая функция максимума, очевидно, является липшицевой по C с константой Липшица, равной $\max_{x \in R(A_0)} \|\nabla F(x, A_0)\|_2$. Для обоснования ее непрерывности можно также воспользоваться не менее очевидной выпуклостью этой функции, являющейся максимумом семейства линейных функций.

в его статье оказалось недоказанным даже наличие в точке A_0 обычного локального минимума функционала Φ , т. е. что $\Phi(A) \geq \Phi(A_0)$ в некоторой окрестности точки A_0 .

Однако сделанные Н. Г. Чеботаревым предположения и сам метод доказательства достаточности позволяют без особого труда установить существование величины $\varepsilon_0 > 0$, не зависящей от единичных векторов $C \in \mathbb{R}^n$. Для этого нужно лишь воспользоваться ограниченностью вторых частных производных функции $F(x, A)$ – вследствие их непрерывности – по переменным a_i и неравенством (4) из [8]. Тем не менее, вряд ли можно считать этот факт вполне очевидным следствием из доказательства теоремы Н. Г. Чеботарева. Поэтому мы не будем утверждать⁷, что в [8] фактически установлена острота локального минимума функционала Φ в точке A_0 . Однако в случае выпуклого на области D функционала Φ острота минимума, причем глобальная, действительно оказывается непосредственным следствием доказательства теоремы Н. Г. Чеботарева, поскольку тогда, как показано в следующем пункте, неравенство (2.6), очевидно, справедливо при всех $\varepsilon > 0$.

2.3. Острота минимума как непосредственное следствие локальной по направлениям остроты в случае минимизации выпуклого функционала. Пусть Φ – выпуклый функционал на $\mathbb{R}^n$ (для простоты считаем, что $D = \mathbb{R}^n$). Тогда левая часть неравенства (2.6) – это выпуклая функция по ε , а правая – линейная функция (многочлен первой степени). При этом обе функции принимают одинаковые значения в точке $\varepsilon = 0$, а для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(C, \bar{x}_C))$ значения выпуклой функции, как это следует из (2.6), больше соответствующих значений линейной. Значит, такое же соотношение между значениями функций сохранится и при всех значениях $\varepsilon \geq \varepsilon_0(C, \bar{x}_C)$ (графики функций, очевидно, расходятся). Как видим, приведенное графическое доказательство элементарно.

Однако не менее наглядно и стандартное доказательство этого факта, состоящее в несложной проверке монотонного неубывания по $\varepsilon > 0$ отношения $(\Phi(A_0 + \varepsilon C) - \Phi(A_0))/\varepsilon$ (геометрически монотонность означает неубывание тангенса угла наклона секущей графика выпуклой по ε функции $\Phi(A_0 + \varepsilon C)$).

Итак, мы убедились в том, что при дополнительном условии выпуклости функционала Φ из доказательства теоремы Н. Г. Чеботарева непосредственно получается глобальная острота минимума в виде неравенства

$$\Phi(A_0 + \varepsilon C) > \Phi(A_0) + \frac{\varepsilon}{2} \max_{x \in R(A_0)} \langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (2.9)$$

которое после замены $A_0 + \varepsilon C = A$ при $\|C\| = 1$ переписывается следующим образом:

$$\Phi(A) \geq \Phi(A_0) + \frac{\lambda}{2} \|A - A_0\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

с константой λ , определенной⁸ в (2.8).

⁷В статье автора [10] несколько опрометчиво утверждается именно это.

⁸Доказательство Н. Г. Чеботарева, очевидно, позволяет поставить в неравенствах (2.4)–(2.7) вместо множителя $1/2$ любой другой множитель $c < 1$, а значит, неравенства (2.9), (2.10) будут верны при $c = 1$, т. е. множитель $1/2$ в них можно отбросить.

2.4. Сильная единственность ЭНП как непосредственное следствие локальной по направлениям сильной единственности. В работе [8] в качестве примера выполнения условия (2.2) рассмотрена задача аппроксимации функций $f \in C[-1, 1]$ подпространством алгебраических многочленов $M = \mathcal{P}_n$ степени не выше n . Эта задача интерпретировалась Н. Г. Чеботаревым как задача (2.1) для $X = [-1, 1]$,

$$F(x, A) = |a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - f(x)| = |\varphi(x) - f(x)|,$$

где A – вектор коэффициентов многочлена φ .

Ясно, что $\Phi(A) = \|\varphi - f\|$ – выпуклый на $\mathbb{R}^{n+1}$ функционал. Пусть A_0 – вектор коэффициентов ЭНП f_M . Тогда, очевидно, $R(A_0) = H(f)$.

В [8] выписано представление

$$\frac{\partial F(x, A_0)}{\partial a_i} = -\sigma_f(x)x^i,$$

справедливое, очевидно, при всех x , удовлетворяющих условию $F(x, A_0) > 0$. Значит, если $f \in C[a, b] \setminus M$, то это же представление выполняется при всех $x \in H(f)$, а потому

$$\langle A, \nabla F(x, A_0) \rangle = -\sigma(x) \sum_{i=0}^n a_i x^i = -\sigma_f(x)\varphi(x) \quad \forall x \in H(f). \quad (2.11)$$

Тогда неравенство (2.2), т. е. достаточное условие теоремы Н. Г. Чеботарева, можно переписать в виде

$$\max_{x \in H(f)} \sigma_f(x)\varphi(x) > 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}. \quad (2.12)$$

Для доказательства последнего неравенства Н. Г. Чеботарев воспользовался эквивалентностью этого условия критерию сильной единственности ЭНП в терминах центра масс и альтернансным критерием ЭНП Чебышева. Теперь условие (2.12) хорошо известно как колмогоровский критерий сильной единственности ЭНП при аппроксимации конечномерным подпространством $M \subset C(Q)$ [11], [12]. Следовательно, уже из одного только доказанного в [8] неравенства (2.12) вытекает наличие свойства сильной единственности ЭНП в форме неравенства (1.1).

Однако саму по себе импликацию (2.12) $\Rightarrow$ (1.1) также вряд ли можно считать вполне очевидной. Как показано выше, для более общей минимаксной задачи с выпуклым функционалом Φ подобная импликация (2.2) $\Rightarrow$ (2.10) оказалась непосредственным следствием доказательства теоремы Н. Г. Чеботарева за счет того, что в нем установлена локальная по направлениям острота минимума функционала Φ в точке A_0 . Таким образом, в задаче аппроксимации алгебраическими многочленами мы также можем воспользоваться выпуклостью функционала нормы и локальной по направлениям сильной единственностью ЭНП f_M в виде неравенства

$$\|f - f_M - \varepsilon\psi\| > \|f - f_M\| + \frac{\varepsilon}{2} \max_{x \in H(f)} \sigma_f(x)(-\psi(x)) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\psi, \bar{x}_\psi)), \quad (2.13)$$

справедливого при любом $\psi \in M \setminus \{0\}$. Это неравенство есть не что иное, как неравенство локальной по направлениям остроты минимума (2.6), в котором в качестве C взят вектор коэффициентов многочлена ψ , точка $\bar{x}_\psi \in H(f)$ выбрана из условия

$$-\sigma_f(\bar{x}_\psi)\psi(\bar{x}_\psi) = \max_{x \in H(f)} (-\sigma_f(x)\psi(x))$$

и использованы очевидные представления

$$\begin{aligned} \Phi(A_0 + \varepsilon C) &= \|f - f_M - \varepsilon\psi\|, & \Phi(A_0) &= \|f - f_M\|, \\ \max_{x \in R(A_0)} \langle C, \nabla F(x, A_0) \rangle &= \max_{x \in H(f)} (-\sigma_f(x)\psi(x)). \end{aligned}$$

Как и в п. 2.3, выпуклость функционала нормы позволяет отбросить ограничение $\varepsilon < \varepsilon_0(\psi, \bar{x}_\psi)$. В результате неравенство (2.9) принимает вид

$$\|f - f_M - \varepsilon\psi\| \geq \|f - f_M\| + \frac{\varepsilon}{2} \max_{x \in H(f)} \sigma_f(x)(-\psi(x)) \quad \forall \varepsilon \geq 0, \quad \forall \psi \in M. \quad (2.14)$$

Однако для многочленов ψ с единичной нормой ($\|\psi\| = 1$) имеем

$$\max_{x \in H(f)} \sigma_f(x)(-\psi(x)) \geq \gamma(f),$$

где $\gamma(f)$ – величина, определенная в (1.2). При этом ввиду условия (2.12) положительность $\gamma(f)$ столь же очевидна, как и отмеченная ранее с использованием неравенства (2.2) положительность величины λ . Поэтому если в (2.14) при $\|\psi\| = 1$ обозначить $f_M + \varepsilon\psi = \varphi$, то с учетом равенства $\|f_M - \varphi\| = \varepsilon$ и произвольности $\varepsilon \geq 0$ немедленно приходим к (1.1) с положительной константой $\gamma = \gamma(f)/2$.

В п. 2.3 отмечалось, что доказательство Н. Г. Чеботарева позволяет заменить в неравенстве (2.9) множитель $1/2$ на 1 , а тогда предыдущие рассуждения приведут нас к неравенству (1.1) с максимально возможной константой $\gamma = \gamma(f)$.

