Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 2, 21–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:18:15

УДК 511

М. А. Королёв

Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой

Доказана новая плотностная теорема для нулей дзета-функции Римана, лежащих в критической полосе. Утверждение теоремы применяется к задаче о числе перемен знака аргумента дзета-функции Римана на почти всех коротких промежутках критической прямой.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе доказывается оценка числа нулей $\zeta(s)$, лежащих в “узких” прямоугольниках вблизи критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, а также рассматриваются приложения этой оценки к одной задаче из теории дзета-функции Римана.

В 1946 г. А. Сельберг [1] доказал следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть α – произвольное фиксированное число, $0 < \alpha \leq 0.5$, $T \geq T_0(\alpha) > 0$, $H = T^{0.5+\alpha}$, $0.5 \leq \sigma \leq 1$, и пусть $N(\sigma, T)$ обозначает число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Тогда имеет место неравенство

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) = O(HT^{-0.25\alpha(2\sigma-1)} \ln T).$$

Одним из следствий этой плотностной теоремы является результат о количестве перемен знака функции $S(t)$, которая определяется следующим образом. Если $t > 0$ отлично от ординаты нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $\arg \zeta(1/2 + it)$ получается путем непрерывного продолжения $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, соединяющей точки $s = 2$ ($\arg \zeta(2) = 0$), $s = 2 + it$ и $s = 1/2 + it$. Если же t совпадает с ординатой какого-либо из нетривиальных нулей $\zeta(s)$, то полагают

$$S(t) = \lim_{h \rightarrow 0} S(t + h).$$

Е. Титчмаршем [2] (см. также [3, с. 222]) было установлено, что при $t > 0$ функция $S(t)$ меняет свой знак бесконечное число раз. Более точное утверждение было получено А. Сельбергом в работе [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $M(T)$ – число перемен знака $S(t)$ на промежутке $(0, T]$. Если величины α , T и H удовлетворяют условиям утверждения 1, то существует постоянная $c = c(\alpha) > 0$ такая, что

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1/3} \exp(-c\sqrt{\ln \ln T}).$$

Улучшение последнего результата возможно по двум направлениям. Первое связано с заменой правой части неравенства большей величиной. Так, в 1981 г. А. Гош [4] показал, что при выполнении условий предыдущей теоремы справедливо более сильное неравенство

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T) \exp\left(-\frac{c \ln \ln T}{(\ln \ln \ln T)^{0.5-\delta}}\right),$$

где δ – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \delta < 0.5$, а $c = c(\alpha, \delta) > 0$ – некоторая постоянная.

Второе направление связано с получением нижних оценок разности $M(T + H) - M(T)$ для возможно меньших по сравнению с T значений H . Нетривиальная оценка тригонометрической суммы специального вида позволила в 1996 г. А. А. Карацубе [5], [6] доказать плотностную теорему, подобную приведенной выше, для $H = T^{27/82+\alpha}$, где α – произвольное фиксированное число с условием $0 < \alpha < 0.001$. Следствием этого явилась оценка разности $M(T + H) - M(T)$ для указанных значений H :

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1/3} \exp(-c_1\sqrt{\ln \ln T}).$$

Использование идей и методов работ [1], [4]–[6] дало возможность автору несколько улучшить два последних результата и доказать, что для $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0.001$, имеет место оценка

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T) \exp\left(-\frac{c_2 \ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right),$$

где $c_2 = c_2(\alpha) > 0$ (см. [7]).

В работе [8] упомянут следующий результат, принадлежащий А. Сельбергу: если гипотеза Римана верна, то при любых фиксированных ε , ε_1 , $0 < \varepsilon, \varepsilon_1 < 1$, для $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^\varepsilon$ выполняется неравенство

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1-\varepsilon_1}.$$

Множитель $(\ln T)^{-\varepsilon_1}$ в последнем неравенстве был заменен А. Гошем в [4] на величину

$$\exp\left(-\frac{c \ln \ln T}{(\ln \ln \ln T)^{0.5-\delta}}\right),$$

где $0 < \delta < 0.5$ и $c = c(\varepsilon, \delta) > 0$. Доказательство этого утверждения для $H = T^\varepsilon$ также использует гипотезу Римана. Неравенства А. Сельберга и А. Гоша близки к предполагаемому окончательному результату

$$M(T + H) - M(T) \sim \frac{H \ln T}{\sqrt{\pi \ln \ln T}}, \quad T^\varepsilon \leq H \leq T$$

(гипотеза А. Сельберга; см. [9]).

Цель настоящей работы состоит в доказательстве двух основных утверждений: теорем А и В. Для их формулировки нам понадобятся следующие обозначения: ε – произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству $0 < \varepsilon < 0.01$; $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$; $H = X^\varepsilon$.

ТЕОРЕМА А. Пусть $c_3 = c_3(\varepsilon) > 0$ – постоянная, и пусть $\mathcal{E}_1$ – множество значений T из промежутка $(X, 2X]$, для которых при любом σ , $0.5 \leq \sigma \leq 1$, верна оценка

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) \leq c_3 H X^{-0.01\varepsilon(2\sigma-1)} \ln X.$$

Тогда для меры этого множества справедлива асимптотическая формула

$$\mu(\mathcal{E}_1) = X - O(X^{1-0.1\varepsilon}).$$

ТЕОРЕМА В. Существует постоянная $c_4 = c_4(\varepsilon) > 0$ такая, что при всех T из множества $\mathcal{E}_1$ справедливо неравенство

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T) \exp\left(-\frac{c_4 \ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right).$$

Отметим, что доказательство первой теоремы основано на приемах, примененных А. А. Карацубой в [10].

Наряду с определенными выше ε , X , H в работе используются следующие обозначения: $L = \ln X$, $k = [L] \geq 2$, $x = H^{0.01}$, $\Delta = H^{-1}L^2$, $H_1 = HL^{-1}$, $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, $D = (2H_1)^k$. Под символом $\sum_A^B$ понимается сумма $O(B)$ слагаемых, зависящих от параметра A . Буквы $c, c_1, c_2, \dots$ обозначают положительные постоянные, зависящие от ε и в разных соотношениях, вообще говоря, разные. Постоянные в знаках O и $\ll$ также зависят от ε . Через θ обозначены комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы.

Моментом степени $\lambda \geq 0$ функции $f(u)$, определенной на промежутке $(a, b]$, будем называть интеграл

$$J(f; \lambda) = \int_a^b |f(u)|^\lambda du.$$

Если $\lambda = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то интегралы $J(f; \lambda)$ будем называть также *четными моментами* f . Кроме того, будем пользоваться стандартным обозначением

$$S_1(t) = \int_0^t S(u) du.$$

§ 2. Вспомогательные утверждения

При формулировке и доказательстве утверждений этого параграфа нам понадобятся ряд новых обозначений: λ_1, λ_2 – целые числа, $1 \leq \lambda_1, \lambda_2 < x$; $\gamma = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$; $(2\lambda_1 \Delta)^{-1} < Y \leq \sqrt{X}x$; $Y < Y_1 \leq 2Y$; $Y_2 = Y_1(1 + \Delta)$. Для целых m и n положим

$$\Phi(m, n; \gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } m\gamma < n \leq m\gamma(1 + \Delta), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ЛЕММА 1. Пусть $a > 0$, b – произвольное вещественное число. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^2 + ibt\right) dt = \sqrt{\pi}a \exp\left(-\left(\frac{ab}{2}\right)^2\right).$$

Это утверждение достаточно известно.

ЛЕММА 2. Для величины R , равной числу решений неравенства

$$|y_1 z_2 - y_2 z_1| \leq 24\gamma Y^2 X^{-1} L$$

с дополнительными условиями

$$Y < y_r \leq Y_1, \quad y_r \gamma < z_r \leq y_r \gamma(1 + \Delta), \quad r = 1, 2,$$

справедлива оценка

$$R \ll Y^2 x^6 H^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z_1 \lambda_2 = y_1 \lambda_1 + h_1$, $z_2 \lambda_2 = y_2 \lambda_1 + h_2$. Определенные таким образом целые числа h_1 и h_2 удовлетворяют неравенствам

$$1 \leq h_r \leq y_r \lambda_1 \Delta \leq 2Yx\Delta, \quad r = 1, 2.$$

Используя новые обозначения, получаем

$$\begin{aligned} y_1 z_2 - y_2 z_1 &= \lambda_2^{-1} (y_1 (z_2 \lambda_2) - y_2 (z_1 \lambda_2)) \\ &= \lambda_2^{-1} (y_1 (y_2 \lambda_1 + h_2) - y_2 (y_1 \lambda_1 + h_1)) = \lambda_2^{-1} (y_1 h_2 - y_2 h_1). \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_2 \cdot 24\gamma Y^2 X^{-1} L \leq 24x^2 L \leq x^3$, то величина R не превосходит числа решений неравенства $|y_1 h_2 - y_2 h_1| \leq x^3$ с дополнительными условиями

$$Y < y_1, y_2 \leq 2Y, \quad 1 \leq h_1, h_2 \leq 2Yx\Delta.$$

При этих же ограничениях на переменные обозначим символом $r(m)$ количество решений уравнения $y_1 h_2 - y_2 h_1 = m$. Замечая, что

$$r(m) = \int_0^1 \left| \sum_{Y < y \leq 2Y} \sum_{1 \leq h \leq 2Yx\Delta} e^{2\pi i \alpha y h} \right|^2 e^{-2\pi i \alpha m} d\alpha \leq r(0),$$

получим цепочку неравенств

$$R \leq \sum_{|m| \leq x^3} r(m) \leq (2x^3 + 1)r(0).$$

Величина $r(0)$ равна числу решений симметричного уравнения $y_1 h_2 = y_2 h_1$. Его левая часть может принимать не более $2Yx\Delta(Y + 1)$ значений. Фиксируя одно из них и обозначая его буквой ν , приходим к уравнению $y_1 h_2 = \nu$, число решений которого не превосходит $\tau(\nu)$. Поскольку $Y < \nu \leq 2Y \cdot 2Yx\Delta < X$, то $\tau(\nu) \leq x$ при $X \geq X_0(\varepsilon)$. Заключаем, что

$$r(0) \leq 2Yx\Delta(Y + 1)x \ll (Yx)^2 \Delta, \quad R \ll x^3 (Yx)^2 \Delta \ll Y^2 x^6 H^{-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $Y < u \leq Y_1$, $Y\gamma < v \leq Y_2\gamma$, и пусть

$$F(T) = \sum_{Y < m \leq u} \sum_{Y\gamma < n \leq v} \varepsilon_1(m) \varepsilon_2(n) \Phi(m, n; \gamma) \left(\frac{m}{n}\right)^{iT},$$

где $|\varepsilon_1(m)| = |\varepsilon_2(n)| = 1$. Тогда для интеграла

$$I = \int_X^{2X} |F(T)| dT$$

справедливо неравенство $I \ll XYx^3H^{-0.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к интегралу I неравенство Коши, получим, что $I^2 \leq XJ$,

$$J = \int_X^{2X} |F(T)|^2 dT.$$

Поскольку $e^{4-(T/X)^2} \geq 1$ при $X \leq T \leq 2X$, то

$$\begin{aligned} J &\leq e^4 \int_X^{2X} e^{-(\frac{T}{X})^2} |F(T)|^2 dT \leq e^4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{T}{X})^2} |F(T)|^2 dT \\ &= e^4 \sum_{Y < m_1, m_2 \leq u} \sum_{Y\gamma < n_1, n_2 \leq v} \varepsilon_1(m_1) \varepsilon_2(n_1) \bar{\varepsilon}_1(m_2) \bar{\varepsilon}_2(n_2) \Phi(m_1, n_1; \gamma) \Phi(m_2, n_2; \gamma) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{T}{X}\right)^2 + iT \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right) dT. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой леммы 1, заключаем, что

$$\begin{aligned} J &\leq e^4 \sqrt{\pi} X \sum_{Y < m_1, m_2 \leq u} \sum_{Y\gamma < n_1, n_2 \leq v} \Phi(m_1, n_1; \gamma) \\ &\quad \times \Phi(m_2, n_2; \gamma) \exp\left(-\left(\frac{X}{2} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right)^2\right) \\ &\ll X \sum_{Y < m_1, m_2 \leq u} \sum_{\substack{m_1 \gamma < n_1 \leq m_1 \gamma(1+\Delta) \\ m_2 \gamma < n_2 \leq m_2 \gamma(1+\Delta)}} \exp\left(-\left(\frac{X}{2} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Последнюю сумму разобьем на две: σ_1 и σ_2 . К сумме σ_1 отнесем все слагаемые, для которых

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| \leq 24\gamma Y^2 X^{-1} L,$$

а к σ_2 – все остальные. Оценивая каждое слагаемое первой суммы тривиально, заключаем, что σ_1 не превосходит числа решений неравенства

