Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, О втором члене в формуле Вейля для спектра оператора Лапласа на двумерном торе и числе целых точек в спектральных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 139–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:35:39

УДК 517.984.5+511.338

Д. А. Попов

О втором члене в формуле Вейля для спектра оператора Лапласа на двумерном торе и числе целых точек в спектральных областях

На двумерном торе строятся метрики Лиувилля, для которых явно вычисляется асимптотика второго члена в формуле Вейля. Доказана неустойчивость второго члена в этой формуле относительно малых (в метрике C^1) деформаций метрики Лиувилля. Доказано отсутствие степенного понижения в оценке Хермандера на классе замкнутых многообразий с гладкой метрикой в случае интегрируемого геодезического потока и нулевой меры множества замкнутых геодезических в подпространстве единичных сфер кокасательного расслоения.

Библиография: 34 наименования.

Ключевые слова: оператор Лапласа, спектр, формула Вейля, целые точки, геодезический поток.

§ 1. Введение

Пусть M – гладкое компактное двумерное многообразие без края, снабженное гладкой римановой метрикой $\tilde{g}$, и $\Delta = \Delta(\tilde{g})$ – оператор Лапласа, построенный по метрике $\tilde{g}$ [1], [2]. Определенный на гладких функциях, этот оператор допускает расширение до самосопряженного отрицательно определенного оператора на $L^2(M)$ [3], [4], который мы также будем называть оператором Лапласа и обозначать через Δ . Спектр $\{\mu_i\}$, $0 \leq \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$, оператора $-\Delta$ дискретен. При этом собственные значения μ_i нумеруются так же, как собственные функции ψ_i ($\Delta\psi_i + \mu_i\psi_i = 0$), т. е. с учетом кратности. Пусть $N(t)$ – функция распределения собственных значений:

$$N(t) \equiv N(\tilde{g} | t) = \#\{i \in \mathbb{Z} \mid i \geq 0, \mu_i \leq t^2\}. \quad (1.1)$$

В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности степенного понижения в оценке при $t \rightarrow \infty$ второго члена $R(t) \equiv R(\tilde{g} | t)$ в формуле Вейля

$$N(t) = At^2 + R(t), \quad A = (4\pi)^{-1} \text{mes } M. \quad (1.2)$$

Здесь $\text{mes } M$ – площадь M по мере, индуцированной метрикой $\tilde{g}$.

Будем говорить, что на некотором классе $\{M, \tilde{g}\}$ многообразий M и метрик $\tilde{g}$ имеет место степенное понижение при оценке величины $R(t)$, $t \rightarrow \infty$, если для любой пары $(M, \tilde{g}) \in \{M, \tilde{g}\}$ справедлива оценка $R(t) = O(t^{1-\gamma})$ и $\gamma \geq \gamma_0 > 0$.

Такое определение связано с тем, что из общего результата Хермандера [5], в частности, следует, что на классе всех замкнутых многообразий M для любой гладкой метрики $\tilde{g}$ имеет место оценка $R(t) = O(t)$. На всем этом классе

указанная оценка неулучшаема, она неулучшаема для стандартной однородной метрики на сфере $\mathbb{S}^2$.

В работах [6], [7] показано, что оценка величины $R(t)$ зависит от свойств геодезического потока ϕ^t на кокасательном расслоении $T^*(M)$. Обозначим через $\mathcal{M}(\tilde{g})$ меру множества замкнутых геодезических в расслоении единичных сфер $S^*(M) \subset T^*(M)$. Из результатов работы [7] следует, что $R(t) = o(t)$, если $\mathcal{M}(\tilde{g}) = 0$ (см. также [8]). В работах [9]–[11] показано, что при небольшом усилении условия $\mathcal{M}(\tilde{g}) = 0$ выполняется оценка $R(t) = O(\frac{t}{\ln t})$, и указаны в терминах свойств потока ϕ^t достаточные условия для существования степенного понижения. Однако эти условия трудно проверяемы. Известно только, что, кроме плоского тора, они выполняются для выпуклых поверхностей вращения в $\mathbb{R}^3$, не являющихся поверхностями Цолля [12]. Все эти результаты следуют из общих теорем о спектрах эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых n -мерных многообразиях.

В размерности два так же, как в теории римановых поверхностей, естественно различать эллиптический, параболический и гиперболический случаи.

В эллиптическом случае $M = \mathbb{S}^2$ и, как уже указывалось, на всем классе гладких метрик оценка $R(t) = O(t)$ неулучшаема, $R(t) = \Omega(t)$ для однородной метрики на $\mathbb{S}^2$. Здесь и далее запись $R(t) = \Omega(f(t))$, $t \rightarrow \infty$, означает, что существуют постоянная $A > 0$ и последовательность $t_i \rightarrow \infty$ такие, что $|R(t_i)| \geq Af(t_i)$, $f(t_i) > 0$, $i \geq i_0$. В работе [13] показано, что $R(t) = O(t^{2/3})$ при некоторых условиях общего положения, если $\tilde{g}$ -метрика индуцирована вложением поверхности вращения M в $\mathbb{R}^3$.

В параболическом случае $M = \mathbb{T}^2$ – двумерный тор, и для плоской метрики на $\mathbb{T}^2$ мы получаем самую знаменитую задачу оценки величины $R(t)$ – проблему круга. Рассматривая $\mathbb{T}^2$ как квадрат $[-\pi, \pi]^2$ с отождествленными сторонами и плоской метрикой, получаем, что $\mu_i = l^2 + m^2$, $l, m \in \mathbb{Z}$, и $N(t)$ – число целых точек в круге радиусом t . Проблема круга состоит в доказательстве справедливости оценки $R(t) = O(t^{1/2+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$. Г. Харди доказал, что $R(t) = \Omega(t^{1/2}(\ln t)^{1/4})$ (см. [14]), и наилучшим известным нам результатом в проблеме круга является $R(t) = O(t^{\frac{131}{208}+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$ (см. [15]). Случай метрик Лиувилля на $\mathbb{T}^2$ рассматривался в работе [16], где утверждалось, что при некоторых условиях общего положения для этих метрик выполняется оценка $R(t) = O(t^{2/3})$. В работе [16] показано, что для метрик Лиувилля задача о распределении собственных значений оператора Лапласа в некотором приближении сводится к задаче о числе целых точек в областях, которые строятся по метрике $\tilde{g}$.

В гиперболическом случае M – поверхность рода больше единицы. В работе [17] показано, что если $\tilde{g}$ – метрика без сопряженных точек, то $R(t) = O(\frac{t}{\ln t})$. В наиболее интересном случае постоянной отрицательной кривизны $(M, \tilde{g}) = \Gamma/H$, где $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ – кокомпактная фуксова группа и H – верхняя полуплоскость с метрикой Пуанкаре. Этот случай рассматривался в большом количестве работ на основе формулы Сельберга (см. [18]–[21]). Имеется ли в этом случае степенное понижение – неизвестно. С другой стороны, А. Сельберг доказал, что для некоторых кокомпактных арифметических групп Γ имеет место равенство $R(t) = \Omega(\frac{t^{1/2} \ln \ln t}{\ln t})$ (см. [21]).

Таким образом, во всех случаях, когда доказана возможность степенного понижения, выполняется условие $\mathcal{M}(\tilde{g}) = 0$ и геодезический поток ϕ^t интегри-

руем. В связи с этим возникает вопрос: является ли условие $\mathcal{M}(\tilde{g}) = 0$ достаточным для возможности степенного понижения? Основная цель работы – показать, что на торе $\mathbb{T}^2$ существуют метрики $\tilde{g}$, не допускающие степенного понижения, для которых $\mathcal{M}(\tilde{g}) = 0$ и геодезический поток интегрируем. Ниже будут построены метрики Лиувилля на $\mathbb{T}^2$ такие, что для них $R(t) = \Omega(1^{1-\frac{1}{p+2}})$ при всех $p \geq 4$, $p \in \mathbb{Z}$. Идея рассмотрения метрик Лиувилля и возможность в этом случае свести задачу об оценке величины $R(t)$ к задаче о числе целых точек в некоторых областях, которые ниже называются спектральными, подчерпнуты автором из работы [16]. Необходимые уточнения результатов этой работы, касающихся асимптотики спектра возникающей indefinitной задачи Штурма–Лиувилля, содержатся в работе [22].

Задача о числе целых точек в невыпуклых областях рассматривалась в работах [23]–[25], где была продемонстрирована неустойчивость оценки остаточного члена (аналога $R(t)$) относительно малых деформаций невыпуклой области. Это наблюдение является основным при доказательстве теоремы 2.1 настоящей работы. Нам не удалось воспользоваться результатами работы [25], так как в интересующем нас случае граница спектральной области не является кусочно аналитической и содержит особенности. В связи с этим при решении задачи о целых точках в § 7, в отличие от работ [23]–[25], будет использован метод двусторонних оценок (см. [26], [27]) функции распределения $N(t)$.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Формулировка основного результата

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ квадрат $[-\pi, \pi]^2$. отождествляя противоположные стороны этого квадрата, получим тор $\mathbb{T}^2$ с координатами $(x, y) \bmod 2\pi$. Метрика Лиувилля на $\mathbb{T}^2$ имеет вид $ds^2 = (g(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$ [28]. Везде ниже рассматривается специальный случай метрик Лиувилля, для которых $h(y) = 0$ и

$$ds^2 = g(x)(dx^2 + dy^2). \quad (2.1)$$

Такие метрики задаются одной периодической функцией $g(x)$, и мы будем говорить, что $\tilde{g} \in \mathcal{G}$, если соответствующая функция g принадлежит классу функций $\mathcal{G}$. Рассматриваемый ниже класс функций $\mathcal{G}$ был введен в работе [29] (см. также [22]).

Будем говорить, что $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ ($g \in \mathcal{G}$), если выполнены следующие условия:

1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная периодическая функция с периодом 2π такая, что

$$0 < a_2 \leq g(x) \leq a_1 < \infty, \quad (2.2)$$

и она имеет по крайней мере шесть непрерывных производных;

2) функция g имеет на интервале $[-\pi, \pi)$ один простой максимум $g(x_{\max}) = a_1$ и один простой минимум $g(x_{\min}) = a_2$ ($(x_{\max} - x_{\min}) = \pi$), при этом $g^{(1)}(x) \neq 0$, $x \neq x_{\min}, x_{\max}$;

3) функции $g(x - x_{\max})$, $g(x - x_{\min})$ являются четными функциями от x на $\mathbb{R}$;

4) если $x_{\min} = 0$, то при $|x| \leq \pi$ функция $g(x)$ допускает представление $g(x) = g_1(x^2)$ и функция $h(x) = g_1(-x^2)$ обладает следующими свойствами: существует точка $x_0 \in (0, \pi - c]$, $c > 0$, такая, что $h(x_0) = 0$, при $x \in [0, x_0]$ функция $h(x)$ имеет один простой максимум в точке $x = 0$ ($h(0) = a_2$) и $h^{(1)}(x) \neq 0$ при $0 < x \leq x_0$.

Заметим, что для гладких функций $g(x)$ условие 4) при $a_2 < C(g)$ следует из условий 1)–3).

Примером метрики $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ является метрика, которую естественно назвать *метрикой Матье* и которая определяется равенством

$$g(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos x. \quad (2.3)$$

Чтобы сформулировать основную теорему 2.1, нам понадобится ряд определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Везде ниже будем считать, что $x_{\max} = 0$ ($g(0) = a_1$). Определим заданную на отрезке $0 \leq a \leq a_1$ функцию $F(a)$ с помощью равенства

$$F(a) = 2 \int_0^{t_0(a)} \sqrt{g(t) - a} dt, \quad (2.4)$$

где $t_0(a) = \pi$ при $0 \leq a \leq a_2$ и $t_0(a)$ – единственный корень уравнения $g(t) = a$ при $a_2 \leq a \leq a_1$. Кривую $\Gamma = \Gamma(\tilde{g})$ ($\Gamma = \Gamma(g)$) зададим с помощью уравнения

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} F(x^2), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{a_1}. \quad (2.5)$$

Введем понятия типичного числа и типичной метрики $\tilde{g} \in \mathcal{G}$. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ будем называть *типичным*, если для любого $q \in \mathbb{Z}$

$$\|\alpha q\| \geq \frac{C(\alpha)}{q\psi_\alpha(q)}, \quad \psi_\alpha(q) \geq (\ln q)^{1+\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad (2.6)$$

где $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого. Точка $(x, y(x)) \in \Gamma$ называется *типичной*, если $\frac{dy}{dx}(x)$ – типичное число.

Как будет показано далее, кривая $\Gamma(g)$ при $\sqrt{a_2} < x < \sqrt{a_1}$, $g \in \mathcal{G}$ может иметь точки уплощения порядка p , в которых

$$k(x_p) = 0, \quad k^{(1)}(x_p) = 0, \quad \dots, \quad k^{(p-1)}(x_p) = 0, \quad k^{(p)}(x_p) \neq 0, \quad (2.7)$$

где $k(x) = y''(1 + y'(x))^{-3/2}$ – кривизна кривой $y = y(x)$. Точку уплощения $(x_p, y(x_p))$ будем называть *типичной*, если $\alpha_p = \frac{dy}{dx}(x_p)$ – типичное число, и *рациональной*, если α_p – рациональное число. Заметим, что в силу известного результата Хинчина [30] почти все (по мере Лебега) числа $\alpha \in \mathbb{R}$ типичны.

Метрику $\tilde{g}$ и соответствующую функцию g будем называть *типичными*, если все точки уплощения кривой $\Gamma(\tilde{g})$ типичны или если точек уплощения нет.

Следующая теорема является основным результатом работы. Ее доказательство опирается на доказанную в § 7 теорему 7.1 о числе целых точек в спектральных областях, определение которых будет дано ниже.

ТЕОРЕМА 2.1. *Рассмотрим определенный выше класс $\mathcal{G}$ метрик Лиувилля на торе $\mathbb{T}^2$.*

1. *Для любой метрики $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ выполняется равенство $M(\tilde{g}) = 0$, и если метрика $\tilde{g}$ типична, то для второго члена $R(t)$ в формуле Вейля (1.2) при $t \rightarrow \infty$ имеет место оценка*

$$R(t) = O(t^{5/6}). \quad (2.8)$$

2. Для любой типичной метрики $\tilde{g}_0 \in \mathcal{G} \cap C^\infty$, любого $\sigma > 0$ и любого целого $p \geq 4$ существует метрика $\tilde{g} \in \mathcal{G} \cap C^\infty$ такая, что $\|g - g_0\|_{C^1} < \sigma$ и при $t \rightarrow \infty$

$$R(t) \equiv R(\tilde{g} | t) = B_p(t) + O(t^{5/6}), \quad (2.9)$$

$$B_p(t) = b_p(t)t^{1-\frac{1}{p+2}} + O(t^{1-\frac{4}{3}\frac{1}{p+2}+\sigma'}) \quad \forall \sigma' > 0. \quad (2.10)$$

В (2.10) функция $b_p(t)$ при $t \geq t_0 > 0$ непрерывна, ограничена и не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Условие $M(\tilde{g}) = 0$ не является достаточным для возможности степенного понижения на классе замкнутых гладких многообразий с гладкими римановыми метриками даже в случае интегрируемости геодезического потока ϕ^t .

