Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, Много-
частотные автоколебания в двумерных решетках свя-
занных осцилляторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011,
том 75, выпуск 3, 97–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:54:34

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов

Многочастотные автоколебания в двумерных решетках связанных осцилляторов

Рассмотрена двумерная решетка связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, получающаяся при стандартной пространственной дискретизации нелинейного волнового уравнения $u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = a_1^2 u_{xx} + a_2^2 u_{yy}$, $a_1, a_2 = \text{const} > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$, в единичном квадрате с нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана. Установлено, что у соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений существуют аттракторы, не имеющие аналогов в исходной краевой задаче. Таковыми являются устойчивые инвариантные торы различных размерностей. Показано также, что при увеличении числа уравнений в решетке количество этих торов неограниченно растет.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: волновое уравнение, дискретизация, автоколебания, аттрактор, инвариантный тор, решетка связанных осцилляторов, буферность.

Введение

К настоящему времени проблема аттракторов нелинейных гиперболических уравнений в локальной постановке в случае одной или двух пространственных переменных изучена достаточно подробно (см. монографии [1]–[3] и обзорные статьи [4]–[6]). Анализ различных математических моделей (главным образом, из радиопизики) показал, что, как правило, даже устойчивые двумерные торы наблюдаются в них весьма редко. Типична ситуация, когда имеются устойчивые циклы, количество которых за счет подходящего выбора параметров может быть сколь угодно большим. Это явление, отмечавшееся еще А. А. Виттом [7], впоследствии было названо буферностью.

Результаты настоящей статьи позволяют по-новому взглянуть на природу аттракторов гиперболических краевых задач. А именно, далее устанавливается следующий весьма неожиданный феномен. Как оказывается, аттракторы нелинейного волнового уравнения могут существенно отличаться от аттракторов его конечномерного аналога, получающегося в результате замены производных по пространственным переменным соответствующими разностными операторами. Причем, что характерно, уменьшение шага дискретизации не только не устраняет, а напротив, усиливает это отличие.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00342а и № 09-01-00614) и Целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (государственный контракт № 02.740.11.0197).

© А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, 2011

Изложение ведется на уровне рассмотрения типового примера – краевой задачи для волнового уравнения ван-дер-полевского типа в единичном квадрате. Как известно (см. [2], [3]), в случае нулевых граничных условий Неймана при некоторой общности положения упомянутая задача допускает только устойчивые периодические по времени движения, зависящие от одной пространственной переменной x или y , и таких решений может быть достаточно много. При переходе же от нее к соответствующей аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений ситуация принципиально меняется: все периодические движения (за исключением одного или четырех) становятся неустойчивыми, а вместо них появляются устойчивые инвариантные торы размерностей 2, 3 и 4.

§ 1. Физическая постановка задачи

Следуя работам [8], [9], рассмотрим двумерный массив идентичных осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своими соседями. Предположим, что интересующий нас массив имеет размер $N \times N$, где N – произвольное натуральное число, и состоит из одинаковых ячеек, имеющих вид, показанный на рис. 1. Считаем, что центр O каждой такой ячейки связан с землей посредством параллельно подключенных конденсатора C_0 , индуктивности L_0 и туннельного диода с вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$. Сами же ячейки взаимодействуют между собой по осям x и y через индуктивности L_1 и L_2 соответственно (см. рис. 1).

Рис. 1

Для вывода математической модели описанной системы фиксируем ячейку с номерами n, m и обозначим через $u_{n,m}(t)$ напряжение в ее узле O . Первый закон Кирхгофа для этого узла приводит к равенству

$$i_1 + i_3 - i_2 - i_4 - i_5 = 0, \quad (1.1)$$

где i_k , $k = 1, \dots, 5$, – соответствующие токи (см. рис. 1). Далее, ток i_5 представляет собой сумму токов, текущих через конденсатор C_0 , индуктивность L_0 и туннельный диод, и вследствие этого записывается в виде

$$i_5 = C_0 \dot{u}_{n,m}(t) + f(u_{n,m}(t)) + \frac{1}{L_0} \int u_{n,m} dt. \quad (1.2)$$

Остальные токи в силу закона Ома для участков цепи задаются равенствами

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{L_1} \int (u_{n,m} - u_{n-1,m}) dt, & i_2 &= -\frac{1}{L_1} \int (u_{n+1,m} - u_{n,m}) dt, \\ i_3 &= -\frac{1}{L_2} \int (u_{n,m} - u_{n,m-1}) dt, & i_4 &= -\frac{1}{L_2} \int (u_{n,m+1} - u_{n,m}) dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Приведенные соотношения (1.1)–(1.3) позволяют выписать систему, связывающую напряжения $u_{n,m}(t)$, $n, m = 1, \dots, N$, в узлах массива. Действительно, подставляя формулы (1.2), (1.3) в (1.1) и дифференцируя результат по t , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L_1} (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \frac{1}{L_2} (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}) \\ &= C_0 \ddot{u}_{n,m} + \frac{d}{dt} f(u_{n,m}) + \frac{1}{L_0} u_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Получившуюся систему (1.4) следует дополнить какими-либо граничными условиями. В работе [8] рассматривалась ситуация, когда две смежные стороны граничного прямоугольника заземлены, а две другие – свободны. Далее, в [9] изучался случай трех заземленных сторон и одной свободной. Мы же, следуя [10], рассмотрим два простейших варианта

$$\begin{aligned} u_{0,m} &= u_{1,m}, & u_{N+1,m} &= u_{N,m}, & m &= 1, \dots, N, \\ u_{n,0} &= u_{n,1}, & u_{n,N+1} &= u_{n,N}, & n &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.5)$$

или

$$u_{0,m} = u_{N+1,m} = 0, \quad u_{n,0} = u_{n,N+1} = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (1.6)$$

означающих соответственно, что все граничные ячейки либо одновременно свободны, либо заземлены.

Для приведения модели (1.4) к виду, более удобному для последующего анализа, сделаем ряд упрощающих предположений. Как и в статьях [8], [9], будем полагать, что каждая отдельно взятая ячейка массива имеет одинаковые линейные размеры по осям x , y и, в частности, расстояние между показанными на рис. 1 точками A и B равно $h = 1/N$. Положим также

$$\begin{aligned} C_0 &= C_{0,*} h^2, & L_0 &= \frac{L_{0,*}}{h^2}, & L_1 &= L_{1,*}, & L_2 &= L_{2,*}, \\ f(u) &= -h^2 G_* \left(u - \frac{u^3}{3} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где электрические параметры $C_{0,*}$, $L_{0,*}$, $L_{1,*}$, $L_{2,*}$, G_* уже не зависят от h . И наконец, предположим, что координаты x , y на плоскости, проходящей через

центры всех ячеек, выбраны таким образом, что узлу O ячейки с номерами n, m соответствует точка $(x, y) = (nh, mh)$.