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| \leq 24\gamma Y^2 X^{-1} L$$

с дополнительными условиями

$$Y < m_r \leq 2Y, \quad m_r \gamma < n_r \leq m_r \gamma(1 + \Delta), \quad r = 1, 2.$$

Согласно лемме 2 $\sigma_1 \ll Y^2 x^6 H^{-1}$. Пусть теперь m_1, m_2, n_1, n_2 таковы, что

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| > 24\gamma Y^2 X^{-1} L.$$

Тогда в случае $m_1 n_2 > m_2 n_1$ получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1} &= \ln \left(1 + \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_2 n_1} \right) > \ln \left(1 + \frac{24\gamma Y^2 X^{-1} L}{2Y \cdot 3Y\gamma} \right) \\ &= \ln(1 + 4LX^{-1}) \geq 2LX^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\exp \left(- \left(\frac{X}{2} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1} \right)^2 \right) \leq \exp \left(- \left(\frac{X}{2} \frac{2L}{X} \right)^2 \right) = e^{-L^2}.$$

Это же неравенство будет выполняться и в случае $m_1 n_2 < m_2 n_1$. Поскольку число слагаемых в σ_2 не превосходит Y^4 , то $\sigma_2 \leq Y^4 e^{-L^2} \ll Y^2 x^6 H^{-1}$. Таким образом,

$$J \ll XY^2 x^6 H^{-1} \quad \text{и} \quad I \ll XY x^3 H^{-0.5}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $Q = [P\sqrt{\gamma}]$, $0 < u \leq \Delta\sqrt{X\gamma}$, и пусть

$$F_1(T) = \sum_{0 \leq \nu \leq u} \varepsilon(\nu)(Q - \nu)^{iT},$$

где $|\varepsilon(\nu)| = 1$. Тогда для интеграла

$$I_1 = \int_X^{2X} |F_1(T)|^2 dT$$

справедливо неравенство

$$I_1 \ll (x\sqrt{X})^3 H^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим целые числа n_0 и n_1 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} 2\pi\gamma^{-1}n_0^2 &\leq X < 2\pi\gamma^{-1}(n_0 + 1)^2, \\ 2\pi\gamma^{-1}n_1^2 &\leq 2X < 2\pi\gamma^{-1}(n_1 + 1)^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_1 \leq \int_{2\pi\gamma^{-1}n_0^2}^{2\pi\gamma^{-1}(n_1+1)^2} |F_1(T)|^2 dT = \sum_{n=n_0}^{n_1} I(n),$$

где

$$I(n) = \int_{2\pi\gamma^{-1}n^2}^{2\pi\gamma^{-1}(n+1)^2} |F_1(T)|^2 dT.$$

Зафиксируем произвольным образом n , $n_0 \leq n \leq n_1$. Если $2\pi\gamma^{-1}n^2 \leq T < 2\pi\gamma^{-1}(n+1)^2$, то $n \leq P\sqrt{\gamma} = \sqrt{T\gamma/(2\pi)} < n+1$, $Q = [P\sqrt{\gamma}] = n$, и сумма $F_1(T)$ принимает следующий вид:

$$F_1(T) = \sum_{0 \leq \nu \leq u} \varepsilon(\nu)(n-\nu)^{iT}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I(n) &= 2\pi\gamma^{-1}([u]+1)((n+1)^2 - n^2) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq u \\ \nu_1 \neq \nu_2}} \varepsilon(\nu_1)\bar{\varepsilon}(\nu_2) \int_{2\pi\gamma^{-1}n^2}^{2\pi\gamma^{-1}(n+1)^2} \left(\frac{n-\nu_1}{n-\nu_2}\right)^{iT} dT. \end{aligned}$$

Интегрируя и переходя к неравенствам, получим

$$|I(n)| \ll \gamma^{-1}n\Delta\sqrt{X}\gamma + \sum_{0 \leq \nu_1 < \nu_2 \leq u} \left(\ln\left(\frac{n-\nu_1}{n-\nu_2}\right)\right)^{-1}.$$

Если $\nu_2 > \nu_1$ то

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n-\nu_1}{n-\nu_2}\right) &= \ln\left(\frac{1-\nu_1/n}{1-\nu_2/n}\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\nu_2^r - \nu_1^r}{rn^r} \\ &= \frac{\nu_2 - \nu_1}{n} \left(1 + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\nu_2^r - \nu_1^r}{\nu_2 - \nu_1} \frac{1}{rn^{r-1}}\right) > \frac{\nu_2 - \nu_1}{n}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} |I(n)| &\ll \gamma^{-1}n\Delta\sqrt{X}\gamma + \sum_{0 \leq \nu_1 < \nu_2 \leq u} \frac{n}{\nu_2 - \nu_1} \\ &\ll n\left(\gamma^{-1}\Delta\sqrt{X}\gamma + \sum_{0 \leq \nu_1 \leq u} \sum_{1 \leq r \leq u} r^{-1}\right) \ll n\Delta\sqrt{X}\gamma(\gamma^{-1} + L) \\ &\ll nx\Delta\sqrt{X}\gamma \ll n\Delta\sqrt{X}x^{1.5}. \end{aligned}$$

Переходя к оценке I_1 , будем иметь

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \Delta\sqrt{X}x^{1.5} \sum_{n=n_0}^{n_1} n \ll \Delta\sqrt{X}x^{1.5}n_1^2 \ll \Delta\sqrt{X}x^{1.5}X\gamma \\ &\ll X^{1.5}x^{2.5}L^2H^{-1} \ll (x\sqrt{X})^3H^{-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Основные леммы

В этом параграфе докажем две леммы, которые являются основными при доказательстве плотностной теоремы (теоремы А).

ЛЕММА 5. Пусть γ пробегает все рациональные дроби, числитель и знаменатель которых не превосходят x , и пусть

$$r(\sigma_1, T) = \sum_{\gamma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |W(\sigma_1, T_1; \gamma)| dt dt_1 \dots dt_k,$$

где

$$W(\sigma_1, T_1; \gamma) = \sum_{m \leq P_1} \sum_{n \leq P_2} (mn)^{-\sigma_1} \Phi(m, n; \gamma) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1},$$

$P_1 = P/\sqrt{\gamma}$, $P_2 = P\sqrt{\gamma}$, $T_1 = T + t + t_1 + \dots + t_k$. Тогда существует множество E такое, что $\mu(E) \ll XH^{-0.1}$, и для всех T из промежутка $(X, 2X]$, не принадлежащих E , при любом σ_1 , удовлетворяющем условию $0 \leq \sigma_1 \leq 1$, справедлива оценка

$$r(\sigma_1, T) \ll HD(1 + X^{0.5-\sigma_1})H^{-0.3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное значение $\gamma = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$ и преобразуем сумму $W_1 = W(\sigma_1, T_1; \gamma)$ так, чтобы границы изменения m и n в ней не зависели от T . Пусть $A = [\sqrt{Xx/\pi}] + 2$. Положим

$$\begin{aligned} \delta_1(m) &= (2A+1)^{-1} \sum_{a=-A}^A \sum_{m_1 \leq P_1} \exp\left(2\pi i \frac{a(m-m_1)}{2A+1}\right), \\ \delta_2(n) &= (2A+1)^{-1} \sum_{b=-A}^A \sum_{n_1 \leq P_2} \exp\left(2\pi i \frac{b(n-n_1)}{2A+1}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $P_1, P_2 < A$, то при $r = 1, 2$

$$\delta_r(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq \nu \leq P_r, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя введенные функции $\delta_1(m)$ и $\delta_2(n)$, запишем W_1 в следующем виде:

$$W_1 = \sum_{m, n \leq A} \delta_1(m) \delta_2(n) (mn)^{-\sigma_1} \Phi(m, n; \gamma) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1}.$$

Подставляя в это равенство явные выражения для $\delta_r(\nu)$, $r = 1, 2$, и меняя местами порядки суммирования, получим

$$W_1 = (2A+1)^{-2} \sum_{a, b=-A}^A \left(\sum_{m_1 \leq P_1} e^{-2\pi i \frac{am_1}{2A+1}} \right) \left(\sum_{n_1 \leq P_2} e^{-2\pi i \frac{bn_1}{2A+1}} \right) W_2(a, b),$$

где

$$W_2(a, b) = \sum_{m, n \leq A} (mn)^{-\sigma_1} e^{2\pi i \frac{am+bn}{2A+1}} \Phi(m, n; \gamma) \left(\frac{m}{n}\right)^{iT_1}.$$

Границы изменения m и n в каждой из сумм $W_2(a, b)$ уже не зависят от T . Переходя к неравенствам, получим

$$|W_1| \leq \sum_{a, b=-A}^A (|a|+1)^{-1} (|b|+1)^{-1} |W_2(a, b)|.$$

Зафиксируем произвольно значения a и b и преобразуем сумму $W_2 = W_2(a, b)$. Промежуток изменения величины m разобьем на $O(L)$ промежутков вида $M < m \leq M_1$, где $M_1 \leq 2M$. Так как $\Phi(m, n; \gamma)$ отлично от нуля лишь при $m\gamma < n \leq m\gamma(1 + \Delta)$, то при $M < m \leq M_1$ все значения n , для которых $\Phi(m, n; \gamma) \neq 0$, содержатся в промежутке $M\gamma < n \leq M_1\gamma(1 + \Delta) = M_2\gamma$. Перепишем теперь неравенство, которому удовлетворяют m и n , в виде

$$m\lambda_1 < n\lambda_2 \leq m\lambda_1(1 + \Delta).$$

Если $M < (2\lambda_1\Delta)^{-1}$, то для каждого m из промежутка $M < m \leq M_1$ будут выполняться неравенства

$$m\lambda_1(1 + \Delta) \leq m\lambda_1 + 2M\lambda_1\Delta < m\lambda_1 + 2\lambda_1\Delta(2\lambda_1\Delta)^{-1} = m\lambda_1 + 1,$$

и сумма по n оказывается пустой. Учитывая это замечание, представим W_2 в виде

$$W_2 = \sum_M' W_3(M),$$

где

$$W_3(M) = \sum_{M < m \leq M_1} \sum_{M\gamma < n \leq M_2\gamma} (mn)^{-\sigma_1} \varepsilon_1(m) \varepsilon_2(n) \Phi(m, n; \gamma) \left(\frac{m}{n}\right)^{iT_1},$$

$$\varepsilon_1(m) = e^{2\pi i \frac{am}{2A+1}} m^{i(t+t_1+\dots+t_k)}, \quad \varepsilon_2(n) = e^{2\pi i \frac{bn}{2A+1}} n^{-i(t+t_1+\dots+t_k)},$$

а штрих означает суммирование по $M \geq (2\lambda_1\Delta)^{-1}$. Зафиксируем любое значение M и применим к сумме $W_3(M)$ формулу частного суммирования в следующей форме (см. [10]): если $g_1(u)$ и $g_2(v)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $G(m, n)$ – произвольная комплекснозначная функция, то

$$\begin{aligned} \sum_{A_1 < m \leq B_1} \sum_{A_2 < n \leq B_2} g_1(m) g_2(n) G(m, n) &= \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} F(u, v) g_1'(u) g_2'(v) du dv \\ &- g_2(B_2) \int_{A_1}^{B_1} F(u, B_2) g_1'(u) du - g_1(B_1) \int_{A_2}^{B_2} F(B_1, v) g_2'(v) dv \\ &+ g_1(B_1) g_2(B_2) F(B_1, B_2), \end{aligned}$$

где

$$F(u, v) = \sum_{A_1 < m \leq u} \sum_{A_2 < n \leq v} G(m, n).$$

Положим $g_1(u) = u^{-\sigma_1}$, $g_2(v) = v^{-\sigma_1}$, $A_1 = M$, $B_1 = M_1$, $A_2 = M\gamma$, $B_2 = M_2\gamma$, $G(m, n) = \varepsilon_1(m)\varepsilon_2(n)\Phi(m, n; \gamma)(mn^{-1})^{iT_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} W_3 &= \sigma_1^2 \int_M^{M_1} \int_{M\gamma}^{M_2\gamma} F(u, v)(uv)^{-\sigma_1-1} du dv \\ &\quad + \sigma_1(M_2\gamma)^{-\sigma_1} \int_M^{M_1} F(u, M_2\gamma)u^{-\sigma_1-1} du \\ &\quad + \sigma_1 M_1^{-\sigma_1} \int_{M\gamma}^{M_2\gamma} F(M_1, v)v^{-\sigma_1-1} dv \\ &\quad + (M_1 M_2\gamma)^{-\sigma_1} F(M_1, M_2\gamma). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $u \asymp M$, $v \asymp M\gamma$, $\gamma^{-\sigma_1} \ll x$, находим

$$\begin{aligned} |W_3| &\ll x M^{-2\sigma_1} \left(\gamma^{-1} M^{-2} \int_M^{M_1} \int_{M\gamma}^{M_2\gamma} |F(u, v)| du dv \right. \\ &\quad + (\gamma M)^{-1} \left(\int_M^{M_1} |F(u, M_2\gamma)| du + \int_{M\gamma}^{M_2\gamma} |F(M_1, v)| dv \right) \\ &\quad \left. + |F(M_1, M_2\gamma)| \right). \end{aligned}$$

