Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Атабекян, Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:53:14

УДК 512.54+512.543+512.544.43

В. С. Атабекян

Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп

Доказано, что для произвольного нечетного $n \geq 1003$ и $m > 1$ каждый автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, который стабилизирует любую максимальную нормальную подгруппу $N \triangleleft B(m, n)$ бесконечного индекса, является внутренним автоморфизмом. Для тех же значений m и n установлено, что подгруппа внутренних автоморфизмов группы $\text{Aut}(B(m, n))$ является максимальной среди всех тех подгрупп, порядки элементов которых ограничены числом n .

Библиография: 29 наименований.

Ключевые слова: свободная бернсайдова группа, нормальный автоморфизм, внутренний автоморфизм, максимальная подгруппа, неабелева простая группа.

§ 1. Введение

Относительно свободная группа ранга m многообразия всех групп, удовлетворяющих тождественному соотношению $x^n = 1$, обозначается через $B(m, n)$ и называется *свободной периодической* или *свободной бернсайдовой группой* периода n и ранга m . Более просто:

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m; x^n = 1 \rangle.$$

Известная теорема С. И. Адяна [1] утверждает, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ группа $B(m, n)$ бесконечна (решение проблемы Бернсайда). Ключевые результаты о свободных периодических группах, полученные в [1], показывают, что группы $B(m, n)$ при нечетных $n \geq 665$ обладают многими свойствами, аналогичными свойствам абсолютно свободных групп (подробнее об этом см. [2]–[7]).

Из теоремы С. И. Адяна о том, что центр группы $B(m, n)$ для всех нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ тривиален (см. [1, гл. VI, теорема 3.3]), следует, что группа $B(m, n)$ изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов. В терминах так называемых “точных последовательностей” это означает, что последовательность гомоморфизмов

$$0 \rightarrow B(m, n) \hookrightarrow \text{Aut}(B(m, n)) \twoheadrightarrow \text{Aut}(B(m, n))/\text{Inn}(B(m, n)) \rightarrow 0$$

является точной, где $\text{Inn}(B(m, n))$ – группа внутренних автоморфизмов группы $B(m, n)$. Отметим, что факторгруппа $\text{Aut}(B(m, n))/\text{Inn}(B(m, n))$ обозначается через $\text{Out}(B(m, n))$ и называется *группой внешних автоморфизмов* группы $B(m, n)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-91958-ННИО_а).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – произвольная группа, $\varphi \in \text{Aut}(G)$ – автоморфизм группы G и H – подгруппа группы G . Автоморфизм φ назовем H -стабильным автоморфизмом, если $\varphi(H) = H$, при этом H называется φ -допустимой подгруппой.

Рассмотрим произвольное семейство $\mathcal{H}$ подгрупп группы G . Всевозможные H -стабильные автоморфизмы при $H \in \mathcal{H}$ составляют подгруппу группы $\text{Aut}(G)$. Она называется стабилизатором семейства $\mathcal{H}$ и обозначается

$$\text{Aut}_{\mathcal{H}}(G) = \{\varphi \in \text{Aut}(G) \mid \varphi(H) = H \quad \forall H \in \mathcal{H}\}.$$

Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(G)$ – множество всех нормальных подгрупп группы G и $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Легко заметить, что тогда выполнены следующие вложения:

$$\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}_{\mathcal{N}}(G) \leq \text{Aut}_{\mathcal{M}}(G) \leq \text{Aut}(G).$$

Каждый автоморфизм из $\text{Aut}_{\mathcal{N}}(G)$ принято называть *нормальным автоморфизмом*. Таким образом, при данном нормальном автоморфизме $\varphi \in \text{Aut}(G)$ любая нормальная подгруппа группы G φ -допустима, и наоборот. Ясно, что если N – φ -допустимая нормальная подгруппа группы G , то автоморфизмом φ индуцируется некоторый автоморфизм факторгруппы G/N .

А. Любоцкий в [8] и А. Лю в [9] доказали, что каждый нормальный автоморфизм нециклической абсолютно свободной группы F является внутренним, т. е. имеет место равенство $\text{Inn}(F) = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(F)$. Соответствующее равенство было доказано в разные годы для различных интересных классов групп (см. [10]–[18]). В частности, М. В. Нецадим доказал в [17], усиливая результаты работ [8] и [9], что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп является внутренним. В связи с этим результатом отметим, что аналогичное утверждение неверно для n -периодических произведений групп, введенных С. И. Адяном в [19]. Например, рассмотрим n -периодическое произведение $\langle a \rangle_k \overset{n}{*} \langle b \rangle_k$ двух циклических групп порядка k , где k и n – взаимно простые нечетные числа и $n \geq 665$. Согласно [20, теорема 1] группа $\langle a \rangle_k \overset{n}{*} \langle b \rangle_k$ является простой, поэтому каждый ее автоморфизм нормальный. В силу принципа симметричности (см. [1, гл. 1, § 5, п. 3]) отображение $a \rightarrow a^{-1}$, $b \rightarrow b^{-1}$ порождает нормальный автоморфизм порядка 2 группы $\langle a \rangle_k \overset{n}{*} \langle b \rangle_k$. Однако он не является внутренним, так как согласно [19, теорема 7] каждый внутренний автоморфизм группы $\langle a \rangle_k \overset{n}{*} \langle b \rangle_k$ имеет нечетный порядок, точнее, его порядок делит либо k , либо n . Добавим, что поскольку $\langle a \rangle_2 \overset{n}{*} \langle b \rangle_2 = \langle a \rangle_2 * \langle b \rangle_2$, то $\text{Inn}(\langle a \rangle_2 \overset{n}{*} \langle b \rangle_2) = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(\langle a \rangle_2 \overset{n}{*} \langle b \rangle_2)$.

Представляет интерес следующий

ВОПРОС 1. Верно ли, что каждый нормальный автоморфизм n -периодического произведения нетривиальных групп периода n является внутренним?

А. Минасян и Д. Осин в [18] показали, что если G – нециклическая относительно гиперболическая группа без нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $\text{Inn}(G) = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(G)$.

Е. А. Черепанов в [21] доказал, что при достаточно больших нечетных n , $n > 10^{78}$, группы нормальных автоморфизмов и внутренних автоморфизмов группы $B(m, n)$ совпадают. В настоящей работе мы докажем, что это утверждение распространяется на автоморфизмы свободных бернсайдовых групп

произвольного нечетного периода $n \geq 1003$. Отметим, что вопрос об исследовании групп автоморфизмов свободных периодических групп достаточно большого нечетного периода был поставлен А.Ю. Ольшанским в 1982 г. (см. [22, вопрос 8.53.а]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Автоморфизм φ группы G назовем M -нормальным, если для любой максимальной нормальной подгруппы N группы G выполнено равенство $\varphi(N) = N$.

В работах [23], [24] было установлено, что не только множество нормальных подгрупп, но и множество максимальных нормальных подгрупп группы $B(m, n)$ континуально. Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любого нечетного числа $n \geq 1003$ каждый M -нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ (конечного или бесконечного) является внутренним автоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого нечетного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ (конечного или бесконечного) является внутренним автоморфизмом.