Заметим, что в формулировке теоремы 2.1 нельзя заменить метрику C^1 на C^k , $k \geq 2$. Необходимым условием такой замены является наличие точек утолщения на кривой $\Gamma(\tilde{g}_0)$.

Как будет показано ниже, оценка (2.9) реализуется на метриках, которые на кривой $\Gamma(g)$ имеют рациональную точку утолщения порядка p , и такие метрики существуют в классе $g \in \mathcal{G} \cap C^\infty$.

Далее через C обозначаются различные величины, не зависящие от t и, возможно, зависящие от функции g . Если в условиях справедливости некоторого утверждения или в самом утверждении фигурируют константы C , то это означает, что величины $C = C(\tilde{g})$ существуют и могут быть явно указаны. Условия типа $\lambda \gg 1$, $\|n\| \gg 1$ означают, что соответствующие утверждения верны при $\lambda > C_1$, $|n| > C_2$.

§ 3. Спектр оператора Лапласа для метрики $\tilde{g} \in \mathcal{G}$

При $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ задача о спектре оператора $-\Delta$ сводится к нахождению периодических решений уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\mu g(x) \psi. \quad (3.1)$$

Поскольку оператор $\Delta = (g(x))^{-1}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ коммутирует с оператором $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, собственные функции $\psi(x | y)$ имеют вид

$$\psi(x, y) = e^{iky} u(x), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

где $u(x) \equiv u(a, x)$ – собственные функции следующего зависящего от параметра a , $0 \leq a \leq a_1$, семейства периодических задач Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x) + \lambda^2(g(x) - a)u(x) &= 0, & |x| &\leq \pi, \\ u(-\pi) &= u(\pi), & \frac{du}{dx}(-\pi) &= \frac{du}{dx}(\pi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Спектр задачи (3.1) при этом получается при

$$\mu = \lambda^2, \quad a = k^2 \lambda^{-2}, \quad 0 \leq a \leq a_1. \quad (3.4)$$

Этот результат прямо следует из разложения функции ψ в ряд Фурье по переменной y . Решению задачи (3.3) посвящена первая часть работы [16]. Полное описание асимптотики положительного спектра задачи (3.3) при $g \in \mathcal{G}$ с необходимыми уточнениями результатов работы [16] получено в работе [22], где показано, что при $0 \leq a \leq a_1$, $\lambda \gg 1$ собственные значения λ задачи (3.3) нумеруются выбором знака $\pm$ и целым положительным числом p . При этом $\lambda = \lambda_{\pm}(a, p)$ является единственным решением уравнения

$$\lambda F(a) = 2\pi p + G_{\pm}(a, \lambda), \quad (3.5)$$

где

$$G_{\pm}(a, \lambda) = G_{\pm}^0(a, \lambda) + O(\lambda^{-1/2} \sqrt{\ln \lambda}). \quad (3.6)$$

Здесь $G_{\pm}^0(a, \lambda)$ – непрерывная ограниченная функция, явный вид которой указан в работе [22]. Для целей настоящей работы достаточно знать, что

$$G_{\pm}^0(a, \lambda) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-1/2} \sqrt{\ln \lambda}), & a > a_2, \quad a - a_2 \geq C\lambda^{-1/2}, \\ O(\lambda^{-1/2} \sqrt{\ln \lambda}), & a < a_2, \quad a_2 - a \geq C\lambda^{-1/2}, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$|G_{\pm}^0(a, \lambda)| \leq \frac{3}{5}\pi, \quad |a - a_2| \leq C\lambda^{-1/2}. \quad (3.8)$$

Из приведенных в работе [22] результатов следует

ЛЕММА 3.1. *Если $\tilde{g} \in \mathcal{G}$, то большие собственные значения μ , $\mu \gg 1$, оператора $-\Delta$ нумеруются двумя целыми числами $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $p = 0, 1, 2, \dots$, а при $p > 0$ – еще и выбором знака $\pm$. При этом $\mu = \lambda^2$, и если $p > 0$, то $\lambda_{\pm}(k, p)$ – единственное решение уравнения*

$$\lambda F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = 2\pi p + G_{\pm}\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \lambda\right) \quad (3.9)$$

такое, что

$$0 \leq \frac{k^2}{\lambda^2} \leq a_1. \quad (3.10)$$

При $p = 0$ каждому $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \gg 1$, отвечает одно собственное значение $\mu = \lambda^2$ и λ удовлетворяет уравнению

$$F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda = \frac{k^2}{a_1}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов работы [22] следует, что для справедливости уравнения (3.9) не обязательно выполнение условия $p \gg 1$ и достаточно условие $\lambda \gg 1$. Уравнение (3.9) получается подстановкой значения $a = k^2 \lambda^{-2}$ в уравнение (3.5). Поскольку $F^{(1)}(a) < 0$ (см. (4.1)), существование решения уравнения (3.9) для любого $p \geq 1$ прямо следует из того, что функция $\lambda F(\frac{k^2}{\lambda^2})$ монотонно возрастает от нуля при $\lambda = |k|a_1^{-1}$ до ∞ . Единственность этого решения следует из доказанной в работе [22] единственности решения $\lambda_{\pm}(a, p)$ уравнения (3.5) и того факта, что $\lambda_{\pm}(a, p) \neq \lambda_{\pm}(a', p)$ при $a \neq a'$.

Остается рассмотреть случай $p = 0$, отвечающий в одномерной задаче значению $a = a_1$ – границе существования дискретного спектра. Анализ результатов

работ [29], [22] показывает, что в этом случае для заданного $k \in \mathbb{Z}$ при $|k| \gg 1$ имеется одно собственное значение. Это находится в полном соответствии со случаем плоской метрики, если его рассматривать, используя изложенный выше метод. Лемма доказана.

Пусть (k, p) , $k \geq 0$, $p \geq 0$, – целые точки в положительном квадранте. Из леммы 3.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *При $k^2 + p^2 \gg 1$, $k \geq 1$, $p \geq 1$, каждой точке (k, p) отвечают четыре собственных значения $\mu_{k,p}$ оператора Лапласа. Каждой целой точке на осях (при $k = 0$ или $p = 0$) отвечают два собственных значения. При этом $\mu_{k,p} = (\lambda_{\pm}(k, p))^2$, где $\lambda_{\pm}(k, p)$ – решения уравнения (3.9) при $p > a$, и $\mu_{k,0} = \lambda_k^2$, где λ_k – решение уравнения (3.11).*

§ 4. Свойства функции $F(a)$ и кривой $\Gamma(\tilde{g})$

Напомним, что при нашем выборе начала координат максимум функции $g(x)$ находится в точке $x_{\max} = 0$. Будем предполагать, что $g \in \mathcal{G} \cap C^{\infty}$.

Из определения (2.4) функции $F(a)$ следует, что

$$\frac{dF}{da} = - \int_0^{t_0(a)} \frac{dt}{\sqrt{g(t) - a}} \leq 0, \quad 0 \leq t \leq \pi. \quad (4.1)$$

Таким образом, функция $F(a)$, определенная при $0 \leq a \leq a_1$, монотонно убывает от $F(0) > 0$ до $F(a_1) = 0$. Из определения класса $\mathcal{G}$ следует, что

$$g(t) = \begin{cases} a_2 + A_2(\pi - t)^2 + O((\pi - t)^4), & A_2 > 0, \\ a_1 - A_1 t^2 + O(t^4), & A_1 > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что функция $F(a)$ имеет единственную особенность в точке $a = a_2$ и

$$\frac{dF}{da} = f_1(a) \ln |a - a_2| + f_2(a), \quad (4.3)$$

где f_i , $i = 1, 2$, – гладкие функции.

Типичное поведение функции $F(a)$ хорошо иллюстрируется примером метрики Матье (2.3). В этом случае

$$F(a) = 4\sqrt{a - a_2} k^{-1} E(k), \quad k = \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a}}, \quad 0 \leq a \leq a_2,$$

$$F(a) = 4\sqrt{a_1 - a_2} [F(k) - \sqrt{1 - k^2} K(k)], \quad k = \sqrt{\frac{a_1 - a}{a_1 - a_2}}, \quad a_2 \leq a \leq a_1,$$

где $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [31]. Все свойства функции $F(a)$ для метрики Матье прямо вытекают из этих равенств, если воспользоваться следующими формулами для производных:

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k(k')^2} - \frac{K(k)}{k}, \quad \frac{dE(k)}{dk} = \frac{1}{k} (E(k) - K(k)), \quad k' = \sqrt{1 - k^2},$$

и тем, что при $k \rightarrow 0$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{64}k^4 + O(k^6) \right), \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + O(k^6) \right)$$

и, соответственно, при $k' \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 1$)

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) (k')^2 + O \left((k')^4 \ln \frac{1}{k'} \right),$$

$$E(k) = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) (k')^2 + O \left((k')^4 \ln \frac{1}{k'} \right).$$

Уравнение для кривой $\Gamma(\tilde{g}) \equiv \Gamma$ запишем в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} G(x), \quad G(x) = F(x^2). \quad (4.4)$$

Эта кривая лежит в положительном квадранте и определена при $0 \leq x \leq \sqrt{a_1}$. Свойства кривой Γ следуют из описанных выше свойств функции F . Кривая Γ имеет единственную особую точку при $x = \sqrt{a_2}$, в окрестности которой

$$G(x) \simeq (x - \sqrt{a_2}) \ln |x - \sqrt{a_2}| \quad (4.5)$$

и, соответственно,

$$\frac{dG(x)}{dx} = f_1(x) \ln |x - \sqrt{a_2}| + f_2(x), \quad (4.6)$$

где f_i , $i = 1, 2$, — гладкие функции. При этом

$$\frac{dG}{dx}(0) = 0, \quad \frac{dG}{dx}(x) < 0, \quad 0 < x \leq \sqrt{a_1},$$

и, соответственно,

$$\frac{d^2G}{dx^2} \simeq C \frac{1}{x - \sqrt{a_2}}, \quad C > 0, \quad x = \sqrt{a_2},$$

$$\frac{d^2G}{dx^2} < 0, \quad 0 < x < \sqrt{a_2}.$$

Для метрики Матъе

$$\frac{d^2G}{dx^2}(\sqrt{a_2}) = \frac{\pi}{(a_1 - a_2)^{3/2}} (2a_2 - a_1),$$

и в этом случае кривая Γ не имеет точек уплощения при $a_1 < 2a_2$. Если $a_1 > 2a_2$, то на кривой Γ имеется одна простая точка уплощения при $x = x_1$, $\sqrt{a_2} < x_1 < \sqrt{a_1}$.

В окрестности особой точки $x = \sqrt{a_2}$ кривизна $k(x)$ кривой Γ имеет особенность вида

$$k(x) \simeq \frac{1}{x - \sqrt{a_2}} (\ln |x - \sqrt{a_2}|)^{-3/2}. \quad (4.7)$$

Следующая лемма является основной при доказательстве теоремы 2.1.

ЛЕММА 4.1. Для любой типичной функции $g_0 \in \mathcal{G} \cap C^\infty$, любого $\sigma > 0$ и любого $p \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$, существует функция $g \in \mathcal{G} \cap C^\infty$ такая, что $\|g - g_0\|_{C^1} < \sigma$ и кривая $\Gamma(\tilde{g})$ имеет рациональную точку уплощения $(x_0, y(x_0))$, $\sqrt{a_2} < x_0 < \sqrt{a_1}$, порядка p . Если при этом $(x_0, y(x_0))$ – рациональная точка на кривой $\Gamma(\tilde{g}_0)$, то функцию $g \in \mathcal{G} \cap C^\infty$ можно выбрать таким образом, что кривые $\Gamma(g)$ и $\Gamma(g_0)$ имеют в точке $(x_0, y(x_0))$ касание первого порядка и совпадают при $|x - x_0| > C\Delta$, а величину Δ можно выбрать сколь угодно малой. В этом случае $\sigma = C\sqrt{\Delta}$ и все точки уплощения кривой $\Gamma(\tilde{g})$, кроме точки $(x_0, y(x_0))$, типичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. До конца доказательства предполагается, что $a_2 \leq a \leq a_1$. Деля в интеграле (4.1) замену переменных

$$\xi = g(t), \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad a_2 \leq \xi \leq a_1, \quad (4.8)$$

получим, что

$$\frac{dF}{da} = \int_a^{a_1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\xi - a}} d\xi, \quad (4.9)$$

и в этой формуле

$$\varphi(\xi) = \frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{g^{(1)}(t)}. \quad (4.10)$$

Из равенств (4.2) следует, что

$$\varphi(\xi) \simeq \begin{cases} -\frac{D_1}{\sqrt{a_1 - \xi}}, & \xi \rightarrow a_1 - 0, \\ -\frac{D_2}{\sqrt{\xi - a_2}}, & \xi \rightarrow a_2 + 0, \end{cases} \quad D_i = \frac{1}{2\sqrt{A_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

Рассматривая соотношение (4.9) как уравнение относительно функции $\varphi(\xi)$ и замечая, что это уравнение Абеля, получим формулу обращения

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_\xi^{a_1} \frac{F^{(1)}(a)}{\sqrt{a - \xi}} da, \quad a_2 \leq \xi \leq a_1. \quad (4.12)$$

Отсюда следует, что при заданном a_1 (или a_2) метрика $\tilde{g}$ (функция g) восстанавливается по значениям функции $F(a)$ при $a_2 \leq a \leq a_1$.

Рассмотрим любую типичную функцию $g_0 \in \mathcal{G} \cap C^\infty$ и соответствующую ей кривую $\Gamma_0 = \Gamma(g_0)$, на которой $y = y_0(x) = (2\pi)^{-1}F_0(x^2)$. На кривой Γ_0 выбираем точку $(x_0, y_0(x_0))$ такую, что касательная к кривой Γ_0 в этой точке рациональна и $\sqrt{a_2} < x_0 < \sqrt{a_1}$, $|x_0 - \sqrt{a_i}| > C$, $i = 1, 2$.

Построим кривую Γ , которая совпадает с кривой $\Gamma_0 = \Gamma(g_0)$ при $|x - x_0| > \Delta$ и задается при $\sqrt{a_2} \leq x \leq \sqrt{a_1}$ уравнением $y = y(x)$, при этом имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0(x_0), & y^{(1)}(x_0) &= y_0^{(1)}(x_0) = \beta \in \mathbb{Q}, \\ y^{(2)}(x_0) &= y^{(3)}(x_0) = \dots = y^{(p+1)}(x_0) = 0, & |y^{(p+2)}(x_0)| &\geq C. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнение для кривой Γ находим в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} G(x), \quad G(x) = F(x^2). \quad (4.14)$$

В силу равенств (4.13) получаем, что $(x_0, y(x_0)) \in \Gamma$ – рациональная точка уплощения порядка p и для функции $G(x)$ должны выполняться условия

$$\begin{aligned} G(x_0) = G_0(x_0), \quad G^{(1)}(x_0) = 2\pi\beta, \quad G^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, p+1, \\ |G^{(p+2)}(x_0)| \geq C, \quad G_0(x_0) = F_0(x^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

В терминах функции $F(a)$ эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} F(a_0) = F_0(a_0) = B_0, \quad F^{(k)}(a_0) = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, p+1, \\ B_k = 2\pi\beta C_k (-1)^k a_0^{-k+1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, p+1, \quad F^{(p+2)}(a_0) = B_{p+2}, \quad (4.16) \\ a_0 = x_0^2, \end{aligned}$$

где C_k – абсолютные константы, вид которых следует из соотношений

$$G^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(2x)^{n-2k}}{k! (n-k)!} F^{(n-k)}(x^2).$$

В частности, $B_1 = \frac{\pi\beta}{\sqrt{a_0}}$, $B_2 = -\frac{\pi\beta}{2a_0^{3/2}}$ и B_{p+2} – произвольная ненулевая константа.