Существуют и другие, не менее очевидные способы получения сильной единственности ЭНП из доказательства теоремы Н. Г. Чеботарева. Например, можно воспользоваться неравенством (2.10) и эквивалентностью любых двух норм на конечномерном пространстве. Еще более простой и эффективный способ получения сильной единственности ЭНП f_M из установленного в его работе неравенства (2.12) и доказательства общей теоремы состоит в изложении всего доказательства с самого начала с использованием специфики задачи аппроксимации. Тогда вместо неравенства (2.5) мы немедленно приходим к неравенству

$$\|f - f_M - \varepsilon\psi\| \geq \|f - f_M\| + \varepsilon \max_{x \in H(f)} \sigma_f(x)\psi(x) \quad \forall \varepsilon \geq 0,$$

из которого, в свою очередь, также непосредственно следует неравенство (1.1) с максимально возможной константой $\gamma = \gamma(f)$. При этом само доказательство оказывается полностью совпадающим со стандартным выводом сильной единственности ЭНП из условия колмогоровского критерия.

Перейдем к формулировке основных результатов настоящей статьи.

§ 3. Постановка задачи и формулировка основных результатов

За прошедшие годы было подробно изучено поведение констант сильной единственности $\gamma(f)$ при вариации различных параметров: аппроксимируемой функции f , аппроксимирующих подпространств M , компактов Q . В ряде работ рассматривался вопрос о положительности равномерных по непустому множеству $N \subset C(Q)$ констант сильной единственности

$$\gamma(N) = \inf_{f \in N} \gamma(f).$$

Интерес к изучению равномерных констант сильной единственности мотивируется двумя обстоятельствами. Во-первых, положительность $\gamma(N)$ влечет липшицевость оператора наилучшего приближения $P(f) = f_M$ на множестве N [5]. При этом для константы Липшица

$$K(N) = \sup_{f \in N} K(f),$$

где $K(f) = \sup\{\|P(f) - P(g)\|/\|f - g\| : g \in C(Q), g \neq f\}$, справедлива оценка

$$K(N) \leq \frac{2}{\gamma(N)}. \quad (3.1)$$

Во-вторых, следует заметить, что вычисление константы $\gamma(f)$ по известной функции f в общем случае представляет собой не менее сложную задачу, чем нахождение самого ЭНП f_M . Однако, как правило, вместо самой величины $\gamma(f)$ можно использовать какую-либо ее оценку снизу. Если известно, что рассматриваемые функции f принадлежат некоторому классу N , то априорной оценкой снизу для $\gamma(f)$ является, например, равномерная константа $\gamma(N)$, вычисление или оценка снизу которой может оказаться более простой задачей.

Обозначим

$$B(f, r) = \{g \in C(Q) : \|f - g\| \leq r\}, \quad O(f, \varepsilon) = \{g \in C(Q) : \|g - f\| < \varepsilon\}.$$

Неравенство $\gamma(C(Q)) > 0$ выполняется только в двух случаях: если M одномерно [18] или Q – конечное множество [2], [3]. В иных случаях $\gamma(B(0, 1)) = 0$ [2], [3], а если, например, $Q = [a, b]$ и $r > \|f - f_M\|/2$, то и $\gamma(B(f, r)) = 0$ (см. [19], здесь же можно найти обобщение этого результата на произвольные компакты Q).

В [20]–[22] установлена положительность $\gamma(N)$ на компактах $N \subset C[0, 1] \setminus M$, а в [18] доказано, что любая функция $f \in C(Q) \setminus M$ имеет окрестность $O(f, \varepsilon)$ такую, что $\gamma(O(f, \varepsilon)) > 0$ (нетрудно заметить, что эти результаты эквивалентны). Случай нелинейных, в частности дробно-рациональных, приближений рассматривался в [23]–[25]. Аналогичные вопросы в задачах линейного и нелинейного полубесконечного программирования изучались в [26], [27]. Равномерные константы сильной единственности при аппроксимации векторнозначных функций исследовались в [28], [29]. Отметим также результаты по близкой тематике в [30].

В [19] доказано неравенство $\gamma(B(f, r)) > 0$ при любом $r < \|f - f_M\|/2$. Кроме того, в [19] найдено три эквивалентных условия на множество $N \subset C(Q)$,

каждое из которых достаточно, а если N открыто, то и необходимо для положительности $\gamma(N)$. Характеризация произвольных подмножеств $N \subset C[a, b]$, для которых $\gamma(N) > 0$, найдена в [31]; обобщение этого критерия на случай пространства $C(Q)$ получено в [10].

Отметим, что положительность $\gamma(N)$, вообще говоря, не является устойчивым свойством относительно возмущений множества N , т. е. в случае $\gamma(N) > 0$ в любой окрестности множества N могут оказаться функции с константами сильной единственности, сколь угодно близкими к нулю (соответствующий пример приведен в конце параграфа). Поэтому, учитывая возможность ошибок задания функций из N , поставим вопрос об описании подмножеств $N \subset C(Q)$ с устойчивой положительностью констант $\gamma(N)$. Наиболее естественными можно считать следующие две задачи, соответствующие двум стандартным способам задания базы окрестностей множества N .

Задача 3.1. Охарактеризовать подмножества $N \subset C(Q)$, для которых существуют открытые окрестности $O(N)$ со свойством $\gamma(O(N)) > 0$.

Задача 3.2. Описать подмножества $N \subset C(Q)$, для которых существуют равномерные окрестности $O(N, \varepsilon)$ со свойством $\gamma(O(N, \varepsilon)) > 0$.

Как обычно, под равномерной окрестностью радиуса $\varepsilon > 0$ множества N понимается объединение $O(N, \varepsilon) = \bigcup \{O(f, \varepsilon) : f \in N\}$.

Можно привести примеры, показывающие, что класс множеств, о которых идет речь в задаче 3.2, уже соответствующего класса множеств из задачи 3.1. Однако при дополнительном условии компактности множеств оба класса совпадают. Это следует из того, что любая окрестность компакта содержит некоторую его равномерную окрестность.

Задачи 3.1, 3.2 ранее не рассматривались. В настоящей статье получено решение задачи 3.1; решению задачи 3.2 также предполагается посвятить отдельную публикацию.

Положим

$$\tilde{\gamma}(N) = \sup_{O(N)} \gamma(O(N)),$$

где верхняя грань берется по всем открытым окрестностям $O(N)$ множества N . Величину $\tilde{\gamma}(N)$ можно назвать регуляризованной равномерной константой сильной единственности по множеству N . Ясно, что $\tilde{\gamma}(N) \leq \gamma(N)$.

Неравенство $\tilde{\gamma}(N) > 0$ равносильно существованию окрестности $O(N)$, для которой равномерная константа $\gamma(O(N))$ положительна. Таким образом, задачу 3.1 можно перефразировать следующим образом.

Задача 3.1'. Охарактеризовать подмножества $N \subset C(Q)$, для которых справедливо неравенство $\tilde{\gamma}(N) > 0$.

Класс таких множеств заведомо содержит все открытые подмножества $U \subset C(Q)$, для которых $\gamma(U) > 0$, причем $\tilde{\gamma}(U) = \gamma(U)$. Кроме того, в этот класс входят все компакты $N \subset C(Q)$, не пересекающиеся с подпространством M , поскольку, как доказано в [19, теорема 2], для таких компактов существуют r -расширения $O(N, r)$ с $\gamma(O(N, r)) > 0$. В частности, $\tilde{\gamma}(f) > 0$ для любого $f \in C(Q) \setminus M$ (это следует также из упомянутого выше результата работы [18]).

Цель настоящей статьи – найти критерий подмножеств $N \subset C(Q) \setminus M$, удовлетворяющих условию $\tilde{\gamma}(N) > 0$, через простейшие характеристики как (обобщенных) альтернансов функций $f \in N$, так и множеств $H(f)$. Получено несколько эквивалентных условий. При этом оказалось, что большинство из них уже рассматривалось ранее в [19] и [32] в качестве достаточных условий положительности $\gamma(N)$, а при дополнительном предположении открытости множества N – и как условия, характеризующие положительность $\gamma(N)$ (подробнее об этом см. далее, в замечании 3.1). Однако при этом оставалось незамеченным то обстоятельство, что рассматриваемые условия на самом деле характеризуют подмножества $N \subset C(Q) \setminus M$ со свойством устойчивой положительности $\gamma(N)$. Это выяснилось только после того, как было получено представление для $\tilde{\gamma}(N)$ через нормы интерполяционных многочленов (теорема 3.1 настоящей статьи).

Наиболее простой (как по форме, так и по доказательству) из полученных в настоящей статье критериев положительности величины $\tilde{\gamma}(N)$ состоит в том, что расстояние между любыми двумя из $n + 1$ точек, образующих какой-либо альтернанс какой-либо функции $f \in N$, не может быть сколь угодно малым, т. е. множество таких расстояний отделено от нуля.

Заметим, что в случае аппроксимации на отрезке $[a, b]$ минимальное расстояние между $n + 1$ точками классического чебышевского альтернанса достигается на (соседних) точках, в которых разность $f(x) - f_M(x)$ принимает значения разных знаков.