Следствие 1 выявляет еще одну аналогию между свойствами свободных бернсайдовых и абсолютно свободных групп.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 1 вытекает, что множества M -нормальных и нормальных автоморфизмов свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ совпадают. Нетрудно указать примеры групп, содержащих максимальные нормальные подгруппы, для которых это утверждение неверно. Так, аддитивная группа рациональных чисел Q вкладывается в прямое произведение $Q \times Z_2$ как единственная максимальная подгруппа. Поэтому естественное продолжение автоморфизма $\phi(x) = ax$ до автоморфизма $\Phi: Q \times Z_2 \rightarrow Q \times Z_2$ будет M -нормальным автоморфизмом. Если $|a| \neq 1$, то для подгруппы целых чисел $Z \subset Q$ имеем $\Phi(Z) \neq Z$, т.е. Φ не является нормальным автоморфизмом. Следовательно, $\text{Aut}_{\mathcal{N}}(Q \times Z_2) \neq \text{Aut}_{\mathcal{M}}(Q \times Z_2)$, где $\mathcal{M}$ – множество максимальных нормальных подгрупп группы $Q \times Z_2$.

На самом деле каждая максимальная нормальная подгруппа $N \leq B(m, n)$, которая рассматривается в ходе доказательства теоремы 1, такова, что факторгруппа $B(m, n)/N$ бесконечна, более того, всякая максимальная подгруппа в $B(m, n)/N$ – циклическая группа порядка n (как установлено в [24], группа $B(m, n)$ аппроксимируется такими группами). Поэтому получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число и φ – такой автоморфизм группы $B(m, n)$, что $\varphi(N) = N$ для каждой максимальной нормальной подгруппы $N \leq B(m, n)$, для которой $B(m, n)/N$ – бесконечная группа (содержащая элементы порядка n). Тогда φ – внутренний автоморфизм.

Следствие 2 и следствие 1 усиливают соответственно теорему 1.1 и следствие 2.2 из работы [21], где доказаны аналогичные утверждения для достаточно больших нечетных n , $n > 10^{78}$.

На основании теоремы 1 мы докажем также следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число, $m > 1$ и H – подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut}(B(m, n))$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

- 1) $H \supseteq \text{Inn}(B(m, n))$;
- 2) порядок каждого элемента подгруппы H не превосходит число n .

Тогда $H = \text{Inn}(B(m, n))$.

Согласно теореме 2 подгруппа внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(B(m, n))$ является максимальной среди всех тех подгрупп группы $\text{Aut}(B(m, n))$, порядки элементов которых ограничены числом n .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть θ – произвольный внешний автоморфизм группы $B(m, n)$. Тогда в подгруппе группы $\text{Aut}(B(m, n))$, порожденной всеми внутренними автоморфизмами и автоморфизмом θ , содержится автоморфизм порядка $> n$.

Примеры внешних автоморфизмов группы $B(m, n)$ можно получить с помощью приведенной далее леммы 13. Например, любой не тождественный автоморфизм, заданный на порождающих соотношениями $\phi(a_i) = a_i^{k_i}$, где n и k_i взаимно просты, $i = 1, 2, \dots$, является внешним автоморфизмом (см. также лемму 9).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть φ – произвольный M -нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с базисом $\{a_1, a_2, \dots\}$. Нам понадобится следующий результат, доказанный автором в работе [25].

ЛЕММА 1 [25, предложение 1]. Пусть $B(m, n)$ – свободная бернсайдова группа нечетного периода $n \geq 1003$ с базисом $\{a_1, a_2, \dots\}$. Предположим, что никакая степень данной порождающей a_i не сопряжена с фиксированным элементом $v \in B(m, n)$. Тогда существует неабелева простая факторгруппа $B(m, n)/L$ такая, что:

- 1) канонический образ порождающей a_i в $B(m, n)/L$ имеет порядок n ;
- 2) $\psi(a_i L) \neq vL$ для любого автоморфизма $\psi: B(m, n)/L \rightarrow B(m, n)/L$.

Отметим, что лемма 1 является усилением леммы 2.3 из [26].

ЛЕММА 2. Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число и φ – произвольный M -нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$. Тогда для каждого базиса $\{a_1, a_2, \dots\}$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга m существует такое целое число t , что $\varphi(a_i)$ сопряжен с a_i^t для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего убедимся в том, что для любого i элемент $\varphi(a_i)$ сопряжен в $B(m, n)$ некоторой степени элемента a_i . Доказывая от противного, предположим, что для некоторого j элемент $v = \varphi(a_j)$ не сопряжен в $B(m, n)$ никакой степени элемента a_j . Для данного автоморфизма φ построим простую факторгруппу $B(m, n)/L$ согласно лемме 1. Поскольку максимальная нормальная подгруппа L является φ -допустимой подгруппой группы $B(m, n)$, то автоморфизм φ естественным образом индуцирует некий автоморфизм $\psi: B(m, n)/L \rightarrow B(m, n)/L$. При этом, очевидно, имеет место

равенство $\psi(a_j L) = \varphi(a_j) L = v L$, что противоречит п. 2) леммы 1. Таким образом, мы доказали, что если φ – произвольный M -нормальный автоморфизм группы $B(m, n)$, то для любого базиса $\{a_1, a_2, \dots\}$ и для любого i существуют целое число t_i и элемент $b_i \in B(m, n)$ такие, что $\varphi(a_i) = b_i a_i^{t_i} b_i^{-1}$. Заметим, что если система порождающих $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ является базисом группы $B(m, n)$, то и система $\{a_1 a_2, a_2, a_3, \dots\}$ является базисом для $B(m, n)$. Поэтому для некоторого числа t и некоторого элемента $b \in B(m, n)$ имеет место $\varphi(a_1 a_2) = b(a_1 a_2)^t b^{-1}$. Отсюда следует, что

$$b_1 a_1^{t_1} b_1^{-1} \cdot b_2 a_2^{t_2} b_2^{-1} = b(a_1 a_2)^t b^{-1}.$$

Факторизуя группу $B(m, n)$ по коммутанту, из последнего равенства немедленно получаем $t_1 = t_2 = t$. Аналогичным образом доказывается, что $t_1 = t_i = t$ для любого i . Лемма доказана.

Исходя из леммы 2 зафиксируем целое число t такое, что $\varphi(a_i)$ сопряжен с a_i^t для любого i . Допустим, что $\varphi(a_i) = v_i^{-1} a_i^t v_i$, $i = 1, 2, \dots$. Умножая M -нормальный автоморфизм φ на внутренний автоморфизм $i_{v_1}: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ ($i_{v_1}(X) \Rightarrow v_1 X v_1^{-1}$), получим такой M -нормальный автоморфизм $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$, который удовлетворяет равенствам $\phi(a_1) = a_1^t$ и $\phi(a_i) = u_i^{-1} a_i^t u_i$ при $i > 1$, где $u_i = v_i v_1^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пару элементов $\{a, b\}$ свободной периодической группы $B(m, n)$ назовем *базисной*, если ее можно включить в какой-нибудь базис (т.е. в систему свободных порождающих) группы $B(m, n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ – M -нормальный автоморфизм и $\{a, b\}$ – базисная пара такие, что $\phi(a) = a^t$, $\phi(b) = u^{-1} b^t u$ для некоторого целого $|t| \leq \frac{n-1}{2}$. Тогда $t = 1$ и $u = b^l a^x$ для некоторых целых чисел x, l .

Сначала покажем, что из предложения 1 следует теорема 1.

Пусть $a_1, a_2, \dots$ – произвольный базис группы $B(m, n)$. В силу леммы 2 существует целое число t такое, что $\phi(a_1) = a_1^t$ и при $i > 1$ имеют место равенства $\phi(a_i) = u_i^{-1} a_i^t u_i$ для некоторых элементов u_i .

В случае $m = 2$ получаем $\phi(a_1) = a_1^t$ и $\phi(a_2) = u_2^{-1} a_2^t u_2$, где $\{a_1, a_2\}$ – базисная пара группы $B(m, n)$. Тогда согласно предложению 1 имеем $t = 1$ и $u_2 = a_2^l a_1^x$, что, очевидно, означает, что ϕ совпадает с внутренним автоморфизмом $i_{a_1^{-x}}$.