После подстановки в (1.4) соотношений (1.7), деления на h^2 и последующей нормировки времени $t/\sqrt{L_{0,*}C_{0,*}} \rightarrow t$ интересующая нас система преобразуется к виду

$$\ddot{u}_{n,m} + \varepsilon(u_{n,m}^2 - 1)\dot{u}_{n,m} + u_{n,m} = a_1^2 N^2(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + a_2^2 N^2(u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}), \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

где $\varepsilon = G_*\sqrt{L_{0,*}/C_{0,*}}$, $a_j = \sqrt{L_{0,*}/L_{j,*}}$, $j = 1, 2$. Далее, переходя в (1.8) к пределу при $N \rightarrow \infty$ и учитывая указанный способ введения координат x, y , получаем соответствующую распределенную модель

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = a_1^2 u_{xx} + a_2^2 u_{yy}, \quad (1.9)$$

где $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $u = u(t, x, y)$ – вещественная скалярная функция (распределенное напряжение).

Следует отметить, что на самом деле область применимости системы (1.8) и уравнения (1.9) не ограничивается лишь радиофизикой. Согласно [10] на феноменологическом уровне строгости с их помощью описываются всевозможные триггерные системы, используемые в компьютерах в качестве запоминающего устройства, многомодовые лазеры, в которых несколько оптических мод конкурируют между собой с целью получения энергии от активной среды, взаимодействующие биологические виды с общим источником пищи, неокортекс человеческого мозга, в котором различные концепции соревнуются друг с другом в целях доминирования, и т. д. Для нас же модели (1.8) и (1.9) представляют интерес в первую очередь в связи с тем, что, как будет показано ниже, при $0 < \varepsilon \ll 1$, $a_1, a_2 = \text{const} \sim 1$ их динамические свойства существенно различны и это различие сохраняется при любом фиксированном N .

§ 2. Случай свободной границы

Рассмотрим сначала систему

$$\ddot{u}_{s_1, s_2} + \varepsilon(u_{s_1, s_2}^2 - 1)\dot{u}_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2} = \mathcal{L}u_{s_1, s_2}, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

получающуюся из (1.8) при учете граничных условий (1.5). Здесь $\mathcal{L} = a_1^2 \mathcal{L}_1 + a_2^2 \mathcal{L}_2$, а разностные операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 u_{s_1, s_2} &= N^2(u_{s_1+1, s_2} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1-1, s_2}), \\ u_{0, s_2} &= u_{1, s_2}, \quad u_{N+1, s_2} = u_{N, s_2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 u_{s_1, s_2} &= N^2(u_{s_1, s_2+1} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2-1}), \\ u_{s_1, 0} &= u_{s_1, 1}, \quad u_{s_1, N+1} = u_{s_1, N}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Будем изучать вопрос об аттракторах системы (2.1) при условии, что $\varepsilon > 0$ – малый положительный параметр, а коэффициенты a_1, a_2 имеют порядок единицы и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, о которых скажем далее.

При исследовании системы (2.1) нам потребуются так называемые разностные моды

$$e_{s_1, s_2}^{n, k} = 2e_{s_1}^n e_{s_2}^k, \quad e_{s_1}^n = \cos\left(\frac{\pi n}{2N}(2s_1 - 1)\right), \quad e_{s_2}^k = \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2s_2 - 1)\right),$$

$$s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad n, k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.4)$$

являющиеся аналогами пространственных мод $2 \cos(\pi n x) \cos(\pi k y)$ и обладающие свойствами

$$\mathcal{L} e_{s_1, s_2}^{n, k} = -(a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

где

$$\lambda_m = 4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi m}{2N}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.6)$$

Точнее говоря, для нас существенно то обстоятельство, что общее решение линейной системы, получающейся из (2.1) при $\varepsilon = 0$, допускает представление в виде тригонометрического полинома:

$$u_{s_1, s_2} = \sum_{n, k=0}^{N-1} (\xi_{n, k} \exp(i\sigma_{n, k} t) + \bar{\xi}_{n, k} \exp(-i\sigma_{n, k} t)) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \quad (2.7)$$

где $\sigma_{n, k} = \sqrt{1 + a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k}$, а $\xi_{n, k}$ – произвольные комплексные постоянные.

Формулы (2.4)–(2.7) позволяют для исследования аттракторов системы (2.1) воспользоваться известным асимптотическим методом Крылова–Боголюбова–Митропольского. Опираясь на общую идеологию этого метода (см. [11]), возможные автоколебания системы (2.1) будем искать в виде асимптотических рядов

$$u_{s_1, s_2} = u_{s_1, s_2, 0}(t, \tau) + \varepsilon u_{s_1, s_2, 1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Как обычно, предполагаем, что коэффициенты этих рядов являются тригонометрическими полиномами переменных $\sigma_{n, k} t$, $n, k = 0, 1, \dots, N - 1$, а нулевые приближения $u_{s_1, s_2, 0}(t, \tau)$ задаются формулами (2.7), в которых $\xi_{n, k} = \xi_{n, k}(\tau)$ – пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды.

После подстановки соотношений (2.7), (2.8) в (2.1) и приравнивания коэффициентов при ε для нахождения $u_{s_1, s_2, 1}$ получается линейная неоднородная система

$$\frac{d^2 u_{s_1, s_2, 1}}{dt^2} + u_{s_1, s_2, 1} - \mathcal{L} u_{s_1, s_2, 1} = f_{s_1, s_2}(t, \tau), \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

где

$$f_{s_1, s_2}(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_{s_1, s_2, 0} - \frac{u_{s_1, s_2, 0}^3}{3} - 2 \frac{\partial u_{s_1, s_2, 0}}{\partial \tau} \right), \quad (2.10)$$

а переменная τ рассматривается как параметр. Ее решение будем искать в классе тригонометрических полиномов той же структуры, что и неоднородность (2.10), а именно в виде

$$u_{s_1, s_2, 1} = \sum_{n, k=0}^{N-1} u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau) \exp(i\sigma_{n, k} t) + \overline{u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau) \exp(-i\sigma_{n, k} t)} + \sum_m u_{s_1, s_2, 1}^m(\tau) \exp\left(i \sum_{r_1, r_2=0}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2} t\right), \quad (2.11)$$

где через m обозначаются всевозможные матрицы $\|m_{r_1, r_2}\|_{r_1, r_2=0}^{N-1}$ с целочисленными элементами, удовлетворяющие равенству $\sum_{r_1, r_2} |m_{r_1, r_2}| = 3$. В связи с этим предположим, что для любой такой матрицы выполняются условия нерезонансности

$$\sigma_{n, k} \neq \sum_{r_1, r_2=0}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

справедливости которых всегда можно добиться за счет надлежащего выбора параметров a_1, a_2 .