Функцию $F(a)$ ищем в виде

$$F(a) = h(a - a_0)\psi(a) + (1 - h(a - a_0))F_0(a), \quad (4.17)$$

где $h \in C_0^\infty$ – четная функция такая, что для любого $k \geq 1$

$$h(a) = \begin{cases} 1, & |a| < \Delta_0, \\ 0, & |a| > \Delta = \Delta_0 + \Delta_1, \end{cases} \quad |h^{(k)}(a)| \leq C_k \Delta^{-k}, \quad \Delta \ll 1, \quad (4.18)$$

$\psi(a)$ – полином степени $p+2$:

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{p+2} \frac{B_k}{k!} (a - a_0)^k, \quad (4.19)$$

и величины B_k были определены выше (см. (4.16)). Тогда условия (4.15), а следовательно, и (4.13) выполняются.

Кривая Γ , заданная уравнением (4.14), при $|x^2 - x_0^2| > \Delta$ совпадает с кривой $\Gamma(g_0)$. При $|x^2 - x_0^2| < \Delta_0$ кривая Γ имеет единственную рациональную точку уплощения порядка p при $x = x_0$. Осталось рассмотреть область $\Delta_0 < |x^2 - x_0^2| < \Delta = \Delta_0 + \Delta_1$. Из условий $y(x_0) = y_0(x_0)$, $y^{(1)}(x_0) = y_0^{(1)}(x_0)$ следует, что кривая Γ имеет в этой области не менее четырех точек перегиба. Функцию h всегда можно выбрать таким образом, что этих точек будет четыре и они будут типичными точками уплощения первого порядка. Осталось показать, что существует функция $g \in \mathcal{G} \cap C^\infty$ такая, что $\Gamma = \Gamma(g)$, при этом $\|g - g_0\|_{C^1} \leq C\sqrt{\Delta}$.

Запишем соотношение (4.17) в виде

$$F(a) = F_0(a) + h(a - a_0)(\psi(a) - F_0(a)) \quad (4.20)$$

и определим величину $\varphi(\xi)$ с помощью формулы (4.12). Поскольку $B_0 = F_0(a_0)$, $B_1 = F_0^{(1)}(a_0)$, то $|\psi(a) - F_0(a)| \leq C|a - a_0|^2$ и, следовательно, внутри носителя функции $h(a - a_0)$ выполняются оценки $|\psi(a) - F_0(a)| \leq C\Delta^2$ и $|\psi^{(1)}(a) - F_0^{(1)}(a)| \leq C\Delta$. Так как $|h^{(k)}(a - a_0)| \leq C\Delta^{-k}$, то $F^{(1)}(a) = F_0^{(1)}(a) + O(\Delta)$ и, следовательно, $F^{(1)}(a) < 0$.

Рассмотрим величину

$$\Delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi) - \varphi_0(\xi) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{a_1} \frac{(F(a) - F_0(a))^{(1)}}{\sqrt{a - \xi}} da. \quad (4.21)$$

Пусть $f(a)$ – гладкая функция такая, что $f(a) = 0$ при $a_1 - a < C$. Тогда для интеграла

$$I(\xi) = \int_{\xi}^{a_1} \frac{f(a)}{\sqrt{a - \xi}} da, \quad a_2 < \xi < a_1,$$

имеют место равенства

$$I^{(k)}(\xi) = \int_{\xi}^{a_1} \frac{f^{(k)}(a)}{\sqrt{a - \xi}} da. \quad (4.22)$$

Таким образом, $\Delta\varphi(\xi)$ – гладкая функция, и, используя равенство (4.22) при $k = 1$ и $f^{(1)}(a) = (F(a) - F_0(a))^{(2)}$, получим

$$|\varphi(\xi) - \varphi_0(\xi)| \leq C\Delta^{1/2}. \quad (4.23)$$

Определим функцию $g^{(1)}(t)$ с помощью равенства (4.10). Поскольку $|\varphi_0(\xi)| \leq C$, $|\varphi^{(1)}(\xi)| \leq C$, из неравенства (4.23) следует, что

$$|g^{(1)}(t) - g_0^{(1)}(t)| \leq C\Delta^{1/2}.$$

При $0 \leq t \leq \pi$ функция $g(t)$ восстанавливается по формулам

$$g(t) = a_1 + \int_0^t g^{(1)}(t) dt, \quad g^{(1)}(t) = (\varphi(\xi))^{-1},$$

и, следовательно,

$$\|g(t) - g_0(t)\|_{C^1} \leq C\Delta^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq \pi. \quad (4.24)$$

Осталось доказать, что функция $g(t)$ допускает периодическое продолжение на всю ось и при этом получается функция $g \in \mathcal{G} \cap C^\infty$.

Применяя нужное число раз формулу (4.22) при $f^{(1)}(a) = (F(a) - F_0(a))^{(2)}$, получим, что при всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi^{(k)}(a_1) = \varphi_0^{(k)}(a_1)$$

и, следовательно,

$$g^{(k)}(0) = g_0^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Чтобы доказать равенства

$$g^{(k)}(\pi) = g_0^{(k)}(\pi), \quad (4.26)$$

введем функцию

$$F_1(a) = 2 \int_0^{\pi - t_0(a)} \sqrt{a - g_1(t)} dt, \quad a_2 \leq a \leq a_1.$$

В этой формуле $g_1(t) = g(t - \pi)$, и по определению $F_1(a) = 0$, $a < a_2$. Поскольку

$$F(a) - F_1(a) + 2\pi a = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt,$$

то теперь, чтобы доказать равенства (4.26), достаточно для функции g_1 повторить те же рассуждения, которые для функции g привели к равенствам (4.25). Равенства (4.25), (4.26) позволяют продолжить функцию g с интервала $0 \leq t \leq \pi$ на всю ось с сохранением оценки (4.24). Лемма доказана.

§ 5. Спектр длин замкнутых геодезических для метрики $\tilde{g} \in \mathcal{G}$

Пусть $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ – метрика на торе $\mathbb{T}^2$ с координатами $(x, y) \bmod 2\pi$ и (q, p) , $q = (q_1, q_2) = (x, y)$, $p = (p_1, p_2)$ – канонические координаты на кокасательном расслоении $T^*(\mathbb{T})$. Как известно [32], геодезический поток является гамильтоновым, и в рассматриваемом случае гамильтониан имеет вид

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(g(q_1))^{-1}(p_1^2 + p_2^2).$$

Поскольку $p_i = g(q_1)\dot{q}_i$ и $H(q, p) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2$, в интересующем нас случае если $(q, p) \in S^*(\mathbb{T}^2)$, то $H(q, p) = \frac{1}{2}$, $p_2(t) = \alpha$.

Траектории лежат в области $g(q_1) - \alpha^2 \geq 0$, и при этом

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm(g(x))^{-1}\sqrt{g(x) - \alpha^2}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\alpha}{g(x)}, \\ p_1^2 + \alpha^2 &= g(x), & p_2 &= \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения для периода T (длины замкнутой геодезической) и величины α для замкнутой геодезической. Такие уравнения имеют вид

$$T = |l|J(\alpha), \quad \frac{dG}{d\alpha}(\alpha) = -\frac{4\pi m}{l}, \quad (5.1)$$

где $l, m \in \mathbb{Z}$, функция $G(\alpha)$ определяется равенством (4.4) и

$$J(\alpha) = \int_{\substack{g(t) > \alpha \\ |t| \leq \pi}} \frac{g(t)}{\sqrt{g(t) - \alpha^2}} dt, \quad 0 \leq \alpha \leq \sqrt{a_1}.$$

Производная $G^{(1)}(\alpha)$ является нечетной функцией α , и ее свойства при $0 \leq \alpha \leq \sqrt{a_1}$ описаны в § 3. Поскольку $G^{(1)}(\alpha)(\sqrt{a_1}) = -b$, $b > 0$, то второе уравнение в (5.1) имеет одно решение $\alpha = \alpha\left(\frac{m}{\alpha}\right)$ при $|4\pi ml^{-1}| < b$ и два решения при $|4\pi ml^{-1}| > b$. Спектр длин замкнутых геодезических получится при подстановке $\alpha = \alpha\left(\frac{l}{m}\right)$ в первое уравнение из (5.1). Таким образом, получим $T = T_{l,m}$. Оценим число

$$P(x) = \#\{(m, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid T_{l,m} \leq x\}$$

замкнутых геодезических с длиной, меньшей x . Из оценок

$$J(\alpha) \geq \begin{cases} 2a_2\pi(a_1 - a_2)^{-1/2}, & \alpha < \sqrt{a_2}, \\ \frac{2a_2}{a_1}b, & \alpha > \sqrt{a_2}, \end{cases}$$

сразу следует, что

$$P(x) \leq Cx^2. \quad (5.2)$$

Поскольку (x, y, α) можно рассматривать как координаты на $S^*(\mathbb{T}^2)$ и замкнутым геодезическим отвечают $\alpha = \alpha\left(\frac{m}{l}\right)$, то при $\tilde{g} \in \mathcal{G}$

$$\mathcal{M}(g) = 0, \quad (5.3)$$

где, как и выше, $\mathcal{M}(g)$ – мера множества замкнутых геодезических.

§ 6. Функция распределения собственных значений и целые точки в спектральных областях

В этом параграфе будет показано, что задачу (1.1) о поведении функции $N(t)$ при $g \in \mathcal{G}$ и $t \rightarrow \infty$ можно с некоторой контролируемой точностью свести к задаче о числе целых точек в некоторых областях, которые ниже называются спектральными. Как уже указывалось во введении, возможность такой редукции была установлена в работе [16]. Все рассматриваемые области в $\mathbb{R}^2$ считаются ограниченными и замкнутыми.

Рассмотрим плоскость с координатами (x, y) , в положительном квадранте которой с помощью уравнения $y = (2\pi)^{-1}G(x)$ (см. (4.4)) задана кривая $\Gamma = \Gamma(g)$. Через T_x, T_y обозначим операторы отражения относительно осей x, y . Тогда замкнутая кривая $\tilde{\Gamma} = T_y((T_x\Gamma) \cup \Gamma)$ ограничивает область $U \subset \mathbb{R}^2$, содержащую начало координат $O \in \mathbb{R}^2$. Проведем внутри области $\tilde{U}$ два луча $\Pi_i, i = 1, 2$, проходящие через начало координат. Луч Π_1 соединяет точки $(\sqrt{a_2}, y(\sqrt{a_2})) \in \tilde{\Gamma}$ и $(-\sqrt{a_2}, -y(\sqrt{a_2})) \in \tilde{\Gamma}$, а $\Pi_2 = T_y\Pi_1$. Эти лучи делят область $\tilde{U}$ на две области U_1, U_2 , $\tilde{U} = U_1 \cup U_2$, включающие соответственно лежащие внутри области $\tilde{U}$ отрезки осей y и x . Области $U_i, i = 1, 2$ будем называть *спектральными*. Возникающая кривая показана сплошной линией на рис. 1. При этом, если $U_1^+, U_2^+, U_i^+ \subset U_i$, – части областей U_1, U_2 , соответственно лежащие в положительном квадранте, то U_1 – образ U_1^+ при действии отражений T_x, T_y , а U_2 – образ U_2^+ . Полученную замкнутую кривую $\tilde{\Gamma}$ (границу $\partial\tilde{U}$ области $\tilde{U}$) мы также будем обозначать через Γ .

Пусть $V \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая ограниченная замкнутая область и tV – ее образ при гомотетии $x \rightarrow tx, y \rightarrow ty$. Обозначим через $\mathcal{N}^a(tV)$ число точек вида $n + a, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^2$, принадлежащих области tV . Таким образом,

$$\mathcal{N}^a(tV) = \#\{n \in \mathbb{Z}^2 \mid n + a \in tV\}. \quad (6.1)$$

Эту величину даже при $a \neq 0$ будем называть *числом целых точек* в области tV . Введем обозначения

$$\mathcal{N}^a(tV) = \begin{cases} \mathcal{N}^0(tV) & \text{при } a = 0, \\ \mathcal{N}^\pm(tV) & \text{при } a = 0, \pm \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Рис. 1

ЛЕММА 6.1. Пусть $\tilde{g} \in \mathcal{G}$. Тогда для любого $\delta_1 > 0$ такого, что

$$\delta_1 \geq Ct^{-1/2}\sqrt{\ln t}, \quad (6.3)$$

имеет место следующая двусторонняя оценка функции распределения собственных значений $N(t) \equiv N(\tilde{g} | t)$, (1.1), оператора Лапласа на торе $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}^0((t - \delta_1)U_1) + \frac{1}{2}\mathcal{N}^+((t - \delta_1)U_2) + \frac{1}{2}\mathcal{N}^-((t - \delta_1)U_2) + O(\sqrt{t}) \\ & \leq N(t) \leq \mathcal{N}^0((t + \delta_1)U_1) + \frac{1}{2}\mathcal{N}^+((t + \delta_1)U_2) + \frac{1}{2}\mathcal{N}^-((t + \delta_1)U_2) + O(\sqrt{t}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнения (3.9), (3.11) в виде

$$\begin{aligned} \frac{p \pm 1/4}{\lambda} &= \frac{1}{2\pi}F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \Delta_{\pm}, & a_2 &\leq \frac{k^2}{\lambda^2} \leq a_1, \\ \frac{p}{\lambda} &= \frac{1}{2\pi}F\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \Delta_{\pm}, & 0 &\leq \frac{k^2}{\lambda^2} \leq a_2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Тогда из равенств (3.7) и оценки (3.8) следует, что

$$|\Delta_{\pm}| \leq \begin{cases} O(\lambda^{-3/2} \sqrt{\ln \lambda}), & \left| \frac{k^2}{\lambda^2} - a_2 \right| \geq C\lambda^{-1/2}, \\ O(\lambda^{-1}), & \left| \frac{k^2}{\lambda^2} - a_2 \right| \leq C\lambda^{-1/2}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Гомотетия $t\Gamma$ кривой Γ задается уравнением

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{x^2}{t^2}\right). \quad (6.7)$$

Лемма следует из уравнений (6.5) и (6.7), определения областей U_i , $i = 1, 2$, леммы 3.1 и следствия 3.1. Коэффициент 1 при $\mathcal{N}^0((t \pm \delta_1)U_1)$ в (6.4) объясняется тем, что каждой точке области U_1^+ в соответствии с леммой 3.1 отвечают четыре собственных значения, а в результате отражений мы размножаем область U_1^+ в четыре раза, чтобы получить область U_1 . Это же рассуждение объясняет коэффициент $\frac{1}{2}$ перед величинами $\mathcal{N}^{\pm}((t \pm \delta_1)U_2)$ в формуле (6.4). В соответствии с леммой 3.1 каждой точке на положительных полуосях $x = 0$ и $y = 0$ соответствуют по две точки спектра, что обеспечивает отсутствие в формуле (6.4) вклада от целых точек, лежащих на осях координат.