Используя полученные оценки, будем иметь

$$r(\sigma_1, T) \ll x \sum_M^L M^{-2\sigma_1} K(M; T),$$

где

$$\begin{aligned} K(M; T) &= \sum_{\gamma} \sum_{a, b=-A}^A (|a|+1)^{-1} (|b|+1)^{-1} \\ &\quad \times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left(\gamma^{-1} M^{-2} \int_M^{M_1} \int_{M\gamma}^{M_2\gamma} |F(u, v)| du dv \right. \\ &\quad + (\gamma M)^{-1} \left(\int_M^{M_1} |F(u, M_2\gamma)| du + \int_{M\gamma}^{M_2\gamma} |F(M_1, v)| dv \right) \\ &\quad \left. + |F(M_1, M_2\gamma)| \right) dt dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Обозначим

$$I(u, v) = \int_X^{2X} |F(u, v)| dT.$$

Положив в лемме 3 $Y = M$, $Y_1 = M_1$, $Y_2 = M_2$, заключаем, что

$$I(u, v) \ll XMx^3H^{-0.5}.$$

Воспользовавшись этой оценкой, находим

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} K(M; T) dT &\ll \sum_{\gamma} \sum_{a, b=-A}^A (|a|+1)^{-1}(|b|+1)^{-1} HDXMx^3H^{-0.5} \\ &\quad \times (\gamma^{-1}M^{-2}\gamma M^2 + (\gamma M)^{-1}(M + M\gamma) + M) \\ &\ll HDXMx^3H^{-0.5}L^2 \sum_{\gamma} (1 + \gamma^{-1}) \ll HDXMx^5L^3H^{-0.5}. \end{aligned}$$

Обозначим символом $E(M)$ множество тех T из промежутка $(X, 2X]$, для которых выполнено неравенство

$$K(M; T) > HDMx^5L^4H^{-0.4},$$

и оценим меру этого множества сверху. Для этого проинтегрируем по $E(M)$ обе части последнего неравенства и воспользуемся полученной оценкой среднего значения величины $K(M; T)$:

$$\begin{aligned} HDMx^5L^4H^{-0.4}\mu(E(M)) &\leq \int_{E(M)} K(M; T) dT \leq \int_X^{2X} K(M; T) dT \\ &\ll HDXMx^5L^3H^{-0.5}. \end{aligned}$$

Производя сокращения, получим

$$\mu(E(M)) \ll XH^{-0.1}L^{-1}.$$

Построим такое множество $E(M)$ для каждого из $O(L)$ значений M и обозначим символом E их объединение. Тогда $\mu(E) \ll XH^{-0.1}$ и на дополнении к E для каждого M справедливо неравенство

$$K(M; T) \ll HDMx^5L^3H^{-0.4}.$$

Для таких T при любом значении σ_1 , $0 \leq \sigma_1 \leq 1$, имеет место оценка

$$r(\sigma_1, T) \ll x \sum_M^L HDMx^5L^3H^{-0.4}M^{-2\sigma_1} \ll HDx^6L^3H^{-0.4} \sum_M^L M^{1-2\sigma_1}.$$

Поскольку $1 \leq (2x\Delta)^{-1} < M \leq \sqrt{X}x$, то

$$\begin{aligned} r(\sigma_1, T) &\ll HDx^6L^4H^{-0.4}(1 + (xX)^{0.5-\sigma_1}) \\ &\ll HDx^7H^{-0.4}(1 + X^{0.5-\sigma_1}) \ll HD(1 + X^{0.5-\sigma_1})H^{-0.3}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть γ пробегает все рациональные дроби, числитель и знаменатель которых не превосходят x , и пусть

$$\varrho(\sigma, T) = \sum_{\gamma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |V(\sigma, T_1; \gamma)| dt dt_1 \dots dt_k,$$

где

$$V(\sigma, T_1; \gamma) = \sum_{Q_2 < m, n \leq Q_1} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (mn)^{iT_1},$$

$Q_1 = P\sqrt{\gamma}$, $Q_2 = Q_1(1 - \Delta)$. Тогда существует множество G такое, что $\mu(G) \ll XH^{-0.1}$, и для всех T из промежутка $(X, 2X]$, не принадлежащих G , при любом σ , удовлетворяющем условию $0.5 \leq \sigma \leq 1$, справедлива оценка

$$\varrho(\sigma, T) \ll HDH^{-0.8}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное значение $\gamma = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$ и преобразуем сумму $V_1 = V(\sigma, T_1; \gamma)$ так, чтобы границы изменения m и n не зависели от T . Положим $Q = [Q_1] + 1$, $q = [Q_1] - [Q_2] - 1$, $B = [\Delta\sqrt{X\gamma/\pi}] + 2$. Используя эти обозначения, запишем сумму V_1 в виде

$$V_1 = \sum_{\mu, \nu=1}^q (Q - \mu)^{-\sigma+iT_1} (Q - \nu)^{\sigma-1+iT_1}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \delta_1(\mu) &= (2B+1)^{-1} \sum_{a=-B}^B \sum_{\mu_1=1}^q \exp\left(2\pi i \frac{a(\mu - \mu_1)}{2B+1}\right), \\ \delta_2(\nu) &= (2B+1)^{-1} \sum_{b=-B}^B \sum_{\nu_1=1}^q \exp\left(2\pi i \frac{b(\nu - \nu_1)}{2B+1}\right). \end{aligned}$$

Тогда для $r = 1, 2$

$$\delta_r(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq \lambda \leq q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь сумма V_1 принимает вид

$$V_1 = \sum_{\mu, \nu=1}^q \delta_1(\mu) \delta_2(\nu) (Q - \mu)^{-\sigma+iT_1} (Q - \nu)^{\sigma-1+iT_1}.$$

Подставляя явные выражения для $\delta_1(\mu)$ и $\delta_2(\nu)$ и меняя местами порядки суммирования, получим

$$V_1 = (2B+1)^{-2} \sum_{a,b=1}^B \left(\sum_{\mu_1=1}^q e^{-2\pi i \frac{a\mu_1}{2B+1}} \right) \left(\sum_{\nu_1=1}^q e^{-2\pi i \frac{b\nu_1}{2B+1}} \right) V_2(a, b),$$

где

$$V_2(a, b) = \sum_{\mu, \nu=1}^B \delta_1(\mu) \delta_2(\nu) (Q - \mu)^{-\sigma + iT_1} (Q - \nu)^{\sigma - 1 + iT_1} e^{2\pi i \frac{a\mu + b\nu}{2B+1}}.$$

Переходя к неравенствам, находим

$$|V_1| \leq \sum_{a, b=1}^B (|a| + 1)^{-1} (|b| + 1)^{-1} |V_2(a, b)|.$$

Каждую из сумм $V_2(a, b)$ можно представить в виде $V_2(a, b) = V_3(a) V_3(b)$,

$$V_3(c) = \sum_{\nu=1}^B (Q - \nu)^{-\sigma_1} e^{2\pi i \frac{c\nu}{2B+1}},$$

а σ_1 равно σ или $1 - \sigma$. Применяя к сумме $V_3(c)$ формулу частного суммирования, получаем

$$V_3(c) = (Q - B)^{-\sigma_1} F(B; c) + \sigma_1 \int_0^B (Q - u)^{-\sigma_1 - 1} F(u; c) du,$$

где

$$F(u; c) = \sum_{0 < \nu \leq u} (Q - \nu)^{iT_1} e^{2\pi i \frac{c\nu}{2B+1}}.$$

Переходя к оценкам и пользуясь тем, что $Q - u \asymp Q \asymp \sqrt{X\gamma}$, приходим к неравенству

$$|V_3(c)| \ll Q^{-\sigma_1} \left(|F(B; c)| + Q^{-1} \int_0^B |F(u; c)| du \right).$$

Полагая в последнем неравенстве $\sigma_1 = \sigma$, $c = a$ и $\sigma_1 = 1 - \sigma$, $c = b$, находим

$$\begin{aligned} |V_2(a, b)| &\ll Q^{-1} \left(|F(B; a)| + Q^{-1} \int_0^B |F(u; a)| du \right) \\ &\quad \times \left(|F(B; b)| + Q^{-1} \int_0^B |F(u; b)| du \right) \\ &\ll Q^{-1} \left(|F(B; a)| |F(B; b)| + Q^{-1} \int_0^B \left(|F(u; a)| |F(B; b)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |F(B; a)| |F(u; b)| \right) du + Q^{-2} \int_0^B \int_0^B |F(u; a)| |F(v; b)| du dv \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что при любых u и v

$$|F(u; a)| |F(v; b)| \leq |F(u; a)|^2 + |F(v; b)|^2,$$

преобразуем неравенство для $V_2(a, b)$ к виду

$$|V_2(a, b)| \ll Q^{-1} \left(|F(B; a)|^2 + |F(B; b)|^2 + Q^{-1} \int_0^B (|F(u; a)|^2 + |F(u; b)|^2) du \right).$$

Собирая полученные оценки вместе и пользуясь тем, что $Q^{-1} \ll \sqrt{x}X^{-0.5}$, заключаем, что

$$\varrho(\sigma, T) \ll X^{-0.5} \sqrt{x} K(T),$$

где

$$\begin{aligned} K(T) = \sum_{\gamma} \sum_{a, b=-B}^B (|a|+1)^{-1} (|b|+1)^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left(|F(B; a)|^2 \right. \\ \left. + |F(B; b)|^2 + Q^{-1} \int_0^B (|F(u; a)|^2 + |F(u; b)|^2) du \right) dt dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Положим

$$I(u; c) = \int_X^{2X} |F(u; c)|^2 dT.$$

Согласно лемме 4 $I(u; c) \ll X\sqrt{X}x^3H^{-1}$. Используя эту оценку, находим

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} K(T) dT &\ll \sum_{\gamma} \sum_{a, b=-B}^B (|a|+1)^{-1} (|b|+1)^{-1} \\ &\times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} X\sqrt{X}x^3H^{-1}(1+Q^{-1}B) dt dt_1 \dots dt_k \\ &\ll HDX\sqrt{X}x^3H^{-1}(xL)^2 \ll HDX\sqrt{X}x^6H^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть G – множество тех T , $X \leq T \leq 2X$, для которых

$$K(T) > HD\sqrt{X}x^6H^{-0.9}.$$

Чтобы оценить меру множества G , проинтегрируем по G последнее неравенство и воспользуемся полученной выше оценкой:

$$HD\sqrt{X}x^6H^{-0.9}\mu(G) \leq \int_G K(T) dT \leq \int_X^{2X} K(T) dT \ll HDX\sqrt{X}x^6H^{-1},$$

откуда

$$HD\sqrt{X}x^6H^{-0.9}\mu(G) \ll HDX\sqrt{X}x^6H^{-1}.$$

Производя сокращения, находим $\mu(G) \ll XH^{-0.1}$. Для завершения доказательства леммы остается лишь заметить, что для T , не принадлежащих множеству G , справедливы оценки

$$K(T) \leq HD\sqrt{X}x^6H^{-0.9}$$

и

$$\varrho(\sigma, T) \ll HDx^6\sqrt{x}H^{-0.9} \ll HDH^{-0.8},$$

где σ – любое число, удовлетворяющее условию $0.5 \leq \sigma \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетривиальные оценки сумм, подобных $r(\sigma_1, T)$ и $\varrho(\sigma, T)$, были получены А. А. Карацубой [5] для случая $H \geq T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0.001$. Утверждения лемм этого параграфа отражают тот факт, что для “почти всех” T суммы $r(\sigma_1, T)$ и $\varrho(\sigma, T)$ при любых рассматриваемых σ_1 и σ допускают нетривиальную оценку уже для $H \geq T^\varepsilon$.

§ 4. Доказательство теоремы А

Доказательству основного утверждения этого параграфа предпошлем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 7. Пусть $s = \sigma + it$, $s \neq 1$, $y \geq 1$. Тогда равномерно по $\sigma \geq 0$, $|t| \leq y$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq y} n^{-s} - \frac{y^{1-s}}{1-s} + O(y^{-\sigma}).$$

ЛЕММА 8. Пусть $s = \sigma + it$, $0.5 \leq \sigma \leq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ и $t = 2\pi yz$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq y} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq z} n^{s-1} + O(y^{-\sigma}) + O(z^{\sigma-1} t^{0.5-\sigma}),$$

где

$$\chi(s) = e^{\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{0.5-\sigma} \left(\frac{t}{2\pi e} \right)^{-it},$$

а постоянные в знаках O – абсолютные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЭТИХ УТВЕРЖДЕНИЙ см. в [3], [11], [12].