Пусть $m > 2$. Понятно, что тогда система $a_1, a_2 a_3, a_3, \dots$ также является базисом группы $B(m, n)$. По лемме 2 для некоторого v имеем $\phi(a_2 a_3) = v^{-1} (a_2 a_3)^t v$. Ясно, что каждая из пар $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_2 a_3\}$ является базисной парой. Применяя предложение 1, получаем, что $t = 1$, $u_2 = a_2^l a_1^x$, $u_3 = a_3^p a_1^y$, $v = (a_2 a_3)^s a_1^z$ для некоторых целых $0 \leq l, p, s, x, y, z < n$. Поскольку $\phi(a_2 a_3) = \phi(a_2) \phi(a_3)$, то

$$a_1^{-z} (a_2 a_3) a_1^z = a_1^{-x} a_2 a_1^x a_1^{-y} a_3 a_1^y.$$

Каждое соотношение между порождающими $a_1, a_2, a_3, \dots$ является тождеством в $B(m, n)$, поэтому из последнего равенства получаем $a_1^{-z} a_2 a_1^z = a_1^{-x} a_2 a_1^x$ и $a_1^{-z} a_3 a_1^z = a_1^{-y} a_3 a_1^y$. По той же причине из полученных равенств следует, что элементы a_1^{z-x} и a_1^{z-y} принадлежат центру группы $B(m, n)$. Поскольку согласно [1, гл. VI, теорема 3.3] центр группы $B(m, n)$ тривиален, окончательно получаем, что $z = x = y$.

Тем самым, $\phi(a_1) = a_1$, $\phi(a_2) = a_1^{-x} a_2 a_1^x$, $\phi(a_3) = a_1^{-x} a_3 a_1^x$. Точно так же можно показать, что $\phi(a_i) = a_1^{-x} a_i a_1^x$ для любого $i > 3$. Это означает, что ϕ совпадает с внутренним автоморфизмом $i_{a_1^{-x}}$.

Таким образом, теорема 1 следует из предложения 1. Доказательство предложения 1 приведем в § 4.

§ 3. Два класса простых групп

При доказательстве предложения 1 нам понадобятся факторгруппы свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, построенные в работе [27], а также некоторые их модификации. С помощью этих групп мы выберем способствующие доказательству предложения 1 нормальные подгруппы.

Как известно, для каждого нечетного числа $n \geq 1003$ в [27] построена бесконечная 2-порожденная группа Γ , каждая максимальная подгруппа которой – циклическая группа порядка n . Напомним ее определение. В дальнейшем мы будем использовать обозначения и терминологию из монографии [1] и работы [27].

Для простоты будем обозначать порождающие a_1 и a_2 через a и b соответственно. Пусть $B(m, n, 0)$ – свободная группа ранга m с порождающими $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3, \dots$. Фиксируем нечетное число $n \geq 1003$ и для всякого натурального $\beta > 0$ через $B(m, n, \beta)$ обозначим группу с теми же образующими и системой определяющих соотношений $\{A^n = 1, \text{ где } A \in \bigcup_{i \leq \beta} \mathcal{E}_i\}$ (см. [1, гл. VI, § 2, п. 2]).

При $\alpha = 0, 1, 2$ полагаем $\Gamma_\alpha \equiv B(m, n, \alpha)$.

Предположим, что $\alpha > 2$ и группы Γ_δ при $\delta < \alpha$ уже определены. Пусть Ψ_α – множество всех элементарных периодов C ранга $\alpha - 1$, удовлетворяющих соотношению

$$C \equiv^2 A^{-d} Z^{-1} B^{-d} Z A^d Z^{-1} A^d Z, \quad (1)$$

где A и B – минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-2}$, $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 2$, $d = 191$ (см. [27, § 1]). Подмножество $\bar{\Psi}_\alpha \subset \Psi_\alpha$ выбираем так, чтобы каждый элемент $C \in \Psi_\alpha$ был сопряжен в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ одному и только одному слову D такому, что $D \in \bar{\Psi}_\alpha$ или $D^{-1} \in \bar{\Psi}_\alpha$. Это подмножество $\bar{\Psi}_\alpha$ можно выбирать по-разному, чем мы будем пользоваться в дальнейшем.

В работе [27] через Φ_α обозначено множество слов, содержащее для каждого периода $C \in \bar{\Psi}_\alpha$ и элементарного периода A ранга $\gamma \leq \alpha - 2$, участвующих в соотношении (1), ровно два слова: $C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200} a$ и $C^{300} A C^{300} A^2 \dots A^{n-1} C^{300} b$. В отличие от [27] здесь мы через Φ_α обозначим множество слов, содержащее для каждого периода $C \in \bar{\Psi}_\alpha$ и фиксированного элементарного периода A ранга $\gamma \leq \alpha - 2$, участвующих в соотношении (1), только два слова:

$$C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200} x_C, \quad (2)$$

$$C^{300} A C^{300} A^2 \dots A^{n-1} C^{300} y_C, \quad (3)$$

где элементы x_C и y_C выбираются так, что один из них равен a , а другой равен b . Очевидно, для выбора пары (x_C, y_C) для каждого C имеются лишь две возможности: (a, b) и (b, a) . Если не указана конкретная пара, то она выбирается для данного C произвольным образом. Далее мы укажем конкретные значения некоторых пар (x_C, y_C) (см. определения множеств $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$).

Рассматриваются группы

$$\Gamma_\alpha = \left\langle a_1, a_2, \dots \mid R^n = 1, F = 1, R \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{E}_\beta, F \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \Phi_\beta \right\rangle,$$

$$\Gamma = \left\langle a_1, a_2, \dots \mid R^n = 1, F = 1, R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathcal{E}_\beta, F \in \bigcup_{\beta \geq 3} \Phi_\beta \right\rangle.$$

Через $\mathcal{K}$ обозначим класс всех групп Γ , которые получаются описанным выше способом при различных выборах подмножеств $\bar{\Psi}_\alpha \subset \Psi_\alpha$ и элементов x_C, y_C .

Согласно основному результату работы [27] справедлива

ЛЕММА 3. *Каждая группа $\Gamma \in \mathcal{K}$ является бесконечной простой группой, порожденной элементами a и b , всякая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n .*

Поскольку каждая группа $\Gamma \in \mathcal{K}$ проста и в ней выполняется тождество $x^n = 1$, для некоторой максимальной нормальной подгруппы N группы $B(m, n)$ имеем $\Gamma = B(m, n)/N$. Чтобы получить нужные нам максимальные нормальные подгруппы, выделим два класса $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$ групп. Для этого будем налагать дополнительные условия на множество $\bar{\Psi}_3$.

ЛЕММА 4. *В группе $B(2, n, 1)$ коммутатор $[a^d, (aba^{-1}b^2)^d]$ не сопряжен с коммутаторами $[a^{-d}, (a^{-1}b^{-1}ab^{-2})^d]$, $[a^{-d}, (a^{-1}b^{-1}ab^{-2})^d]^{-1}$. Более того, несократимые формы указанных коммутаторов являются элементарными периодами ранга 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что коммутаторы $[a^d, (aba^{-1}b^2)^d]$ и $[a^{-d}, (a^{-1}b^{-1}ab^{-2})^d]$ сопряжены в ранге 1. Пусть G и D – несократимые слова, равные в ранге 0 коммутаторам $[a^d, (aba^{-1}b^2)^d]$ и $[a^{-d}, (a^{-1}b^{-1}ab^{-2})^d]$ соответственно. По определению слов G и D имеем

$$G \equiv a^{-d} \cdot (b^{-2}ab^{-1}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-2}ab^{-1}) \cdot a^d \cdot (ba^{-1}b^2a)^{d-1} \cdot (ba^{-1}b^2), \quad (4)$$

$$D \equiv a^d \cdot (b^2a^{-1}ba)^{d-1} \cdot (b^2a^{-1}b) \cdot a^{-d} \cdot (b^{-1}ab^{-2}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-1}ab^{-2}) \quad (5)$$

(запись $X \equiv Y$ означает графическое равенство слов X и Y).