Формула (6.4) включает вклад от целых точек (k_i, p) с малыми значениями величины $k^2 + p^2$, для которых лемма 3.1 неверна. Связанная с этим ошибка учитывается членом $O(\sqrt{t})$ в обеих оценках формулы (6.4). Действительно, рассмотрим наряду с $N(t)$ величину $N(t_1)$ при $1 \ll t_1 \ll t$. Выбирая $t_1 = t^{1/4}$ по формуле Вейля, получим, что $N(t_1) = O(t_1^2) = O(\sqrt{t})$ и, таким образом,

$$N(t) = \#\{i \mid t^{1/4} \leq \lambda_i \leq t\} + O(\sqrt{t}).$$

Теперь при $\lambda_i \geq t^{1/4}$ можно использовать лемму 3.1. Остается заметить, что число целых точек (k_1, p) или точек $(k, p \pm \frac{1}{2})$ в круге $k^2 + p^2 \leq t_1^2$ также оценивается как $O(\sqrt{t})$.

Условие (6.3) в соответствии с оценками (6.6) обеспечивает то, что граница истинного спектра при $\lambda_i \leq t$ лежит между кривыми $((t \pm \delta_1)\Gamma)$ всюду, кроме окрестностей четырех точек $z_0 = (t\sqrt{a_2}, ty(\sqrt{a_2}))$, $T_x z_0$, $T_y z_0$, $T_x T_y z_0$. Для оценки вклада этих окрестностей достаточно рассмотреть одну из них – окрестность точки z_0 . Это трубчатая окрестность дуги $t\Gamma$, отвечающей интервалу x , в котором $|x - t\sqrt{a_2}| < Ct^{1/2}$, ширина этой окрестности имеет порядок $O(1)$, так как в соответствии с формулой (6.6) в этой окрестности $t|\Delta_{\pm}| \leq C$. Число точек спектра, отвечающих этой окрестности, в соответствии с леммой 3.1 оценивается как число целых точек в ней и имеет порядок $O(\sqrt{t})$. Это следует из общей формулы для числа $\mathcal{N}(V)$ целых точек в области V :

$$\mathcal{N}(V) \leq C(S(V) + \mathcal{L}(\partial V) + 1). \quad (6.8)$$

Здесь $S(V)$ – площадь области V и $\mathcal{L}(\partial V)$ – длина границы ∂V . Лемма доказана.

§ 7. Доказательство теоремы о числе целых точек в спектральных областях

Выше спектральными были названы области U_i , $i = 1, 2$. Введем общее определение. Область $U \subset \mathbb{R}^2$ назовем *спектральной*, если ее граница ∂U состоит из криволинейных треугольников, образованных отрезками прямых, проходящих через начало координат, и кривыми, соединяющими концы этих отрезков. При этом предполагается, что кривые Γ , образующие не прямые стороны криволинейных треугольников, входящих в область U , могут иметь только те же особенности, что и кривая $\Gamma(\tilde{g})$ (см. (4.5)). Без ограничения общности можно считать, что особенности лежат вблизи вершин. Таким образом, если кривая Γ , задаваемая уравнением $y = y(x)$, имеет особенности при $x = x_0$, то в окрестности этой точки

$$y(x) \simeq (x - x_0) \ln |x - x_0|. \quad (7.1)$$

Граница ∂U области U предполагается ориентированной, и на ней задано направление обхода, при котором область находится слева от границы. Везде ниже для определенности можно считать, что $U = U_1$ или $U = U_2$, где области U_i , $i = 1, 2$, определены в § 6 (см. рис. 1).

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть U – спектральная область такая, что все точки уплощения ее граничных кривых типичны либо рациональны. Тогда

$$\mathcal{N}^a(tU) = t^2 S(U) + \Delta^a(tU), \quad (7.2)$$

где $S(U)$ – площадь области U и для величины $\Delta^a(tU)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\Delta^a(tU) = \sum_{\{s_p | \mathbb{Q}\}} M^a(s_p | t) + O(t^{5/6}), \quad (7.3)$$

в котором

$$M^a(s_p | t) = f^a(s_p | t) t^{1 - \frac{1}{p+2}} + O(t^{1 - \frac{4}{3} \frac{1}{p+2} + \sigma}) \quad \forall \sigma > 0. \quad (7.4)$$

В формуле (7.3) суммирование ведется по множеству $\{s_p | \mathbb{Q}\}$ рациональных точек уплощения различных порядков p . Функции $f^a(s_p | t)$ при $t \gg 1$ ограничены и не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если на кривых, входящих в границу ∂U , не существует рациональных точек уплощения, то $\Delta^a(tU) = O(t^{5/6})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на пункты.

1. **Обозначения и подготовительные сведения.** Как и выше, предполагается, что в $\mathbb{R}^2$ фиксирована декартова система координат, точки (x, y) обозначаются через $z = (x, y) = (z_1, z_2)$, $z_x = z_1$, $z_y = z_2$. Выражение $\langle z, a \rangle$ обозначает скалярное произведение, $\langle z, a \rangle = z_1 a_1 + z_2 a_2$ и $|z| = \langle z, z \rangle^{1/2}$. Наряду со скалярным будет использоваться произведение $[z, a] = z_1 a_2 - z_2 a_1$. Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ обозначается через $\hat{f}(\omega)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$, и

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \omega, z \rangle} f(z) dx dy.$$

Нам понадобится зависящая от параметра $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$, функция ρ_ε , обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &\in C_0^\infty, \quad \rho_\varepsilon(z) \geq 0, \\ \rho_\varepsilon(z) &= \begin{cases} 1, & \text{если } |z| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |z| \geq 2\varepsilon, \end{cases} \\ \hat{\rho}_\varepsilon(0) &= \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(z) dx dy = 1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Кроме того, предполагается, что имеют место оценки

$$|\hat{\rho}_\varepsilon(\omega)| \leq \frac{C_M}{(1 + \varepsilon|\omega|)^M} \quad \forall M > 0. \quad (7.6)$$

Такую функцию легко построить исходя из функции $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, для которой выполняются следующие условия: $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – четная функция такая, что

$$h(s) = \begin{cases} 1, & |s| \leq 1, \\ 0, & |s| \geq 2, \end{cases} \quad \int_0^\infty sh(s) ds = 1.$$

Тогда по определению

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{-2} h\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right).$$

В этом случае

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\omega) = \int_0^\infty sh(s) J_0(\varepsilon|\omega|s) ds,$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя, и оценки (7.6) следуют из последнего равенства (см. [33]). Далее используется обозначение

$$\hat{\rho}(\varepsilon|\omega|) = \hat{\rho}_\varepsilon(|\omega|). \quad (7.7)$$

Пусть χ_U – характеристическая функция области U ,

$$\chi_U(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in U, \\ 0, & \text{если } z \notin U. \end{cases}$$

Преобразование Фурье $\hat{\chi}_U(\omega)$ этой функции имеет вид

$$\hat{\chi}_U(\omega) = \int_U e^{i\langle z, \omega \rangle} dx dy = \frac{1}{i\lambda} \oint_{\partial U} e^{i\lambda\langle z(s), \eta \rangle} \langle \eta, \nu(s) \rangle ds. \quad (7.8)$$

Вторая из этих формул получается с помощью формулы Грина, в ней s – натуральный параметр на границе ∂U ,

$$\omega = \lambda\eta, \quad \lambda = |\omega|, \quad \eta \equiv \eta(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (7.9)$$

и $\nu(s)$ – внешняя нормаль к ∂u в точке $z(s) \in \partial U$. Таким образом,

$$\nu_x = \tau_x, \quad \nu_y = -\tau_x,$$

где $\tau(s) = \frac{dz}{ds}$ – касательный вектор в точке $z(s)$. Иногда вместо (7.8) будет удобно пользоваться одной из следующих формул:

$$\widehat{\chi}_U(\omega) = \frac{1}{i|\omega|^2} \int_{\partial U} e^{i\langle z, \omega \rangle} [\omega, dz] = \frac{1}{i\lambda} \oint e^{i\langle z, \omega \rangle} [\eta, dz], \quad dz = (dx, dy). \quad (7.10)$$

2. *Двусторонние оценки для величины $\mathcal{N}^a(tU)$.* Как уже указывалось, при анализе величины $\mathcal{N}^a(tU)$ мы будем использовать известный метод двусторонних оценок [26], [27]. Рассмотрим интересующую нас величину

$$\mathcal{N}^a(tU) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{tU}(n+a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_U\left(\frac{n+a}{t}\right),$$

где U – спектральная область. Например, $U = U_1$ или $U = U_2$. Проведем, как показано на рис. 1, пунктиром прямые $\Pi_1(\pm\alpha)$, $\Pi_2(\pm\alpha)$. Эти прямые входят в границу спектральных областей $U_i(\pm\alpha)$, $i = 1, 2$, таких, что

$$U_1(-\alpha) \subset U_1 \subset U_1(+\alpha), \quad U_2(+\alpha) \subset U_2 \subset U_2(-\alpha).$$

Это построение применимо для любой спектральной области. Если прямые Π_i , $i = 1, 2$, входят в ее границу, то, проведя прямые $\Pi_i(\pm\alpha)$, образующие углы $\pm\alpha$ с прямыми Π_i , получим спектральные области $U(\pm\alpha)$ и будет выполняться одно из условий

$$U(-\alpha) \subset U \subset U(+\alpha), \quad U(+\alpha) \subset U \subset U(-\alpha). \quad (7.11)$$

При этом предполагается, что кривая Γ , соединяющая концы прямых Π_i , $i = 1, 2$, может быть продолжена до пересечения с прямыми $\Pi_i(\pm\alpha)$, $i = 1, 2$.

Для любой рассматриваемой области V и любого $T \gg 1$ введем величину

$$\Delta^a(TV, \varepsilon) = T^2 \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \widehat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon) \widehat{\chi}_V(2\pi nt). \quad (7.12)$$

Здесь и далее штрих у знака суммы означает, что в эту сумму не входит член с $n = 0$. Функция $\widehat{\rho}(\varepsilon|\omega|)$, входящая в правую часть равенства (7.12), была определена выше (см. (7.7)), и ряд в (7.12) абсолютно сходится в силу оценок (7.6).

ЛЕММА 7.1. Пусть U – спектральная область и $U(\pm\alpha)$ – области, определенные выше. Тогда при выполнении условий

$$\delta = C\varepsilon \ll 1, \quad \alpha = Ct^{-1}\varepsilon^{1/2}, \quad \varepsilon \geq Ct^{-2}, \quad t \gg 1, \quad (7.13)$$

имеет место двусторонняя оценка

$$\begin{aligned} t^2 S(U) + \Delta^a((t-\delta)U(\pm\alpha), \varepsilon) + R_-(t, \varepsilon) &< \mathcal{N}^a(tU) \\ &< t^2 S(U) + \Delta^a((t+\delta)U(\pm\alpha), \varepsilon) + R_+(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (7.14)$$

где знаки $\pm$ в $U(\pm\alpha)$ выбираются таким образом, что $U \subset U(\pm\alpha)$ в оценке сверху, а $U \supset U(\pm\alpha)$ в оценке снизу (см. (7.11), (7.12)). Для величин $R_{\pm}(t, \varepsilon)$ выполняются оценки

$$|R_{\pm}(t, \varepsilon)| = O(t\varepsilon^{1/2}). \quad (7.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим области $U_{\pm}(t, \delta)$ такие, что

$$U_{-}(t, \delta) \subset tU \subset U_{+}(t, \delta),$$

они будут зависеть и от некоторого параметра t_1 . Проведем на плоскости $\mathbb{R}^2$ окружность радиуса t_1 , $1 \ll t_1 \ll t$, с центром в начале координат. Такая окружность пересекает прямые $t\Pi_i(\pm\alpha)$ в точках $z_{\pm}^i$, $i = 1, 2$. Пусть d – расстояние от этих точек до прямых $t\Pi_i$ и, таким образом, $d = Ct_1\alpha$. Внутри круга радиуса t_1 проведем из точек $z_{\pm}^i$ прямые $\Pi_{\pm}^j$, $i = 1, 2$, параллельные прямым $t\Pi_i$, до их пересечения с прямыми $\Pi_{\pm}^j$ с тем же знаком $\pm$ и $i \neq j$. Эти прямые вместе с лежащими вне круга радиуса t_1 отрезками прямых $t\Pi_i(\pm\alpha)$ и дугами кривых $(t \pm \delta)\Gamma$ образуют границы областей $U_{\pm}(t, \delta)$. Возникающее разбиение лежащей в верхней полуплоскости части области U_1 представлено на рис. 2, где границы областей $U_{\pm}(t, \delta)$ показаны сплошной линией, а граница области tU – штрих-пунктирной. Заметим, что если рассматривать всю область U_1 (см. рис. 1), то область $U_{+}(t, \delta)$ связана, а область $U_{-}(t, \delta)$ состоит из двух непересекающихся областей.

Рис. 2

Для произвольной ограниченной области V определена функция

$$\chi_V^\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_V(z') \rho_\varepsilon(z - z') dx' dy', \quad z' = (x', y').$$

Будем предполагать, что

$$\varepsilon \leq C\delta, \quad \varepsilon \leq Ct_1\alpha. \quad (7.16)$$

Тогда в силу свойств функции $\rho_\varepsilon(z)$ (см. (7.5)), условий (7.16) и по построению областей $U_{\pm}(t, \delta)$ имеет место двусторонняя оценка

$$\chi_{U_{-}(t, \delta)}^\varepsilon(z) < \chi_{tU}(z) < \chi_{U_{+}(t, \delta)}^\varepsilon(z)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{U_-(t, \delta)}^\varepsilon(n + a) < \mathcal{N}^a(tU) < \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{U_+(t, \delta)}^\varepsilon(n + a).$$

Области $U_\pm(t, \delta)$ отличаются от соответствующих областей $(t \pm \delta)U(\pm\alpha)$ только внутри круга $|z| \leq t_1$. Оценим сверху величины $R_\pm^1$, определенные равенствами

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{U_\pm(t, \delta)}^\varepsilon(n + a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(t \pm \delta)U_\pm(\pm\alpha)}^\varepsilon(n + a) + R_\pm^1.$$

Величины $R_\pm^1$ оцениваются сверху числом целых точек в прямоугольнике со сторонами длиной t_1 и $Ct_1\alpha$, и по формуле (6.8) имеем

$$|R_\pm^1| \leq C(t_1^2\alpha + t_1).$$

Таким образом, при надлежащем выборе знаков в $U(\pm\alpha)$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a(tU) &< \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(t+\delta)U(\pm\alpha)}^\varepsilon(n + a) + O(t_1^2\alpha + t_1), \\ \mathcal{N}_a(tU) &> \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(t-\delta)U(\pm\alpha)}^\varepsilon(n + a) + O(t_1^2\alpha + t_1). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Как уже указывалось, знаки в правых частях неравенств (7.17) выбираются таким образом, что $U \subset U(\pm\alpha)$ в оценке сверху и $U \supset U(\pm\alpha)$ в оценке снизу.