ЛЕММА 9. Пусть $0.5 \leq \sigma \leq 1$, $|t - T| \leq 3H$, γ – рациональная дробь, числитель и знаменатель которой – натуральные числа, не превосходящие x , $P_1 = P\sqrt{\gamma}$, $P_2 = P/\sqrt{\gamma}$. Тогда имеет место равенство

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma - it} + \vartheta P^{1-2\sigma-2it} \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} + O(X^{-0.2}),$$

где $\vartheta = \exp(i(\pi/4 + T))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим величину x_1 из соотношения $2\pi P x_1 = t$ и положим в предыдущей лемме $y = x_1\sqrt{\gamma}$, $z = P_2$. Таким образом получим равенство

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq x_1\sqrt{\gamma}} n^{-\sigma - it} + \chi(\sigma + it) \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} + R,$$

в котором

$$R \ll (x_1\sqrt{\gamma})^{-\sigma} + P_2^{\sigma-1} T^{0.5-\sigma} \ll T^{-0.5\sigma} (\gamma^{-\sigma/2} + \gamma^{(1-\sigma)/2}) \ll X^{-0.2}.$$

Поскольку

$$|x_1\sqrt{\gamma} - P_1| = \sqrt{\gamma}|x_1 - P| = \sqrt{\gamma} \left| \frac{t}{2\pi P} - P \right| = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi P} |t - T| \leq \frac{3H\sqrt{\gamma}}{2\pi P} < 1,$$

то при замене $x_1\sqrt{\gamma}$ на P_1 в формуле для $\zeta(\sigma + it)$ соответствующая сумма может измениться лишь на одно последнее слагаемое, величина которого есть $O((x_1\sqrt{\gamma})^{-\sigma}) = O(X^{-0.2})$. Поэтому выражение для $\zeta(\sigma + it)$ принимает вид

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma - it} + \chi(\sigma + it) \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma - 1 + it} + O(X^{-0.2}).$$

Для завершения доказательства остается показать, что множитель $\chi(\sigma + it)$ в этом выражении может быть заменен на величину $\vartheta P^{1-2\sigma-2it}$. Прежде всего, из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{0.5-\sigma} - \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{0.5-\sigma} = O(HT^{-0.5-\sigma}) = O(HX^{-1}).$$

Поэтому

$$\chi(\sigma + it) = e^{\pi i/4} P^{1-2\sigma} \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} + O(HX^{-1}).$$

Далее, для рассматриваемых значений T имеем

$$\begin{aligned} t^{it} &= T^{it} \left(\frac{t}{T}\right)^{it} = T^{it} \exp\left(it \ln\left(1 + \frac{t-T}{T}\right)\right) \\ &= T^{it} \exp\left(it \left(\frac{t-T}{T} + O(H^2 X^{-2})\right)\right) = T^{it} \exp\left(\frac{it(t-T)}{T}\right) + O(H^2 X^{-1}) \\ &= T^{it} \exp\left(\frac{i(T + (t-T))(t-T)}{T}\right) + O(H^2 X^{-1}) \\ &= T^{it} e^{i(t-T)} \exp\left(\frac{i(t-T)^2}{T}\right) + O(H^2 X^{-1}) = e^{-iT} (eT)^{it} + O(H^2 X^{-1}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} = e^{iT} P^{-2it} + O(H^2 X^{-1})$$

и

$$\chi(\sigma + it) = e^{i(\pi/4+T)} P^{1-2\sigma-2it} + O(H^2 X^{-1}).$$

Подставляя это выражение в формулу для $\zeta(\sigma + it)$ и пользуясь тем, что

$$H^2 X^{-1} \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1} \ll H^2 X^{-1} X^{0.5\sigma} \sqrt{x} \ll X^{-0.2},$$

приходим к утверждению леммы.

Следуя работе [1], рассмотрим “успокаивающую” функцию $\eta_\sigma(s) = \eta(s)$. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и

$$\varphi_\alpha(n) = n^\alpha \prod_{p|n} (1 - p^{-\alpha}).$$

Для $0.5 < \sigma \leq 1$ определим числа λ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, [x]$, равенствами

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= \nu^{2\sigma} \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{\substack{d < x\nu^{-1} \\ (d, \nu)=1}} \frac{\mu(d\nu)\mu(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \\ &= \frac{\mu(\nu)\nu^{2\sigma}}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{\substack{d < x\nu^{-1} \\ (d, \nu)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)}. \end{aligned}$$

Тогда $\lambda_1 = 1$ и для $\nu > 1$

$$|\lambda_\nu| \leq \frac{\nu^{2\sigma}}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} = \prod_{p|\nu} (1 - p^{-2\sigma})^{-1} \ll \prod_{p < x} (1 + p^{-1}) \ll \ln x \ll L.$$

Функцией Сельберга назовем функцию

$$\eta_\sigma(s) = \eta(s) = \sum_{\nu < x} \lambda_\nu \nu^{-s}.$$

ЛЕММА 10. *Справедливы соотношения*

- 1) $\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^{2\sigma} = \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1};$
- 2) $\zeta(2\sigma) \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} < 1 + O(x^{1-2\sigma});$
- 3) $\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} (\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma} > 0.$

Доказательства этих утверждений см. в [1].

ЛЕММА 11. *Пусть $\Phi(s) = \zeta(s)\eta(s)$, и пусть*

$$I(\sigma, T) = D^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \dots dt_k,$$

$T_1 = T + t + t_1 + \dots + t_k$. Тогда для всех T из промежутка $(X, 2X]$, за исключением значений, образующих множество $\mathcal{E}$ с мерой $\mu(\mathcal{E}) \ll XH^{-0.1}$, при любом σ , $0.5 \leq \sigma \leq 1$, имеет место неравенство

$$I(\sigma, T) \ll Hx^{-(2\sigma-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись определением функции Сельберга $\eta_\sigma(s)$, представим исходный интеграл в виде суммы:

$$I = D^{-1} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} (\nu_1 \nu_2)^{-\sigma} \lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |\zeta(\sigma + iT_1)|^2 \beta^{iT_1} dt dt_1 \dots dt_k - 1,$$

где $\beta = \nu_1 \nu_2^{-1} = \mu_1 \mu_2^{-1}$, а $\mu_r = \nu_r(\nu_1, \nu_2)^{-1}$, $r = 1, 2$. Полагая в лемме 8 $t = T_1$, $P_1 = P\sqrt{\beta}$, $P_2 = P/\sqrt{\beta}$, $\gamma = \beta$, $\gamma = \beta^{-1}$ и замечая, что

$$|T_1 - T| = |t + t_1 + \dots + t_k| \leq 2H + kH_1 \leq 3H,$$

приходим к равенствам

$$\zeta(\sigma + iT_1) = \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma - iT_1} + \vartheta P^{1-2\sigma-2iT_1} \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+iT_1} + O(X^{-0.2})$$

и

$$\zeta(\sigma - iT_1) = \sum_{m \leq P_1} m^{-\sigma + iT_1} + \bar{\vartheta} P^{1-2\sigma+2iT_1} \sum_{m \leq P_2} m^{\sigma-1-iT_1} + O(X^{-0.2}),$$

в которых $\vartheta = e^{i(\pi/4+T)}$. Перемножим их почленно и воспользуемся оценкой $|\zeta(\sigma + iT_1)| \ll X^{1/6}$, справедливой при $\sigma \geq 0.5$ и $T_1 \asymp X$ (см. [3, с. 117–119]). Таким образом получим

$$|\zeta(\sigma + iT_1)|^2 \beta^{iT_1} = S_1 + P^{2(1-2\sigma)} S_2 + P^{1-2\sigma} (\bar{\vartheta} \bar{\Sigma}_1 + \vartheta \Sigma_2) + O(X^{-1/30}),$$

где

$$S_1 = \sum_{n \leq P_1} \sum_{m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iT_1},$$

$$S_2 = \sum_{m \leq P_1} \sum_{n \leq P_2} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\beta}{m} \right)^{iT_1},$$

а

$$\Sigma_\nu = \sum_{m, n \leq P_\nu} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} \left(\frac{mn}{P_\nu^2} \right)^{iT_1}, \quad \nu = 1, 2.$$

Область изменения m и n в сумме S_1 разобьем на пять частей: $m\beta = n$, $m\beta < n \leq m\beta(1+\Delta)$, $n < m\beta \leq n(1+\Delta)$, $m\beta(1+\Delta) < n$ и $m\beta > n(1+\Delta)$. Используя обозначения леммы 5, представим S_1 в виде

$$S_1 = A_1 + \beta^{iT_1}(A_2 + A_3) + A_4 + A_5,$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{\substack{n \leq P_1, m \leq P_2 \\ m\beta = n}} (mn)^{-\sigma}, \\
 A_2 &= \sum_{m \leq P_2} \sum_{n \leq P_1} (mn)^{-\sigma} \Phi(m, n; \beta) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1} = W(\sigma, T_1; \beta), \\
 A_3 &= \sum_{n \leq P_1} \sum_{m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \Phi(n, m; \beta^{-1}) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1} = \overline{W}(\sigma, T_1; \beta^{-1}), \\
 A_4 &= \sum_{m \leq P_2} \sum_{m\beta(1+\Delta) < n \leq P_1} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iT_1}, \\
 A_5 &= \sum_{n \leq P_1} \sum_{n\beta^{-1}(1+\Delta) < m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iT_1}.
 \end{aligned}$$

Подобным образом представляем сумму

$$S_2 = B_1 + \beta^{iT_1}(B_2 + B_3) + B_4 + B_5,$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \sum_{\substack{m \leq P_1, n \leq P_2 \\ n\beta = m}} (mn)^{\sigma-1}, \\
 B_2 &= W(1-\sigma, T_1; \beta), \quad B_3 = \overline{W}(1-\sigma, T_1; \beta^{-1}), \\
 B_4 &= \sum_{n \leq P_2} \sum_{n\beta(1+\Delta) < m \leq P_1} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\beta}{m} \right)^{iT_1}, \\
 B_5 &= \sum_{m \leq P_1} \sum_{m\beta^{-1}(1+\Delta) < n \leq P_2} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\beta}{m} \right)^{iT_1}.
 \end{aligned}$$

Наконец, каждую из сумм Σ_ν , $\nu = 1, 2$, преобразуем с использованием леммы 6:

$$\Sigma_\nu = C_\nu + P_\nu^{-2iT_1} D_\nu,$$

где

$$\begin{aligned}
 C_\nu &= \sum_{\min(m, n) \leq P_\nu(1-\Delta)} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} \left(\frac{mn}{P_\nu^2} \right)^{iT_1}, \\
 D_\nu &= \sum_{P_\nu(1-\Delta) < m, n \leq P_\nu} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (mn)^{iT_1}.
 \end{aligned}$$

Суммы A_1 и B_1 вычислим, используя лемму 7. Из определения μ_1 и μ_2 следует, что $(\mu_1, \mu_2) = 1$. Поэтому, переписывая равенство $m\beta = n$ в виде $m\mu_1 = n\mu_2$, заключаем, что $m = \nu\mu_2$ и $n = \nu\mu_1$, где ν – целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq \nu \leq P_0$, $P_0 = P/\sqrt{\mu_1\mu_2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{1 \leq \nu \leq P_0} (\mu_1\mu_2\nu^2)^{-\sigma} = (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \sum_{\nu \leq P_0} \nu^{-2\sigma} \\ &= (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \zeta(2\sigma) + \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \frac{P^{1-2\sigma}}{1-2\sigma} + O(X^{-\sigma}). \end{aligned}$$

Поскольку B_1 можно получить из A_1 , меняя σ на $1-\sigma$, и поскольку $1-\sigma \geq 0$, то

$$B_1 = (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \zeta(2-2\sigma) + \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \frac{P^{2\sigma-1}}{2\sigma-1} + O(X^{\sigma-1}).$$

Подставляя в полученные равенства вместо μ_1 и μ_2 их выражения через ν_1 и ν_2 , находим

$$A_1 + P^{2(1-2\sigma)} B_1 = \zeta(2\sigma) \frac{(\nu_1, \nu_2)^\sigma}{(\nu_1\nu_2)^{2\sigma}} + P^{2(1-2\sigma)} \zeta(2-2\sigma) \frac{(\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma}}{(\nu_1\nu_2)^{1-\sigma}} + O(X^{-\sigma}).$$