Указанный способ действий сводит проблему нахождения $u_{s_1, s_2, 1}$ к решению линейных неоднородных алгебраических систем для входящих в (2.11) коэффициентов $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}, u_{s_1, s_2, 1}^m$. Начнем с рассмотрения систем для $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}$, которые имеют вид

$$-(\mathcal{L} u_{s_1, s_2, 1}^{n, k} + (a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k) u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}) = g_{s_1, s_2}^{n, k}(\tau), \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

где

$$g_{s_1, s_2}^{n, k} = i\sigma_{n, k} \left(\xi_{n, k} - 2 \frac{d\xi_{n, k}}{d\tau} \right) e_{s_1, s_2}^{n, k} - i\sigma_{n, k} (e_{s_1, s_2}^{n, k})^3 |\xi_{n, k}|^2 \xi_{n, k} - 2i\sigma_{n, k} \sum_{\substack{m, r=0 \\ (m, r) \neq (n, k)}}^{N-1} e_{s_1, s_2}^{n, k} (e_{s_1, s_2}^{m, r})^2 |\xi_{m, r}|^2 \xi_{n, k}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.14)$$

Отметим, что в силу свойств (2.5) разностного оператора $\mathcal{L}$ все системы (2.13) оказываются вырожденными, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$l(g_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{n, k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{s_1, s_2=1}^N g_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{n, k} = 0, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.15)$$

В случае коэффициентов $u_{s_1, s_2, 1}^m$ реализуется более простая ситуация. Нетрудно видеть, что они удовлетворяют линейным неоднородным алгебраическим системам

$$\left[1 - \left(\sum_{r_1, r_2=0}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2} \right)^2 \right] u_{s_1, s_2, 1}^m - \mathcal{L} u_{s_1, s_2, 1}^m = F_{s_1, s_2}^m, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N,$$

каждая из которых в силу условий (2.12) является невырожденной.

Объединяя все, изложенное выше, приходим к выводу, что для разрешимости системы (2.9) в классе тригонометрических полиномов необходимо и достаточно выполнение условий (2.15). В связи с этим будем рассматривать данные соотношения как систему для определения комплексных амплитуд $\xi_{n,k}(\tau)$, $n, k = 0, 1, \dots, N-1$, которые до этого момента были произвольными. Несложный подсчет с использованием явных формул (2.14) для $g_{s_1, s_2}^{n, k}$ и известных свойств

$$l(e_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{m, r}) = 0 \quad \text{при } (n, k) \neq (m, r), \quad c_{n, k} = l((e_{s_1, s_2}^{n, k})^2) > 0 \quad (2.16)$$

показывает, что интересующая нас система преобразуется к виду

$$2 \frac{d\xi_{n, k}}{d\tau} = \xi_{n, k} \left[1 - d_{n, k}^{n, k} |\xi_{n, k}|^2 - \sum_{\substack{m, r=0 \\ (m, r) \neq (n, k)}}^{N-1} d_{n, k}^{m, r} |\xi_{m, r}|^2 \right], \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.17)$$

где

$$d_{n, k}^{n, k} = \frac{l((e_{s_1, s_2}^{n, k})^4)}{c_{n, k}}, \quad d_{n, k}^{m, r} = 2 \frac{l((e_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{m, r})^2)}{c_{n, k}}. \quad (2.18)$$

Согласно общепринятой терминологии систему (2.17) назовем *нормальной формой системы* (2.1) или просто *нормальной формой*. Рассмотрим, далее, естественно возникающий вопрос о связи между стационарными режимами указанных систем. С этой целью положим в (2.17)

$$\xi_{n, k} = \sqrt{\eta_{n, k}} \exp(i\psi_{n, k}), \quad \eta_{n, k} \geq 0, \quad 0 \leq \psi_{n, k} \leq 2\pi \pmod{2\pi}.$$

В результате получим $(2N^2)$ -мерную систему для $\eta_{n, k}$, $\psi_{n, k}$, от которой отщепляется N^2 -мерная амплитудная система

$$\frac{d\eta_{n, k}}{d\tau} = \eta_{n, k} \left(1 - d_{n, k}^{n, k} \eta_{n, k} - \sum_{\substack{m, r=0 \\ (m, r) \neq (n, k)}}^{N-1} d_{n, k}^{m, r} \eta_{m, r} \right), \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.19)$$

Из содержащихся в монографиях [11], [12] результатов вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *Фиксируем некоторый набор индексов $\gamma = \{(n_1, k_1), \dots, (n_p, k_p)\}$, где $0 \leq n_j \leq N-1$, $0 \leq k_j \leq N-1$, $j = 1, \dots, p$, а порядок следования пар (n_j, k_j) , $j = 1, \dots, p$, не имеет значения. Предположим, далее, что в амплитудной системе (2.19) этому набору соответствует экспоненциально устойчивое или дихотомичное состояние равновесия*

$$O_\gamma^{(p)} = \{\eta_{n_j, k_j} = \eta_{n_j, k_j}^0 > 0, \quad \eta_{n, k} = 0 \text{ при } (n, k) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, p\} \quad (2.20)$$

с количеством ненулевых координат, равным p . Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной системе (2.1) состоянию равновесия (2.20) отвечает p -мерный инвариантный тор $T_\gamma^{(p)}$ с теми

же свойствами устойчивости. Указанный тор допускает параметрическое представление

$$u_{s_1, s_2} = \sum_{j=1}^p 2\sqrt{\eta_{n_j, k_j}^0} e_{s_1, s_2}^{n_j, k_j} \cos \varphi_j + \varepsilon \mathcal{U}_{s_1, s_2}(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varepsilon), \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (2.21)$$

а движения на нем описываются системой уравнений

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \sigma_{n_j, k_j} + \varepsilon^2 \Psi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.22)$$

Здесь φ_j , $j = 1, \dots, p$, – соответствующие этому тору циклические координаты, а 2π -периодические по векторному аргументу $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ функции $\mathcal{U}_{s_1, s_2}$, Ψ_j достаточно гладко зависят от $(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^p \times [0, \varepsilon_0]$.

Сформулированная теорема сводит вопрос об аттракторах системы (2.1) к поиску устойчивых состояний равновесия амплитудной системы (2.19), лежащих в конусе K векторов с неотрицательными координатами. В связи с этим возникает необходимость в получении более конструктивных формул для ее коэффициентов (2.18).

ТЕОРЕМА 2.2. При $0 \leq n \leq N-1$, $0 \leq k \leq N-1$, $n \neq N/2$, $k \neq N/2$, соответствующие уравнения для компонент $\eta_{n, k}$ системы (2.19) записываются в виде

$$\frac{d\eta_{0,0}}{d\tau} = \eta_{0,0} \left(1 - 4\eta_{0,0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,0} - 4 \sum_{r=1}^{N-1} \eta_{0,r} - 2 \sum_{m,r=1}^{N-1} \eta_{m,r} \right), \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,0}}{d\tau} = & \eta_{n,0} \left(1 - 3\eta_{n,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,0} - 2\eta_{N-n,0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0,m} - 3 \sum_{r=1}^{N-1} \eta_{n,r} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{r=1}^{N-1} \eta_{N-n,r} - 8\eta_{0,0} \right), \quad n = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{0,k}}{d\tau} = & \eta_{0,k} \left(1 - 3\eta_{0,k} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{0,m} - 2\eta_{0,N-k} - 3 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,k} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,N-k} - 8\eta_{0,0} \right), \quad k = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,k}}{d\tau} = & \eta_{n,k} \left(1 - \frac{9}{4}\eta_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{n,m} - \frac{3}{2}\eta_{n,N-k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,k} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2}\eta_{N-n,k} - 6\eta_{n,0} - 6\eta_{0,k} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{N-n,r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, N-k} - \frac{1}{2} \eta_{N-n, N-k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{0, m} - 2\eta_{0, N-k} \\
& - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, 0} - 2\eta_{N-n, 0} - 8\eta_{0, 0} \Big), \quad n, k = 1, \dots, N-1. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