Прежде всего, легко убедиться в том, что любое нормальное порождающее вхождение W ранга 2 в любое целое слово ранга 2 с периодом G (или D) при $l_{2,G}(W) \geq 9$ (или $l_{2,D}(W) \geq 9$) имеет плотность 4 в ранге 2 относительно произвольного минимального периода B ранга 2. Следовательно, периоды G и D являются элементарными периодами ранга 2. Выберем нормальное порождающее вхождение ранга 2 вида

$$G^{10}G_1 * a^{-d} \cdot (b^{-2}ab^{-1}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-2}ab^{-1}) \cdot a^d \cdot (ba^{-1}b^2a)^{d-1} \cdot (ba^{-1}b^2) \cdot a^{-d} * G_2G^{18}$$

в слово G^{30} . Если периоды E и D сопряжены в ранге 1, то согласно [27, лемма 2.7] можно найти взаимно нормированное с указанным вхождением в ранге 1 порождающее вхождение

$$R * a^{-d} \cdot (b^{-2}ab^{-1}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-2}ab^{-1}) \cdot a^d \cdot (ba^{-1}b^2a)^{d-1} \cdot (ba^{-1}b^2) \cdot a^{-d} * S$$

в некоторое слово $Y \in \text{Цел}(X, 2, D)$.

Однако прямая проверка показывает, что с помощью поворотов ранга 1 мы в слове D^n не получим подслово вида

$$a^{-d} \cdot (b^{-2}ab^{-1}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-2}ab^{-1}) \cdot a^d \cdot (ba^{-1}b^2a)^{d-1} \cdot (ba^{-1}b^2) \cdot a^{-d},$$

чем и опровергается наше предположение.

Аналогично опровергается предположение сопряженности коммутаторов

$$\begin{aligned} G &\equiv a^{-d} \cdot (b^{-2}ab^{-1}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-2}ab^{-1}) \cdot a^d \cdot (ba^{-1}b^2a)^{d-1} \cdot (ba^{-1}b^2), \\ D &\equiv (b^2a^{-1}ba)^{d-1} \cdot (b^2a^{-1}b) \cdot a^d \cdot (b^{-1}ab^{-2}a^{-1})^{d-1} \cdot (b^{-1}ab^{-2}) \cdot a^{-d}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь обозначим через $\mathcal{K}_1$ множество всех тех групп $\Gamma \in \mathcal{K}$, для которых $x_C \Rightarrow a$ и $y_C \Rightarrow b$ в соотношениях (2), (3), и множество $\bar{\Psi}_3$ в определении группы Γ выбрано так, что $G, D \in \bar{\Psi}_3$, где G и D – несократимые формы коммутаторов $[a^d, (aba^{-1}b^2)^d]$ и $[a^{-d}, (a^{-1}b^{-1}ab^{-2})^d]$ соответственно. Для слов G и D справедливы равенства (4) и (5). Лемма 4 обеспечивает возможность включения периодов G и D в $\bar{\Psi}_3$. Из этого в силу соотношений (2), (3) следует

ЛЕММА 5. В каждой группе $\Gamma \in \mathcal{K}_1$ выполняются соотношения

$$G^{200}aG^{200}a^2 \dots a^{n-1}G^{200}a = 1, \quad D^{200}a^{-1}D^{200}a^{-2} \dots a^{-(n-1)}D^{200}a = 1.$$

Для построения нужного нам второго класса групп понадобится следующая

ЛЕММА 6 [25, лемма 4]. При $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$ каждый из коммутаторов

$$[a^k, b^{-9}a^kb^9] \equiv a^{-k}b^{-9}a^{-k}b^9a^kb^{-9}a^kb^9$$

является минимизированным элементарным периодом ранга 2.

Поскольку очевидно, что a – минимизированный элементарный период ранга 1 и $b^9 \in \mathcal{M}_1$, то согласно лемме 6 и определению множества $\bar{\Psi}_3$ имеем $[a^d, b^{-9}a^db^9] \in \bar{\Psi}_3$. Обозначим через $\mathcal{K}_2$ множество всех тех групп $\Gamma \in \mathcal{K}$, для которых выполняются дополнительные условия:

1) множество $\bar{\Psi}_3$ в определении группы Γ выбрано так, что $[a^d, b^{-9}a^db^9] \in \bar{\Psi}_3$;
2) для периода $C \Rightarrow [a^d, b^{-9}a^db^9] \in \bar{\Psi}_3$ элементы x_C и y_C в соотношениях (2), (3) выбраны следующим образом: $x_C \Rightarrow b, y_C \Rightarrow a$;

3) для всех остальных периодов $C \in \bar{\Psi}_\alpha$, $C^{\alpha-2} [a^d, b^{-9}a^db^9]$, элементы x_C и y_C в соотношениях (2), (3) выбраны следующим образом: $x_C \Rightarrow a, y_C \Rightarrow b$.

Из этих условий непосредственно следует

ЛЕММА 7. В каждой группе $\Gamma \in \mathcal{K}_2$ выполняются соотношения

$$[a^d, b^{-9}a^db^9]^{200}a[a^d, b^{-9}a^db^9]^{200}a^2 \dots a^{(n-1)}[a, b^{-9}ab^9]^{200}b = 1, \quad (6)$$

$$[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a^2 \dots a^{(n-1)}[a, b^{-9}ab^9]^{300}a = 1, \quad (7)$$

$$C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}a = 1, \quad C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}b = 1$$

для каждого периода $C \in \bar{\Psi}_\alpha$, $C^{\alpha-2} [a^d, b^{-9}a^db^9]$.

ЛЕММА 8. Если в группе $\Gamma \in \mathcal{K}_2$ выполняется соотношение

$$F \Rightarrow [a^k, b^{-9}a^kb^9]^s a^t [a^k, b^{-9}a^kb^9]^s a^{2t} \dots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-9}a^kb^9]^s a^t = 1,$$

где $1 \leq |k|$, $|t| \leq \frac{n-1}{2}$, $k \equiv dt \pmod{n}$ и $q+2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} - 2$, то $k = \pm d$ и $t = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \stackrel{\Gamma}{=} 1$. Согласно лемме 16 (см. далее) слово F сопряжено в группе $\Gamma_1 \Rightarrow B(m, n, 1)$ некоторому слову $H \in \mathcal{M}_2$ вида $H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \dots u_{n-1} D^r u_n$, где $D \equiv [a^k, b^{-9}a^kb^9]$ – элементарный период ранга 2, $r = s - 2$. В силу [1, гл. IV, § 1, п. 16] слово H не является приведенным словом в некотором ранге $\alpha > 2$. Тогда согласно [1, гл. IV, § 1, п. 19] и [1, гл. II, § 1, п. 11] в H входит или некоторая нормированная элементарная 9-степень ранга 3, или некоторая нормированная квазиэлементарная 9-степень ранга 3. Первое невозможно в силу леммы 18.