Вклад этих слагаемых в исходный интеграл I равен

$$\begin{aligned} I_0 &= 4H \left(\zeta(2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1\nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^\sigma + P^{2(1-2\sigma)} \zeta(2-2\sigma) \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{\nu_1\nu_2} (\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma} + O\left(\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{|\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}|}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Согласно утверждениям 1) и 2) леммы 10 для $0.5 < \sigma \leq 1$ имеем

$$\zeta(2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1\nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^\sigma = \zeta(2\sigma) \left(\sum_{\nu < x} \frac{\mu^2(\nu)}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} \right)^{-1} < 1 + O(x^{1-2\sigma}).$$

Кроме того, в силу утверждения 3) той же леммы следует, что второе слагаемое в выражении для I_0 отрицательно, так как $\zeta(2-2\sigma) < 0$ при $0.5 < \sigma \leq 1$. Действительно, при $\operatorname{Re} s > 0$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \rho(u) u^{-s-1} du, \quad \rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$$

(см. [13, с. 33]), так что для $0 < \sigma_1 < 1$

$$\zeta(\sigma_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma_1-1} + \sigma_1 \int_1^{+\infty} \rho(u) u^{-\sigma_1-1} du.$$

Поскольку $|\rho(u)| \leq 0.5$, то

$$\left| \sigma_1 \int_1^{+\infty} \rho(u) u^{-\sigma_1-1} du \right| \leq 0.5 \sigma_1 \int_1^{+\infty} u^{-\sigma_1-1} du = 0.5$$

и

$$\zeta(\sigma_1) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - \sigma_1} + \frac{1}{2} = -\frac{\sigma_1}{1 - \sigma_1} < 0.$$

Поэтому

$$I_0 < 4H(1 + O(x^{1-2\sigma}) + O(X^{-\sigma}xL^2)) = 4H(1 + O(x^{1-2\sigma})).$$

Обозначим через I_1 вклад в $I(\sigma, T)$ от сумм A_2, A_3, B_2, B_3, D_1 и D_2 , а через I_2 – вклад от сумм A_4, A_5, B_4, B_5, C_1 и C_2 . Оценим сначала I_1 . Поскольку $|\lambda_{\nu_1}\lambda_{\nu_2}(\nu_1\nu_2)^{-\sigma}| \ll L^2$ при $0.5 \leq \sigma \leq 1$ и при изменении ν_1 и ν_2 в пределах от 1 до x величины $\beta = \nu_1\nu_2^{-1}$ и $\beta^{-1} = \nu_2\nu_1^{-1}$ пробегают одно и то же множество значений, то приходим к неравенству

$$|I_1| \ll D^{-1}L^2(r(\sigma, T) + P^{1-2\sigma}r(1 - \sigma, T) + \varrho(\sigma, T)),$$

где

$$\begin{aligned} r(\sigma, T) &= \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |W(\sigma, T_1; \beta)| dt dt_1 \dots dt_k, \\ \varrho(\sigma, T) &= \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |V(\sigma, T_1; \beta)| dt dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Согласно утверждению леммы 5 найдутся такие множества E_1 и E_2 , что мера каждого из них по порядку не превосходит величины $XH^{-0.1}$ и при любом σ , $0.5 \leq \sigma \leq 1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} r(\sigma, T) &\ll HDH^{-0.3}, & \text{если } T \notin E_1, \\ r(1 - \sigma, T) &\ll HDX^{\sigma-0.5}H^{-0.3}, & \text{если } T \notin E_2. \end{aligned}$$

Кроме того, по лемме 6 существует множество G такое, что $\mu(G) \ll XH^{-0.1}$ и на дополнении G до всего промежутка $(X, 2X]$ при любом рассматриваемом σ будет выполнено неравенство

$$\varrho(\sigma, T) \ll HDH^{-0.8}.$$

Обозначая буквой $\mathcal{E}$ объединение множеств E_1, E_2 и G , заключаем, что для всех T , $X \leq T \leq 2X$, кроме значений из множества $\mathcal{E}$, при любом σ , удовлетворяющем условию $0.5 \leq \sigma \leq 1$, будет верна оценка

$$\begin{aligned} I_1 &\ll D^{-1}L^2(HDH^{-0.3} + P^{1-2\sigma}HDX^{\sigma-0.5}H^{-0.3} + HDH^{-0.8}) \\ &\ll HL^2H^{-0.3} \ll HH^{-0.2}. \end{aligned}$$

Оценим теперь величину I_2 . Пусть числа m и n отвечают какому-либо слагаемому из A_4 , так что $n > m\beta(1 + \Delta)$. Тогда для этих m и n

$$\left| \ln \frac{m\beta}{n} \right| > \ln(1 + \Delta) > 0.5\Delta.$$

Значит, при $H_2 = 2H$, H_1 выполняются неравенства

$$\left| \int_{-H_2}^{H_2} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iu} du \right| = \left| \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iH_2} - \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{-iH_2} \right| \left| \ln \frac{m\beta}{n} \right|^{-1} < 2(0.5\Delta)^{-1} = 4\Delta^{-1} = 4H_1L^{-1}.$$

Интегрируя по $t, t_1, \dots, t_k$ каждое из таких слагаемых, убеждаемся, что вклад от них в исходный интеграл не превосходит величины

$$\begin{aligned} D^{-1} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{|\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}|}{(\nu_1 \nu_2)^\sigma} (4H_1L^{-1})^{k+1} \sum_{n \leq P_1} \sum_{m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \\ \ll D^{-1} DH (0.5L)^{-k-2} x L^2 (P_1 P_2)^{1-\sigma} \ll HX^{-1}. \end{aligned}$$

Сходными рассуждениями можно показать, что вклад от сумм A_5 , B_4 и B_5 также оценивается сверху величиной HX^{-1} .

Пусть теперь ν равно 1 или 2, а m и n таковы, что $\min(m, n) \leq P_\nu(1 - \Delta)$. Тогда $mn \leq P_\nu^2(1 - \Delta)$ и

$$\left| \ln \frac{mn}{P_\nu^2} \right| \geq -\ln(1 - \Delta) > \Delta.$$

Значит, при $H_2 = 2H$, H_1 справедливы неравенства

$$\left| \int_{-H_2}^{H_2} \left(\frac{mn}{P_\nu^2} \right)^{iu} du \right| = \left| \left(\frac{mn}{P_\nu^2} \right)^{iH_2} - \left(\frac{mn}{P_\nu^2} \right)^{-iH_2} \right| \left| \ln \frac{mn}{P_\nu^2} \right|^{-1} < 2\Delta^{-1} = 2H_1L^{-1}.$$

Проинтегрировав каждое из слагаемых D_1 и D_2 по $t, t_1, \dots, t_k$, заключаем, что вклад от D_1 и D_2 не превосходит величины

$$D^{-1} P^{1-2\sigma} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{|\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}|}{(\nu_1 \nu_2)^\sigma} \sum_{m, n \leq P_1 + P_2} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (2H_1L^{-1})^{k+1} \ll HX^{-1}.$$

Собирая полученные оценки вместе и предполагая, что T принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$ – дополнению множества $\mathcal{E}$ до промежутка $(X, 2X]$, приходим к неравенству, справедливому для любого σ , удовлетворяющего условию $0.5 < \sigma \leq 1$:

$$I(\sigma, T) < 4H(1 + O(x^{1-2\sigma})) + O(HH^{-0.2}) + O(HX^{-1}) - 4H = O(Hx^{1-2\sigma}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть

$$I = \int_\sigma^1 (N(u, T + H) - N(u, T - H)) du.$$

Тогда для всех T , принадлежащих множеству $\mathcal{E}_1$ из предыдущей леммы, при любом σ , удовлетворяющем условию $0.5 \leq \sigma \leq 1$, верна оценка

$$I \ll Hx^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$. Рассмотрим сначала σ с условием $0.5 + L^{-1} \leq \sigma \leq 1$. Воспользуемся неравенством, вывод которого содержится в работе [5]:

$$I \leq (2\pi D)^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \dots dt_k + O(L),$$

где $\Phi(s) = \zeta(s)\eta_\sigma(s)$, $T_1 = T + t + t_1 + \dots + t_k$. Применяя к последнему интегралу лемму 11, придем к искомому неравенству

$$I \ll Hx^{1-2\sigma} + L \ll Hx^{1-2\sigma}.$$

Пусть теперь $0.5 \leq \sigma \leq 0.5 + L^{-1}$. Тогда интеграл I из условия леммы можно представить в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{\sigma}^{0.5+L^{-1}} (N(u, T+H) - N(u, T-H)) du,$$

$$I_2 = \int_{0.5+L^{-1}}^1 (N(u, T+H) - N(u, T-H)) du.$$

Первый интеграл оценивается тривиально:

$$I_1 \leq \int_{0.5}^{0.5+L^{-1}} (N(T+H) - N(T-H)) du \ll L^{-1}HL \ll H.$$

Кроме того, по доказанному выше

$$I_2 \ll Hx^{1-2(0.5+L^{-1})} \ll H.$$

Таким образом, $I \ll H + H \ll H$ и исходное неравенство доказано для всех σ из промежутка $0.5 \leq \sigma \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. Покажем, что определенное выше множество $\mathcal{E}_1$ обладает свойствами, указанными в условии теоремы. Пусть T принадлежит $\mathcal{E}_1$. Если $0.5 \leq \sigma \leq 0.5 + L^{-1}$, то соответствующая оценка является следствием формулы Римана–Мангольда для $N(T)$; см. [3, с. 211]. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай $0.5 + L^{-1} < \sigma \leq 1$. Поскольку функция $f(u) = N(u, T+H) - N(u, T-H)$ не возрастает с ростом u , то справедливы следующие неравенства:

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq L \int_{\sigma-L^{-1}}^{\sigma} f(u) du \leq L \int_{\sigma-L^{-1}}^1 f(u) du.$$

Так как $\sigma - L^{-1} \geq 0.5$, то для оценки последнего интеграла можно применить лемму 12:

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \ll LHx^{1-2(\sigma-L^{-1})} \ll Hx^{1-2\sigma}L \ll HX^{-0.01\varepsilon(2\sigma-1)}L.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\mu(\mathcal{E}_1) = X - O(XH^{-0.1}).$$

Теорема доказана.

§ 5. Моменты величин $S(t)$ и $S_1(t+h) - S_1(t)$

Этот параграф посвящен вычислению моментов функций $S(t)$ и $S_1(t+h) - S_1(t)$ на коротких промежутках вида $(T, T+H]$ в случае, когда T принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$, введенному в теореме А. Основные утверждения этого параграфа – теоремы 1 и 2 – будут использованы для нижней оценки разности $M(T+H) - M(T)$. Метод, лежащий в основе доказательства ряда лемм, приводимых ниже, был разработан А. Сельбергом в работе [1]. Здесь мы существенно пользуемся этим методом. Определим функции $\Lambda_z(n)$ и $\sigma_{z,t}$, введенные А. Сельбергом. Пусть $z \geq 2$. Тогда

$$\Lambda_z(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1 \leq n \leq z, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n) - 2 \ln^2(z^2/n)}{2 \ln^2 z}, & \text{если } z < n \leq z^2, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n)}{2 \ln^2 z}, & \text{если } z^2 < n \leq z^3, \end{cases}$$

где $\Lambda(n)$ – функция Мангольда, равная $\log p$, если $n = p^k$, p – простое, $k \geq 1$ – целое, и равная нулю в остальных случаях.

Пусть $t^2 \geq z$, и пусть $\varrho = \beta + i\gamma$ пробегает значения нетривиальных нулей дзета-функции Римана с условием

$$|t - \gamma| \leq z^{3|\beta-0.5|} \ln^{-1} z.$$

Символом $\sigma_{z,t}$ обозначим следующую величину:

$$\sigma_{z,t} = 0.5 + 2 \max(|\beta - 0.5|, 2 \ln^{-1} z).$$

Если гипотеза Римана верна, то $\sigma_{z,t} = 0.5 + 4 \ln^{-1} z$.

ЛЕММА 13. Пусть $t \geq 2$, $2 \leq z \leq t^2$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} S(t) = & -\frac{1}{\pi} \sum_{1 < n < z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} \\ & + O\left((\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{1 < n < z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t} + it}} \right| \right) + O((\sigma_{z,t} - 0.5) \ln t). \end{aligned}$$

Это утверждение о приближении $S(t)$ отрезком ряда Дирихле специального вида принадлежит А. Сельбергу (см. [1]).