Однако в случае произвольного компакта Q нет естественной упорядоченности точек альтернанса, и минимальное расстояние между $n + 1$ точками альтернанса может достигаться на точках с одинаковыми знаками разности $f(x) - f_M(x)$. Более того, можно привести примеры, когда разность $f(x) - f_M(x)$ на всем множестве $H(f)$, а значит, и на любом альтернансе принимает значения только одного знака. Поэтому представляется несколько неожиданным и отнюдь не тривиальным тот факт, что и в случае произвольного компакта Q положительность величины $\tilde{\gamma}(N)$ характеризуется отделенностью от нуля (по всем $f \in N$ и всем альтернансам для f) расстояний между точками, принадлежащими одному и тому же альтернансу, но при условии, что разность $f(x) - f_M(x)$ принимает на них значения разных знаков (либо тем, что на всех альтернансах разности $f(x) - f_M(x)$ постоянны).

Кроме того, оказалось, что положительность величины $\tilde{\gamma}(N)$ можно охарактеризовать отделенностью от нуля (по всем $f \in N$) минимального расстояния между теми точками множества $H(f)$, для которых разности $f(x) - f_M(x)$ принимают значения разных знаков (либо тем, что разности $f(x) - f_M(x)$ постоянны на $H(f)$ для всех $f \in N$). Это условие формально сильнее предыдущего, поскольку множество $H(f)$ содержит все альтернансы функции f .

Смысл сведения изучаемой задачи к исследованию расстояний между точками альтернанса или множества $H(f)$ с разными знаками разности $f(x) - f_M(x)$ заключается в том, что эти расстояния, как правило, гораздо легче поддаются оценке, нежели расстояния между произвольными точками альтернанса. Так, например, именно на этом пути в [19] удалось получить неравенство

$$\gamma(B(f, r)) > 0$$

для любого $f \in C(Q) \setminus M$ и любого $r < \|f - f_M\|/2$.

Заметим, что перечисленные условия, характеризующие положительность констант $\tilde{\gamma}(N)$, значительно проще, нежели аналогичные условия для $\gamma(N)$ (ср. с [10], [31]). Перейдем к точным формулировкам основных результатов статьи.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ – базис n -мерного чебышевского подпространства M из $C(Q)$. Через $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ обозначим определитель Вандермонда $\Delta(\varphi_i(x_j))$, $i, j = 1, \dots, n$, системы базисных функций φ_i по системе точек компакта Q . Согласно теореме Хаара подпространство M является чебышевским тогда и только тогда, когда для любой системы попарно различных точек $x_1, \dots, x_n$ определитель $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ отличен от нуля.

Пусть $f \in C(Q) \setminus M$. Набор попарно различных точек $X = \{x_i\}_{i=0}^n \subset H(f)$, для которого произведения $(f(x_i) - f_M(x_i))\Delta_i(X)$ имеют чередующиеся знаки по i , называется (обобщенным) *альтернансом* функции f . Согласно обобщенному критерию Чебышева любая функция $f \in C(Q) \setminus M$ имеет альтернанс. Совокупность всех альтернансов функции f обозначим через $A(f)$.

Для непустого $N \subset C(Q) \setminus M$ положим

$$A(N) = \bigcup_{f \in N} A(f).$$

Пусть снова $X = \{x_i\}_{i=0}^n$ – набор попарно различных точек компакта Q . Через ψ_X^i обозначим такой элемент из M , который интерполирует функцию $\sigma(x) = \text{sign}(f(x) - f_M(x))$ в точках $x_j \in X$, $j \neq i$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Q – компакт, M – конечномерное чебышевское подпространство из $C(Q)$ размерности $n \geq 1$, подмножество $N \subset C(Q) \setminus M$ непусто. Тогда

$$\tilde{\gamma}(N) = \inf_{X \in A(N)} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1}. \quad (3.2)$$

Если $N \cap M \neq \emptyset$, то $\tilde{\gamma}(N) = 0$. В частности, $\tilde{\gamma}(f) = 0$ для любого $f \in M$.

Положим

$$\begin{aligned} H^+(f) &= \{x \in Q: f(x) - f_M(x) = \|f - f_M\|\}, \\ H^-(f) &= \{x \in Q: f(x) - f_M(x) = -\|f - f_M\|\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $H^+(f) \cup H^-(f) = H(f)$.

В случае несвязного компакта Q одно из множеств $H^+(f)$ или $H^-(f)$ может оказаться пустым. Обозначим

$$\begin{aligned} N_a &= \{f \in N: H^-(f) \neq \emptyset, H^+(f) \neq \emptyset\}, \\ A_a(f) &= \{X \in A(f): X \cap H^-(f) \neq \emptyset, X \cap H^+(f) \neq \emptyset\}, \\ A_a(N) &= \bigcup_{f \in N} A_a(f). \end{aligned}$$

Заметим, что (см. лемму 5.1)

$$N_a = \{f \in N: A_a(f) \neq \emptyset\}.$$

Таким образом, непустота множества N_a эквивалентна непустоте множества альтернансов $A_a(N)$ (этот факт используется при формулировке следующей теоремы).

Согласно теореме Мэрхьюбера компакт Q гомеоморфен части окружности, если $C(Q)$ содержит конечномерное чебышевское подпространство M размерности $n > 1$, поэтому при $\dim M > 1$ можно считать, что компакт Q наделен некоторой метрикой ϱ . В этом случае для $f \in C(Q) \setminus M$ и $X \in A(f)$ определим величину

$$d(X) = \min\{\varrho(x, y) : x, y \in X, x \neq y\},$$

а если $X \in A_a(f)$, то положим

$$d_a(X) = \min\{\varrho(x, y) : x \in X \cap H^+(f), y \in X \cap H^-(f)\}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть Q – бесконечный компакт, M – конечномерное чебышевское подпространство из $C(Q)$ размерности $n > 1$. Следующие четыре условия, налагаемые на непустое подмножество $N \subset C(Q) \setminus M$, эквивалентны:

- 1) $\tilde{\gamma}(N) > 0$;
- 2) $\inf_{X \in A(N)} d(X) > 0$;
- 3) $\inf_{X \in A(N)} \min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X)| > 0$;
- 4) либо множество N_a пусто, либо выполняется одно из следующих пяти

эквивалентных неравенств:

- (i) $\tilde{\gamma}(N_a) > 0$;
- (ii) $\inf_{X \in A_a(N)} d_a(X) > 0$;
- (iii) $\inf_{X \in A_a(N)} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1} > 0$;
- (iv) $\inf_{X \in A_a(N)} \min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X)| > 0$;
- (v) $\inf_{f \in N_a} \min\{\varrho(x, y) : x \in H^+(f), y \in H^-(f)\} > 0$.

Инфимумы в неравенствах (ii)–(iv) заведомо берутся по непустому множеству $A_a(N)$, поскольку его непустота равносильна непустоте множества N_a .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Эквивалентность условий 2), 3) и 4), (ii) доказана в [19, лемма 1]. В [32] к ним добавлено эквивалентное условие 4), (v). Кроме того, в [32] указано еще одно эквивалентное условие:

$$\inf_{X \in A(N)} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1} > 0.$$

Последнее условие не включено в формулировку теоремы 3.2, поскольку ввиду теоремы 3.1 левая часть этого неравенства совпадает с $\tilde{\gamma}(N)$, а значит, само условие совпадает с условием 1) теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Конструкция теоремы 3.2 позволяет рекурсивно применить ее к множеству N_a , расширив тем самым список эквивалентных неравенств (i)–(v) за счет неравенств вида 2) и 3) с заменой в них множества $A(N)$ на $A(N_a)$. Однако попытка выписать для множества N_a утверждение 4) не может привести ни к каким новым неравенствам вида (i)–(v), поскольку, очевидно, $(N_a)_a = N_a$, $A_a(N_a) = A_a(N)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $C(Q) \neq C(Q)_a$, то $\tilde{\gamma}[C(Q) \setminus C(Q)_a] > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из равенства $[C(Q) \setminus C(Q)_a]_a = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если для непустого подмножества $N \subset C(Q) \setminus M$ множество N_a компактно или пусто, то $\tilde{\gamma}(N) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось выше, в случае $N_a \neq \emptyset$ из [19, теорема 2] ввиду компактности N_a непосредственно следует неравенство $\tilde{\gamma}(N_a) > 0$, т. е. выполняется утверждение 4) теоремы 3.2, а вместе с ним и утверждение 1).

Приведем пример множества $N \subset C(Q) \setminus M$, для которого $\gamma(N) > 0$ и в то же время $\tilde{\gamma}(N) = 0$. Для того чтобы построить пример такого множества, не нужно даже использовать критерий положительности $\gamma(N)$. Для этого достаточно оценки Клайна [2]

$$\gamma(f) \geq \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1},$$

из которой непосредственно следуют неравенства

$$\gamma(f) \geq \max_{X \in A(f)} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1}, \quad \gamma(N) \geq \inf_{f \in N} \max_{X \in A(f)} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1}. \quad (3.3)$$

Ясно, что если в последнем неравенстве заменить $\max_{X \in A(f)}$ на $\min_{X \in A(f)}$, то его правая часть совпадет с правой частью формулы (3.2). С учетом этого нужный пример строится совсем просто. Так, подойдет множество $N \subset C[0, 2] \setminus M$, состоящее из последовательности функций f_k , которые линейны между четырьмя точками $0, 1/k, 1$ и 2 и для которых $f_k(0) = -1$, $f_k(1/k) = 1$, $f_k(1) = 1$, $f_k(2) = -1$. В качестве подпространства M можно взять пространство линейных функций. Тогда $(f_k)_M = 0$ и каждая функция f_k имеет, с одной стороны, альтернанс вида $\{0; 1; 2\}$, а значит, в силу (3.3) выполняется неравенство $\gamma(N) > 0$, а с другой – альтернанс вида $\{0; 1/k; 2\}$, что в силу условия 2) теоремы 3.2 означает равенство $\tilde{\gamma}(N) = 0$.