В случае четного N к системе (2.23)–(2.26) добавляются еще уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{N/2, 0}}{d\tau} = \eta_{N/2, 0} \Big(1 - 2\eta_{N/2, 0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m, 0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0, m} \\
- 2 \sum_{m, r=1}^{N-1} \eta_{m, r} - 8\eta_{0, 0} \Big), \quad (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{0, N/2}}{d\tau} = \eta_{0, N/2} \Big(1 - 2\eta_{0, N/2} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m, 0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{0, m} \\
- 2 \sum_{m, r=1}^{N-1} \eta_{m, r} - 8\eta_{0, 0} \Big), \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{N/2, k}}{d\tau} = \eta_{N/2, k} \Big(1 - \frac{3}{2} \eta_{N/2, k} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m, r} - \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m, N-k} \\
- 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m, k} - 6\eta_{0, k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{0, m} - 2\eta_{0, N-k} \\
- 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m, 0} - 8\eta_{0, 0} \Big), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad k \neq \frac{N}{2}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{n, N/2}}{d\tau} = \eta_{n, N/2} \Big(1 - \frac{3}{2} \eta_{n, N/2} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{n, m} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, r} \\
- \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{N-n, m} - 6\eta_{n, 0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0, m} - 2\eta_{N-n, 0} \\
- 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, 0} - 8\eta_{0, 0} \Big), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad n \neq \frac{N}{2}, \quad (2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{N/2, N/2}}{d\tau} = \eta_{N/2, N/2} \Big(1 - \eta_{N/2, N/2} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ (m, r) \neq (N/2, N/2)}}^{N-1} \eta_{m, r} \\
- 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m, 0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0, m} - 8\eta_{0, 0} \Big). \quad (2.31)
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование теоремы сводится к подсчету коэффициентов (2.18). В связи с этим обратим внимание на то, что согласно равенствам (2.16), (2.18) величина $d_{n,k}^{n,k}$ представляет собой коэффициент при моде $e_{s_1,s_2}^{n,k}$ в правой части формулы

$$(e_{s_1,s_2}^{n,k})^3 = \frac{1}{4}(9e_{s_1,s_2}^{n,k} + 3e_{s_1,s_2}^{n,3k} + 3e_{s_1,s_2}^{3n,k} + e_{s_1,s_2}^{3n,3k}). \quad (2.32)$$

Далее, в силу характерных для разностных косинусов $e_{s_1}^n, e_{s_2}^k$ (см. (2.4)) свойств

$$e_{s_1}^{2N-n} = -e_{s_1}^n, \quad e_{s_2}^{2N-k} = -e_{s_2}^k \quad (2.33)$$

слагаемые из (2.32), пропорциональные модам $e_{s_1,s_2}^{n,3k}, e_{s_1,s_2}^{3n,k}, e_{s_1,s_2}^{3n,3k}$, будут давать вклад в $d_{n,k}^{n,k}$ при выполнении соответствующих условий $3k = \pm k \pmod{2N}$, $3n = \pm n \pmod{2N}$. Остается заметить, что из этих условий реализуются только равенства $3k = \pm k$ (при $k = 0$), $3n = \pm n$ (при $n = 0$), $3k = 2N - k$ (при $k = N/2$ и четном N), $3n = 2N - n$ (при $n = N/2$ и четном N). Таким образом, опираясь на формулы (2.32), (2.33) и перебирая все возможные комбинации индексов n, k , для $d_{n,k}^{n,k}$ получаем именно те значения, которые фигурируют в уравнениях (2.23)–(2.31).

Вычисление величин $d_{n,k}^{m,r}$, $(m, r) \neq (n, k)$, проводится по той же схеме, что и выше. В самом деле, как и в предыдущем случае, из (2.16), (2.18) заключаем, что $d_{n,k}^{m,r}$ – коэффициент при моде $e_{s_1,s_2}^{n,k}$ в правой части формулы

$$2e_{s_1,s_2}^{n,k} (e_{s_1,s_2}^{m,r})^2 = 2 \left(e_{s_1,s_2}^{n,k} + \frac{1}{2}e_{s_1,s_2}^{n,k+2r} + \frac{1}{2}e_{s_1,s_2}^{n,k-2r} + \frac{1}{2}e_{s_1,s_2}^{n+2m,k} + \frac{1}{4}e_{s_1,s_2}^{n+2m,k+2r} + \frac{1}{4}e_{s_1,s_2}^{n+2m,k-2r} + \frac{1}{2}e_{s_1,s_2}^{n-2m,k} + \frac{1}{4}e_{s_1,s_2}^{n-2m,k+2r} + \frac{1}{4}e_{s_1,s_2}^{n-2m,k-2r} \right). \quad (2.34)$$

Ясно также, что слагаемые из (2.34), пропорциональные модам $e_{s_1,s_2}^{n,k \pm 2r}, e_{s_1,s_2}^{n \pm 2m,k}, e_{s_1,s_2}^{n \pm 2m,k \pm 2r}$, могут давать вклад в $d_{n,k}^{m,r}$ при соответствующих комбинациях условий

$$\begin{aligned} k + 2r &= \pm k \pmod{2N}, & k - 2r &= \pm k \pmod{2N}, \\ n + 2m &= \pm n \pmod{2N}, & n - 2m &= \pm n \pmod{2N}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В свою очередь, из всей совокупности (2.35) разрешимы только уравнения $k \pm 2r = k$ (при $r = 0$), $k - 2r = -k$ (при $r = k$), $k + 2r = -k$ (при $r = k = 0$), $k + 2r = 2N - k$ (при $r = N - k$), а также уравнения, получающиеся из указанных при заменах $k \rightarrow n, r \rightarrow m$. Отсюда после надлежащего перебора различных вариантов сочетания индексов (n, k) и (m, r) делаем вывод о справедливости требуемых равенств для $d_{n,k}^{m,r}$. Теорема доказана.