Поскольку $\chi_{(t \pm \delta)U_\pm(\pm\alpha)}^\varepsilon \in C_0^\infty$, к суммам в правых частях неравенств (7.17) применима формула Пуассона

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} f(n) = \hat{f}(0) + \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(2\pi n).$$

В результате применения этой формулы получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(t \pm \delta)U(\pm\alpha)}^\varepsilon(n + a) &= (t \pm \delta)^2 S(U(\pm\alpha)) \\ &+ \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} (t \pm \delta)^2 e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon) \hat{\chi}_{U(\pm\alpha)}(2\pi(t \pm \alpha)n). \end{aligned}$$

Поскольку $t \gg 1$, $\alpha \ll 1$, $\delta \ll 1$, то

$$(t + \alpha)^2 S(U(\pm\alpha)) = t^2 S(U) + O(t^2\alpha + t\delta)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{(t \pm \alpha)U(\pm\alpha)}^\varepsilon(n + a) = t^2 S(U) + \Delta^a((t \pm \delta)U(\pm\alpha), \varepsilon) + O(t^2\alpha + t\delta), \quad (7.18)$$

где величины вида $\Delta^a(TV, \varepsilon)$ определены равенством (7.12). Подставляя формулу (7.18) в двусторонние оценки (7.17), получим, что при надлежащем выборе знаков $\pm$ в $U(\pm\alpha)$

$$\begin{aligned} t^2 S(U) + \Delta^a((t - \delta)U(\pm\alpha, \varepsilon)) + R_- &< \mathcal{N}^a(tU) \\ &< t^2 S(U) + \Delta^a((t + \delta)U(\pm\alpha, \varepsilon)) + R_+. \end{aligned}$$

Поскольку $t_1 \ll t$, в последней формуле

$$|R_{\pm}| = O(t^2\alpha + t\delta + t_1). \quad (7.19)$$

Выбирая t_1 и δ в соответствии с (7.16), определим α из условия $t_1 = t^2\alpha$. Тогда в полном соответствии с условиями (7.13) имеем $\alpha = t^{-1}\varepsilon^{1/2}$, $t = t\varepsilon^{1/2}$ и условие $t_1 \gg 1$ выполняется, если $\varepsilon \geq ct^{-2}$. Поскольку $\alpha \ll \varepsilon$, оценка (7.15) следует из оценки (7.19). Лемма доказана.

Переходим к рассмотрению величин $\Delta^a(TV, \varepsilon)$, входящих в двустороннюю оценку величины $\mathcal{N}^a(tU)$ (см. (7.14)). Нас интересует случай

$$V = U(\pm\alpha), \quad T = t \pm \delta, \quad (7.20)$$

где $U(\pm\alpha)$ – спектральные области. Поскольку для спектральной области V граница ∂V равна $\Pi \cup \Gamma$, где Π – прямолинейная часть границы ∂V , а Γ – ее криволинейная часть, то

$$\Delta^a(TV, \varepsilon) = \Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(T, \varepsilon). \quad (7.21)$$

Величину $\Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon)$ будем называть *вкладом прямых*. Она определяется равенством

$$\Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon) = T^2 \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \tilde{\rho}(2\pi |n| \varepsilon) I_{\Pi}(2\pi n T), \quad (7.22)$$

где в соответствии с (7.10)

$$I_{\Pi}(\omega) = \frac{1}{i\lambda^2} \int_{\Pi} e^{i\langle z, \omega \rangle} [\omega, dz].$$

Величину $\Delta_{\Gamma}^a(T, \varepsilon)$ будем называть *вкладом кривой*. Она определяется равенствами

$$\Delta_{\Gamma}^a(T, \varepsilon) = T^2 \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon) I_{\Gamma}(2\pi n T), \quad (7.23)$$

$$I_{\Gamma}(\omega) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Gamma} e^{i\lambda \langle z(s), \eta \rangle} \langle \nu(s), \eta \rangle ds, \quad \omega = \lambda \eta. \quad (7.24)$$

Напомним, что используются обозначения (7.9). Будем отдельно рассматривать оценки вклада прямых и вклада кривой.

3. *Оценка вклада прямых.* Рассмотрим интеграл

$$I(\beta, \omega) = \frac{1}{i\lambda^2} \int_{\Pi(\beta)} e^{i\langle z, \omega \rangle} [\omega, dz], \quad (7.25)$$

где $\Pi(\beta)$ – отрезок прямой $y = \beta x$, отвечающий интервалу $0 \leq x \leq b$. В интересующем нас случае $b = \pm\sqrt{a_2} + O(\alpha)$. Так как $V = U(\pm\alpha)$, то в границу ∂V входят прямые $\Pi_i(\pm\alpha)$, и, воспользовавшись некоторой свободой в выборе величины α , будем считать, что β – типичное число.

В равенстве (7.25) использованы обозначения $z = (x, \beta x)$, $dz = (1, \beta) dx$, таким образом,

$$I(\beta, \omega) = \frac{1}{i|\omega|^2} \frac{\omega_1 \beta - \omega_2}{i(\omega_1 + \beta \omega_2)} (e^{b(\omega_1 + \beta \omega_2)} - 1),$$

откуда сразу следует, что

$$|I(\beta, 2\pi nT)| \leq C \frac{|n_1\beta - n_2|}{T^2 |n|^2 |n_1 + \beta n_2|}.$$

Заменяя n_2 на $-n_2$, получим следующую оценку вклада прямых:

$$|\Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon)| \leq C \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)| \frac{|n_1\beta + n_2|}{|n|^2 |n_1 - \beta n_2|}. \quad (7.26)$$

Поскольку β – типичное число, при $n_2 \neq 0$ имеем

$$|n_1 - \beta n_2| \geq \frac{C(\beta)}{|n_2| \psi_{\beta}(n_2)}, \quad \psi_{\beta}(n_2) = (\ln |n_2|)^{1+\sigma}, \quad \sigma > 0. \quad (7.27)$$

Введем целое число $N = C[\varepsilon^{-1}]$ (где $[x]$ – целая часть x) и используем оценку (7.6), согласно которой

$$|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)| \leq \begin{cases} C_1, & |n| \leq N, \\ C_M(\varepsilon|n|)^{-M}, & |n| > N, \quad \forall M > 0. \end{cases}$$

Тогда из оценки (7.26) следует, что

$$|\Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon)| \leq C(\Sigma_1(\varepsilon, \beta) + \Sigma_2(\varepsilon, \beta)), \quad (7.28)$$

где суммы $\Sigma_i(\varepsilon, \beta)$, $i = 1, 2$, определены равенствами

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\varepsilon, \beta) &= \sum'_{|n| \leq N} \frac{|n_2 + \beta n_2|}{|n|^2 |n_1 - \beta n_2|}, \\ \Sigma_2(\varepsilon, \beta) &= \sum'_{|n| > N} \frac{|n_2 + \beta n_2|}{|n|^2 (\varepsilon|n|)^M |n_1 - \beta n_2|}. \end{aligned}$$

Вклады в суммы $\Sigma_i(\varepsilon, \beta)$, $i = 1, 2$, членов с $n_2 = 0$ ($n_1 \neq 0$) оцениваются соответственно как $O(1)$ и $O(\varepsilon)$. Согласно этому ниже предполагается, что в последних суммах $n_2 \neq 0$.

Используя неравенство (7.27), получаем

$$\Sigma_2(\varepsilon, \beta) \leq C\varepsilon^{-1} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1+\sigma} \quad \forall \sigma > 0. \quad (7.29)$$

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\beta > C > 0.$$

Рассмотрим сумму $\Sigma_1(\varepsilon, \beta)$. Вклад в эту сумму членов с $n_1 = 0$ ($n_2 \neq 0$) оценивается как $O(1)$, и далее предполагается, что $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$ в сумме $\Sigma_1(\varepsilon, \beta)$. Используя неравенство $|n|^2 \geq |n_1| |n_2|$, получим

$$\Sigma_1(\varepsilon, \beta) \leq C \sum_{q=0}^N S_2^N(q) + C \sum_{q=1}^N \frac{1}{q} S_1^N(q),$$

где

$$S_1^N(q) = \sum_{p=1}^N \frac{1}{|p - \beta q|}, \quad S_2^N(q) = \sum_{p=1}^N \frac{1}{p|p - \beta q|}.$$

Оценим сумму $S_1^N(q)$. Пусть $p_0 = p_0(\beta, q)$ – ближайшее целое к числу βq . Тогда $\beta q = \|\beta q\| + p_0$. Если $p_0 > N$, то $|p - \beta q| \geq 1$ и, переходя к суммированию по $p' = p - p_0$, получим

$$S_1^N(q) \leq C \ln N, \quad p_0 \geq N.$$

Аналогично получается оценка

$$S_1^N(q) \leq C \left(\frac{1}{\|\beta q\|} + \ln N \right), \quad p_0 < N, \quad (7.30)$$

и так как β – типичное число, то

$$S_1^N(q) \leq C(N\psi_\beta(N) + \ln N),$$

следовательно,

$$\sum_{q=1}^N \frac{1}{q} S_1^N(q) \leq C[N\psi_\beta(N) + \ln N] \ln N.$$

Осталось оценить сумму $S_2^N(q)$, которую запишем в виде

$$S_2^N(q) = \sum_{p=1}^N a_p b_p, \quad a_p = \frac{1}{|p - \beta q|}, \quad b_p = \frac{1}{p}.$$

Применим формулу Абеля, согласно которой

$$\sum_{p=1}^N a_p b_p = A_N b_{N+1} + \sum_{n=1}^N A_n (b_n - b_{n+1}), \quad A_n = \sum_{p=1}^n a_p = S_1^N.$$

Используя оценку (7.30), получим

$$S_2^N(q) \leq C\psi_\beta(N) \ln N. \quad (7.31)$$

Эти результаты приводят к следующей оценке суммы $\Sigma_1(\varepsilon, \beta)$:

$$\Sigma_1(\varepsilon, \beta) \leq CN\psi_\beta(N) \ln N, \quad N = C[\varepsilon^{-1}].$$

Используя последнюю оценку и оценку (7.29) в неравенстве (7.28), получим нужную оценку вклада прямых (7.22):

$$|\Delta_\Gamma^a(T, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{-1} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{2+\sigma} \quad \forall \sigma > 0. \quad (7.32)$$

4. *Вклад угловых и особых точек.* Переходим к рассмотрению вклада кривой $\Delta_\Gamma^a(T, \varepsilon)$, (7.23).

Пусть s_1, s_2 – значения натурального параметра, отвечающие концам кривой Γ , т. е. угловым точкам границы ∂V . Напомним, что нас интересует случай (7.20). Например, в случае $V = U_1^+(\pm\alpha)$ этим точкам отвечают значения $x = \pm\sqrt{a_2} + O(\alpha)$ и кривая Γ ($y = y(x)$) имеет особенности при $x = \pm\sqrt{a_2}$. Введем разбиение единицы на кривой Γ :

$$1 = \tilde{\rho}_0(s) + \sum_{s_i} \rho_0^i(s), \quad i = 1, 2, \quad (7.33)$$

в котором функции $\rho_0^i(s)$ таковы, что $|s_1 - s_2| > 4\delta_0$ и

$$\rho_0^i(s) = \begin{cases} 1, & |s - s_i| \leq \delta_0, \\ 0, & |s - s_i| \geq 2\delta_0, \end{cases} \quad \left| \left(\frac{d}{ds} \right)^k \rho_0^i(s) \right| \leq C_k \delta_0^{-k}.$$

В подобных случаях будем говорить о разбиении единицы с центрами в точках s_i и масштабом δ_0 . Равенство (7.33) является определением функции $\tilde{\rho}_0(s)$. Будем предполагать, что

$$\delta_0 \geq C\alpha = Ct^{-1}\varepsilon^{1/2}. \quad (7.34)$$

Тогда носители функций ρ_0^i , $i = 1, 2$, включают угловые и особые точки. Запишем интеграл $I_\Gamma(\omega)$, (7.24), в виде

$$I_\Gamma(\omega) = I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid \omega) + \sum_{i=1}^2 I_\Gamma(\rho_0^i \mid \omega),$$

где

$$\begin{aligned} I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid \omega) &= \frac{1}{i\lambda} \int_\Gamma \tilde{\rho}_0(s) \langle \nu(s), \eta \rangle e^{i\lambda \langle z(s), \eta \rangle} ds, \\ I_\Gamma(\rho_0^i \mid \omega) &= \frac{1}{i\lambda} \int_\Gamma \rho_0^i(s) \langle \nu(s), \eta \rangle e^{i\lambda \langle z(s), \eta \rangle} ds. \end{aligned}$$

В соответствии с этим вклад кривой $\Delta_\Gamma^a(T, \varepsilon)$, (7.23), записывается в виде

$$\Delta_\Gamma^a(T, \varepsilon) = \Delta_\Gamma^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon) + \Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid T, \varepsilon), \quad (7.35)$$

где

$$\Delta_\Gamma^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon) = T^2 \sum_{s_i} \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon) I_\Gamma(\rho_0^i \mid 2\pi n T). \quad (7.36)$$

Величину (7.36) назовем *вкладом угловых и особых точек*, ее оценка будет получена в настоящем пункте.

Второе слагаемое в формуле (7.35), т. е. величина

$$\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid T, \varepsilon) = T^2 \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon) I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi n T), \quad (7.37)$$

содержит главный член, определяющий поведение величины $\Delta_\Gamma^a(T, \varepsilon)$ при $T \rightarrow \infty$, величина $\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid T, \varepsilon)$ будет рассматриваться в следующих пунктах.

Переходим к оценке вклада (7.36) угловых и особых точек. Поскольку нас интересуют области V типа $V = U_i(\pm\alpha)$, особая точка может принадлежать кривой Γ ($V = U_1(+\alpha)$) или не принадлежать ей ($V = U_1(-\alpha)$). Будем рассматривать случай, когда особая точка принадлежит кривой Γ . Полученная в этом случае оценка величины $\Delta_\Gamma^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon)$ будет заведомо пригодна и в случае, когда особая точка не принадлежит кривой Γ .