Заметим, что в приведенном примере $A_a(N) = A(N)$ и, тем более, $N_a = N$.

§ 4. Доказательство теоремы 3.1

Сначала докажем равенство $\tilde{\gamma}(N) = 0$ при $N \cap M \neq \emptyset$. Заметим, что для произвольного $N \subset C(Q)$ из положительности $\gamma(N)$ вытекает липшицевость, а значит, и равномерная непрерывность оператора наилучшего приближения $P(f) = f_M$ на множестве $N \subset C(Q)$, поскольку для константы Липшица $K(N)$ на множестве N справедлива оценка (3.1). Следовательно, для доказательства равенства $\tilde{\gamma}(N) = 0$ достаточно установить отсутствие равномерной непрерывности оператора P в любой окрестности $O(N)$ множества N .

Пусть $f \in N \cap M$. Любая окрестность $O(N)$ содержит шар $B(f, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, поэтому достаточно доказать отсутствие равномерной непрерывности оператора P на шаре $B(f, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Последнее ввиду однородности оператора P и свойства $P(g + \varphi) = P(g)$ для любого $\varphi \in M$ равносильно отсутствию равномерной непрерывности на шаре $B(0, 1)$, что, в свою очередь, было доказано еще С. Н. Бернштейном [33] и передоказано⁹ в [2], [3], [34].

Перейдем к доказательству формулы (3.2). Следующая лемма хорошо известна (см., например, [10]).

⁹Вопрос об отсутствии равномерной непрерывности оператора P на шарах $B(f, r)$ при $f \neq 0$, а также на других подмножествах $C(Q)$ рассматривался в [19].

ЛЕММА 4.1. Из условий $f_k \rightarrow f$, $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n \in A(f_k)$ и $x_i^k \rightarrow x_i \in Q$, $k \rightarrow \infty$, $i = 0, \dots, n$, вытекает включение $X = \{x_i\}_{i=0}^n \in A(f)$.

Отсюда, в частности, следует, что для любого $f \in C(Q) \setminus M$ множество $A(f)$ является компактом, лежащим в Q^{n+1} . Ввиду непрерывности оператора $P(f) = f_M$ то же самое справедливо и для множества $A_a(f)$, поскольку $f_k(x_i^k) - P(f_k)(x_i^k) \rightarrow f_k(x_i) - P(f_k)(x_i)$, а значит, начиная с некоторого k_0 знаки разностей $f_k(x_i^k) - P(f_k)(x_i^k)$ и $f_k(x_i) - P(f_k)(x_i)$ совпадают.

Из (1.2) легко следует

ЛЕММА 4.2. Если для $f, g \in C(Q) \setminus M$ выполняются либо два соотношения $H^+(f) = H^+(g)$ и $H^-(f) = H^-(g)$, либо два соотношения $H^+(f) = H^-(g)$ и $H^-(f) = H^+(g)$, то $\gamma(f) = \gamma(g)$.

Действительно, на множестве $H(f) = H(g)$, очевидно, выполняется равенство $\sigma_f(x) = \sigma_g(x)$ в первом случае и $\sigma_f(x) = -\sigma_g(x)$ во втором. Следовательно, для любого $\varphi \in M$ соответственно

$$\max_{x \in H(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) = \max_{x \in H(g)} \sigma_g(x) \varphi(x), \quad (4.1)$$

$$\max_{x \in H(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) = \max_{x \in H(g)} \sigma_g(x) (-\varphi(x)). \quad (4.2)$$

Переходя в (4.1) и (4.2) к минимуму по $\varphi \in M$, $\|\varphi\| = 1$, получаем равенство $\gamma(f) = \gamma(g)$. Лемма доказана.

Таким образом, из леммы 4.2 следует, что константа $\gamma(f)$ однозначно определяется парой множеств $H^+(f)$ и $H^-(f)$ (одно из которых, возможно, пустое) и не зависит от распределения знаков функции $\sigma_f(x)$ на них.

ЛЕММА 4.3. Если для $f, g \in C(Q) \setminus M$ выполняются либо два соотношения $H^+(f) \subset H^+(g)$ и $H^-(f) \subset H^-(g)$, либо два соотношения $H^+(f) \subset H^-(g)$ и $H^-(f) \subset H^+(g)$, то $\gamma(f) \leq \gamma(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если переписать (1.2) в виде

$$\gamma(f) = \min_{\substack{\varphi \in M \\ \|\varphi\|=1}} \max \left[\max_{x \in H^+(f)} \sigma_f(x) \varphi(x), \max_{x \in H^-(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) \right]$$

и заметить, что в первом случае для любых $\varphi \in M$

$$\begin{aligned} \max_{x \in H^+(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) &\leq \max_{x \in H^+(g)} \sigma_g(x) \varphi(x), \\ \max_{x \in H^-(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) &\leq \max_{x \in H^-(g)} \sigma_g(x) \varphi(x), \end{aligned}$$

а во втором –

$$\begin{aligned} \max_{x \in H^+(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) &\leq \max_{x \in H^-(g)} \sigma_g(x) (-\varphi(x)), \\ \max_{x \in H^-(f)} \sigma_f(x) \varphi(x) &\leq \max_{x \in H^-(g)} \sigma_g(x) (-\varphi(x)), \end{aligned}$$

то неравенство $\gamma(f) \leq \gamma(g)$ становится очевидным. Лемма доказана.

Обозначим

$$\mathcal{E} = \{f \in C(Q) \setminus M : \text{card } H(f) = n + 1\}.$$

Ясно, что каждая функция $f \in \mathcal{E}$ имеет единственный альтернанс $X = H(f)$. Верно и обратное утверждение.

Действительно, если $\text{card } H(f) > n + 1$ и $X \in A(f)$, то можно построить еще один альтернанс X_1 , отличный от X . Для этого нужно взять $y \in H(f) \setminus X$ и воспользоваться стандартной процедурой построения альтернанса X_1 , состоящего из каких-то n точек альтернанса X и точки y (см., например, [35, § 3.7]). Сам факт существования подобного альтернанса оформим в виде леммы.

ЛЕММА 4.4. *Если $f \in C(Q) \setminus M$, $X \in A(f)$ и $y \in H(f)$, то существует альтернанс $X_1 \in A(f)$, состоящий из каких-то n точек альтернанса X и точки y .*

Итак, справедливо представление

$$\mathcal{E} = \{f \in C(Q) \setminus M : \text{card } A(f) = 1\}.$$

Для $f \in C(Q) \setminus M$ константа $\gamma(f)$ не определяется однозначно по множеству $H(f)$. Однако в случае $f \in \mathcal{E}$ справедлива следующая

ЛЕММА 4.5. *Если $f, g \in \mathcal{E}$ и $H(f) = H(g)$, то $\gamma(f) = \gamma(g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $X = H(f) = H(g)$ является единственным альтернансом функций f и g . Однако, как следует из определения альтернанса, по значению, например, функции $\sigma_f(x)$ в какой-либо одной точке множества X однозначно определяются значения $\sigma_f(x)$ во всех остальных его точках. Следовательно, на альтернансе X либо $\sigma_f(x) = \sigma_g(x)$, либо $\sigma_f(x) = -\sigma_g(x)$. В этих двух случаях из формулы (1.2) (можно также воспользоваться леммой 4.2) получаем равенство $\gamma(f) = \gamma(g)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. *Пусть $f \in C(Q)$. Тогда*

$$\tilde{\gamma}(f) = \inf_{\substack{\{f_k\} \subset C(Q) \\ f_k \rightarrow f}} \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k) = \inf_{\substack{\{f_k\} \subset \mathcal{E} \\ f_k \rightarrow f}} \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим первый $\inf$ через A , а второй – через B . Ясно, что $A \leq B$. Покажем, что $\tilde{\gamma}(f) \leq A$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует последовательность $f_k \in C(Q)$ такая, что $f_k \rightarrow f$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k) \leq A + \varepsilon.$$

Зафиксируем $\delta > 0$. Начиная с некоторого k_0 последовательность f_k попадает в окрестность $O(f, \delta)$, поэтому $\gamma(O(f, \delta)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k)$. Значит, ввиду произвольности $\delta > 0$ имеем

$$\tilde{\gamma}(f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k).$$

Таким образом, $\tilde{\gamma}(f) \leq A + \varepsilon$, а потому $\tilde{\gamma}(f) \leq A$.