Теперь найдем аттракторы системы (2.23)–(2.31) в конусе K . Начнем с анализа ее устойчивых состояний равновесия, имеющих две ненулевые координаты. Для этого нам потребуются натуральные $m_0(N)$ и $m_1(N)$, определяющиеся по правилам

$$m_0(N) = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{при нечетном } N, \\ \frac{N-2}{2} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad m_1(N) = 2m_0^2(N). \quad (2.36)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. При любом фиксированном $N \geq 3$ система (2.23)–(2.31) имеет в конусе K наборы устойчивых состояний равновесия $O_\gamma^{(2)}$ вида (2.20), где

$$\gamma = \{(n, 0), (N - n, 0)\}, \quad \eta_{n,0} = \eta_{N-n,0} = \frac{1}{5}, \quad n = 1, \dots, m_0(N), \quad (2.37)$$

$$\gamma = \{(0, k), (0, N - k)\}, \quad \eta_{0,k} = \eta_{0,N-k} = \frac{1}{5}, \quad k = 1, \dots, m_0(N), \quad (2.38)$$

а также $m_1(N)$ устойчивых состояний равновесия $O_\gamma^{(2)}$, для которых

$$\gamma = \{(n, k), (N - n, N - k)\}, \quad \eta_{n,k} = \eta_{N-n,N-k} = \frac{4}{11}, \quad n, k \geq 1, \quad n, k \neq \frac{N}{2}. \quad (2.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем несколько замечаний общего характера. Любое состояние равновесия системы (2.23)–(2.31) вида (2.20) порождает неподвижную точку $\tilde{O}_\gamma^{(p)} = \{\eta_{n_j,k_j} = \eta_{n_j,k_j}^0, j = 1, \dots, p\}$ вспомогательной системы

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta - \eta * \mathcal{D}\eta, \quad \eta = \text{colon}(\eta_{n_1,k_1}, \dots, \eta_{n_p,k_p}), \quad \mathcal{D} = \|d_{n_j,k_j}^{n_s,k_s}\|_{j,s=1}^p, \quad (2.40)$$

где через $*$ обозначено покомпонентное умножение векторов. Далее, нетрудно убедиться в том, что система в вариациях на состоянии равновесия (2.20) имеет треугольную структуру, точнее, если положить $\eta_{(1)} = \eta$, где η – вектор из (2.40), $\eta_{(2)} = \{\eta_{m,r} : (m, r) \neq (n_j, k_j), j = 1, \dots, p\}$, то в переменных $\eta_{(1)}$, $\eta_{(2)}$ она принимает вид

$$\frac{d\eta_{(1)}}{d\tau} = A\eta_{(1)} + B\eta_{(2)}, \quad \frac{d\eta_{(2)}}{d\tau} = C\eta_{(2)}. \quad (2.41)$$

Здесь A – матрица линеаризации вспомогательной системы (2.40) на состоянии равновесия $\tilde{O}_\gamma^{(p)}$, а явное выражение для B не приводим, поскольку в дальнейшем оно не потребуется. Матрица C подсистемы для $\eta_{(2)}$ из (2.41) оказывается диагональной, точнее, в покомпонентной форме записи эта подсистема допускает представление

$$\frac{d\eta_{m,r}}{d\tau} = \alpha_{m,r}\eta_{m,r}, \quad (m, r) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, p,$$

где

$$\alpha_{m,r} = 1 - \sum_{j=1}^p d_{m,r}^{n_j,k_j} \eta_{n_j,k_j}^0, \quad m, r = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.42)$$

$$(m, r) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Отсюда следует, что устойчивость любого состояния равновесия вида (2.20) определяется в конечном итоге по расположению спектра матрицы A и по знакам величин (2.42).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Фиксируем номер n , $1 \leq n \leq m_0(N)$, и рассмотрим вспомогательную систему (2.40) для вектора $\eta = \text{colon}(\eta_{n,0}, \eta_{N-n,0})$, в которой согласно (2.24) матрица $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее, нетрудно проверить, что получившаяся система допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия с координатами $\eta_{n,0} = \eta_{N-n,0} = 1/5$, которому в исходной системе (2.23)–(2.31) отвечает требуемое состояние равновесия $O_\gamma^{(2)}$ из семейства (2.37). Устойчивость этого состояния равновесия определяется по знакам соответствующих величин (2.42), для которых в данном случае справедливы формулы

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{1}{5}(d_{m,r}^{n,0} + d_{m,r}^{N-n,0}), \quad (m,r) \neq (n,0), (N-n,0).$$

И наконец, перебирая различные варианты m, r , приходим к выводу, что во всех ситуациях справа в этих формулах будет одно и то же значение: $-3/5$.

Итак, мы убедились в устойчивости состояний равновесия $O_\gamma^{(2)}$ из семейства (2.37). Оставшиеся случаи (2.38) и (2.39) разбираются аналогично. Отметим только некоторые относительно новые моменты, возникающие во втором из них. Как показывает несложный комбинаторный подсчет, количество неподвижных точек (2.39) равно $m_1(N)$ (см. (2.36)). Далее, каждой из них отвечает вспомогательная система (2.40) с матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 1/2 \\ 1/2 & 9/4 \end{pmatrix},$$

допускающая экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$\eta_{n,k} = \eta_{N-n,N-k} = \frac{4}{11}.$$

Числа $\alpha_{m,r}$ задаются здесь равенствами

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{11}(d_{m,r}^{n,k} + d_{m,r}^{N-n,N-k}), \quad (m,r) \neq (n,k), (N-n,N-k),$$

из которых, в свою очередь, выводим, что

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = \alpha_{N-n,k} = \alpha_{n,N-k} = -\frac{1}{11}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании у системы (2.23)–(2.31) устойчивых состояний равновесия с тремя ненулевыми компонентами. В связи с этим фиксируем набор индексов вида

$$\gamma = \{(n,k), (N-n,k), (0,N-k)\}, \quad n,k \geq 1, \quad n,k \neq \frac{N}{2}, \quad (2.43)$$

и рассмотрим соответствующую ему вспомогательную систему (2.40) с матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 9/4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Непосредственной проверкой покажем, что система (2.40), (2.44) имеет состояние равновесия $\eta_0 = \text{colon}(4/29, 4/29, 7/29)$, а отвечающая ему матрица линеаризации

$$A = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 8 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

гурвицева (ее собственные значения задаются равенствами $\lambda = -3/29, -1, -7/29$). Более того, отрицательными являются и все величины (2.42), вычисленные на данном состоянии равновесия. В самом деле, из формул

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{29} (d_{m,r}^{n,k} + d_{m,r}^{N-n,k}) - \frac{7}{29} d_{m,r}^{0,N-k}, \quad (m,r) \neq (n,k), (N-n,k), (0,N-k),$$

и явного вида коэффициентов системы (2.23)–(2.31) вытекает, что

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = -\frac{9}{29} \quad (2.45)$$

(максимум здесь достигается при $(m,r) = (m,k)$, $m \neq n, N-n$).