ЛЕММА 14. Пусть $k \geq 1$, $0 \leq \nu \leq 4k$ – целые числа, $z \geq 2$, $1 \leq y \leq z^{4k}$, $z^3 y^2 \leq x$. Тогда для всех T из множества $\mathcal{E}_1$ справедлива оценка

$$\int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^\nu y^{\sigma_{z,t} - 0.5} dt \ll (e\sqrt{2})^{16k} H \left((\ln z)^{-\nu} + \nu! \frac{\ln x}{\ln z} (\ln x)^{-\nu} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать рассуждениям работы [1]. Обозначим символом $\psi(t)$ подынтегральную функцию. Точку t промежутка $(T, T+H]$ отнесем ко множеству A_1 , если для всех нулей $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции, удовлетворяющих условию

$$|t - \gamma| \leq z^{3|\beta-0.5|} \ln^{-1} z,$$

выполнены неравенства $|\beta - 0.5| \leq 2 \ln^{-1} z$. В противном случае точку t отнесем ко множеству A_2 . Таким образом получим

$$\int_T^{T+H} \psi(t) dt = \left(\int_{A_1} + \int_{A_2} \right) \psi(t) dt = I_1 + I_2.$$

Если $t \in A_1$, то

$$\begin{aligned} \sigma_{z,t} &= 0.5 + 4 \ln^{-1} z, \\ \psi(t) &= (4 \ln^{-1} z)^\nu y^{4/\ln z} \leq (e\sqrt{2})^{16k} (\ln z)^{-\nu}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$I_1 \leq \int_T^{T+H} (e\sqrt{2})^{16k} (\ln z)^{-\nu} dt = (e\sqrt{2})^{16k} H (\ln z)^{-\nu}.$$

Если же $t \in A_2$, то

$$\sigma_{z,t} = 0.5 + |\beta - 0.5| \quad \text{и} \quad \psi(t) = |\beta - 0.5|^\nu y^{2|\beta-0.5|},$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ — некоторый нуль $\zeta(s)$ с условием $|t - \gamma| \leq z^{3|\beta-0.5|} \ln^{-1} z$. Так как $z^3 \leq z^3 y^2 \leq x$, то

$$z^{3|\beta-0.5|} \ln^{-1} z \leq z^{1.5} < \sqrt{x} < H,$$

так что мнимая часть этого нуля отстоит от t на расстояние, не превосходящее H , и содержится в промежутке $(T - H, T + 2H]$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{T-H < \gamma \leq T+2H} |\beta - 0.5|^\nu y^{2|\beta-0.5|} z^{3|\beta-0.5|} \ln^{-1} z \\ &\leq 2 \sum'_{T-2H < \gamma \leq T+2H} (\beta - 0.5)^\nu (z^3 y^2)^{\beta-0.5} \ln^{-1} z, \end{aligned}$$

где штрих означает суммирование по всем нулям $\varrho = \beta + i\gamma$, для которых $\beta \geq 0.5$ и $T - 2H < \gamma \leq T + 2H$. Воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} (\beta - 0.5)^\nu (z^3 y^2)^{\beta-0.5} \ln^{-1} z &= \\ &= \int_{0.5}^{\beta} \left(\frac{\ln z^3 y^2}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 y^2)^{u-0.5} du, \end{aligned}$$

которое устанавливается интегрированием по частям, находим

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2 \sum'_{T-2H < \gamma \leq T+2H} \int_{0.5}^{\beta} \left(\frac{\ln z^3 y^2}{\ln z} (u-0.5)^{\nu} + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 y^2)^{u-0.5} du \\
&= 2 \sum_{T-2H < \gamma \leq T+2H} \int_{0.5}^1 g(\varrho; u) \left(\frac{\ln z^3 y^2}{\ln z} (u-0.5)^{\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 y^2)^{u-0.5} du \\
&= \int_{0.5}^1 \left(\sum_{T-2H < \gamma \leq T+2H} g(\varrho; u) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\ln z^3 y^2}{\ln z} (u-0.5)^{\nu} + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 y^2)^{u-0.5} du,
\end{aligned}$$

где

$$g(\varrho; u) = g(\beta + i\gamma; u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0.5 \leq u \leq \beta, \\ 0, & \text{если } \beta < u \leq 1. \end{cases}$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{T-2H < \gamma \leq T+2H} g(\varrho; u) = N(u, T+2H) - N(u, T-2H).$$

Воспользовавшись утверждением теоремы А наряду с неравенством $z^3 y^2 \leq x$, получим

$$I_2 \ll H(\ln X) \int_{0.5}^1 x^{-(u-0.5)} \left(\frac{\ln x}{\ln z} (u-0.5)^{\nu} + \frac{\nu}{\ln z} (u-0.5)^{\nu-1} \right) du.$$

Положим $v = (u-0.5) \ln x$. Тогда оценка для I_2 примет вид

$$\begin{aligned}
I_2 &\ll HL(\ln z)^{-1} \int_0^{0.5 \ln x} e^{-v} \left(\ln x \left(\frac{v}{\ln x} \right)^{\nu} + \nu \left(\frac{v}{\ln x} \right)^{\nu-1} \right) \frac{dv}{\ln x} \\
&\ll H\varepsilon^{-1} \frac{(\ln x)^{1-\nu}}{\ln z} \int_0^{+\infty} e^{-v} (v^{\nu} + \nu v^{\nu-1}) dv \ll \Gamma(1+\nu) H \frac{(\ln x)^{1-\nu}}{\ln z}.
\end{aligned}$$

Используя оценки для I_1 и I_2 , находим

$$\int_T^{T+H} \psi(t) dt \ll (e\sqrt{2})^{16k} H \left((\ln z)^{-\nu} + \nu! \frac{\ln x}{\ln z} (\ln x)^{-\nu} \right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 15 [4, лемма 3]. Пусть $H \geq 10$, k – целое число, $k \geq 1$, $1 < y \leq H^{1/k}$, и пусть $a(p)$, $a'(p)$ – произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие при $p \leq y$ неравенствам

$$|a(p)| \leq c \frac{\ln p}{\ln y}, \quad |a'(p)| \leq c.$$

Тогда для интегралов

$$I = \int_0^H \left| \sum_{p < y} a(p) p^{-0.5-it} \right|^{2k} dt$$

и

$$I' = \int_0^H \left| \sum_{p < y} a'(p) p^{-1-2it} \right|^{2k} dt$$

имеют место оценки

$$I \leq (c_1 c^2 k)^k H, \quad I' \leq (c_1 c^2 k)^k H,$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

ЛЕММА 16. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq (\ln \ln X)^{0.5}$, $H^{1/20k} < y \leq H^{1/k}$. Тогда для любого T из множества $\mathcal{E}_1$ справедливо неравенство

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \leq (ck)^{2k} H.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство этого утверждения основано на двух предыдущих леммах и проводится с использованием методов и приемов работ [1], [4] и [5]. Равномерная по k оценка подобного интеграла была получена А. Гошем [4] для случая $H = T^{0.5+\alpha}$ и улучшена впоследствии К. Тсангом [18].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в лемме 13 $z = H^{1/(60k)}$ и прибавим к обеим частям получившегося равенства сумму

$$\frac{1}{\pi} \sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}}.$$

Переходя к оценкам, получим

$$S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \ll \sum_{j=1}^7 R_j,$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda(p) - \Lambda_z(p)}{\sqrt{p} \ln p} p^{-it} \right|, & R_2 &= \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p} \ln p} (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) p^{-it} \right|, \\
 R_3 &= (\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{p^{\sigma_{z,t} + it}} \right|, & R_4 &= \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p \ln p} p^{-2it} \right|, \\
 R_5 &= \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p \ln p} (1 - p^{1 - 2\sigma_{z,t}}) p^{-2it} \right|, & R_6 &= (\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t} + 2it}} \right|, \\
 R_7 &= \sum_{r > 2} \sum_{p^r < z^3} \frac{\ln p}{p^{r/2}}.
 \end{aligned}$$

Преобразуем величины R_j для $j = 2, 5, 6$ и 7 . Прежде всего заметим, что

$$R_7 \ll 1 \ll (\sigma_{z,t} - 0.5) \ln X, \quad R_6 \ll (\sigma_{z,t} - 0.5) \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\ln p}{p} \ll (\sigma_{z,t} - 0.5) \ln X.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$0 \leq 1 - p^{1 - 2\sigma_{z,t}} = (2\sigma_{z,t} - 1)(\ln p) p^{\theta(1 - 2\sigma_{z,t})} \leq 2(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p.$$

Поэтому

$$R_5 \leq \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p \ln p} (2\sigma_{z,t} - 1) \ln p \ll (\sigma_{z,t} - 0.5) \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\ln p}{p} \ll (\sigma_{z,t} - 0.5) \ln X.$$

Кроме того, из тождества

$$\frac{1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}}{\sqrt{p} \ln p} = \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} p^{-u} du$$

следует неравенство

$$R_2 = \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} p^{-u - it} du \right| \leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{p^{u + it}} \right| du.$$

Если $0.5 \leq u \leq \sigma_{z,t}$, то

$$\left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{p^{u + it}} \right| = z^{u - 0.5} \left| \int_u^{+\infty} z^{0.5 - v} \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) \ln(zp)}{p^{v + it}} dv \right|.$$

Поэтому неравенство для R_2 принимает вид

$$R_2 \leq (\sigma_{z,t} - 0.5) z^{\sigma_{z,t} - 0.5} \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5 - v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) \ln(zp)}{p^{v + it}} \right| dv.$$

Переходя к оценке интеграла из условия леммы и пользуясь неравенством Гёльдера, заключаем, что

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \ll 2^{4k} \sum_{j=1}^4 K_j,$$

где

$$K_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda(p) - \Lambda_z(p)}{\sqrt{p} \ln p} \right|^{2k} dt,$$

$$K_2 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p \ln p} p^{-2it} \right|^{2k} dt, \quad K_3 = (\ln X)^{2k} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2k} dt$$

и

$$K_4 = \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2k} z^{2k(\sigma_{z,t} - 0.5)} \left(\int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) \log(zp)}{p^{u+it}} du \right| \right)^{2k} dt.$$

Полагая последовательно

$$y = z^3, \quad a(p) = \frac{\Lambda(p) - \Lambda_z(p)}{\ln p} p^{-iT},$$

$$y = z^{1.5}, \quad a'(p) = \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} p^{-2iT},$$

с помощью леммы 15 убеждаемся в том, что

$$K_j \ll (ck)^k H, \quad j = 1, 2.$$

Взяв в лемме 14 $y = 1$, $\nu = 2k$, приходим к оценке

$$K_3 \ll (\ln X)^{2k} (e\sqrt{2})^{16k} H \left((\ln H^{1/(60k)})^{-2k} + (2k)! \frac{(\ln x)^{1-2k}}{\ln H^{1/(60k)}} \right)$$

$$\ll c^k (\ln X)^{2k} H (k^{2k} (\ln X)^{-2k} + k^{2k} (\ln X)^{-2k}) \ll (c_1 k)^{2k} H.$$

Наконец, применяя к величине K_4 неравенство Коши, получаем

$$K_4 \ll \sqrt{K_5 K_6},$$

где

$$K_5 = \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{4k} z^{4k(\sigma_{z,t} - 0.5)} dt,$$

$$K_6 = \int_T^{T+H} \left(\int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-u} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) \log(zp)}{p^{u+it}} du \right| \right)^{4k} dt.$$

Величину K_5 оценим, пользуясь леммой 14 при $y = x^{4k}$, $\nu = 4k$:

$$K_5 \ll (e\sqrt{2})^{16k} H \left((\ln H^{1/(60k)})^{-4k} + (4k)! \frac{(\ln x)^{1-4k}}{\ln H^{1/(60k)}} \right) \ll (ck)^{4k} H (\ln X)^{-4k}.$$

Интеграл K_6 оценим с помощью неравенства Гёльдера:

$$\begin{aligned} K_6 &\ll \int_T^{T+H} \left(\int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-u} du \right)^{4k-1} \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-u} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) \log(zp)}{p^{u+it}} \right|^{4k} du dt \\ &\ll (\ln z)^{1-4k} \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-u} \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p) \log(zp)}{p^{u+it}} \right|^{4k} dt du \\ &\ll (\ln z)^{4k+1} \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-u} \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right|^{4k} dt du, \end{aligned}$$

где

$$a(p) = \frac{\Lambda_z(p) \ln(zp)}{p^{u-0.5+it} \ln^2 z}.$$

Неравенство леммы 15, примененное к интегралу по t , приводит к оценке

$$K_6 \ll (ck)^{2k} H (\ln z)^{4k} \ll (ck)^{2k} H (k^{-1} \ln X)^{4k} \ll (c_1 k)^{-2k} H (\ln X)^{4k}.$$

Оценивая интеграл K_4 , будем иметь

$$K_4 \ll \sqrt{K_5} \sqrt{K_6} \ll (ck)^{2k} \sqrt{H} (\ln X)^{-2k} (c_1 k)^{-k} \sqrt{H} (\ln X)^{2k} \ll (c_2 k)^k H.$$

Таким образом,

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \leq (ck)^{2k} H.$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \left(\sum_{p < z^3} + \sum_{z^3 \leq p < y} \right) \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \\ &\leq 2^{2k} \left(\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_T^{T+H} \left| \sum_{z^3 \leq p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \right). \end{aligned}$$