Пусть (x_0, y_0) ($y_0 = y(x_0)$) – особая точка кривой Γ . Переходя в окрестности особой точки к координатам $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ (далее штрихи не выписываем), получим, что в этой окрестности $y \simeq x \ln x$ (см. (7.1)). Выберем y в качестве параметра, и так как нас интересует случай $|y_0| \leq C\delta_0$, то получим, что достаточно оценить интеграл вида

$$J(\rho_0 \mid \omega) = \frac{1}{i\lambda} \int \rho_0(y) e^{i\lambda(\eta_1 f(y) - \eta_2 y)} (\eta_1 - \eta_2 f^{(1)}(y)) dy,$$

в котором

$$\rho_0(y) = \begin{cases} 1, & |y - y_0| \leq \delta_0, \\ 0, & |y - y_0| \geq 2\delta_0, \end{cases} \quad f(y) = \frac{y}{\ln |y|}.$$

Выделим окрестность нуля ширины $\delta_2 \ll \delta_0$ и вклад этой окрестности в интеграл $J(\rho_0 \mid \omega)$ оценим тривиально. Получим

$$J(\rho_0 \mid \omega) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\delta_2 \leq |y| \leq 2\delta_0} \rho_0(y) e^{i\lambda(\eta_1 f(y) - \eta_2 y)} (\eta_1 - \eta_2 f^{(1)}(y)) dy + O\left(\frac{\delta_2}{\lambda}\right). \quad (7.38)$$

В правую часть равенства (7.38) входит осциллирующий интеграл с фазой

$$\phi(y) = \eta_1 \frac{y}{\ln |y|} + \eta_2 y, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1.$$

Поскольку $\delta_0 \ll 1$, в носителе функции ρ_0

$$\phi^{(1)}(y) \simeq -\frac{\eta_1}{(\ln |y|)^2} + \eta_2, \quad \phi^{(2)}(y) \simeq \frac{2\eta_1}{(\ln |y|)^3} \frac{1}{y}.$$

Если величины η_1, η_2 таковы, что внутри носителя функции $\rho_0(y)$ фаза $\phi(y)$ не имеет критических точек, то при $y \in \text{supp } \rho_0$

$$|\phi^{(1)}(y)| \geq C \left(\ln \frac{1}{\delta_2} \right)^{-2}$$

и для оценки интеграла в правой части равенства (7.38) можно воспользоваться формулой

$$\left| \int_a^b e^{i\Omega S(t)} u(t) dt \right| \leq \frac{C}{\Omega} \text{Var}_{[a,b]} \left(\frac{u(t)}{S^{(1)}(t)} \right).$$

В рассматриваемом случае

$$\text{Var}_{[a,b]} \left(\frac{u(t)}{S^{(1)}(t)} \right) \leq C |\ln \delta_2|^{-2}$$

и, следовательно, в отсутствие критических точек

$$|J(\rho_0 \mid \omega)| \leq \frac{C}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\ln \frac{1}{\delta_2} \right)^2 + \delta_2 \right], \quad u(a) = u(b) = 0. \quad (7.39)$$

Поскольку $(\ln |y|)^2 \gg 1$ и $|\eta| = 1$, критические точки фазы $\phi(y)$ существуют, только если $\eta_2 \simeq 0$, $|\eta_1| \simeq 1$. В этом случае при $s \in \text{supp } \rho_0$

$$|\phi^{(2)}(y)| \geq \frac{C}{\left(\ln \frac{1}{\delta_0}\right)^3} \frac{1}{\delta_0} \quad (7.40)$$

и можно воспользоваться оценкой (см. [34])

$$\left| \int_a^b e^{i\Omega S(t)} u(t) dt \right| \leq C_k \frac{\bar{u}m[u]}{(\Omega A_k)^{1/k}},$$

справедливой при условии того, что $|u(t)| \leq \bar{u}$, $|S^{(k)}(t)| \geq A_k$ при $t \in [a, b]$ и функция u имеет не более $m[u]$ участков монотонности. Используя последнюю оценку, при $k = 2$ с учетом оценки (7.40) получаем, что при $\eta_2 \simeq 0$

$$|J(\rho_0 \mid \omega)| \leq \frac{C}{\lambda} \left[\delta_2 + \frac{\delta_0^{1/2}}{\lambda^{1/2}} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} \right]. \quad (7.41)$$

Складывая оценки (7.39), (7.41), получаем, что для любого η при $\omega = 2\pi nT$

$$|J(\rho_0 \mid 2\pi nT)| \leq \frac{C}{|n|T} \left[\delta_2 + \frac{1}{|n|T} \left(\ln \frac{1}{\delta_2} \right)^2 + \frac{\delta_0^{1/2}}{(|n|T)^{1/2}} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} \right].$$

Теперь из равенства (7.36) следует, что

$$|\Delta_\Gamma^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon)| \leq CT^2 \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)|}{|n|T} \left[\delta_2 + \frac{1}{|n|T} \left(\ln \frac{1}{\delta_2} \right)^2 + \frac{\delta_0^{1/2}}{(|n|T)^{1/2}} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} \right]. \quad (7.42)$$

В правую часть неравенства (7.42) входят суммы вида

$$S(\varepsilon, \gamma) = \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)|}{|n|^\gamma}.$$

Используя оценки

$$\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon) \leq \begin{cases} C, & |n| < \varepsilon^{-1}, \\ C(|n|\varepsilon)^{-M}, & |n| > \varepsilon^{-1}, \end{cases}$$

и заменяя суммы интегралами, получим

$$|S(\varepsilon, \gamma)| \leq C \int_1^{\varepsilon^{-1}} \frac{r}{r^\gamma} dr + C \int_{\varepsilon^{-1}}^\infty \frac{r}{r^\gamma (\varepsilon r)^M} dr \quad \forall M \geq 0$$

и, следовательно,

$$|S(\varepsilon, \gamma)| \leq \begin{cases} C, & \gamma > 2, \\ C \ln \frac{1}{\varepsilon}, & \gamma = 2, \\ C\varepsilon^{\gamma-2}, & \gamma < 2. \end{cases} \quad (7.43)$$

Используя (7.43), из соотношения (7.42) заключаем, что

$$|\Delta_{\Gamma}^a(\rho_0 | T, \varepsilon)| \leq C \left[\frac{T\delta_2}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{\delta_2} \right)^2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{T^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} \delta_0^{1/2} \right].$$

Выбираем $\delta_2 = T^{-k}$, где число k достаточно велико. Поскольку $\varepsilon \geq CT^{-2}$, получаем нужную оценку вклада угловых и особых точек:

$$|\Delta_{\Gamma}^a(\rho_0 | T, \varepsilon)| \leq \frac{CT^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}} \delta_0^{1/2} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2}. \quad (7.44)$$

Оценка (7.44) справедлива при условиях $\varepsilon \geq CT^{-2}$, $T \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$, $\delta_0 \geq CT^{-1}\varepsilon^{1/2}$.

5. *Основной вклад.* Рассмотрим величину $\Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 | T, \varepsilon)$, (7.37), и входящие в правую часть формулы (7.37) осциллирующие интегралы $I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 | \omega)$. Нас интересует случай

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda\eta, & \lambda &= 2\pi|n|T, & \eta &= \eta(u) = (\cos \varphi, \sin \varphi), \\ \varphi &= \varphi(n), & \cos \varphi(n) &= \frac{n_1}{|n|}, & \sin \varphi(n) &= \frac{n_2}{|n|}, & \eta(n) &= \eta(\varphi(n)). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Фаза $\phi(s)$ в осциллирующем интеграле $I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 | \omega)$ имеет вид

$$\phi(s) = \langle z(s), \eta \rangle,$$

и величина $\lambda = 2\pi|n|T$ рассматривается как большой параметр. Рассмотрим критические точки фазы $\phi(s)$. Для этого воспользуемся уравнениями Серре–Френе для кривой Γ , заданной уравнениями $z = z(s)$:

$$\frac{dz(s)}{ds} = \tau(s), \quad \frac{d\tau(s)}{ds} = k(s)\nu(s), \quad \frac{d\nu(s)}{ds} = -k(s)\tau(s).$$

Здесь $k(s) = k(z(s))$ – кривизна кривой Γ в точке $z(s)$ и $k(s) > 0$, если внешняя нормаль $\nu(s)$ совпадает с направлением к центру кривизны. Уравнение для критических точек s_c имеет вид

$$\langle \tau(s), \eta \rangle = 0,$$

и, следовательно,

$$\nu(s_c) \equiv \nu_c = \pm \eta.$$

Таким образом, точка s_c является критической при заданном φ , если в пучке параллельных прямых, заданных уравнениями $\langle z, \eta \rangle = q$, имеется прямая, касательная к кривой Γ , и $z(s_c)$ – точка касания.

С помощью формул Серре–Френе получаем

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(s) &= k\langle \nu, \eta \rangle, & \phi^{(3)}(s) &= k^{(1)}\langle \nu, \eta \rangle - k^2\langle \tau, \eta \rangle, \\ \phi^{(4)}(s) &= (k^{(2)} - k)\langle \nu, \eta \rangle - 3kk^{(1)}\langle \tau, \eta \rangle, & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, если s_p – точка уплощения порядка p , то при $\langle \nu(s_p), \eta \rangle \neq 0$

$$\phi^{(2)}(s_p) = 0, \quad \dots, \quad \phi^{(p+1)}(s_p) = 0, \quad \phi^{(p+2)}(s_p) \neq 0. \quad (7.46)$$

В интересующем нас случае угол φ принимает дискретное множество значений $\varphi \in \{\varphi(n)\}$ и все критические точки рациональны при $\varphi \in \{\varphi(n)\}$, так как $\langle \tau(s_c), \eta(n) \rangle = 0$. При $\varphi \in \{\varphi(n)\}$ вырожденные критические точки существуют, только если на кривой Γ есть рациональные точки уплощения.

При рассмотрении интеграла $I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid \omega)$ без ограничения общности можно считать, что на кривой Γ есть только одна рациональная точка уплощения. Если имеется несколько рациональных точек уплощения, то мы предполагаем, что расстояние между ними вдоль кривой Γ больше некоторой константы $C > 0$. Кроме того, предполагается, что расстояние от точек уплощения до угловых точек также больше $C > 0$. В этом случае при наличии нескольких рациональных точек уплощения результат, полученный для одной такой точки, надо просуммировать по различным рациональным точкам уплощения.

При $\varphi \in \{\varphi(n)\}$ вырожденные критические точки s_c существуют только при условии, что $\langle \tau(s_p), n \rangle = 0$. Это означает, что $n \in N_0 \equiv N_0(s_p)$ и

$$N_0 = \left\{ n \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 = -\gamma n_2, \gamma = \frac{\tau_y(s_p)}{\tau_x(s_p)} = \frac{l}{m} \right\}, \quad (l, m) \in \mathbb{Z}. \quad (7.47)$$

Заметим, что N_0 – это “одномерное” множество целых точек, лежащих на рациональной прямой $x = -\gamma y$.

Запишем величину $\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid T, \varepsilon)$ в виде

$$\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid T, \varepsilon) = \Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N_0) + \Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0). \quad (7.48)$$

Величина $\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N_0)$ называется *основным вкладом* и определяется равенством

$$\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N_0) = T^2 \sum'_{n \in N_0} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon) I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi n T). \quad (7.49)$$

Она будет рассмотрена в настоящем пункте.

Величина

$$\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0) = T^2 \sum'_{n \notin N_0} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon) I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi n T), \quad (7.50)$$

называемая *неосновным вкладом*, рассматривается в следующем пункте.

Таким образом, здесь мы предполагаем, что $n \in N_0$, (7.47). Кроме того, будем предполагать, что

$$|\gamma| \geq C > 0, \quad |l| \leq C, \quad |m| \leq C.$$

Интересующий нас осциллирующий интеграл $I_\Gamma(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi n T)$ обозначим через

$$I_n(\tilde{\rho}_0) = \frac{1}{2\pi i |n| T} \int_\Gamma \tilde{\rho}_0(s) \langle \nu, \eta(u) \rangle e^{2\pi i |n| T \phi_n(s)} ds, \quad (7.51)$$

и фаза $\phi_n(s)$ в этом интеграле задается равенством

$$\phi_n(s) = \langle z(s), \eta(n) \rangle. \quad (7.52)$$

Введем разбиение единицы с центром в точке s_p и масштабом δ_p (см. (7.33)):

$$1 = \rho_p(s) + \tilde{\rho}_p(s),$$

где

$$\rho_p(s) = 1, \quad |s - s_p| \leq \delta_p, \quad \rho_p(s) = 0, \quad |s - s_p| \geq 2\delta_p, \\ |\rho_p^{(k)}(s)| \leq C_k \delta_p^{-k}.$$

Интеграл $I_n(\tilde{\rho}_0)$, (7.51), запишем в виде

$$I_n(\tilde{\rho}_0) = I_n(\tilde{\rho}_0 \rho_p) + I_n(\tilde{\rho}_0 \tilde{\rho}_p). \quad (7.53)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_n(\tilde{\rho}_0 \rho_p) = \frac{1}{2\pi i |n| T} \int_{\Gamma} \tilde{\rho}_0(s) \rho_p(s) \langle \nu, \eta(n) \rangle e^{2\pi i |n| T \phi_n(s)}. \quad (7.54)$$

Поскольку $\phi^{(1)}(s_p) = 0$ при $n \in N_0$, то, разлагая фазу $\phi_n(s)$, (7.51), в ряд Тейлора вблизи точки s_p и учитывая равенства (7.46), получим

$$\phi_n(s) = \phi_n(s_p) + \frac{\phi_n^{(p+2)}(s_p)}{(p+2)!} (s - s_p)^{p+2} + O(\bar{\phi}^{(p+3)}(s - s_p)^{p+3}).$$

В последнем равенстве через $\bar{\phi}^{(p+3)}$ обозначена некоторая оценка сверху величины $\phi^{(p+3)}(s)$ при $|s - s_p| \leq 2\delta_p$ и, таким образом, $|\phi^{(p+3)}(s)| \leq \bar{\phi}^{(p+3)}$ при $|s - s_p| \leq 2\delta_p$. Разлагая экспоненту в интеграле (7.54) в ряд Тейлора, запишем этот интеграл в виде

$$I_n(\tilde{\rho}_0 \rho_p) = \frac{e^{2\pi i |n| T \phi(s_p)}}{2\pi i |n| T} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(s) \langle \nu(s), \eta(n) \rangle e^{i\Omega(s - s_p)^{p+2}} ds + O(\bar{\phi}^{(p+3)} \delta_p^{p+4}). \quad (7.55)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\tilde{\rho}_0(s) = 1$ при $s \in \text{supp } \rho_p$, и ввели обозначение

$$\Omega = \frac{\phi_n^{(p+2)}(s_p) \cdot 2\pi |n| T}{(p+2)!}. \quad (7.56)$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (7.55) применим лемму Эдейи с оценкой остаточного члена [33]. Согласно этой лемме при $u \in C_0^\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{i\Omega x^\nu} dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n(\nu) u^{(n)}(0)}{|\Omega|^{(n+1)/\nu}} + O\left(\frac{\delta \bar{u}^{(N)}}{\Omega^{N/\nu}}\right). \quad (7.57)$$

Здесь δ – размер носителя функции u и предполагается, что $|u^{(N)}(x)| \leq \bar{u}^{(N)}$ при $x \in \text{supp } u$. Коэффициенты $c_n(u)$ в формуле (7.57) задаются равенствами

$$c_{2n+1}(\nu) = 0 \quad \text{при четном } \nu, \\ c_{2n}(\nu) = \frac{2 \exp\left(\frac{i\pi(2n+1)}{2\nu} \text{sign } \Omega\right)}{(2n)! \nu} \quad \text{при четном } \nu, \\ c_n(\nu) = \exp\left(\frac{i\pi}{2\nu} (n+1) \text{sign } \Omega\right) \\ + (-1)^n \exp\left(-\frac{i\pi}{2\nu} (n+1) \text{sign } \Omega\right) \quad \text{при нечетном } \nu.$$