Остается показать неравенство $\tilde{\gamma}(f) \geq B$. Для любого $k = 1, 2, \dots$ существует $f_k \in O(f, k^{-1})$ такое, что $\gamma(f_k) \leq \gamma(O(f, k^{-1})) + k^{-1}$. Вследствие равенства $\gamma(M) = 1$ и априорного неравенства $\gamma(f_k) \leq 1$ можно считать, что

$f_k \in C(Q) \setminus M$. Выберем при каждом k какой-либо альтернанс $X_k \in A(f_k)$. Ввиду открытости окрестности $O(f, k^{-1})$ можно так подправить функцию f_k , чтобы получившаяся функция g_k , во-первых, совпадала с f_k на X_k , во-вторых, выполнялись равенства $(f_k)_M = (g_k)_M$ и $H(g_k) = X_k$ и, в-третьих, выполнялось включение $g_k \in O(f, k^{-1})$. Тогда $g_k \in \mathcal{E}$, причем $H^+(g_k) \subset H^+(f_k)$, $H^-(g_k) \subset H^-(f_k)$. Применяя лемму 4.3, получаем

$$\gamma(g_k) \leq \gamma(f_k) \leq \gamma(O(f, k^{-1})) + k^{-1} \leq \tilde{\gamma}(f) + k^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$B \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(g_k) \leq \tilde{\gamma}(f).$$

Лемма доказана.

В случае $f \in \mathcal{E}$ известно представление [2], [36]

$$\gamma(f) = \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1}, \quad (4.4)$$

где $X = H(f)$, ψ_X^i – элемент из M , интерполирующий функцию $\sigma(x) = \text{sign}(f(x) - f_M(x))$ в точках $x_j \in X$, $j \neq i$.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 3.1.

ЛЕММА 4.7. Пусть $f \in C(Q) \setminus M$. Тогда справедлива формула

$$\tilde{\gamma}(f) = \min_{X \in A(f)} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1}. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть (4.5) через C , а тот альтернанс из $A(f)$, на котором достигается первый минимум из (4.5), – через X' . Очевидно, существует последовательность $f_k \in \mathcal{E}$ такая, что $f_k \rightarrow f$ и $H(f_k) = X'$. Тогда ввиду леммы 4.5 последовательность $\gamma(f_k)$ постоянна, и с учетом формулы (4.4) получаем

$$\tilde{\gamma}(f) = \sup_{\delta > 0} \gamma(O(f, \delta)) \leq \sup_k \gamma(f_k) = \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_{X'}^i\|^{-1} = C.$$

Докажем обратное неравенство $\tilde{\gamma}(f) \geq C$. Ввиду представления (4.3) из леммы 4.6 достаточно показать, что если $f_k \in \mathcal{E}$, $f_k \rightarrow f$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k) = a$, то $a \geq C$. При этом, очевидно, можно считать, что для альтернансов $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n = H(f_k)$ последовательности x_i^k сходятся к $x_i^0 \in Q$. Применяя лемму 4.1 для последовательности $X_k \rightarrow X_0 = \{x_i^0\}_{i=0}^n$, получим включение $X_0 \in A(f)$. Поскольку M – чебышевское подпространство, интерполирующий элемент $\psi_X^i \in M$ непрерывно зависит по норме пространства $C(Q)$ от набора X , состоящего из $n+1$ различных точек (см. ниже формулу Лагранжа (5.3)). Значит,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_{X_k}^i\|^{-1} = \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_{X_0}^i\|^{-1}.$$

Отсюда и из равенства $\gamma(f_k) = \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_{X_k}^i\|^{-1}$ вытекают соотношения

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(f_k) = \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_{X_0}^i\|^{-1} \geq C.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если для $f, g \in C(Q) \setminus M$ выполняются либо два соотношения $H^+(f) = H^+(g)$ и $H^-(f) = H^-(g)$, либо два соотношения $H^+(f) = H^-(g)$ и $H^-(f) = H^+(g)$, то $\tilde{\gamma}(f) = \tilde{\gamma}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается в силу очевидного равенства $A(f) = A(g)$.

Как показывает следующее утверждение, поведение констант $\tilde{\gamma}(f)$ и $\gamma(f)$ при расширении множеств $H^+(f)$ и $H^-(f)$ диаметрально противоположно (ср. с леммой 4.3).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если для $f, g \in C(Q) \setminus M$ выполняются либо два соотношения $H^+(f) \subset H^+(g)$ и $H^-(f) \subset H^-(g)$, либо два соотношения $H^+(f) \subset H^-(g)$ и $H^-(f) \subset H^+(g)$, то $\tilde{\gamma}(f) \geq \tilde{\gamma}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получится, если заметить, что $A(f) \subset A(g)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Если $f \in \mathcal{E}$, то $\tilde{\gamma}(f) = \gamma(f)$.

ЛЕММА 4.8. Пусть $N \subset C(Q)$. Тогда справедливо равенство

$$\tilde{\gamma}(N) = \inf_{f \in N} \tilde{\gamma}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем неравенство $\tilde{\gamma}(N) \leq \inf_{f \in N} \tilde{\gamma}(f)$. Зафиксируем окрестность $G \supset N$. Тогда для любого $f \in N$ имеем $\sup_{U \ni f} \gamma(U) \geq \gamma(G)$. Отсюда получаем

$$\inf_{f \in N} \sup_{U \ni f} \gamma(U) \geq \gamma(G).$$

Переходя здесь к верхней грани по окрестностям $G \supset N$, получим

$$\inf_{f \in N} \sup_{U \ni f} \gamma(U) \geq \sup_{G \supset N} \gamma(G),$$

или, по-другому, $\inf_{f \in N} \tilde{\gamma}(f) \geq \tilde{\gamma}(N)$.

Покажем неравенство $\tilde{\gamma}(N) \geq \inf_{f \in N} \tilde{\gamma}(f)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $f \in N$ выберем $\delta(f) > 0$ такое, чтобы

$$\gamma(O(f, \delta(f))) \geq \tilde{\gamma}(f) - \varepsilon.$$

Тогда для $G = \bigcup_{f \in N} O(f, \delta(f))$ имеем

$$\tilde{\gamma}(N) \geq \gamma(G) = \inf_{f \in N} \gamma(O(f, \delta(f))) \geq \inf_{f \in N} \tilde{\gamma}(f) - \varepsilon.$$

Вследствие произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство $\tilde{\gamma}(N) \geq \inf_{f \in N} \tilde{\gamma}(f)$. Лемма доказана.

Остается заметить, что формула (3.2) является непосредственным следствием лемм 4.7, 4.8, что и завершает доказательство теоремы 3.1.

§ 5. Доказательство теоремы 3.2

В отличие от [32], в настоящей статье при доказательстве теоремы 3.2 ключевую роль, как и в [10], играет лемма 5.4. Однако в [10] доказательство нескольких импликаций этой леммы сводилось к тому, что читатель отсылался к статье [19]. Это несколько затрудняло чтение, поскольку подобные импликации в [19] не были сформулированы явно и доказывались лишь как часть других утверждений. Здесь мы приведем полное доказательство леммы 5.4, предварив его рядом вспомогательных утверждений.

Следующая лемма показывает, что непустота множества N_a эквивалентна непустоте множества $A_a(N)$, чем мы, кстати, и воспользовались при формулировке теоремы 3.2.

ЛЕММА 5.1. *Для $N \subset C(Q) \setminus M$ справедливо равенство $N_a = \{f \in N : A_a(f) \neq \emptyset\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $\{f \in N : A_a(f) \neq \emptyset\} \subset N_a$ очевидно. Обоснуем обратное включение. Пусть $f \in N_a$. Нужно доказать, что $A_a(f) \neq \emptyset$. Пусть $X \in A(f)$. Если $X \notin A_a(f)$, то либо $X \cap H^-(f) = \emptyset$, либо $X \cap H^+(f) = \emptyset$. Пусть, например, $X \cap H^-(f) = \emptyset$. Однако по предположению мы имеем $H^-(f) \neq \emptyset$; выберем $x \in H^-(f)$. Ввиду леммы 4.4 для любой точки $x \in H^-(f)$ можно построить альтернанс X_1 , состоящий из каких-то n точек альтернанса X и точки x . Ясно, что $X_1 \in A_a(f)$, а потому $f \in N_a$. Лемма доказана.

Нам часто придется пользоваться эквивалентной перефразировкой теоремы Хаара: подпространство M с базисом $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ является чебышевским тогда и только тогда, когда для любых попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in Q$ векторы $\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ линейно независимы, где

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Отсюда немедленно вытекает следующий хорошо известный результат.

ЛЕММА 5.2. *Пусть $x_1, \dots, x_m$ – набор из m попарно различных точек компакта Q и линейная однородная система*

$$\sum_{i=0}^m c_i \varphi_j(x_i) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

имеет ненулевое решение $(c_1, \dots, c_m)$. Тогда $m \geq n + 1$.

Выпишем пять эквивалентных определений альтернанса. Пусть функция f принадлежит $C(Q) \setminus M$. Набор $X = \{x_i\}_{i=0}^n \subset H(f)$, состоящий из $n + 1$ попарно различных точек, называется *обобщенным альтернансом* функции f , если выполняется одно из следующих пяти эквивалентных условий:

(A₁) числа $\sigma_f(x_i)\Delta_i(X)$ имеют чередующиеся знаки по i ;

(A₂) существуют такие положительные числа $p_0, \dots, p_n$, $\sum_{i=0}^n p_i = 1$, что для всех $\varphi \in M$ выполняется равенство

$$\sum_{i=0}^n p_i \sigma_f(x_i) \varphi(x_i) = 0; \tag{5.1}$$

(A₃) то же, что и в (A₂), но с неотрицательными $p_0, \dots, p_n$;

(A₄) $0 \in \text{int conv}\{\sigma_f(x)\Phi(x): x \in X\}$, где внутренность выпуклой оболочки берется в $\mathbb{R}^n$;

(A₅) $0 \in \text{conv}\{\sigma_f(x)\Phi(x): x \in X\}$.