Пусть $P * E * Q$ – вхождение в слово H , а $R * E * S$ – нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3, входящая в слово $Y \stackrel{2}{\sim} H_1^s$, причем имеет место $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$, где $H_1 \in \mathcal{H}_3$ и

$$H_1 \equiv D_1^{r'} u_1' D_1^{r'} u_2' \dots u_{n-1}' D_1^{r'} u_n'.$$

Применив лемму 17, получим, что элементарный период $D \equiv [a^k, b^{-9}a^kb^9]$ сопряжен в ранге 1 или с элементарным периодом D_1 , или с его обратным. В свою очередь, согласно [27, лемма 4.1] период D_1 сопряжен в ранге 1 с некоторым периодом $C \stackrel{1}{=} [A^d, Z^{-1}B^dZ]$ ранга 2, причем $C \in \Psi_3$, A и B – минимизированные элементарные периоды ранга 1 и $Z \in \mathcal{M}_1$. Отсюда, пользуясь леммой 15, получаем $k = \pm d$, и поскольку $k \equiv dt \pmod{n}$, то $t = \pm 1$. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство предложения 1

ЛЕММА 9. Пусть $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ – автоморфизм и a, b – базисная пара такие, что $\phi(a) = a^{-1}$, $\phi(b) = b^{-1}$. Тогда ϕ не является M -нормальным автоморфизмом. В частности, любой автоморфизм $\psi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$, удовлетворяющий соотношениям $\psi(a) = a^{-1}$, $\psi(b) = a^s b^{-1} a^{-s}$ для некоторого целого s , не является M -нормальным автоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементарные периоды G и D , определенные равенствами (4), (5) соответственно. Из определения автоморфизма ϕ сразу следует равенство $\phi(G) = D$. Пусть $\Gamma \in \mathcal{K}_1$ и N – такая максимальная нормальная подгруппа группы $B(m, n)$, что $\Gamma = B(m, n)/N$. Согласно лемме 4 имеем

$$G^{200}aG^{200}a^2 \dots a^{n-1}G^{200}a \in N, \quad D^{200}a^{-1}D^{200}a^{-2} \dots a^{-(n-1)}D^{200}a \in N. \quad (8)$$

Если ϕ – M -нормальный автоморфизм, то

$$\phi(G^{200}aG^{200}a^2 \dots a^{n-1}G^{200}a) = D^{200}a^{-1}D^{200}a^{-2} \dots a^{-(n-1)}D^{200}a^{-1} \in N.$$

Используя второе из соотношений (8), получаем $a^2 \in N$, но тогда имеем $a^2 \stackrel{\Gamma}{=} 1$ и $a^n \stackrel{\Gamma}{=} 1$. Отсюда в силу нечетности n следует $a \stackrel{\Gamma}{=} 1$, что противоречит лемме 3. Значит, ϕ не является M -нормальным автоморфизмом.

Чтобы доказать второе утверждение леммы, остается заметить, что если ϕ не является M -нормальным автоморфизмом, то и автоморфизм $i_{a^s} \circ \phi = \psi$ не является M -нормальным автоморфизмом, где i_{a^s} – внутренний автоморфизм. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ – M -нормальный автоморфизм и a, b – базисная пара такие, что $\phi(a) = a^t$, $\phi(b) = u^{-1}b^tu$, $|t| \leq \frac{n-1}{2}$. Фиксируем элемент Z такой, что $\phi(Z) = b^9$. Тогда если коммутаторы $[a^d, Z^{-1}a^dZ]$ и $[a^d, b^{-9}a^db^9]$ сопряжены в группе $B(m, n)$, то $Z = a^pb^9a^s$, $u = b^la^r$ для некоторых целых чисел p, s, l, r и $t = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сопряженности коммутаторов $[a^d, Z^{-1}a^dZ]$ и $[a^d, b^{-9}a^db^9]$ согласно лемме 14 следует, что для некоторых целых чисел r и s или $Z^{-1}a^{-d}Z \stackrel{B(m,n)}{=} a^rb^{-9}a^{-d}b^9a^s$, или $Za^{-d}Z^{-1} \stackrel{B(m,n)}{=} a^rb^{-9}a^db^9a^s$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

А. Если $Za^{-d}Z^{-1} \stackrel{B(m,n)}{=} a^rb^{-9}a^db^9a^s$, то

$$a^sZa^{-d}Z^{-1}a^{-s} \stackrel{B(m,n)}{=} a^{s+r}b^{-9}a^db^9.$$

Очевидно, можно считать, что $|s+r| \leq \frac{n-1}{2}$. Если $s+r \not\equiv 0 \pmod{n}$, то слово $a^{s+r}b^{-9}a^{-d}b^9$ является элементарным периодом ранга 2. Получается, что элементарный период $a^{s+r}b^9a^{-d}b^{-9}$ ранга 2 сопряжен со степенью элементарного периода a ранга 1, а это противоречит [27, лемма 6.6]. Если $s+r \equiv 0 \pmod{n}$, то получается, что сопряжены a^{-d} и a^d , а это противоречит лемме 13. Значит, рассматриваемый случай А невозможен.

Б. Пусть $Z^{-1}a^{-d}Z \stackrel{B(m,n)}{=} a^rb^{-9}a^{-d}b^9a^s$. Повторив рассуждения из случая А, получим, что $s+r \equiv 0 \pmod{n}$ и $a^sZ^{-1}a^{-d}Za^{-s} \stackrel{B(m,n)}{=} b^{-9}a^{-d}b^9$. Это означает, что элемент $b^9a^sZ^{-1}$ принадлежит централизатору элемента a^{-d} в группе $B(m, n)$. Согласно [1, гл. VI, теорема 3.2] получаем, что $Z = a^pb^9a^s$ для некоторого целого p . Первое утверждение леммы доказано.

Докажем, что $u = b^la^r$ и $t = 1$. Применив к обеим частям равенства $Z = a^pb^9a^s$ автоморфизм ϕ , получим $b^9 = a^{pt}u^{-1}b^{9t}ua^{st}$. Теперь, применив к последнему равенству гомоморфизм $\alpha: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$, заданный на порождающих равенствами $\alpha(a) = a$ и $\alpha(b) = 1$, получаем $a^{pt+st} = 1$. Поскольку $(t, n) = 1$, то $p \equiv -s \pmod{n}$. Таким образом, $a^{pt}u^{-1}$ принадлежит нормализатору элемента b^9 , из чего согласно лемме 13 следует, что $u = b^la^{pt}$ для некоторого целого l . Остается показать, что $t = 1$.

Заметим, что в силу равенств $b^9 = a^{pt}u^{-1}b^{9t}ua^{-pt}$ и $u = b^la^{pt}$ имеем $b^9 = b^{9t}$. Поэтому

$$\phi([a^d, b^{-9}a^db^9]) \stackrel{B(m,n)}{=} a^{-pt}[a^k, b^{-9}a^kb^9]a^{pt}$$

для некоторого $k \equiv dt \pmod{n}$, $(k, n) = 1$, $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$.

Пусть Γ – одна из групп класса $\mathcal{K}_2$ и $\Gamma = B(m, n)/N$. К левой части соотношения (7) применим M -нормальный автоморфизм ϕ . Далее, сопрягая полученный элемент элементом a^{pt} , имеем

$$[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{300}a^t[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{300}a^{2t} \dots a^{(n-1)t}[a^k, b^{-9}a^{-k}b^9]^{300}a^t \in N.$$

Отсюда согласно лемме 8 следует, что $k = \pm d$ и $t = \pm 1$. Сопоставляя равенство $b^9 = b^{9t}$ с $t = \pm 1$ и учитывая, что порядок элемента b в $B(m, n)$ равен n , немедленно получаем $t = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ – M -нормальный автоморфизм и a, b – базисная пара такие, что $\phi(a) = a^t$, $\phi(b) = u^{-1}b^t u$ и $\psi(Z) = b^9$. Тогда коммутатор $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ не сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[a^d, b^{-9}a^d b^9]^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывая от противного, предположим, что коммутатор $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[a^d, b^{-9}a^d b^9]^{-1}$. Поскольку $[a^d, b^{-9}a^d b^9]^{-1} = b^{-9}[a^d, b^9a^d b^{-9}]b^9$, то в $B(m, n)$ сопряжены коммутаторы $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ и $[a^d, b^9a^d b^{-9}]$. Повторив рассуждения из доказательства леммы 10, мы сначала получим равенство $Z = a^p b^{-9}a^s$ для некоторых целых p, s . Далее выведем, что $u = b^l a^{pt}$, $b^9 = b^{-9t}$ и $t \equiv \pm 1 \pmod{n}$, из чего следует, что $t \equiv -1 \pmod{n}$, но это противоречит лемме 9.