В интересующем нас случае

$$\begin{aligned} u(s) &= \rho_n(s) = \langle \nu(s), \eta(n) \rangle, & \bar{u}^{(k)} &= C(\delta_p)^{-k}, \\ \delta &= C\delta_p, & \nu &= \rho + 2. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Выбирая величину δ_p в виде

$$\delta_p = \Omega^{-\frac{1}{p+2} + \sigma_p}, \quad 0 < \sigma_p < \frac{1}{2(p+2)}, \quad (7.59)$$

где величина $\sigma_p \ll 1$ достаточно мала, получим, что в формуле (7.57) при учете равенств (7.58)

$$O\left(\frac{\delta \bar{u}^{(N)}}{\Omega^{N(\nu)}}\right) = O(\Omega^{-\sigma_p N/2}).$$

Выбирая, в свою очередь, число $N = N(\sigma_p)$ таким образом, что $\sigma_p N \gg 1$, имеем равенство

$$I_n(\tilde{\rho}_0 \rho_p) = \frac{e^{i\Omega\phi_n(s_p)}}{2\pi i |n| T} \left[\frac{\langle \nu(s_p), \eta(n) \rangle}{\Omega^{1/(p+2)}} + O\left(\frac{1}{\Omega^{2/(p+2)}}\right) \right] + O(\bar{\phi}^{(p+3)} \delta_p^{p+4}).$$

Поскольку $|\phi^{(p+2)}(s_p)| = k^{(p)}(s_p)$, $\phi_n(s_p) = \langle z(s_p), \eta(n) \rangle$, $\langle \nu(s_p), \eta(n) \rangle = \pm 1$, учитывая выражение (7.56) для величины Ω , получим

$$\begin{aligned} I_n(\tilde{\rho}_0 \rho_n) &= \frac{e^{2\pi i |n| T \langle z(s_p), \eta(n) \rangle}}{2\pi i |n| T} \left[\frac{A_p}{(2\pi |n| T)^{1/(p+2)}} + O\left(\frac{1}{(|n| T)^{1+2/(p+2)}}\right) \right] \\ &\quad + O(\bar{\phi}^{(p+3)} \delta_p^{p+4}), \end{aligned} \quad (7.60)$$

где

$$A_p = \frac{\langle \nu(s_p), \eta(n) \rangle C(p+2)}{|k^{(p)}(s_p)|^{1/(p+2)}} [(p+2)!]^{1/(p+2)}. \quad (7.61)$$

В формуле (7.60) будем считать, что $|\phi^{(p+3)}(s)| \leq C$. Данное предположение выполняется для построенной в лемме 4.1 кривой $\Gamma(\tilde{q})$. При этом достаточно предположить, что

$$\Delta \geq C\delta_p, \quad (7.62)$$

где Δ – масштаб функции h , (4.18).

Рассмотрим теперь второй член в формуле (7.53). Заметим, что при $n \in N_0$ угол $\varphi(u)$ не зависит от n . В этом случае критические точки $s_c \neq s_p$ фазы $\phi_n(s)$ невырождены и $|k(s_c)| \geq C$. Применяя [33, утверждение 2) леммы 2.2], получим

$$|I_n(\tilde{\rho}_0 \tilde{\rho}_p)| \leq \frac{C_p}{(|n| T)^{3/2}}. \quad (7.63)$$

Теперь заметим, что при нашем выборе величины σ_p , (7.59), и, например, при $\sigma_p < \frac{1}{2(p+2)(p+4)}$ справедлива оценка

$$T^2 \sum'_{n \in N_0} |\hat{\rho}(2\pi |n| \varepsilon)| \delta_p^{p+4} = O(T^{1-2/(p+2)+\sigma_p(p+4)}). \quad (7.64)$$

Сформулируем результат сразу для нескольких рациональных точек уплощения. Множество таких точек будем обозначать через $\{s_p \mid \mathbb{Q}\}$. Для каждой из этих точек имеется свое множество $N_0 = N_0(s_p) \in \mathbb{Z}^2$, в котором $n_1 = -\gamma(s_p)n_2$. Используя оценки (7.63), (7.64) и равенство (7.60), получим следующую формулу для основного вклада:

$$\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho} \mid n \in N_0) = \sum_{\{s_p \mid \mathbb{Q}\}} T^{1-1/(p+2)} F_p^a(T, \varepsilon) + O(T^{1/2}), \quad (7.65)$$

где

$$F_p^a(T, \varepsilon) = \sum'_{n_1 = -\gamma(s_p)n_2} e^{iB_p^a(n, T)} \frac{A_p}{(2\pi|n|)^{1+1/(p+2)}} + O(T^{-1/(p+2)+\sigma_p(p+4)}), \quad (7.66)$$

$$B_p^a(n, T) = -2\pi\langle n, a \rangle + 2\pi|n|T\langle z(s_p), \eta(n) \rangle$$

и константа A_p определена в равенстве (7.61).

6. *Оценка неосновного вклада.* В этом пункте будет оценен неосновной вклад $\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0)$, определенный выше формулой (7.50). Если

$$n \notin N_0 = \Sigma, \quad N_0 = \bigcup_{\{s_p \mid \mathbb{Q}\}} N_0(s_p),$$

то все критические точки s_c фазы $\phi_n(s)$, (7.52), невырождены, но некоторые из них могут лежать вблизи точек уплощения s_p как рациональных, так и не рациональных. Согласно определению рассматриваемой спектральной области точки s_p или типичны, или рациональны. Без ограничения общности будем считать, что $|\tau_x(s_p)| \geq C > 0$.

Пусть s_p – типичная точка уплощения. Тогда число

$$\gamma = \gamma(s_p) = \frac{\tau_y(s_p)}{\tau_x(s_p)}, \quad |\gamma| \geq C,$$

типично. Введем множество $N'_0 = N_1^0(s_p) \in \mathbb{Z}^2$ такое, что при $n \in N'_0$

$$|n_1 + \gamma n_2| \leq \frac{C}{|n|}. \quad (7.67)$$

С другой стороны, так как γ – типичное число и $|n_2| \geq C|n|$ при $n \in N'_{01}$, то

$$|\langle \tau(s_p), \eta(n) \rangle| = \frac{|\tau_x(s_p)|}{|n|} |n_1 + \gamma n_2| \geq \frac{C}{|n|^2} \frac{1}{\psi_\gamma(|n|)}.$$

Пусть φ_p – угол касательной и кривой Γ в точке $z(s_p)$. Мы говорим, что *прямая имеет угол φ* , если она задается уравнением $\langle z, \eta \rangle = q$.

Поскольку $\langle \tau(s_p), \eta(\varphi_p) \rangle = 0$, то при $n \in N'_0$

$$|\varphi(n) - \varphi_p| \geq \frac{C(\gamma)}{|n|^2 \psi_\gamma(|n|)}. \quad (7.68)$$

Теперь запишем величину $\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0)$ в виде

$$\Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0) = \Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N'_0) + \Delta_\Gamma^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0, n \notin N'_0) \quad (7.69)$$

и оценим сначала первый член в правой части этого равенства, т. е. величину

$$\Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N'_0) = T^2 \sum'_{n \in N'_0} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon) I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi nT). \quad (7.70)$$

Для оценки интеграла $I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi nT)$ используем лемму 2.2 из работы [33]. Согласно этой лемме (при определенных условиях для угла φ) при $n \in N'_0$, $\lambda \gg 1$ имеет место оценка

$$|I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 \mid \omega)| \leq \frac{C}{\lambda} \left[\sum_{s_c} \frac{1}{(|k(s_c)|\lambda)^{1/2}} + \frac{1}{|\varphi - \varphi_p|\lambda} \right]. \quad (7.71)$$

Основное из условий, при которых справедлива оценка (7.71), имеет вид

$$\delta\varphi \equiv |\varphi(n) - \varphi_p| \geq C\lambda^{-2/3}, \quad \lambda = 2\pi|n|T.$$

С учетом (7.68) замечаем, что последнее условие выполняется, если

$$|n| \leq CT^{1/2}(\psi_{\gamma}(T))^{-3/4}. \quad (7.72)$$

Кроме того, должны выполняться условия

$$k(s_c) \leq C((\bar{k}_c)^2 + \bar{k}_c^{(1)})\delta_c, \quad (7.73)$$

где $\bar{k}_c, \bar{k}_c^{(1)}$ – любые величины такие, что $|k(s)| \leq \bar{k}_c, |k^{(1)}(s)| \leq \bar{k}_c^{(1)}$ при $|s - s_c| < c\delta_c$, и величина δ_c определяется равенством

$$\delta_c = (\lambda|k(s_c)|)^{-1/2}.$$

В работе [33] показано, что в рассматриваемом случае

$$|k(s_c)| \geq C|\varphi(n) - \varphi_p|^{p/(p+1)}$$

и, следовательно, при выполнении условий (7.72), (7.73) справедливо неравенство

$$|I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi nT)| \leq C \left[\frac{(\psi_{\gamma}(T))^{1/2}}{T^{3/2}|n|^{1/2}} + \frac{\psi_{\gamma}(T)}{T^2} \right]. \quad (7.74)$$

Учитывая, что нас будет интересовать случай $\Gamma = \Gamma(\tilde{g})$, где кривая $\Gamma(\tilde{g})$ построена по лемме 4.1, предположим, что

$$\Delta \gg \delta_c; \quad (7.75)$$

здесь Δ – масштаб функции h , (4.18).

Покажем, что условия (7.73) выполняются, если выполняется (7.72). По определению кривизны имеем $k(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}$, где $\varphi(s)$ – угол касательной в точке $z(s)$. Таким образом, при $\delta(s) \equiv s_c - s_p$, $\delta\varphi \equiv \varphi(n) - \varphi_p$ имеем $|k(s_c)| \simeq C(\delta s)^p$, $\delta\varphi \simeq k(s_c)\delta s \simeq C(\delta s)^{p+1}$ и, следовательно, $\delta s \simeq |\varphi(n) - \varphi_p|^{1/(p+1)}$.

Отсюда получаем $|k(s_c)| \simeq C|\delta\varphi|^{p/(p+1)}$, $|k^{(1)}(s_c)| \simeq C|\delta\varphi|^{(p-1)/(p+1)}$, и так как $\bar{k}_c \leq C|k(s_c)|$, $\bar{k}_c^{(1)} \leq C|k^{(1)}(s_c)|$, то условие (7.73) выполняется, если выполняется условие (7.72). Таким образом, при условии (7.72) имеет место оценка (7.74). Если условие (7.72) не выполняется, т. е. если $|n| \geq CT^{1/2}(\psi_{\gamma}(T))^{-3/4}$, то используем тривиальную оценку

$$|I_{\Gamma}(\rho_0 \mid 2\pi nT)| \leq \frac{C}{|n|T}. \quad (7.76)$$

Пусть

$$\varepsilon = T^{-\varkappa+\sigma'}, \quad \varkappa < \frac{1}{2}, \quad \sigma' > 0, \quad \varkappa - \sigma' > 0. \quad (7.77)$$

Используя при $|n| < T^{-\varkappa}$ оценку (7.74), а при $|n| > T^{-\varkappa}$ – оценку (7.76) и учитывая, что $|\hat{\rho}(2\pi|n|T)| \leq C(|n|\varepsilon)^{-M}$ при $|n| > T^{\varkappa}$ и любом $M > 0$, получим нужную оценку

$$\Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N'_0) \leq CT^{1/2+\varkappa/2}(\psi_{\gamma}(T))^{1/2}. \quad (7.78)$$

При этом, как и в случае $n \in N_0$, рассмотренном выше, мы воспользовались тем, что при условии (7.67) ряд (7.70) сводится к одномерному.

Осталось рассмотреть второй член в формуле (7.69) и оценить величину

$$\Delta_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0, n \notin N'_0) = I^2 \sum'_{n \notin N_0, n \notin N'_0} e^{-2\pi i \langle n, a \rangle} \tilde{\rho}(2\pi|n|\varepsilon) I_{\Gamma}(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi nT). \quad (7.79)$$

Заметим, что $|\Delta\varphi(n)| \equiv |\varphi(n+1) - \varphi(n)| \geq C|n|^{-1}$ и, таким образом, при $n \in N_0$, $n \notin N'_0$ имеется оценка

$$|\delta\varphi| \equiv |\varphi(n) - \varphi_p| \geq \frac{C}{|n|}. \quad (7.80)$$

Интеграл $I_{\Gamma}(\rho_0 \mid 2\pi nT)$ в рассматриваемом случае оценивается по той же схеме, что и в случае $n \notin N'_0$, только теперь условие (7.72) выполняется, если

$$|n| \leq CT^2.$$

Снова используем тривиальную оценку (7.76) при $|n| \geq CT^2$, оценку (7.71) при условиях $|n| \leq CT^2$ и (7.73). Рассмотрим условия (7.73) при $|n| \leq CT^2$. Рассуждая так же, как и выше, при $n \notin N'_0$ получим, что условия (7.73) не налагают дополнительных ограничений, кроме случая, когда критические точки s_c близки к особым угловым точкам s_i , $i = 1, 2$, вклад которых рассмотрен в п. 4. Как следует из приведенных в п. 4 результатов, если критическая точка s_c близка к s_i , то

$$\bar{k}_c \simeq \frac{1}{\delta_0} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^3, \quad \bar{k}_c^{(1)} \simeq \frac{1}{\delta_0^2} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^3,$$

где δ_0 – масштаб функции ρ_0 , введенной в п. 4. Отсюда получаем, что условия (7.73) выполняются, если

$$\delta_0 \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^3 \geq CT^{-1/2}. \quad (7.81)$$

В силу неравенства (7.80) из оценки (7.71) имеем

$$|k(s_c)| \geq C|\delta\varphi|^{p/(p+1)} \geq C|n|^{-p/(p+1)}$$

и, следовательно, при $|n| \leq CT^2$

$$|I(\tilde{\rho}_0 \mid 2\pi nT)| \leq \frac{C}{|n|T} \left(\frac{|n|^{p/(2(p+1))}}{(|n|T)^{1/2}} + \frac{1}{T} \right).$$

Используя последнюю оценку и оценку (7.76), при $|n| \geq CT^2$ получим

$$|\Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0, n \notin N'_0)| \leq CT^2 \sum'_{|n| \leq CT^2} \frac{|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)|}{T^{3/2}|n|} + CT^2 \sum_{|n| \geq CT^2} \frac{|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)|}{|n|T}.$$

В отличие от рассмотренных выше случаев $n \in N_0$ и $n \in N'_0$, теперь надо оценить две двойные суммы в правой части последней оценки, которую перепишем в виде

$$|\Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0, n \notin N'_0)| \leq C[\Sigma_1 + \Sigma_2].$$

Оценим вторую сумму

$$\Sigma_2 = T \sum_{|n| \geq CT^2} \frac{|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)|}{|n|} \leq CT \int_{CT^2}^{\infty} \frac{r}{r(\varepsilon r)^M} dr \leq c \frac{T^3}{(\varepsilon T^2)^M}.$$

Так как $\varepsilon T^2 > T$ (см. (7.77)), то, выбирая число M достаточно большим, получим, что $\Sigma_2 = O(T^{-k})$ для любого $k > 0$.