Здесь, как обычно, для подмножества A , лежащего в $\mathbb{R}^n$, через $\text{conv } A$ обозначается выпуклая оболочка множества A , а через $\text{int conv } A$ – внутренность выпуклой оболочки множества A .

В [10] сделаны некоторые пояснения по поводу доказательства эквивалентности определений (A₁)–(A₅). В частности, в этой работе отмечено, что априорное требование попарной различности точек набора $\{x_i\}_{i=0}^n$ можно не налагать по той причине, что оно является автоматическим следствием любого из условий (A₁)–(A₅).

ЛЕММА 5.3. Пусть $X = \{x_i\}_{i=0}^n \subset Q$ – набор из $n+1$ различных точек. Тогда справедливо неравенство

$$c_1 \min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X)| \leq \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_X^i\|^{-1}, \quad (5.2)$$

где $c_1 > 0$ – константа, зависящая только от Q и базиса $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ подпространства M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$\psi_X^i(x) = \frac{1}{\Delta_i(X)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \psi_X^j(x_j) \Delta_i^j(x), \quad (5.3)$$

где $\Delta_i^j(x)$ получен из $\Delta_i(X)$ заменой x_j на x . Отсюда получаем

$$\|\psi_X^i\| \leq \frac{n \max_{\{y_l\}_{l=1}^n \subset Q} |\Delta(y_1, \dots, y_n)|}{\Delta_i(X)}.$$

В итоге получаем (5.2) с константой

$$c_1 = (n \max\{|\Delta(y_1, \dots, y_n)|: \{y_l\}_{l=1}^n \subset Q\})^{-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. Пусть Q – бесконечный компакт, M – конечномерное чебышевское подпространство, $\dim M \geq 2$, f_k – последовательность функций из $C(Q) \setminus M$ и $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n \in A(f_k)$. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

(y₁) $\lim_{k \rightarrow \infty} d(X_k) = 0$;

(y₂) начиная с некоторого k_0 все множества $A_a(f_k)$ непусты, $X_k \in A_a(f_k)$ и выполняется соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} d_a(X_k) = 0$;

(y₃) $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_{X_k}^i\|^{-1} = 0$;

(y₄) $\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X_k)| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи вместо $\psi_{X_k}^i$ будем писать ψ_k^i . Импликация (y₃) $\Rightarrow$ (y₄) непосредственно следует из (5.2). Импликация

$(y_4) \Rightarrow (y_1)$ легко доказывается от противного. В самом деле, пусть выполняется (y_4) , но (y_1) неверно. Тогда найдутся подпоследовательность X_{k_m} и число $a > 0$ такие, что $d(X_{k_m}) > a$ для всех m . Можно считать, что это сама последовательность X_k . Можно также считать, что $x_i^k \rightarrow x_i \in Q$, $i = 0, \dots, n$. Тогда все x_i попарно различны, и потому для $X = \{x_i\}_{i=0}^n$ имеем $\min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X)| > 0$. Однако ввиду непрерывности определителей как функций точек x_i получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X_k)| = \min_{0 \leq i \leq n} |\Delta_i(X)|,$$

что с учетом предыдущего неравенства противоречит (y_4) .

Докажем $(y_1) \Rightarrow (y_3)$. Предположим противное. Тогда, выбирая, если нужно, подпоследовательность, можно считать, что для X_k выполняется условие (y_1) и, в то же время,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{0 \leq i \leq n} \|\psi_k^i\|^{-1} = a > 0. \quad (5.4)$$

При этом можно считать, что $x_i^k \rightarrow x_i \in Q$. Ввиду (y_1) среди точек x_i есть равные, скажем $x_0 = x_1 = z$. Рассмотрим ψ_k^0 . Поскольку $\psi_k^0(x_i^k) = \sigma_k(x_i^k)$, $i = 1, \dots, n$, где $\sigma_k(x) = \text{sign}[f_k(x) - (f_k)_M(x)]$, то из равенства (5.1) следует $\text{sign } \psi_k^0(x_0^k) = -\sigma_k(x_0^k)$. Ввиду (5.4) последовательность ψ_k^0 ограничена, и потому можно считать, что $\psi_k^0 \rightarrow g \in M$. Тогда обе последовательности $\psi_k^0(x_0^k)$ и $\psi_k^0(x_1^k)$ стремятся к $g(z)$. Так как $\psi_k^0(x_1^k) = \pm 1$, то начиная с некоторого номера k_1 обе последовательности $\psi_k^0(x_1^k) = \sigma_k(x_1^k)$ и $\text{sign } \psi_k^0(x_0^k) = -\sigma_k(x_0^k)$ стабилизируются и выполняется равенство $\sigma_k(x_1^k) = g(z) = -\sigma_k(x_0^k)$.

Теперь рассмотрим последовательность ψ_k^2 . Поскольку $\psi_k^2(x_i^k) = \sigma_k(x_i^k)$ при $i = 0, 1$, для $k > k_1$ имеем

$$|\psi_k^2(x_1^k) - \psi_k^2(x_0^k)| = |\sigma_k(x_1^k) - \sigma_k(x_0^k)| = 2|\sigma_k(x_1^k)| = 2. \quad (5.5)$$

Отсюда ввиду того, что последовательности x_0^k, x_1^k сходятся к одному пределу z , нетрудно получить соотношение

$$\|\psi_k^2\| \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

Действительно, если предположить, что (5.6) не выполняется, то найдется подпоследовательность (пусть это будет сама ψ_k^2), сходящаяся к некоторому элементу $g \in M$. Тогда $\psi_k^2(x_i^k) \rightarrow g(z)$, $i = 0, 1$, что, очевидно, противоречит (5.5). Осталось заметить, что (5.6), в свою очередь, противоречит (5.4). Тем самым, эквивалентность условий (y_1) , (y_3) , (y_4) доказана.

Импликация $(y_2) \Rightarrow (y_1)$ очевидна. Докажем обратную импликацию. Предположим противное. Пусть для некоторой последовательности $f_k \in C(Q) \setminus M$ и последовательности $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n \in A(f_k)$ выполняется условие (y_1) , в то время как (y_2) не выполняется. Последнее означает, что справедливо одно из следующих двух утверждений:

а) найдется подпоследовательность f_{k_m} , для которой $A_a(f_{k_m}) = \emptyset$ при всех $m = 1, 2, \dots$;

б) найдутся подпоследовательности f_{k_m} и $X_{k_m} = \{x_i^{k_m}\}_{i=0}^n \in A(f_{k_m})$, для которых $A_a(f_{k_m}) \neq \emptyset$ при всех $m = 1, 2, \dots$ и $\inf_m d_a(X_{k_m}) > 0$.

Пусть и в случае а), и в случае б) это будут сами последовательности f_k и $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n$. При этом можно считать, что $x_i^k \rightarrow x_i \in Q$ для каждого $i = 0, \dots, n$ и $\sigma_{f_k}(x_i^k)$ – стационарная последовательность по k , принимающая одно из двух значений: $+1$ или -1 ; обозначим это значение через σ_i .

Ввиду условия (y_1) набор $\{x_i\}_{i=0}^n$ содержит не более n различных точек. Ясно, что как в случае а), так и в случае б) из того, что $x_i = x_j$, следует $\sigma_i = \sigma_j$. Пусть $y_1, \dots, y_m$, $m \leq n$, – все различные точки набора $\{x_i\}_{i=0}^n$.

По определению альтернанса в форме (A_2) для любого $k = 1, 2, \dots$ найдутся положительные числа $p_0^k, \dots, p_n^k$ такие, что $\sum_{i=0}^n p_i^k = 1$ и выполняются равенства

$$\sum_{i=0}^n p_i^k \sigma_i \varphi_j(x_i^k) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Можно считать, что для всех i последовательности p_i^k сходятся; для неотрицательных чисел $p_i = \lim_k p_i^k$ имеем $\sum_{i=0}^n p_i = 1$. Переходя в (5.7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{i=0}^n p_i \sigma_i \varphi_j(x_i) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.8)$$

Для каждого $l = 1, \dots, m$ обозначим $c_l = \sum \{p_i \sigma_i : x_i = y_l\}$. В этой сумме все слагаемые $p_i \sigma_i$ одновременно или неотрицательны, или неположительны, поскольку, как уже отмечалось, $\sigma_i = \sigma_j$, если $x_i = x_j$. Однако среди p_i есть ненулевые, а тогда и каждое c_l , в представление которого входят ненулевые p_i , также отлично от нуля.

Теперь заметим, что (5.8) можно переписать в виде линейной однородной системы

$$\sum_{l=0}^m c_l \varphi_j(y_l) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

относительно неизвестных $(c_1, \dots, c_m)$, которая, как только что выяснилось, имеет ненулевое решение. Это ввиду леммы 5.2 означает, что $m \geq n + 1$. Противоречие. Лемма доказана.

Далее, как обычно, $\|a\|_2$ – евклидова норма, $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение, ∂A – граница множества A в $\mathbb{R}^n$.

Пусть F – образ компакта Q при отображении $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$. Легко видеть, что F является компактом в $\mathbb{R}^n$, не содержащим начало координат. Кроме того, множество $D = \text{conv}(F \cup (-F))$ – выпуклое центрально симметричное тело в $\mathbb{R}^n$ (то, что D – тело, следует из линейной независимости функций φ_i).