ЛЕММА 12. Пусть $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ – M -нормальный автоморфизм и a, b – базисная пара такие, что $\phi(a) = a^t$, $\phi(b) = u^{-1}b^t u$. Фиксируем элемент Z такой, что $\phi(Z) = b^9$. Тогда коммутатор $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[a^d, b^{-9}a^d b^9]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму будем доказывать от противного. Пусть коммутатор $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ не сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[a^d, b^{-9}a^d b^9]$.

Поскольку ϕ – автоморфизм, то для простого числа $d = 191$ найдется целое число k такое, что $\phi(a^d) = a^k$, $k \equiv dt \pmod{n}$, $(k, n) = 1$ и $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$. Очевидно, можно предположить, что $|t| \leq \frac{n-1}{2}$. Так как $\phi(Z) = b^9$, то имеет место равенство

$$\phi([a^d, Z^{-1}a^d Z]) \stackrel{B(m, n)}{=} [a^k, b^{-9}a^k b^9].$$

Далее, в силу [1, гл. VI, §2, п. 4; гл. IV, §3, п. 12] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geq 1$. Выберем приведенную форму G_1 коммутатора $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ согласно [27, лемма 3.2]. По определению приведенной формы имеем $G_1 \stackrel{0}{=} w[a^d, Z^{-1}a^d Z]w^{-1}$ для некоторого $w \equiv a^j$ (см. [27, соотношения (3.6)]). В силу [27, лемма 7.2] получаем, что G_1 – элементарный период некоторого ранга $\delta \geq 2$ для каждой из групп $\Gamma \in \mathcal{K}$. Согласно нашему предположению о несопряженности в группе $B(m, n)$ коммутаторов $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ и $[a^d, b^{-9}a^d b^9]$ и лемме 11 элементы $[a^d, Z^{-1}a^d Z]$ и $[a^d, b^{-9}a^d b^9]^{\pm 1}$ не сопряжены в группе $B(m, n, 1)$. Отсюда следует, что существуют такие группы из класса $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$, для которых выполнено включение $G_1 \in \overline{\Psi}_{\delta+1}$. Пусть Γ^+ – одна из таких групп.

По лемме 7 в группе Γ^+ выполняются как соотношения (6), (7), так и следующие соотношения:

$$G_1^{200} a G_1^{200} a^2 \dots a^{n-1} G_1^{200} a = 1, \quad (9)$$

$$G_1^{300} a G_1^{300} a^2 \dots a^{n-1} G_1^{300} b = 1. \quad (10)$$

Поскольку $G_1 \stackrel{0}{=} a^j [a^d, Z^{-1}a^d Z] a^{-j}$, то $\phi(G_1) \stackrel{B(m, n)}{=} a^{jt} [a^k, b^{-9}a^k b^9] a^{-jt}$. Так как в группе Γ^+ выполняется тождество $x^n = 1$, то для некоторой нормальной подгруппы N_1 группы $B(m, n)$ имеем $\Gamma^+ = B(m, n)/N_1$.

Применив M -нормальный автоморфизм ϕ к левой части соотношения (9), получим

$$(a^{jt} [a^k, b^{-9}a^k b^9] a^{-jt})^{200} \times a^t (a^{jt} [a^k, b^{-9}a^k b^9] a^{-jt})^{200} \dots a^{(n-1)t} (a^{jt} [a^k, b^{-9}a^k b^9] a^{-jt})^{200} a^t \in N_1.$$

Следовательно,

$$[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{200}a^t[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{200} \dots a^{(n-1)t}[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{200}a^t \in N_1,$$

т. е.

$$[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{200}a^t[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{200}a^{2t} \dots a^{(n-1)t}[a^k, b^{-9}a^kb^9]^{200}a^t \stackrel{\Gamma^+}{=} 1.$$

Из последнего равенства в силу леммы 8 выводим, что $k = \pm d$ и $t = \pm 1$.

При $t = 1$ имеем $\phi(a) = a$ и $\phi(G_1) \stackrel{B(m,n)}{=} a^j[a^d, b^{-9}a^db^9]a^{-j}$. Применяв автоморфизм ϕ к левой части соотношения (10), получим

$$(a^j[a^d, b^{-9}a^db^9]a^{-j})^{300} \times a(a^j[a^d, b^{-9}a^db^9]a^{-j})^{300} \dots a^{n-1}(a^j[a^d, b^{-9}a^db^9]a^{-j})^{300}u^{-1}bu \in N_1.$$

Поэтому имеем

$$[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a^2 \dots a^{n-1}[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a^{-j}u^{-1}bua^j \stackrel{\Gamma^+}{=} 1.$$

Используя последнее равенство и соотношение (7), выводим, что в группе Γ^+ выполняется равенство $a = a^{-j}u^{-1}bua^j$, т. е. $a \stackrel{\Gamma^+}{=} u^{-1}bu$. Следовательно, $\phi(a) \stackrel{\Gamma^+}{=} \phi(b)$ и, значит, $\phi(a^{-1}b) \in N_1$. Поскольку $\phi(N_1) = N_1$, получаем соотношение $a^{-1}b \in N_1$, из которого следует, что Γ^+ – конечная циклическая группа, а это противоречит лемме 3.

Теперь предположим, что $t = -1$, и докажем, что этот случай тоже приведет к противоречию.

Поскольку в свободной группе коммутаторы $[x, y]$ и $[x^{-1}, y^{-1}]$ сопряжены, то согласно предположению о несопряженности в группе $B(m, n)$ коммутаторов $[a^d, Z^{-1}a^dZ]$ и $[a^d, b^{-9}a^db^9]$ и лемме 11 в $B(m, n)$ не сопряжены $[a^d, Z^{-1}a^dZ]$ и $[a^{-d}, b^{-9}a^{-d}b^9]^{\pm 1}$. Как и в предыдущем случае, рассмотрим некоторую приведенную форму G_2 коммутатора $[a^{-d}, Z^{-1}a^{-d}Z]$ и через Γ^- обозначим какую-нибудь группу из класса $\mathcal{K}_2$, для которой $G_2 \in \overline{\Psi}_{\beta+1}$ при некотором β . Тогда по определению приведенной формы имеем $G_2 \stackrel{0}{=} a^i[a^{-d}, Z^{-1}a^{-d}Z]a^{-i}$ для некоторого целого i . Из определения группы Γ^- теперь следует, что в Γ^- выполняются соотношения

$$[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a^2 \dots a^{(n-1)}[a^d, b^{-9}a^db^9]^{300}a = 1, \quad (11)$$

$$G_2^{300}a^{-1}G_2^{300}a^{-2} \dots a^{-(n-1)}G_2^{300}b = 1. \quad (12)$$

Пусть $\Gamma^- = B(m, n)/N_2$, где N_2 – нормальная подгруппа группы $B(m, n)$. Поскольку $t = -1$ и $\phi(Z) = b^9$, то $\phi(a) = a^{-1}$ и $\phi(G_2) \stackrel{B(m,n)}{=} a^{-i}[a^d, b^{-9}a^db^9]a^i$. Применяв автоморфизм ϕ к левой части соотношения (12), получим соотношение

$$(a^{-i}[a^d, b^9a^db^{-9}]a^i)^{300} \times a(a^{-i}[a^d, b^9a^db^{-9}]a^i)^{300}a^2 \dots a^{n-1}(a^{-i}[a^d, b^9a^db^{-9}]a^i)^{300}ub^{-1}u^{-1} \in N_2,$$

сопоставляя которое с соотношением (11), заключаем, что $a^iub^{-1}u^{-1}a^{-i} \stackrel{\Gamma^-}{=} a$.