Используя оценку (7.43), получим следующий результат:

$$\Sigma_1 = T^2 \sum'_{n \in \mathbb{Z}^2} \frac{|\hat{\rho}(2\pi|n|\varepsilon)|}{|n|} \leq CT^{1/2}\varepsilon^{-1}.$$

Подставляя последнюю оценку и оценку (7.78) в равенство (7.69), найдем нужную оценку неосновного вклада:

$$|\Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0)| \leq CT^{1/2}\varepsilon^{-1} + CT^{1/2+\kappa}(\ln T)^{1/2+\sigma} \quad \forall \sigma > 0. \quad (7.82)$$

Этот результат справедлив при условиях (7.77), (7.81).

7. *Завершение доказательства теоремы.* Учитывая введенные выше определения, запишем величину $\Delta^a(TV, \varepsilon)$, (7.21), в виде

$$\begin{aligned} \Delta^a(TV, \varepsilon) &= \Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(T, \varepsilon) = \Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid T, \varepsilon) \\ &= \Delta_{\Pi}^a(T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \in N_0) + \Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0). \end{aligned}$$

Члены, входящие в правую часть последнего равенства, были рассмотрены в пп. 4–6. Используя равенство (7.65), получим

$$\Delta^a(TV, \varepsilon) = \sum_{\{s_p \mid \mathbb{Q}\}} T^{1-1/(p+2)} F_p^a(T, \varepsilon) + R_{\Delta}(T, \varepsilon), \quad (7.83)$$

где

$$R_{\Delta}(T, \varepsilon) = O(T^{1/2}) + \Delta_{\Gamma}^a(T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(\rho_0 \mid T, \varepsilon) + \Delta_{\Gamma}^a(\tilde{\rho}_0 \mid n \notin N_0).$$

Оценки (7.32), (7.44), (7.82) позволяют утверждать, что для любого $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} |R_{\Delta}(T, \varepsilon)| &\leq C \left(\varepsilon^{-1} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{2+\sigma} + \frac{T^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}} \delta_0^{1/2} \left(\ln \frac{1}{\delta_0} \right)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. + T^{1/2}\varepsilon^{-1} + T^{1/2+\kappa/2}(\ln T)^{1/2+\sigma} \right), \end{aligned}$$

и это неравенство имеет место при условиях (7.34), (7.77), (7.81).

Выберем величины ε , δ_0 , $\varkappa$. Так как нас интересует случай $T = t \pm \delta$ и $t \gg 1$, $\delta \ll 1$, то $T \simeq t$. Сравнивая оценки (7.83) и (7.15), выберем величину ε из условия

$$t\varepsilon^{1/2} = t^{1/2}\varepsilon^{-1} \Rightarrow \varepsilon = t^{-1/3}$$

и в соответствии с предположением (7.34) положим

$$\delta_0 = Ct^{-1}\varepsilon^{1/2} = Ct^{-7/6}.$$

Учитывая условие (7.77), будем считать, что $\varkappa = \frac{1}{3} + \sigma$, $0 < \sigma < \frac{1}{6}$. Выбирая, например, $\varkappa = \frac{1}{4}$, получим

$$|R_{\pm}(t, \varepsilon)| \leq Ct^{5/6}, \quad |R_{\Delta}(T, \varepsilon)| \leq Ct^{5/6}. \quad (7.84)$$

Здесь $R_{\pm}$ – величина, фигурирующая в двусторонней оценке (7.14) и удовлетворяющая неравенству (7.15), из которого следует, что $|R_I| \leq Ct^{5/6}$ при $\varepsilon = t^{-1/3}$. Рассмотрим первый член в формуле (7.83) и покажем, что при $T = t \pm \delta$, $\delta = C\varepsilon$, $\varepsilon = t^{-1/3}$ имеет место равенство

$$\sum_{\{s_p | \mathbb{Q}\}} T^{1-1/(p+2)} F_p^a(T, \varepsilon) = \sum_{\{s_p | \mathbb{Q}\}} M^a(s_p, t) + O(t^{-1/3}), \quad (7.85)$$

при этом функция $M^a(s_p, t)$ задается равенством (7.4), в котором

$$f_a(s_p, t) = \sum_{n_1 = -\gamma(s_p)n_2} \frac{A_p e^{iB_p(t, n)}}{(2\pi|n|)^{1+1/(p+2)}}, \quad (7.86)$$

$$B_p(t, n) = -2\pi \langle n, a \rangle + 2\pi |n| t \langle z(s_p), \eta(n) \rangle.$$

В (7.83) величины $F_p^a(T, \varepsilon)$ определяются соотношениями (7.66). Так как $T = (t \pm \delta) = t \pm C\varepsilon$, то показатель экспоненты в этих равенствах имеет вид $n_2(b_1 + \varepsilon b_2)$, где $b_1 = c_1 t + c_2$, $|b| \leq C$. Поскольку величины s_p , входящие в определения величин δ_p , (7.59), можно выбрать сколь угодно малыми, то

$$\begin{aligned} F_p^a(T, \varepsilon) &= \Sigma_p^a(t, \varepsilon) + O(t^{-1/(p+2)+\sigma}) \quad \forall \sigma > 0, \\ \Sigma_p^a(t, \varepsilon) &= C_p \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(b_1 + \varepsilon b_2)k}}{|k|^{1+\alpha}} \hat{\rho}(2\pi|k|\varepsilon\sqrt{1+\gamma^2} s_p). \end{aligned}$$

Здесь и ниже $\alpha = (p+2)^{-1}$. Пусть $N = [\varepsilon^{-\beta}]$ и $0 < \beta < 1$. Поскольку $|\hat{\rho}(\omega)| \leq C$, то имеет место равенство

$$\Sigma_p^a(t, \varepsilon) = C_p \sum'_{k \leq N} \frac{e^{i(b_1 + \varepsilon b_2)k}}{|k|^{1+\alpha}} \hat{\rho}(2\pi|k|\varepsilon\sqrt{1+\gamma^2} s_p) + O(\varepsilon^{\alpha\beta}).$$

При $N\varepsilon \ll 1$ выполнены равенства $\hat{\rho}(2\pi|k|\varepsilon\sqrt{1+\gamma^2} s_p) = 1 + O(k^2\varepsilon^2)$, $e^{i(b_1 + \varepsilon b_2)k} = e^{ib_1 k}(1 + O(\varepsilon k))$, и при $\beta = 1 - \sigma$ отсюда следует, что

$$F^a(T, \varepsilon) = C_p \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ib_1 k}}{|k|^{1+\alpha}} + O(t^{-\alpha/3+\sigma}) \quad \forall \sigma > 0.$$

Чтобы получить равенство (7.85), остается заметить, что $(t \pm \delta)^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} + O(t^{-\alpha}\varepsilon)$. Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно подставить выражения (7.83), (7.85) в двустороннюю оценку (7.14) и заметить, что

главные члены в оценках сверху и снизу совпадают. Функции $f_a(s_p | t)$ в равенствах (7.4) задаются абсолютно сходящимися рядами (7.86). Эти функции ограничены и не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

§ 8. Доказательство теоремы 2.1

Пусть на торе $\mathbb{T}^2$ задана типичная метрика $\tilde{g}_0 \in \mathcal{G}$, которой соответствует кривая $\Gamma_0 = \Gamma(\tilde{g})$. Выбираем на кривой Γ_0 точку (x_0, y_0) ($y_0 = \tilde{y}(x_0)$) такую, что касательная к кривой Γ_0 в этой точке рациональна. По лемме 4.1 строим метрику $\tilde{g}$ и кривую $\Gamma(\tilde{g})$. Тогда $\|g - g_0\|_{C^1} \leq C\Delta^{1/2}$ и кривая $\Gamma(g)$ имеет рациональную точку уплощения (x_0, y_0) порядка ρ , а все другие точки уплощения на этой кривой типичные. В соответствии с условиями (7.62), (7.75) величину Δ можно выбрать таким образом, чтобы $\Delta = Ct^{-1/(p+2)+\sigma'}$ для любого $\sigma' > 0$, следовательно, величина σ в оценке $\|g - g_0\|_{C^1} \leq \sigma$ при $t \rightarrow \infty$ может быть сколь угодно малой. Мы можем воспользоваться леммой 6.1 при $\delta_1 = \delta = Ct^{-1/3}$. Поскольку области U_i удовлетворяют теореме 7.1, для всех величин $N^a((t \pm \delta_1)U_i)$ в двусторонней оценке (6.4) имеют место равенства

$$N^a((t \pm \delta_1)U_i) = (t \pm \delta_1)^2 S(U_i) + \Delta^a((t \pm \delta_1)U_i). \quad (8.1)$$

Подставляя в (8.1) выражения для величин $\Delta^a((t \pm \delta_1)U_i)$ из § 7 и используя те же рассуждения, что и в п. 7 доказательства теоремы 7.1, получим

$$N(t) = At^2 + R(\tilde{g} | t), \quad (8.2)$$

при этом для величины $R(\tilde{g} | t)$ выполняются равенства (2.8), (2.9). В формуле (8.2) имеем

$$A = S(U_1) + S(U_2) = \int_0^\pi g(t) dt.$$

Теперь заметим, что для метрики $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ в формуле $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ выполняются равенства $E = G = g(x)$ и $F = 0$. Следовательно,

$$\text{mes } \mathbb{T}^2 = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \sqrt{EG} dx dy - F^2 = 4\pi \int_0^\pi g(t) dt,$$

таким образом, $A = \frac{\text{mes } \mathbb{T}^2}{4\pi}$ в формуле (8.2). Теорема 2.1 доказана.

Список литературы

1. М. М. Постников, *Риманова геометрия*, Факториал, М., 1998; англ. пер.: М. М. Postnikov, *Geometry VI. Riemannian geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **91**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
2. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
3. Г. В. Розенблум, М. З. Соломяк, М. А. Шубин, “Спектральная теория дифференциальных операторов”, *Дифференциальные уравнения с частными производными* – 7, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **64**, ВИНТИ, М., 1989, 5–242; англ. пер.: G. V. Rozenblum, M. A. Shubin, M. Z. Solomyak, “Spectral theory of differential operators”, *Partial differential equations*. VII, Encyclopaedia Math. Sci., **64**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 1–261.

4. М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, 2-е изд., Добросвет, М., 2005; англ. пер. 1-го изд.: М. А. Shubin, *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
5. L. Hörmander, “The spectral function of an elliptic operator”, *Acta. Math.*, **121**:1 (1968), 193–218.
6. J. Chazarain, “Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes”, *Invent. Math.*, **24**:1 (1974), 65–82.
7. J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin, “The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics”, *Invent. Math.*, **29**:1 (1975), 39–79.
8. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными произведениями*, т. 4: *Интегральные операторы Фурье*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. 4: *Fourier integral operators*, Grundlehren Math. Wiss., **275**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
9. А. В. Воловой, “Улучшенная двучленная асимптотика функции распределения собственных значений эллиптического оператора на компактном многообразии”, *Докл. АН СССР*, **294**:5 (1987), 1037–1041; англ. пер.: A. V. Volovoy, “Improved two-term asymptotics of the distribution function of the eigenvalues of an elliptic operator on a compact manifold”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:3 (1987), 604–607.
10. A. V. Volovoy, “Verification of the Hamilton flow conditions associated with Weyl’s conjecture”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **8**:2 (1990), 127–136.
11. A. V. Volovoy, “Improved two-term asymptotics for the eigenvalue distribution function of an elliptic operator on a compact manifold”, *Comm. Partial Differential Equations*, **15**:11 (1990), 1509–1563.
12. А. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **93**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978.
13. Y. Colin de Verdière, “Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable”, *Math. Z.*, **171**:1 (1980), 51–73.
14. E. Krätzel, *Lattice points*, Math. Appl. (East European Ser.), **33**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.
15. M. N. Huxley, “Exponential sums and lattice points. III”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **87**:3 (2003), 591–609.
16. Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай, “Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля”, *УМН*, **48**:4 (1993), 3–130; англ. пер.: D. V. Kosygin, A. A. Minasov, Ya. G. Sinai, “Statistical properties of the spectra of Laplace–Beltrami operators on Liouville surfaces”, *Russian Math. Surveys*, **48**:4 (1993), 1–142.
17. P. H. Bérard, “On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points”, *Math. Z.*, **155**:3 (1977), 249–276.
18. H. P. McKean, “Selberg’s trace formula as applied to a compact Riemann surface”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **25**:3 (1972), 225–246.
19. D. A. Hejhal, “The Selberg trace formula and the Riemann zeta function”, *Duke Math. J.*, **43**:2 (1976), 441–482.
20. А. Б. Венков, “Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики”, *УМН*, **34**:3 (1979), 69–135; англ. пер.: A. B. Venkov, “Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics”, *Russian Math. Surveys*, **34**:3 (1979), 79–153.
21. D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$* , v. 1, Lect. Notes. in Math., **548**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

22. Д. А. Попов, “Поведение асимптотики положительного спектра семейства периодических задач Штурма–Лиувилля при непрерывном переходе от дефинитной к индефинитной задаче”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:3 (2009), 151–182; англ. пер.: D. A. Popov, “Asymptotic behaviour of the positive spectrum of a family of periodic Sturm–Liouville problems under continuous passage from a definite problem to an indefinite one”, *Izv. Math.*, **73**:3 (2009), 579–610.
23. W. G. Nowak, “Zur Gitterpunktlehre der euklidischen Ebene”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **46**:2 (1984), 209–223.
24. W. Müller, W. G. Nowak, “On lattice points in planar domains”, *Math. J. Okayama Univ.*, **27** (1985), 173–184.
25. W. Müller, W. G. Nowak, “Lattice points in planar domains: Applications of Huxley’s “discrete Hardy–Littlewood method””, *Number-theoretic analysis* (Vienna, 1988–1989), Lecture Notes in Math., **1452**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 139–164.
26. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1: *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
27. Y. Colin de Verdière, “Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbb{R}^4$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **10**:4 (1977), 559–575.
28. В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей в тензорном изложении*, т. 2, Гостехиздат, Л., 1948.
29. F. W. J. Olver, “Second-order linear differential equations with two turning points”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1975, № 278, 137–174.
30. А. Я. Хинчин, *Ценные дроби*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, The University of Chicago Press, Chicago–London, 1964.
31. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.
32. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1992.
33. Д. А. Попов, “Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов”, *УМН*, **52**:1 (1997), 77–148; англ. пер.: D. A. Popov, “Estimates with constants for some classes of oscillatory integrals”, *Russian Math. Surveys*, **52**:1 (1997), 73–145.
34. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, “Кратные тригонометрические суммы”, *Тр. МИАН СССР*, **151**, ВИНТИ, М., 1980, 3–128; англ. пер.: G. I. Arkhipov, A. A. Karatsuba, V. N. Chubarikov, “Multiple trigonometric sums”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **151**:2 (1982), 1–126.

Д. А. Попов (D. A. Popov)

Научно-исследовательский институт
физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию

18.11.2009