Положим

$$m = \min_{a \in F} \|a\|_2, \quad d = \max_{a \in F} \|a\|_2.$$

Ясно, что в определении величины d множество F можно заменить на D или ∂D . Обозначим $B_2(a, r) = \{b \in \mathbb{R}^n : \|a - b\| \leq r\}$. Пусть $\tilde{r}$ – максимальный

радиус шаров с центром в нуле, содержащихся в D . Положим

$$r = r(F) = \min\left(\tilde{r}, \frac{m}{2}\right), \quad c(F) = \sup\left\{\frac{\|a' - b'\|_2}{\|a - b\|_2} : a, b \in F, a \neq b\right\},$$

где a', b' – точки пересечения с границей ∂D лучей $\{ta : t > 0\}$ и $\{tb : t > 0\}$ соответственно.

Наша ближайшая цель – доказательство конечности величины $c(F)$.

ЛЕММА 5.5. Пусть $\dim M \geq 2$. Тогда справедливы неравенства

$$1 \leq c(F) \leq \frac{2d^2}{mr}.$$

Если M содержит константы, то $c(F) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем последнее утверждение. Если M содержит константы, то существует ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\langle \Phi(x), v \rangle = 1$ для любого $x \in Q$. Значит, F лежит в гиперплоскости, не проходящей через начало координат, а потому $a' = a$ при $a \in F$ и, в частности, $c(F) = 1$. Перейдем к доказательству неравенств в общем случае.

Нетрудно заметить, что по крайней мере две различные точки множества F лежат на границе ∂D . Отсюда сразу вытекает соотношение $1 \leq c(F)$. Покажем второе неравенство.

Пусть $a, b \in F, a \neq b$. Если $\|a - b\|_2 \geq r$, то

$$\frac{\|a' - b'\|_2}{\|a - b\|_2} \leq \frac{2d}{r} \leq \frac{2d^2}{rm}.$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $\|a - b\|_2 \leq r$. Поскольку $\|a\|_2, \|b\|_2 \geq m$, согласно условию $r \leq m/2$ отрезок $[a, b]$, а тем более отрезок $[a', b']$ не пересекаются с шаром $B_2(0, r)$. Так как $a', b' \in \partial D$, прямая $\{ta' + (1-t)b' : t \in \mathbb{R}\}$ не пересекается с внутренностью шара $B_2(0, r)$. Это означает, что для угла $\beta = \angle 0a'b'$ справедливо соотношение $r/d \leq \sin \beta$. С другой стороны, очевидно неравенство $m \sin \alpha \leq \|a - b\|_2$, где $\alpha = \angle a0b$. Кроме того, по теореме синусов имеем $\|a' - b'\|_2 \sin \beta = \|b'\|_2 \sin \alpha$. В итоге получаем

$$\frac{\|a' - b'\|_2}{\|a - b\|_2} = \frac{\|a' - b'\|_2}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\|a - b\|_2} \leq \frac{\|b'\|_2}{\sin \beta} \cdot \frac{1}{m} \leq \frac{d^2}{mr}.$$

Лемма доказана.

Если $f \in C(Q) \setminus M$, то для любого альтернанса $X \in A(f)$ и любой точки $y \in H(f)$ найдется альтернанс $Y \in A(f)$, состоящий из точки y и каких-то n точек из X (лемма 4.4). Если же взять две точки $y \in H^+(f), z \in H^-(f)$, то даже в случае $Q = [a, b]$ может оказаться, что вместе они не принадлежат никакому альтернансу функции f . Следующая лемма показывает, что если точки $y \in H^+(f), z \in H^-(f)$ и альтернанс $X \in A(f)$ таковы, что никакие $n - 1$ точек из X не образуют вместе с точками y и z альтернанс функции f , то одна из граней симплекса $\text{conv}\{\sigma_f(x)\Phi(x) : x \in X\}$ содержится в окрестности некоторого гиперподпространства в $\mathbb{R}^n$, причем радиус этой окрестности оценивается сверху величиной $c(F)\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_2/2$.

ЛЕММА 5.6. Пусть $n = \dim M \geq 2$, $f \in C(Q) \setminus M$, $X \in A(f)$, $y \in H^+(f)$, $z \in H^-(f)$, причем никакие $n-1$ точек из X не образуют вместе с точками y и z альтернанс функции f . Тогда найдутся n различных точек $x_1, \dots, x_n \in X$ и вектор $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$, такие, что для всех $i = 1, \dots, n$ выполняются неравенства

$$0 < 2\sigma(x_i)\langle v, \Phi(x_i) \rangle \leq c(F)\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_2, \quad (5.9)$$

где, как обычно, $\sigma(x) = \text{sign}(f(x) - f_M(x))$, а константа $c(F)$ определена выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a = \Phi(z)$, $b = \Phi(y)$,

$$\begin{aligned} a' &= \{ta : t > 0\} \cap \partial D, & b' &= \{tb : t > 0\} \cap \partial D, \\ S &= \text{conv}\{\sigma(x)\Phi(x) : x \in X\}. \end{aligned}$$

По определению альтернанса имеем $0 \in \text{int } S$. Покажем, что лучи $\{ta : t > 0\}$ и $\{-tb : t > 0\}$ пересекают одну и ту же $(n-1)$ -мерную грань G симплекса S .

Предположим, что это не так, и пусть $X = \{x_i\}_{i=0}^n$. Тогда для некоторых неотрицательных чисел λ и β точка $\lambda a - \beta b$ принадлежит $(n-2)$ -мерной грани T симплекса S , скажем $T = \text{conv}\{\sigma(x_i)\Phi(x_i) : i = 2, \dots, n\}$. Это означает, что начало координат принадлежит выпуклой оболочке грани T и точки $-\lambda a + \beta b$. Отсюда ввиду неотрицательности λ и β вытекает включение $0 \in \text{conv}(\{-a, b\} \cup T)$. Поскольку $-a$ и b положительно пропорциональны точкам $\sigma(z)\Phi(z)$ и $\sigma(y)\Phi(y)$ соответственно, имеем

$$0 \in S_0 = \text{conv}\{\sigma(x)\Phi(x) : x \in X_0\},$$

где $X_0 = \{z, y, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Значит, используя определение альтернанса (A_5), получаем $X_0 \in A(f)$, что невозможно по условию. Тем самым, существование грани G доказано.

Ввиду включения $S \subset D$ точки a' и b' оказались по одну сторону от гиперплоскости, проходящей через грань G , а нуль – по другую. Пусть $\langle v, w \rangle = \lambda$ – уравнение этой гиперплоскости при $\|v\|_2 = 1$ и $\lambda > 0$. Тогда из изложенного выше следуют неравенства

$$\lambda \leq \langle v, a' \rangle, \quad \lambda \leq \langle v, -b' \rangle.$$

Складывая их и применяя лемму 5.5, получаем

$$2\lambda \leq \langle v, a' - b' \rangle \leq \|a' - b'\|_2 \leq c(F)\|\Phi(z) - \Phi(y)\|_2.$$

Остается заметить, что вершинами грани G являются n точек вида $\sigma(x)\Phi(x)$ при $x \in X$, т.е. $\langle v, \sigma(x_i)\Phi(x_i) \rangle = \lambda$ для некоторых $x_1, \dots, x_n \in X$, что вместе с последним неравенством дает (5.9). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Установим импликацию 1) $\Rightarrow$ 2) от противного. Пусть $\tilde{\gamma}(N) > 0$, но условие 2) не выполняется, т.е. справедливо $\inf_{X \in A(N)} d(X) = 0$. Тогда найдутся последовательности $f_k \in C(Q) \setminus M$ и $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n \in A(f_k)$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} d(X_k) = 0$, т.е. выполняется условие (y_1) леммы 5.4, а значит, и эквивалентное ему условие (y_3) , которое ввиду

представления (3.2) для $\tilde{\gamma}(N)$, очевидно, влечет равенство $\tilde{\gamma}(N) = 0$. Противоречие. Аналогично доказываются импликации $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$. Итак, условия 1)–3) эквивалентны. Осталось добавить к ним условие 4).

Покажем сначала, что условия 1)–3) эквивалентны следующему усеченному варианту условия 4): либо множество N_a пусто, либо выполняется неравенство (ii) теоремы, т. е. $\inf_{X \in A_a(N)} d_a(X) > 0$.

Ясно, что последнее условие формально слабее 2). Проверим обратную импликацию от противного. Пусть 2) не выполняется. Снова, как и выше, найдутся последовательности $f_k \in C(Q) \setminus M$ и $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n \in A(f_k)$ такие, что выполняется условие (y_1) леммы 5.4, а значит, и эквивалентное ему условие (y_2) , из которого, очевидно, следует непустота множества N_a и равенство $\inf_{X \in A_a(N)} d_a(X) = 0$, что противоречит неравенству (ii).

Теперь покажем, что в случае $N_a \neq \emptyset$ условие (i), $\tilde{\gamma}(N_a) > 0$, эквивалентно условию (ii). Воспользуемся уже доказанной эквивалентностью условий 1) и 2) теоремы 3.2. При $N = N_a$ условие 1) переходит в условие (i), а условие 2) – в неравенство

$$\inf_{X \in A(N_a)} d(X) > 0.$$

В свою очередь, последнее неравенство ввиду соотношения $A_a(N) \subset A(N_a)$ и неравенства $d_a(X) \geq d(X)$ влечет (ii). В итоге получаем (i) $\Rightarrow$ (ii). Обратно, пусть выполняется (ii). Тогда по доказанному выше имеет место неравенство $\tilde{\gamma}(N) > 0$ (условие 1)) и тем более неравенство (i).