Отсюда следует равенство $\phi(b^{-1}) \stackrel{\Gamma^-}{=} \phi(a)$, и так как $\phi(N_2) = N_2$, то $b^{-1} \stackrel{\Gamma^-}{=} a$. Последнее также противоречит лемме 3. Лемма доказана.

Теперь отметим, что предложение 1 немедленно следует из лемм 12, 10. Действительно, пусть $\phi: B(m, n) \rightarrow B(m, n)$ – M -нормальный автоморфизм и a, b – базисная пара такие, что $\phi(a) = a^t$, $\phi(b) = u^{-1}b^tu$, и $\phi(Z) = b^9$. Тогда в силу леммы 12 коммутатор $[a^d, Z^{-1}a^dZ]$ сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[a^d, b^{-9}a^db^9]$. Применяя лемму 10, получаем, что $u = b^la^r$ для некоторых целых чисел l, r и $t = 1$.

§ 5. Вспомогательные леммы о периодических группах

В настоящем параграфе собраны некоторые леммы из работы [25], касающиеся свободных периодических групп и их факторгрупп, которые были использованы в ходе доказательства теоремы 1. Леммы 13–18 носят общий характер и их доказательства остаются в силе не только для групп Γ_α и Γ из [25], но и для групп $\Gamma_\alpha, \Gamma \in \mathcal{K}$, построенных в [27]–[29].

ЛЕММА 13 [25, лемма 2]. Если $X^\delta \stackrel{\Gamma}{=} TX^\varepsilon T^{-1}$, то подгруппа $\langle X^\varepsilon, X^\delta, T \rangle_\Gamma$ содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n .

ЛЕММА 14 [25, лемма 3]. Если E – элементарный период ранга γ , $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geq \gamma$, $[E^d, Z^{-1}E^dZ] \neq 1$ и коммутаторы $[E^d, Z^{-1}E^dZ]$ и $[E^d, (Z')^{-1}E^dZ']$ сопряжены в группе Γ_α (или в группе $B(m, n, \alpha)$), где $\alpha \geq \gamma$, то для некоторых целых чисел u, v справедливо или $(Z')^{-1}E^{-d}Z' = E^uZ^{-1}E^{-d}ZE^v$, или $Z'E^{-d}(Z')^{-1} = E^uZ^{-1}E^dZE^v$ в группе Γ (в группе $B(m, n)$).

ЛЕММА 15 [25, лемма 5]. Пусть A и B – минимизированные элементарные периоды рангов соответственно γ и β , $\gamma \leq \beta$, и $Z \in \mathcal{M}_\beta$. Тогда если коммутатор $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]$ сопряжен в группе $B(m, n)$ с коммутатором $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$, где $\delta = \pm 1$ и $1 \leq |k| \leq \frac{n-1}{2}$, то $k = \pm d$, $A \equiv a^\varepsilon$, $B \equiv a^\mu$, где $\varepsilon, \mu = \pm 1$ и слова $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]$ и $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ сопряжены в группе $B(m, n, 1)$. Аналогичное заключение верно и при сопряженности коммутаторов $[a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^{-1}$ и $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$.

ЛЕММА 16 [25, лемма 7]. Пусть

$$F \equiv [a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^s a^t [a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^s a^{2t} \cdots a^{(n-1)t} [a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]^s a^t,$$

где $1 \leq |k|, |t| \leq \frac{n-1}{2}$, $\delta = \pm 1$ и $(t, n) = 1$, $q+2 \leq s \leq \frac{n-1}{2}-2$. Тогда F сопряжено в группе $\Gamma_1 \equiv B(m, n, 1)$ некоторому слову $H \in \mathcal{M}_2$ вида

$$H \equiv D^r u_1 D^r u_2 \cdots u_{n-1} D^r u_n, \quad (13)$$

где $D \equiv [a^k, b^{-9\delta}a^kb^{9\delta}]$ – элементарный период ранга 2, $r = s - 2$.

ЛЕММА 17 [29, лемма 7]. Пусть $P * E * Q$ – вхождение в слово H , определенное равенством (13), $R * E * S$ – нормальная квазиэлементарная 9-степень ранга 3, входящая в слово $Y \stackrel{2}{\sim} H_1^s$, и имеет место $\text{ВзНорм}_2(P * E * Q, R * E * S)$, где $H_1 \in \mathcal{H}_3$ и

$$H_1 \equiv D_1^{r'} u_1' D_1^{r'} u_2' \cdots u_{n-1}' D_1^{r'} u_n'$$

согласно [27, равенство (4.1)]. Тогда элементарный период D сопряжен в ранге 1 или с элементарным периодом D_1 , или с его обратным.

ЛЕММА 18 [25, лемма 8]. В слово H , определенное соотношением (13), не входят нормированные элементарные 9-степени ранга 3.

§ 6. Доказательство теоремы 2

Пусть $G = \text{Aut}(B(m, n))$, $N = \text{Inn}(B(m, n))$ и $G > H \supset N$, причем порядок каждого элемента подгруппы H не превосходит n . Покажем, что тогда $H = N$, чем и будет доказана теорема 2.

Предположив обратное, т. е. что $H \neq N$, рассмотрим случай, когда H/N имеет простой порядок p .

Пусть факторгруппа H/N порождается смежным классом ϕN . Таким образом, $\phi \notin N$ и $\phi^p \in N$. Рассмотрим автоморфизм $\Phi: N \rightarrow N$, определенный формулой $\Phi(i_x) = i_{\phi(x)}$ для любого внутреннего автоморфизма $i_x \in N$. Предположим, что Φ является внутренним автоморфизмом группы N . Тогда для некоторого элемента $i_y \in N$ и для всех $i_x \in N$ имеет место равенство $\Phi(i_x) = i_y \circ i_x \circ i_y^{-1}$, т. е. $i_{\phi(x)} = i_{i_y(x)}$. Поскольку последовательность гомоморфизмов

$$0 \rightarrow B(m, n) \hookrightarrow \text{Aut}(B(m, n)) \twoheadrightarrow \text{Aut}(B(m, n))/\text{Inn}(B(m, n)) \rightarrow 0$$

является точной последовательностью, то для любого $x \in B(m, n)$ из равенства $i_{\phi(x)} = i_{i_y(x)}$ следует равенство $\phi(x) = i_y(x)$, но это противоречит условию $\phi \notin N$. Значит, наше предположение неверно, т. е. Φ не является внутренним автоморфизмом группы N . По теореме 1 тогда Φ не является M -нормальным автоморфизмом. Согласно следствию 2 существует такая нормальная подгруппа L группы N , что $\Phi(L) \neq L$ и N/L – неабелева простая группа, содержащая элементы порядка n . По выбору подгруппы L существует элемент $i_x \in L$ такой, что $\Phi(i_x) \notin L$, т. е. $i_{\phi(x)} = \phi \circ i_x \circ \phi^{-1} \notin L$. Это означает, что L не является нормальной подгруппой группы H .