В дополнение к изложенному выше отметим, что все перечисленные факты остаются в силе и для набора индексов

$$\gamma = \{(n,k), (n, N-k), (N-n, 0)\}, \quad n, k \geq 1, \quad n, k \neq \frac{N}{2}. \quad (2.46)$$

Точнее говоря, для $\eta = \text{colon}(\eta_{n,k}, \eta_{n,N-k}, \eta_{N-n,0})$ получается система (2.40) с той же самой матрицей (2.44), а для величин $\alpha_{m,r}$, вычисленных по ее состоянию равновесия $\eta = \eta_0$, сохраняется равенство (2.45). Таким образом, установлена следующая

ТЕОРЕМА 2.4. *При каждом $N \geq 3$ система (2.23)–(2.31) имеет два семейства по $m_1(N)$ устойчивых положений равновесия $O_\gamma^{(3)}$, где γ – наборы индексов (2.43) и (2.46) соответственно.*

Завершая поиск возможных аттракторов системы (2.23)–(2.31), изучим вопрос о существовании у нее устойчивых состояний равновесия с четырьмя ненулевыми координатами. С этой целью введем в рассмотрение наборы индексов

$$\gamma = \{(n_1, k_1), (n_2, k_2), (N-n_1, N-k_2), (N-n_2, N-k_1)\}, \quad n_j, k_j \geq 1, \\ n_j, k_j \neq \frac{N}{2}, \quad j = 1, 2, \quad n_1 \neq n_2, \quad k_1 \neq k_2, \quad n_1 + n_2 \neq N, \quad k_1 + k_2 \neq N, \quad (2.47)$$

количество которых, как нетрудно подсчитать, есть

$$m_2(N) = 4m_0^2(N)(m_0(N) - 1)^2. \quad (2.48)$$

Рассмотрим затем отвечающие указанным наборам вспомогательные системы, каждая из которых в силу (2.26) имеет вид (2.40) с одной и той же матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 9/4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9/4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9/4 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Обратим внимание на то, что система (2.40), (2.49) допускает состояние равновесия $\eta_0 = \text{colon}(4/25, 4/25, 4/25, 4/25)$. Тем самым, каждый набор индексов γ из семейства (2.47) однозначно задает состояние равновесия $O_\gamma^{(4)}$ исходной системы (2.23)–(2.31) с четырьмя ненулевыми координатами

$$\eta_{n_1, k_1} = \eta_{n_2, k_2} = \eta_{N-n_1, N-k_2} = \eta_{N-n_2, N-k_1} = \frac{4}{25}.$$

Далее, как уже отмечалось выше, устойчивость такого положения равновесия определяется по расположению собственных значений соответствующей матрицы линеаризации $A = -(4/25)\mathcal{D}$ и по знакам величин

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{25} (d_{m,r}^{n_1, k_1} + d_{m,r}^{n_2, k_2} + d_{m,r}^{N-n_1, N-k_2} + d_{m,r}^{N-n_2, N-k_1}). \quad (2.50)$$

Остается заметить, что в данном случае матрица A оказывается гурвицевой (ее собственные значения равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/25$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -9/25$), а из (2.50) с учетом явных формул для $d_{m,r}^{n,k}$ имеем

$$\begin{aligned} \max_{m,r} \alpha_{m,r} &= \alpha_{n_1, N-k_1} = \alpha_{n_2, N-k_2} = \alpha_{n_2, N-k_1} = \alpha_{n_1, N-k_2} = \alpha_{N-n_1, k_1} \\ &= \alpha_{N-n_2, k_2} = \alpha_{N-n_2, k_1} = \alpha_{N-n_1, k_2} = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Еще одна группа экспоненциально устойчивых состояний равновесия системы (2.23)–(2.31) с четырьмя ненулевыми координатами получается следующим образом. Обозначим через γ' всевозможные наборы индексов вида (2.47), для которых $n_1 + n_2 = N$, $k_1 + k_2 \neq N$ или $n_1 + n_2 \neq N$, $k_1 + k_2 = N$, т.е. нарушается только одно из прежних ограничений. Нетрудно убедиться в том, что количество таких наборов есть

$$m_3(N) = 4m_0^2(N)(m_0(N) - 1), \quad (2.51)$$

причем в случае $n_1 + n_2 = N$ всем им отвечают системы (2.40) с одной и той же матрицей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$, а в случае $k_1 + k_2 = N$ – с матрицей $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$, где

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 9/4 & 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 9/4 & 3/2 & 1 \\ 1 & 3/2 & 9/4 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 & 9/4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 9/4 & 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 9/4 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 9/4 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 9/4 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Далее, обе системы (2.40), (2.52) имеют положение равновесия

$$\eta_0 = \text{colon}\left(\frac{4}{23}, \frac{4}{23}, \frac{4}{23}, \frac{4}{23}\right),$$

а спектр соответствующих ему матриц линеаризации $A_j = -(4/23)\mathcal{D}_j$, $j = 1, 2$, состоит из собственных значений

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{23}, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -\frac{7}{23}.$$

Таким образом, установлено, что любой набор индексов γ' порождает свое состояние равновесия $O_{\gamma'}^{(4)}$ исходной системы (2.23)–(2.31) с четырьмя ненулевыми компонентами, равными $4/23$. Более того, все эти неподвижные точки оказываются устойчивыми, поскольку для вычисленных по ним величин

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{23} (d_{m,r}^{n_1,k_1} + d_{m,r}^{n_2,k_2} + d_{m,r}^{N-n_1,N-k_2} + d_{m,r}^{N-n_2,N-k_1})$$

в каждой из ситуаций $n_1 + n_2 = N$ или $k_1 + k_2 = N$ справедливо одно и то же равенство

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = -\frac{9}{23}. \quad (2.53)$$

В случае $n_1 + n_2 = N$ максимум в (2.53) достигается при

$$(m, r) = (n_1, k_2), (n_2, k_1), (n_1, N - k_2), (n_2, N - k_1),$$

а в случае $k_1 + k_2 = N$ – при

$$(m, r) = (n_1, k_2), (n_2, k_1), (N - n_1, k_2), (N - n_2, k_1).$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.5. *При любом $N \geq 5$ система (2.23)–(2.31) имеет совокупность из $m_2(N)$ устойчивых состояний равновесия $O_{\gamma'}^{(4)}$, где γ пробегает множество наборов индексов (2.47), и $m_3(N)$ устойчивых неподвижных точек вида $O_{\gamma'}^{(4)}$.*

В дополнение к теореме 2.5 отметим, что состояния равновесия $O_{\gamma'}^{(4)}$ с наборами индексов (2.47), для которых $n_1 + n_2 = N$ и $k_1 + k_2 = N$, у системы (2.23)–(2.31) также существуют, но оказываются неустойчивыми (соответствующие им матрицы линеаризации A имеют положительное собственное значение). Отметим также, что помимо состояний равновесия из теорем 2.3–2.5, система (2.23)–(2.31) допускает некоторое количество устойчивых положений равновесия с одной ненулевой компонентой. К таковым относится ее неподвижная точка

$$O_{(0,0)}^{(1)} = \left\{ \eta_{0,0} = \frac{1}{4}, \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m, r) \neq (0, 0) \right\}, \quad (2.54)$$

а в случае четного N к ней добавляются еще три, имеющие вид

$$\begin{aligned} O_{(N/2,0)}^{(1)} &= \left\{ \eta_{N/2,0} = \frac{1}{2}, \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m, r) \neq \left(\frac{N}{2}, 0 \right) \right\}, \\ O_{(0,N/2)}^{(1)} &= \left\{ \eta_{0,N/2} = \frac{1}{2}, \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m, r) \neq \left(0, \frac{N}{2} \right) \right\}, \\ O_{(N/2,N/2)}^{(1)} &= \left\{ \eta_{N/2,N/2} = 1, \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m, r) \neq \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Другие состояния равновесия вида $O_{\gamma'}^{(1)}$, отличные от (2.54) и (2.55), являются неустойчивыми.