По доказанному выше первый из интегралов не превосходит величины $(ck)^{2k} H$, второй интеграл оценивается сверху величиной

$$\int_T^{T+H} \left| \sum_{z^3 \leq p < y} p^{-0.5-it} \right|^{2k} dt = \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it} \right|^{2k} dt,$$

где

$$a(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < z^3, \\ 1, & \text{если } z^3 \leq p < y. \end{cases}$$

Поскольку

$$|a(p)| \leq \frac{\ln y \ln p}{\ln p \ln y} \leq \frac{\ln H^{1/k}}{\ln H^{1/(20k)}} \frac{\ln p}{\ln y} = 20 \frac{\ln p}{\ln y},$$

то по лемме 15 последний интеграл есть $O((ck)^k H)$. Это и завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 17. Пусть $y > e^3$, $H > 0$, $\delta > 0$, $k \geq 1$, $\mu \geq 0$ – целые числа, $\mu + \nu = 2k$, $a(n)$ – последовательность комплексных чисел такая, что $|a(n)| \leq \delta$ для всех $n \leq y$, и пусть $p_1, \dots, p_\mu$, $q_1, \dots, q_\nu$ пробегают значения простых чисел промежутка $(1, y]$, $p_1 \dots p_\mu \neq q_1 \dots q_\nu$. Тогда для интеграла

$$I = \int_0^H \sum_{p_1, \dots, p_\mu} \sum_{q_1, \dots, q_\nu} \frac{a(p_1) \dots a(p_\mu) \bar{a}(q_1) \dots \bar{a}(q_\nu)}{(p_1 \dots q_\nu)^{0.5}} \left(\frac{q_1 \dots q_\nu}{p_1 \dots p_\mu} \right)^{it} dt$$

справедлива оценка

$$|I| \leq 2\delta^{2k} y^{3k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости $P = p_1 \dots p_\mu$, $Q = q_1 \dots q_\nu$. Производя интегрирование, получим

$$|I| = \left| \sum_{P \neq Q} \frac{a(p_1) \dots \bar{a}(q_\nu)}{\sqrt{PQ}} \frac{(QP^{-1})^{iH} - 1}{i \ln(QP^{-1})} \right| \leq 2\delta^{2k} \sum_{P \neq Q} \frac{|\ln(QP^{-1})|^{-1}}{\sqrt{PQ}}.$$

Поскольку $|\ln(QP^{-1})|^{-1} \leq \max(Q, P) \leq y^{2k}$, то приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2(\delta y)^{2k} \sum_{P, Q} \frac{1}{\sqrt{PQ}} \leq 2(\delta y)^{2k} \left(\sum_{p \leq y} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^{2k} \\ &\leq 2(\delta y)^{2k} \left(\frac{3\sqrt{y}}{\ln y} \right)^{2k} < 2\delta^{2k} y^{3k}, \end{aligned}$$

которые и завершают доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – целое число, удовлетворяющее условиям

$$1 \leq k \leq (\ln \ln X)^{0.5}, \quad 3k\varepsilon^{-1}(\ln X)^{-1} < h \leq (\ln X)^{-0.5},$$

и пусть

$$I(2k) = \int_T^{T+H} |S(t)|^{2k} dt, \quad J(2k) = \int_T^{T+H} |S_1(t+h) - S_1(t)|^{2k} dt.$$

Тогда для любого T из множества $\mathcal{E}_1$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} I(2k) &= \frac{(2k)!}{k!} \frac{H}{(2\pi)^{2k}} (\ln \ln T)^k (1 + O(R)), \\ J(2k) &= \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{2k} (\ln(h^{-1}))^k (1 + O(R)), \end{aligned}$$

где $R = c^k (\ln \ln X)^{-0.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = H^{1/(3k)}$,

$$W(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}}, \quad R(t) = S(t) + W(t),$$

и представим первый из интегралов в виде

$$I(2k) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_T^{T+H} W^{2k}(t) dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H} \sum_{\nu=1}^{2k} \binom{2k}{\nu} W^{2k-\nu}(t) R^\nu(t) dt.$$

Если положить теперь $W = (W_1 - \overline{W}_1)/2$, где

$$W_1 = \frac{i}{2\pi} \sum_{p < y} p^{-0.5-it},$$

то I_1 запишется в виде суммы

$$I_1 = I_3 + I_4,$$

где

$$I_3 = (2\pi)^{-2k} \binom{2k}{k} \int_T^{T+H} |W_1(t)|^{2k} dt,$$

$$I_4 = (2\pi)^{-2k} \sum_{\nu \neq k} (-1)^{k+\nu} \binom{2k}{\nu} \int_T^{T+H} W_1^\nu \overline{W}_1^{2k-\nu} dt.$$

Применяя к каждому из интегралов

$$\int_T^{T+H} W_1^\nu \overline{W}_1^{2k-\nu} dt, \quad \nu \neq k,$$

оценку леммы 17 с $\delta = 1$, получим

$$|I_4| \leq (2\pi)^{-2k} \sum_{\nu \neq k} 2y^{3k} \binom{2k}{\nu} < 2\pi^{-2k} y^{3k} < H.$$

Раскрывая модуль в I_3 и применяя к внедиагональным слагаемым лемму 17, приходим к равенству

$$I_3 = (2\pi)^{-2k} \binom{2k}{k} H \sum'_{p_1, \dots, q_k < y} (p_1 \dots q_k)^{-0.5} + \theta H,$$

где штрих означает суммирование по числам $p_1, \dots, q_k$, для которых $p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_k$. Последняя сумма вычислена в работах [4] и [14]. Воспользуемся готовой формулой из [4], в которой оценка остаточного члена является равномерной по k :

$$\sum'_{p_1, \dots, q_k < y} (p_1 \dots q_k)^{-0.5} = k! (\ln \ln T)^k + O((ck)^k (\ln \ln T)^{k-1}).$$

Таким образом,

$$I_1 = k!(\ln \ln T)^k (1 + O(c^k \ln \ln X)^{-1}),$$

так что $I_1 \leq (c_1 k)^k H(\ln \ln T)^k$. Переходя к оценке I_2 , будем иметь

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_T^{T+H} \sum_{\nu=1}^{2k} \binom{2k}{\nu} |W(t)|^{2k-\nu} |R(t)|^\nu dt \\ &\leq 2k \int_T^{T+H} |R(t)| (|W(t)| + |R(t)|)^{2k-1} dt \leq 2^{2k} k (I_5 + I_6), \end{aligned}$$

где

$$I_5 = \int_T^{T+H} |R(t)|^{2k} dt, \quad I_6 = \int_T^{T+H} |R(t)| |W(t)|^{2k-1} dt.$$

Поскольку $k \leq (\ln \ln X)^{0.5}$, то $k^{2k} \leq k^k (\ln \ln X)^{k/2} \leq k^k (\ln \ln X)^{k-0.5}$ и по лемме 16

$$I_5 \leq (ck)^{2k} H \leq (c_1 k)^k H (\ln \ln X)^{k-0.5}.$$

Для оценки I_6 воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$I_6 \leq I_1^{1-1/(2k)} I_5^{1/(2k)} \leq (c_3 k)^k H (\ln \ln X)^{k-0.5}.$$

Таким образом,

$$|I_2| \leq (c_4 k)^k H (\ln \ln X)^{k-0.5}.$$

Из последнего неравенства следует асимптотическая формула для $I(2k)$.

Обратимся теперь к вычислению $J(2k)$. Поскольку

$$S_1(t+h) - S_1(t) = - \int_0^h W(t+u) du + \int_0^h R(t+u) du,$$

то интеграл $J(2k)$ представится в виде суммы

$$J(2k) = J_1 + J_2,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^h W(t+u) du \right)^{2k} dt, \\ J_2 &= \int_T^{T+H} \sum_{\nu=1}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} \left(\int_0^h W(t+u) du \right)^{2k-\nu} \left(\int_0^h R(t+u) du \right)^\nu dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по u , находим

$$\int_0^h W(t+u) du = \frac{1}{2\pi} (V(t) + \overline{V}(t)),$$

где

$$V(t) = \sum_{p < y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it}, \quad a(p) = \frac{1 - p^{ih}}{\ln p}.$$

Пользуясь леммой 17 и тем, что $|a(p)| = 2|\sin(0.5h \ln p)| \ln^{-1} p \leq h$, заключаем, что

$$J_1 = (2\pi)^{-2k} \binom{2k}{k} H \sum'_{p_1, \dots, q_k} \frac{a(p_1) \dots \bar{a}(q_k)}{(p_1 \dots q_k)^{0.5}} + \theta H h^{2k},$$

где штрих означает суммирование по наборам $p_1, \dots, q_k$, для которых $p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_k$. Воспользуемся готовым выражением для последней суммы, которое получено в [4]:

$$\sum'_{p_1, \dots, q_k} \frac{a(p_1) \dots \bar{a}(q_k)}{(p_1 \dots q_k)^{0.5}} = k! \left(\sum_{p < y} \frac{4 \sin^2(0.5h \ln p)}{p \ln^2 p} \right)^k + \theta (ck)^k H h^{2k} (\ln \ln X)^{k-2}.$$

Преобразуем теперь сумму по $p < y$. Так как $h > 3k\varepsilon^{-1}(\ln X)^{-1}$, то

$$\exp(1/h) < \exp((3k)^{-1}\varepsilon \ln X) = H^{1/(3k)} = y.$$

Если $p < \exp(h^{-1})$, то $0.5h \ln p \leq 0.5$ и

$$\sum_{p \leq e^{1/h}} \frac{4 \sin^2(0.5h \ln p)}{p \ln^2 p} = \sum_{p \leq e^{1/h}} \frac{h^2}{4p} + \theta \sum_{p \leq e^{1/h}} \frac{h^4 \ln^2 p}{p} = \frac{h^2}{4} \ln \frac{1}{h} + O(h^2).$$

Оставшуюся часть суммы по $p > \exp(h^{-1})$ оценим тривиально:

$$\sum_{e^{1/h} < p < y} \frac{4 \sin^2(0.5h \ln p)}{p \ln^2 p} \leq \sum_{p > e^{1/h}} (p \ln^2 p)^{-1} = O(h^2).$$

Подставляя полученные равенства в выражение для J_1 , будем иметь

$$\begin{aligned} J_1 &= (2\pi)^{-2k} \binom{2k}{k} (k! H h^{2k} (\ln(h^{-1}))^k + O(c^k H h^{2k} (\ln \ln X)^{k-1})) \\ &= \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{2k} H (\ln(h^{-1}))^k (1 + O(c^k (\ln \ln X)^{-1})). \end{aligned}$$

С помощью тех же рассуждений, которые использовались при вычислении $I(2k)$, получаем оценку

$$J_2 \leq k(2^{2k})(J_5 + J_1^{1-1/(2k)} J_5^{1/(2k)}),$$

где

$$J_5 = \int_T^{T+H} \left(\int_0^h |R(t+u)| du \right)^{2k} dt.$$

Пользуясь полученными выше оценками J_1 и J_2 , находим

$$J_2 \leq (c_1 k)^k H h^{2k} (\ln \ln X)^{k-0.5}.$$

Это и завершает доказательство теоремы 1.

Асимптотические формулы теоремы 1 мы используем для нахождения первых моментов величин $S(t)$ и $S_1(t+h) - S_1(t) = \int_0^h S(t+u) du$. В основе доказательства следующей теоремы лежит идея сведения вычисления интегралов от модуля данной функции к вычислению ряда ее четных моментов (см. [4], [15], [16, гл. I], [17]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$(\ln \ln \ln X)^2 (\ln X)^{-1} \leq h \leq (\ln X)^{-0.5},$$

и пусть

$$I_1 = \int_T^{T+H} |S(t)| dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H} |S_1(t+h) - S_1(t)| dt.$$

Тогда для любого T из множества $\mathcal{E}_1$ имеют место асимптотические формулы

$$I_1 = \pi^{-3/2} H \sqrt{\ln \ln T} (1 + O(R)), \quad I_2 = \pi^{-3/2} H h \sqrt{\ln(h^{-1})} (1 + O(R)),$$

где $R = (\ln \ln \ln X)^{-0.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для $T \leq t \leq T + H$

$$F_1(t) = \frac{2\pi S(t)}{\sqrt{\ln \ln T}}, \quad F_2(t) = \frac{2\pi(S_1(t+h) - S_1(t))}{h\sqrt{\ln(h^{-1})}}$$

и рассмотрим интеграл

$$I = H^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)| dt,$$

где F — одна из функций F_1 и F_2 . Покажем, что для I верна асимптотическая формула

$$I = 2\pi^{-1/2} (1 + O((\ln \ln \ln X)^{-0.5})),$$

из которой будут следовать выражения для I_1 и I_2 . Схема доказательства теоремы такова. Рассмотрим тождество

$$|a| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(au)}{u} \right)^2 du,$$

справедливое для любого вещественного числа a . Полагая в нем $a = F(t)$ и интегрируя полученное равенство по t в пределах от $t = T$ до $t = T + H$, приходим к следующему выражению для I :

$$I = \frac{2H^{-1}}{\pi} \int_T^{T+H} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(|F(t)|u)}{u} \right)^2 du dt.$$

Заменим промежуток $(0, +\infty)$ на конечный и приблизим $\sin^2(F(t)u)$ отрезком ряда Тейлора по четным степеням $F(t)u$. Поменяв местами порядки интегрирования, в правой части равенства получим линейную комбинацию интегралов, для которых в теореме 1 были выведены асимптотические формулы. Таким образом, вычисление первого момента $F(t)$ сводится к вычислению некоторой суммы, в которой участвуют лишь четные моменты этой функции.