Рассмотрим нормальную подгруппу $K = \bigcap_{\varphi \in H} \varphi L \varphi^{-1}$ группы H . Для завершения доказательства теоремы 2 воспользуемся следующим утверждением.

ЛЕММА 19 [26, леммы 2.1 и 2.2]. Пусть N – такая нормальная подгруппа группы H , что H/N – циклическая группа порядка p . Предположим также, что для некоторой нормальной в N , но не нормальной в H подгруппы L факторгруппа N/L – неабелева простая группа, содержащая элемент порядка n . Положим $K = \bigcap_{x \in H} x L x^{-1}$. Тогда произведение pn делит порядок некоторого элемента из факторгруппы H/K .

Все условия леммы 19 в нашем случае выполнены. Поэтому можем заключить, что в факторгруппе H/K содержится элемент порядка pn , что невозможно, так как по условию порядок каждого элемента подгруппы H не превосходит n . Полученное противоречие доказывает, что в факторгруппе H/N нет элементов простого порядка, в то время как H – периодическая группа. Следовательно, $H = N$.

Список литературы

1. С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975; англ. пер.: S. I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **95**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
2. П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 212–244; “II”, **32**:2 (1968), 251–524; “III”, **32**:3 (1968), 709–731; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “Infinite periodic groups. I”,

- Math. USSR-Izv.*, **2**:1 (1968), 209–236; “II”, **2**:2 (1968), 241–479; “III”, **2**:3 (1968), 665–685.
3. П. С. Новиков, С. И. Адян, “О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:5 (1968), 1176–1190; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adjan, “On Abelian subgroups and the conjugacy problem in free periodic groups of odd order”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:5 (1968), 1131–1144.
 4. С. И. Адян, “О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя”, *Сб. статей, посвященный 80-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова*, Тр. МИАН СССР, **112**, Наука, М., 1971, 64–72; англ. пер.: S. I. Adjan, “The subgroups of free periodic groups of odd exponent”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **112** (1971), 61–69.
 5. С. И. Адян, “Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами”, *УМН*, **32**:1 (1977), 3–15; англ. пер.: S. I. Adjan, “An axiomatic method of constructing groups with given properties”, *Russian Math. Surveys*, **32**:1 (1977), 1–14.
 6. С. И. Адян, “Исследования по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам”, *Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология*, Тр. МИАН СССР, **168**, Наука, М., 1984, 171–196; англ. пер.: S. I. Adyan, “Investigations on the Burnside problem and questions connected with it”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **168** (1986), 179–205.
 7. С. И. Адян, “Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, МИАН, М., 2003, 5–28.
 8. A. Lubotzky, “Normal automorphisms of free groups”, *J. Algebra*, **63**:2 (1980), 494–498.
 9. A. S.-T. Lue, “Normal automorphisms of free groups”, *J. Algebra*, **64**:1 (1980), 52–53.
 10. M. Jarden, “Normal automorphisms of free profinite groups”, *J. Algebra*, **62**:1 (1980), 118–123.
 11. M. Jarden, J. Ritter, “Normal automorphisms of absolute Galois groups of p -adic fields”, *Duke Math. J.*, **47**:1 (1980), 47–56.
 12. В. А. Романьков, “Нормальные автоморфизмы дискретных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **24**:4 (1983), 138–149; англ. пер.: V. A. Roman’kov, “Normal automorphisms of discrete groups”, *Siberian Math. J.*, **24**:4 (1983), 604–614.
 13. Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободной в многообразии $\mathcal{N}_2\mathcal{A}$ про- p -группы”, *Алгебра и логика*, **35**:3 (1996), 249–267; англ. пер.: Ch. Gupta, N. S. Romanovskii, “Normal automorphisms of a free pro- p -group in the variety $\mathcal{N}_2\mathcal{A}$ ”, *Algebra and Logic*, **35**:3 (1996), 139–148.
 14. Н. С. Романовский, “Нормальные автоморфизмы свободных разрешимых про- p -групп”, *Алгебра и логика*, **36**:4 (1997), 441–453; англ. пер.: N. S. Romanovskii, “Normal automorphisms of free solvable pro- p -groups”, *Algebra and Logic*, **36**:4 (1997), 257–263.
 15. G. Endimioni, “Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group”, *Q. J. Math.*, **53**:4 (2002), 397–402.
 16. O. Bogopolski, E. Kudryavtseva, H. Zieschang, “Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups”, *Math. Z.*, **247**:3 (2004), 595–609.
 17. М. В. Нецадим, “Свободное произведение групп не имеет внешних нормальных автоморфизмов”, *Алгебра и логика*, **35**:5 (1996), 562–566; англ. пер.: M. V. Neshchadim, “Free products of groups have no outer normal automorphisms”, *Algebra and Logic*, **35**:5 (1996), 316–318.
 18. A. Minasyan, D. Osin, “Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:11 (2010), 6079–6103.
 19. С. И. Адян, “Периодические произведения групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 3–21;

- англ. пер.: S. I. Adyan, "Periodic products of groups", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 1–19.
20. С. И. Адян, "О простоте периодических произведений групп", *Докл. АН СССР*, **241**:4 (1978), 745–748; англ. пер.: S. I. Adyan, "On the simplicity of periodic products of groups", *Soviet Math. Dokl.*, **19**:4 (1978), 910–913.
 21. Е. А. Cherepanov, "Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents", *Internat. J. Algebra Comput.*, **16**:5 (2006), 839–847.
 22. *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, Изд. 8, ред. В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чиркин, Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1982.
 23. С. И. Адян, "Нормальные подгруппы свободных периодических групп", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5 (1981), 931–947; англ. пер.: S. I. Adyan, "Normal subgroups of free periodic groups", *Math. USSR-Izv.*, **19**:2 (1982), 215–229.
 24. В. С. Атабекян, "О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$ ", *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 495–500; англ. пер.: V. S. Atabekyan, "On periodic groups of odd period $n \geq 1003$ ", *Math. Notes*, **82**:4 (2007), 443–447.
 25. В. С. Атабекян, "Нормализаторы свободных подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$ ", *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:1 (2009), 3–21; англ. пер.: V. S. Atabekyan, "The normalizers of free subgroups in free burnside groups of odd period $n \geq 1003$ ", *J. Math. Sci.*, **166**:6 (2010), 691–703.
 26. А. Yu. Ol'shanskii, "Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups", *Groups, rings, Lie and Hopf algebras* (St. John's, NF, 2001), *Math. Appl.*, **555**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 179–187.
 27. С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, "О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990; англ. пер.: S. I. Adyan, I. G. Lysenok, "On groups all of whose proper subgroups are finite cyclic", *Math. USSR-Izv.*, **39**:2 (1992), 905–957.
 28. В. С. Атабекян, "Группы Адяна–Лысёнка и (U)-свойство", *Изв. НАН Армении. Матем.*, **43**:5 (2007), 13–24; англ. пер.: V. S. Atabekyan, "Adian–Lisenok groups and (U) condition", *J. Contemp. Math. Anal.*, **43**:5 (2008), 265–273.
 29. В. С. Атабекян, "Не φ -допустимые нормальные подгруппы свободных бернсайдовых групп", *Изв. НАН Армении. Матем.*, **45**:2 (2010), 21–36; англ. пер.: V. S. Atabekyan, "Non- ϕ -admissible normal subgroups of free Burnside groups", *J. Contemp. Math. Anal.*, **45**:2 (2010), 112–122.

В. С. АТАБЕКЯН (V. S. АТАБЕКЯН)
 Ереванский государственный университет
 E-mail: avarujan@ysu.am

Поступило в редакцию
 10.11.2009