Вопрос о существовании у системы (2.23)–(2.31) устойчивых состояний равновесия $O_\gamma^{(p)}$ при $p \geq 5$ остается открытым. Во всяком случае, нам не удалось обнаружить их ни аналитическими методами, ни с помощью компьютерного анализа, который проводился для амплитудной системы (2.23)–(2.31) при $N = 5, 7$.

Подведем некоторый итог. Теоремы 2.1–2.5 гарантируют сосуществование у системы (2.1) большого числа устойчивых инвариантных торов. Точнее, для их количества $m_*(N)$ справедлива оценка снизу

$$m_*(N) \geq 2m_0(N) + 3m_1(N) + m_2(N) + m_3(N), \quad N \geq 5,$$

где, напомним, натуральные $m_j(N)$, $j = 0, 1, 2, 3$, определены формулами (2.36), (2.48), (2.51). Из этих формул, в частности, следует, что при $N \rightarrow \infty$ величина $m_*(N)$ растет не медленнее чем $O(N^4)$. Например, уже в самом простейшем случае имеем $m_*(5) \geq 60$. Точнее, при $N = 5$, всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и некоторой общности положения, связанной с выбором параметров a_1, a_2 , в системе (2.1) сосуществует не менее 60 устойчивых инвариантных торов, среди которых 12 двумерных, 16 трехмерных и 32 четырехмерных.

Характерная особенность всех найденных выше инвариантных торов заключается в том, что они не имеют пределов при $N \rightarrow \infty$, т.е. при переходе от дискретной решетки осцилляторов к непрерывной. Для того чтобы убедиться в этом, для каждого решения $u_{s_1, s_2}(t)$, $s_1, s_2 = 1, \dots, N$, системы (2.1) введем понятие энергии, которое определяется следующим образом. Рассмотрим функцию

$$E(t) = \sum_{n,k=0}^{N-1} (\dot{\beta}_{n,k}(t))^2 + \sigma_{n,k}^2 \beta_{n,k}^2(t), \quad (2.56)$$

где $\beta_{n,k}(t)$ – коэффициенты разложения $u_{s_1, s_2}(t) = \sum_{n,k} \beta_{n,k}(t) e_{s_1, s_2}^{n,k}$, и положим

$$E_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(\tau) d\tau. \quad (2.57)$$

Получившуюся в итоге величину (2.57) назовем *энергией* выбранного решения $u_{s_1, s_2}(t)$.

Как оказывается, энергия каждой траектории системы (2.1), принадлежащей любому из найденных выше устойчивых инвариантных торов, при $N \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно растет. Проверим этот факт на примере четырехмерного тора $T_\gamma^{(4)}$, отвечающего состоянию равновесия $O_\gamma^{(4)}$ амплитудной системы, где γ – набор индексов (2.47). Привлекая соответствующее данному тору параметрическое представление вида (2.21) и учитывая, что движения на нем описываются системой уравнений (2.22), для функции (2.56), вычисленной на любом решении $u_{s_1, s_2}(t) \in T_\gamma^{(4)}$, получаем асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{16}{25} (\sigma_{n_1, k_1}^2 + \sigma_{n_2, k_2}^2 + \sigma_{N-n_1, N-k_2}^2 + \sigma_{N-n_2, N-k_1}^2) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{64}{25} (1 + 2N^2(a_1^2 + a_2^2)) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.58)$$

равномерно пригодное по $t \in \mathbb{R}_+$. Для величины (2.57) из (2.58) вытекает аналогичное асимптотическое равенство

$$E_0 = \frac{64}{25}(1 + 2N^2(a_1^2 + a_2^2)) + O(\varepsilon), \quad (2.59)$$

из которого, в свою очередь, заключаем, что $E_0 \rightarrow \infty$ при согласованном стремлении $N \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рис. 2

Рис. 3

Отметим также, что сосуществующие устойчивые инвариантные торы системы (2.1) могут заметно отличаться друг от друга по своей пространственной сложности даже в случае, когда их размерности одинаковы. Для примера приведем рис. 2 и рис. 3, на которых представлены пространственные профили двух четырехмерных торов, отвечающих наборам индексов (2.47) при $N = 60$, $(n_1, k_1) = (2, 4)$, $(n_2, k_2) = (5, 1)$ и $N = 60$, $(n_1, k_1) = (20, 24)$,

$(n_2, k_2) = (25, 31)$. Точнее, для каждого из этих торов в формуле (2.21) полагалось $\varepsilon = 0$, $\varphi_1 = \dots = \varphi_4 = 0$ и по массивам данных

$$x = \frac{s_1}{N}, \quad y = \frac{s_2}{N}, \quad z = \frac{4}{5} (e_{s_1, s_2}^{n_1, k_1} + e_{s_1, s_2}^{n_2, k_2} + e_{s_1, s_2}^{N-n_1, N-k_2} + e_{s_1, s_2}^{N-n_2, N-k_1}),$$

$$s_1, s_2 = 1, \dots, N,$$

строилась соответствующая двумерная поверхность.

§ 3. Случай граничных условий Дирихле

Рассмотрим теперь вопрос об аттракторах системы (1.4) с граничными условиями (1.6), точнее, рассмотрим систему

$$\ddot{u}_{s_1, s_2} + \varepsilon(u_{s_1, s_2}^2 - 1)\dot{u}_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2} = \mathcal{L}u_{s_1, s_2}, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N-1, \quad (3.1)$$

получающуюся из (1.8) при заменах N на $N-1$, а $(N-1)a_j$ на Na_j , $j = 1, 2$. Здесь, как и ранее, $\mathcal{L} = a_1^2 \mathcal{L}_1 + a_2^2 \mathcal{L}_2$, а разностные операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ определяются аналогичными (2.2), (2.3) формулами

$$\mathcal{L}_1 u_{s_1, s_2} = N^2 (u_{s_1+1, s_2} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1-1, s_2}), \quad u_{0, s_2} = u_{N, s_2} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_2 u_{s_1, s_2} = N^2 (u_{s_1, s_2+1} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2-1}), \quad u_{s_1, 0} = u_{s_1, N} = 0. \quad (3.3)$$

Как и в § 2, для исследования автоколебаний системы (3.1) оказываются полезными разностные аналоги пространственных мод $2 \sin(\pi n x) \sin(\pi k y)$, задающиеся равенствами

$$e_{s_1, s_2}^{n, k} = 2e_{s_1}^n e_{s_2}^k, \quad e_{s_1}^n = \sin\left(\frac{\pi n}{N} s_1\right), \quad e_{s_2}^k = \sin\left(\frac{\pi k}{N} s_2\right), \quad (3.4)$$

$$s_1, s_2 = 1, \dots, N-1, \quad n, k = 1, \dots, N-1,$$

и удовлетворяющие аналогичным (2.5), (2.6) соотношениям

$$\mathcal{L}e_{s_1, s_2}^{n, k} = -(a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \quad n, k = 1, \dots, N-1, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N-1,$$

$$\lambda_m = 4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi m}{2N}\right), \quad m = 1, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

Действительно, формулы (3.2)–(3.5) позволяют выписать общее решение линейной системы, получающейся из (3.1) при $\varepsilon = 0$. Упомянутое решение допускает аналогичное (2.7) тригонометрическое представление

$$u_{s_1, s_2} = \sum_{n, k=1}^{N-1} (\xi_{n, k} \exp(i\sigma_{n, k} t) + \bar{\xi}_{n, k} \exp(-i\sigma_{n, k} t)) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \quad (3.6)$$

где по-прежнему $\sigma_{n, k} = \sqrt{1 + a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k}$, а $\xi_{n, k}$ – произвольные комплексные амплитуды.