Произведем теперь необходимые вычисления. Пусть $\lambda = \lambda(T) \geq 2$. Тогда

$$I = J_1 + R_1,$$

где

$$J_1 = 2\pi H^{-1} \int_0^\lambda \int_T^{T+H} \left(\frac{\sin(|F(t)|u)}{u} \right)^2 du dt,$$

$$R_1 = 2\pi H^{-1} \int_\lambda^{+\infty} \int_T^{T+H} \left(\frac{\sin(|F(t)|u)}{u} \right)^2 du dt \leq \int_\lambda^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \lambda^{-1}.$$

Возьмем теперь целое N из промежутка $\lambda \leq N \leq 0.1(\ln \ln X)^{0.5}$. По формуле Тейлора

$$\sin^2(F(t)u) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} (2uF(t))^{2n} + \theta \frac{(2uF(t))^{2N+2}}{(2N+2)!}.$$

Подставляя это выражение в равенство для J_1 , находим

$$J_1 = J_2 + R_2,$$

где

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda u^{-2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} (2u)^{2n} j(n) \right) du,$$

$$R_2 \leq \frac{8}{\pi} \int_0^\lambda \frac{(2u)^{2N}}{(2N+2)!} j(N+1) du,$$

$$j(n) = H^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^{2n} dt.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$j(n) = \frac{(2n)!}{n!} (1 + O(c^n (\ln \ln X)^{-0.5})),$$

и $j(n) \ll (cn)^n$, где $c = c(\varepsilon) > 0$ – постоянная. Воспользовавшись последним неравенством, оценим величину R_2 :

$$R_2 \ll \frac{\lambda}{N} \frac{(2\lambda)^{2N}}{(2N+2)!} (c(N+1))^{N+1} \ll \left(\frac{2ce\lambda^2}{N} \right)^N \ll \left(\frac{c_1\lambda^2}{N} \right)^N,$$

где $c_1 = 4ce$. Заменяя по приведенной выше формуле значения $j(n)$ в выражении для J_2 , находим

$$J_2 = J_3 + R_3,$$

где

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda u^{-2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (2u)^{2n} \right) du, \\ R_3 &\ll \int_0^\lambda u^{-2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{u^{2n}}{n!} \frac{c^n}{\sqrt{\ln \ln X}} \right) du \\ &\ll (\ln \ln X)^{-0.5} \sum_{n=1}^N \frac{(c\lambda^2)^n}{n!} \ll e^{c\lambda^2} (\ln \ln X)^{-0.5}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (2u)^{2n} = 1 - e^{-4u^2} + \theta \frac{(2u)^{2N+2}}{(N+1)!},$$

то интеграл I_3 принимает вид

$$I_3 = I_4 + R_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_4 &= \pi^{-1} \int_0^{+\infty} u^{-2} (1 - e^{-4u^2}) du, \\ R_4 &= -\pi^{-1} \int_\lambda^{+\infty} u^{-2} (1 - e^{-4u^2}) du + 4\theta\pi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{(2u)^{2N}}{(N+1)!} du \\ &\ll \lambda^{-1} + \lambda N^{-2.5} \left(\frac{4e\lambda^2}{N} \right)^N \ll \lambda^{-1} + \left(\frac{c_1\lambda^2}{N} \right)^N. \end{aligned}$$

Значение I_4 находим интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} I_4 &= \pi^{-1} \int_0^{+\infty} v^{-3/2} (1 - e^{-v}) dv = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-v}) d(-2v^{-1/2}) \\ &= 2\pi^{-1} \int_0^{+\infty} v^{-1/2} e^{-v} dv = 2\pi^{-1/2}. \end{aligned}$$

Используя оценки величин R_j , $j = 1, 2, 3, 4$, приходим к равенству

$$I = 2\pi^{-1/2}(1 + O(R)),$$

где

$$R = \lambda^{-1} + \left(\frac{c_1\lambda^2}{N} \right)^N + e^{c\lambda^2} (\ln \ln X)^{-0.5}.$$

Возьмем теперь $N = [0.5 \ln \ln \ln T] + 1$, $\lambda = 0.5(c_1^{-1} \ln \ln \ln T)^{0.5}$. Тогда

$$\left(\frac{c_1\lambda^2}{N} \right)^N \ll 2^{-N} \ll (\ln \ln X)^{-0.3}$$

и

$$e^{c\lambda^2} (\ln \ln X)^{-0.5} \ll \exp(c_1 \cdot 0.25c_1^{-1} - 0.5) \ln \ln \ln X \ll (\ln \ln X)^{-0.25}.$$

Таким образом, $R \ll \lambda^{-1} \ll (\ln \ln \ln X)^{-0.25}$. Полагая в формуле для I последовательно $F = F_1$ и $F = F_2$, приходим к утверждению теоремы.

§ 6. Доказательство теоремы В

Этот параграф посвящен получению нижней оценки величины $M(T + H) - M(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Пусть параметр h , точное значение которого будет выбрано далее, удовлетворяет условиям теоремы 2. Положим

$$j_1(t; h) = \int_0^h |S(t + u)| du, \quad j_2(t; h) = \left| \int_0^h S(t + u) du \right|$$

и обозначим буквой E множество тех точек t , $T < t \leq T + H$, для которых $j_1(t; h) > j_2(t; h)$. Тогда на оставшейся части промежутка, которую мы обозначим E_1 , выполнено равенство $j_1(t; h) = j_2(t; h)$. Положим $\nu_0 = [Hh^{-1}]$, $H_0 = h\nu_0$ и разобьем $(T, T + H_0]$ на ν_0 промежутков $(T + (\nu - 1)h, T + \nu h] = (T', T' + h]$, $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$. Пусть ν_1 — количество таких промежутков, пересечение которых с множеством E непусто. Занумеруем их в порядке возрастания правых концов и обозначим буквой G объединение таких промежутков с четными номерами: $2, 4, \dots, 2\nu_2 = 2[\nu_1/2]$. Если точка τ множества E принадлежит промежутку $(T', T' + h]$ из G , то справедливо неравенство

$$j_1(\tau; h) = \int_{\tau}^{\tau+h} |S(t)| dt > \left| \int_{\tau}^{\tau+h} S(t) dt \right| = j_2(\tau; h).$$

Это неравенство означает, что на интервале $(\tau, \tau + h)$ имеется точка перемены знака $S(t)$. Нетрудно убедиться в том, что эта точка содержится в интервале $(T', T' + 2h)$. Поскольку расстояние между любыми двумя точками соседних промежутков из G больше h , то никакие два из ν_2 построенных таким образом интервалов $(T', T' + 2h)$ не пересекаются. Отсюда следует, что на промежутке $(T, T + H_0]$ имеется по меньшей мере ν_2 точек, в которых $S(t)$ меняет знак. Таким образом,

$$M(T + H) - M(T) \geq M(T + H_0) - M(T) \geq \nu_2 \geq \frac{\nu_1}{2} - 1.$$

Так как множество E целиком содержится в объединении ν_1 промежутков длины h , то $\mu(E) \leq \nu_1 h$. Поэтому число перемен знака $S(t)$ на $(T, T + H]$ оценивается снизу величиной

$$\frac{\mu(E)}{2h} - 1.$$

Оценим теперь меру множества E снизу. Пользуясь определением E , E_1 и неравенством Коши, находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T^{T+H} j_1(t; h) dt = \left(\int_{E_1} + \int_E \right) j_1(t; h) dt \\ &= \int_{E_1} j_2(t; h) dt + \int_E j_1(t; h) dt \leq I_2 + \sqrt{\mu(E)} \sqrt{I_3}, \end{aligned}$$

где

$$I_2 = \int_T^{T+H} j_2(t; h) dt = \int_T^{T+H} |S_1(t+h) - S_1(t)| dt,$$

$$I_3 = \int_T^{T+H} \left(\int_0^h |S(t+u)| du \right)^2 dt.$$

После несложных преобразований получаем

$$\mu(E) \geq \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_3}.$$

Согласно теореме 2

$$I_1 = \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |S(t)| dt du = \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln T} (1 + O(\ln \ln \ln X)^{-0.5}),$$

так что

$$I_1 - I_2 \geq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} (\sqrt{\ln \ln T} - \sqrt{\ln(h^{-1})}) - c_1 Hh \sqrt{\frac{\ln \ln X}{\ln \ln \ln X}},$$

где $c_1 > 0$ – достаточно большая постоянная. Положим теперь

$$h = (\ln T)^{-1} \exp \left(\frac{40c_1 \ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln X}} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln \ln T} - \sqrt{\ln(h^{-1})} &= \frac{\ln(h \ln T)}{\sqrt{\ln \ln T} + \sqrt{\ln(h^{-1})}} \geq \frac{\ln(h \ln T)}{2\sqrt{\ln \ln T}} \\ &\geq 20c_1 \sqrt{\frac{\ln \ln X}{\ln \ln \ln X}} \end{aligned}$$

и

$$I_1 - I_2 \geq 0.1Hh20c_1 \sqrt{\frac{\ln \ln X}{\ln \ln \ln X}} - c_1 Hh \sqrt{\frac{\ln \ln X}{\ln \ln \ln X}} = c_1 Hh \sqrt{\frac{\ln \ln X}{\ln \ln \ln X}}.$$

Интеграл I_3 оценим, пользуясь теоремой 1:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq h \int_T^{T+H} \int_0^h |S(t+u)|^2 du dt \leq h^2 \int_T^{T+H+h} |S(t)|^2 dt \\ &\leq h^2 \left(\frac{H}{2\pi^2} \ln \ln T + cH \sqrt{\ln \ln T} \right) < Hh^2 \ln \ln X. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mu(E) \geq \left(c_1 Hh \sqrt{\frac{\ln \ln X}{\ln \ln \ln X}} \right)^2 (Hh^2 \ln \ln X)^{-1} = c_1^2 H (\ln \ln \ln X)^{-1}.$$

Переходя к оценке разности $M(T+H) - M(T)$, будем иметь

$$M(T+H) - M(T) \geq c_1^2 Hh^{-1} (\ln \ln \ln X)^{-1} - 1 \geq H(\ln T) \exp \left(-\frac{50c_1 \ln \ln X}{\sqrt{\ln \ln \ln X}} \right).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Selberg A.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Archiv for Matematik og Naturvidenskab. 1946. V. 48. № 5. P. 89–155.
2. *Titchmarsh E. C.* The zeros of the Riemann zeta-function // Proc. Royal Soc. 1935. V. 151. P. 234–255.
3. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
4. *Ghosh A.* On Riemann's Zeta-Function – Sign Changes of $S(T)$ // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 1. N. Y.: Academic Press, 1981. P. 29–46.
5. *Карацуба А. А.* О функции $S(t)$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 27–56.
6. *Карацуба А. А.* Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 448–449.
7. *Королёв М. А.* О числе перемен знака функции $S(t)$ на коротком промежутке // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 4. С. 446–447.
8. *Mueller J.* On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ – gaps between sign changes of $S(t)$ // Mathematika. 1982. V. 29. № 2. P. 264–269.
9. *Selberg A.* Old and New Conjectures and Results About a Class of Dirichlet Series // Proc. of the Amalfi conference. Univ. Di Salerno, 1992. P. 365–387.
10. *Карацуба А. А.* Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 6. С. 1214–1222.
11. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Zeitschr. 1921. V. 10. P. 283–317.
12. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications to the divisor problem of Dirichlet and Piltz // Proc. London Math. Soc. 1922. V. 21. № 2. P. 39–74.
13. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. 1-е изд. М.: Наука, 1975.
14. *Selberg A.* On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ // Avhandler Norske Vid. Acad. Mat.-Nat. 1944. Kl. 1.
15. *Постников А. Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1966. Т. 82.
16. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: ИЛ, 1963.
17. *Ghosh A.* On the Riemann zeta-function-mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$ // J. of Number Theory. 1983. V. 17. P. 93–102.
18. *Tsang K.-M.* Some Ω -theorems for the Riemann zeta-function // Acta Arithmetica. 1986. V. 46. № 4. P. 369–395.

Поступило в редакцию
24.IX.2002