Эквивалентность условий (ii)–(iv) также легко вытекает из леммы 5.4. Действительно, отрицание любого из трех условий (ii)–(iv), очевидно, влечет существование последовательностей $f_k \in C(Q) \setminus M$ и $X_k = \{x_i^k\}_{i=0}^n \in A(f_k)$, для которых выполняется соответствующее условие (y_i) , $i = 2, 3, 4$, леммы 5.4. Значит, если выполняется одно из условий (ii)–(iv), то выполняются и остальные два, т. е. все они эквивалентны. В итоге мы показали эквивалентность условий (i)–(iv).

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (v) в предположении непустоты множества N_a . Импликация (v) $\Rightarrow$ (ii) тривиальна. Перейдем к доказательству импликации (ii) $\Rightarrow$ (v). Пусть (v) не выполняется. Это значит, что существуют последовательности $f_k \in N$, $y_k \in H^+(f_k)$, $z_k \in H^-(f_k)$ такие, что $\varrho(y_k, z_k) \rightarrow 0$. Если найдется подпоследовательность альтернансов $X_{k_m} \in A(f_{k_m})$ такая, что $y_{k_m}, z_{k_m} \in X_{k_m}$, то это, очевидно, будет противоречить условию (ii). Поэтому предположим, что ни при каком k точки y_k, z_k не принадлежат вместе ни одному альтернансу из $A(f_k)$.

Пусть $X_k \in A(f_k)$. По лемме 5.6 для любого k найдутся n различных точек $x_1^k, \dots, x_n^k \in X_k$, константа c , зависящая только от Q и $\{\varphi_i\}$, и вектор $v_k \in \mathbb{R}^n$, $\|v_k\|_2 = 1$, такие, что для всех $i = 1, \dots, n$

$$0 < \sigma(x_i^k) \langle v_k, \Phi(x_i^k) \rangle \leq c \|\Phi(y_k) - \Phi(z_k)\|_2.$$

Без ограничения общности можно считать, что $x_i^k \rightarrow x_i$, $v_k \rightarrow v$, $\|v\|_2 = 1$. Тогда ввиду сходимости $\varrho(y_k, z_k) \rightarrow 0$ получаем равенства

$$\langle v, \Phi(x_i) \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда, пользуясь теоремой Хаара, заключаем, что среди точек x_i есть равные, а потому $d(X_k) \rightarrow 0$. Значит, условие 2), а вместе с ним и условие (ii) не выполняются. Противоречие. Итак, импликация (ii) $\Rightarrow$ (v) установлена.

Список литературы

1. D. J. Newman, H. S. Shapiro, "Some theorems on Čebyšev approximation", *Duke Math. J.*, **30**:4 (1963), 673–681.
2. A. K. Cline, "Lipschitz conditions on uniform approximation operators", *J. Approximation Theory*, **8**:2 (1973), 160–172.
3. M. Bartelt, "On Lipschitz conditions, strong unicity and a theorem of A. K. Cline", *J. Approximation Theory*, **14**:4 (1975), 245–250.
4. Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М., 1983.
5. E. W. Cheney, *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
6. Л. Коллатц, В. Крабс, *Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения*, Наука, М., 1978; пер. с нем.: L. Collatz, W. Krabs, *Approximationstheorie. Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen*, Teubner, Stuttgart, 1973.
7. А. В. Маринов, "Равномерные константы сильной единственности при аппроксимации конечномерным чебышевским подпространством", *Теория приближений и гармонический анализ. Междунар. конф.* (Тула, 1998), 1998, 169–170.
8. Н. Г. Чеботарев, "Об одном критерии минимакса", *Докл. АН СССР*, **39**:9 (1943), 373–376.
9. Н. Г. Чеботарев, *Собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН СССР, М., 1949.
10. A. V. Marinov, "The positivity of uniform constants of strong unicity and the Steinitz theorem on the interior of a convex hull in $\mathbb{R}^n$ ", *Topology, mathematical control theory and differential equations, approximation theory*, Proc. Steclov Inst. Math., Suppl. 1, Maik, Moscow, 2004, 158–182.
11. D. Wulbert, "Uniqueness and differential characterization of approximations from manifolds of functions", *Amer. J. Math.*, **93**:2 (1971), 350–366.
12. M. W. Bartelt, H. W. McLaughlin, "Characterizations of strong unicity in approximation theory", *J. Approximation Theory*, **9**:3 (1973), 255–266.
13. G. Nürnberger, "Unicity and strong unicity in approximation theory", *J. Approx. Theory*, **26**:1 (1979), 54–70.
14. G. Nürnberger, "Global unicity in semi-infinite optimization", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **8**:1–2 (1985), 173–191.
15. B. Brosowski, "A refinement of the Kolmogorov criterion", *Constructive function theory* (Varna, Bulgaria, 1981), Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1983, 241–247.
16. H.-P. Blatt, "Exchange algorithms, error estimations and strong unicity in convex programming and Chebyshev approximation", *Approximation theory and spline functions* (St. John's, Newfoundland, 1983), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **136**, Reidel, Dordrecht, 1984, 23–63.
17. H.-P. Blatt, "Characterization of strong unicity in semi-infinite optimization by chain of references", *Parametric optimization and approximation* (Oberwolfach, 1983), Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **72**, Birkhäuser, Basel, 1985, 36–46.
18. Ch. B. Dunham, "A uniform constant of strong uniqueness on an interval", *J. Approx. Theory*, **28**:3 (1980), 207–211.
19. А. В. Маринов, "О константах сильной единственности для наилучших равномерных приближений на компактах", *Матем. заметки*, **34**:1 (1983), 31–46; англ. пер.: A. V. Marinov, "Constants of strong uniqueness for best uniform approximations on compacta", *Math. Notes*, **34**:1 (1983), 499–507.

20. M. S. Henry, D. Schmidt, "Continuity theorems for the product approximation operator", *Theory of approximation, with applications* (Calgary, Canada, 1975), Academic Press, New York, 1976, 24–42.
21. A. Kroó, "The continuity of best approximations", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **30**:1–2 (1977), 175–188.
22. S. O. Paur, J. A. Roulier, "Continuity and strong unicity of the best approximation operator on subintervals", *J. Approx. Theory*, **32**:3 (1981), 247–255.
23. M. S. Henry, D. Schmidt, J. J. Swetits, "Uniform strong unicity for rational approximation", *J. Approx. Theory*, **33**:2 (1981), 131–146.
24. Ch. Li, "Uniform strong unicity for simultaneous rational Chebyshev approximation", *Acta Math. Sinica*, **35**:4 (1992), 460–471.
25. Y. Xing, "Uniform strong unicity for approximation by reciprocals of polynomials on $[0, 1]$ ", *Adv. in Math. (Beijing)*, **17**:1 (1988), 72–78.
26. G. Nürnberger, "Unicity in semi-infinite optimization", *Parametric optimization and approximation* (Oberwolfach, 1983), Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **72**, Birkhäuser, Basel, 1985, 231–247.
27. G. Nürnberger, "Strong unicity in nonlinear parametric optimization", *Parametric optimization and related topics* (Plaue, 1985), Math. Res., **35**, Akademie-Verlag, Berlin, 1987, 316–326.
28. M. Bartelt, "Hausdorff strong unicity in vector-valued Chebyshev approximation on finite sets", *Trends in approximation theory* (Nashville, TX, USA, 2000), Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2001, 31–38.
29. M. W. Bartelt, J. J. Swetits, "Uniform strong unicity of order 2 for generalized Haar sets", *Approximation theory, v. X: Abstract and classical analysis* (St. Louis, MO, USA, 2001), Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002, 23–30.
30. M. Bartelt, E. H. Kaufman, jr., J. Swetits, "Uniform Lipschitz constants in Chebyshev polynomial approximation", *J. Approx. Theory*, **62**:1 (1990), 23–38.
31. M. Bartelt, J. Swetits, "Uniform strong unicity constants for subsets of $C(X)$ ", *J. Approx. Theory*, **55**:3 (1988), 304–317.
32. А. В. Маринов, *Непрерывность метрической проекции*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ИММ УрО АН СССР, Свердловск, 1989.
33. С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов*, ч. 1, Гостехиздат, М.–Л., 1937.
34. П. В. Галкин, "О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций", *Матем. заметки*, **10**:6 (1971), 601–613; англ. пер.: P. V. Galkin, "On the modulus of continuity of the operator of best approximation in the space of continuous functions", *Math. Notes*, **10**:6 (1972), 790–798.
35. П.-Ж. Лоран, *Аппроксимация и оптимизация*, Мир, М., 1975; пер. с фр.: P.-J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
36. M. S. Henry, J. A. Roulier, "Lipschitz and strong unicity constants for changing dimension", *J. Approximation Theory*, **22**:1 (1978), 85–94.

А. В. МАРИНОВ (A. V. MARINOV)
 Институт математики и механики УрО РАН,
 г. Екатеринбург
 E-mail: marinov@imm.uran.ru

Поступило в редакцию
 05.11.2009
 13.04.2010