Используя существование при $\varepsilon = 0$ тригонометрического решения (3.6) и снова опираясь на изложенную в [11] методику, для отыскания автоколебательных процессов системы (3.1) при $0 < \varepsilon \ll 1$ привлечем асимптотические ряды

$$u_{s_1, s_2} = u_{s_1, s_2, 0}(t, \tau) + \varepsilon u_{s_1, s_2, 1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N-1. \quad (3.7)$$

Как и ранее, считаем, что нулевые приближения $u_{s_1, s_2, 0}$ задаются равенствами (3.6), в которых амплитуды $\xi_{n, k}$ зависят от медленного времени τ . Для фигурирующих в (3.7) функций $u_{s_1, s_2, 1}$ справедливы аналогичные (2.11) представления

$$u_{s_1, s_2, 1} = \sum_{n, k=1}^{N-1} u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau) \exp(i\sigma_{n, k}t) + \overline{u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau) \exp(i\sigma_{n, k}t)} + \sum_m u_{s_1, s_2, 1}^m(\tau) \exp\left(i \sum_{r_1, r_2=1}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2} t\right). \quad (3.8)$$

Здесь $m = \|m_{r_1, r_2}\|_{r_1, r_2=1}^{N-1}$ – всевозможные матрицы с целочисленными элементами, для которых $\sum_{r_1, r_2} |m_{r_1, r_2}| = 3$. Считаем также, что собственные частоты $\sigma_{n, k}$ из (3.6) удовлетворяют условиям нерезонансности, подобным (2.12).

Подставляя выражения (3.6), (3.7) в (3.1) и приравнявая коэффициенты при ε , для $u_{s_1, s_2, 1}$ получаем линейную неоднородную систему вида (2.9), решение которой ищем в классе тригонометрических полиномов (3.8). В результате, как и в § 2, проблема сводится к определению коэффициентов $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}$, $u_{s_1, s_2, 1}^m$ из соответствующих линейных неоднородных алгебраических систем. Отметим сразу, что в силу упомянутых чуть выше условий нерезонансности все системы для $u_{s_1, s_2, 1}^m$ оказываются невырожденными. Системы для $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}$, напротив, с необходимостью вырождены, а условия их разрешимости задаются аналогичными (2.15) равенствами. Как и в предыдущем случае, выполнения указанных равенств добиваемся за счет подходящего выбора комплексных амплитуд $\xi_{n, k}(\tau)$. На этом пути для $\xi_{n, k}(\tau)$ получается аналогичная (2.17) система

$$2 \frac{d\xi_{n, k}}{d\tau} = \xi_{n, k} \left[1 - d_{n, k}^{n, k} |\xi_{n, k}|^2 - \sum_{\substack{m, r=1 \\ (m, r) \neq (n, k)}}^{N-1} d_{n, k}^{m, r} |\xi_{m, r}|^2 \right], \quad n, k = 1, \dots, N-1, \quad (3.9)$$

с коэффициентами

$$d_{n, k}^{n, k} = l((e_{s_1, s_2}^{n, k})^4), \quad d_{n, k}^{m, r} = 2l((e_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{m, r})^2), \quad (3.10)$$

где, как и ранее, $l(*)$ – операция усреднения по индексам $s_1, s_2 = 1, \dots, N-1$.

Поскольку процесс получения явных выражений для коэффициентов (3.10) нормальной формы (3.9) аналогичен описанному в § 2, приведем сразу итоговую амплитудную систему для $\eta_{n, k} = |\xi_{n, k}(\tau)|^2$. В данной ситуации эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n, k}}{d\tau} = & \eta_{n, k} \left(1 - \frac{9}{4} \eta_{n, k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{n, m} - \frac{9}{2} \eta_{n, N-k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, k} \right. \\ & - \frac{9}{2} \eta_{N-n, k} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ m \neq n, N-n \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m, r} - 3 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{N-n, r} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, N-k} \\ & \left. - \frac{9}{2} \eta_{N-n, N-k} \right), \quad n, k = 1, \dots, N-1, \quad n, k \neq \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В случае четного N к (3.11) следует добавить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{N/2,k}}{d\tau} = & \eta_{N/2,k} \left(1 - 3\eta_{N/2,k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{N/2,m} - 6\eta_{N/2,N-k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,k} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq N/2 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,N-k} \right), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad k \neq \frac{N}{2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,N/2}}{d\tau} = & \eta_{n,N/2} \left(1 - 3\eta_{n,N/2} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{n,m} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,N/2} - 6\eta_{N-n,N/2} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n \\ r \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,r} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{N-n,m} \right), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad n \neq \frac{N}{2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{N/2,N/2}}{d\tau} = & \eta_{N/2,N/2} \left(1 - 4\eta_{N/2,N/2} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{N/2,m} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,N/2} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m,r \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,r} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

При исследовании состояний равновесия системы (3.11)–(3.14) нам потребуется множество S , состоящее из целочисленных векторов вида

$$(n_1, n_2, \dots, n_{m_0}), \quad 1 \leq n_j \leq N-1, \quad n_j \neq \frac{N}{2}, \quad n_j \neq n_r, N-n_r \quad \forall j \neq r, \quad (3.15)$$

где $m_0 = m_0(N)$ определено в (2.36). Характерная особенность любого вектора (3.15) заключается в том, что он обладает свойством максимальности в следующем смысле: для каждого натурального n , $1 \leq n \leq N-1$, $n \neq N/2$, найдется такой номер j_0 , $1 \leq j_0 \leq m_0$, что либо $n = n_{j_0}$, либо $n = N - n_{j_0}$.

Описанное выше множество S позволяет ввести наборы индексов

$$\gamma = \{(n_1, k_1), \dots, (n_{m_0}, k_{m_0})\}, \quad (n_1, \dots, n_{m_0}), (k_1, \dots, k_{m_0}) \in S, \quad (3.16)$$

количество $s_0(N)$ которых (с учетом того, что порядок следования пар (n_j, k_j) , $j = 1, \dots, m_0$, не имеет значения) задается формулой

$$s_0(N) = 2^{2m_0(N)} m_0(N)! . \quad (3.17)$$

Фиксируем, далее, некоторый набор γ из множества (3.16) и рассмотрим отвечающую ему вспомогательную систему (2.40). Из явного вида уравнений (3.11) и из свойств (3.15) вытекает, что для матрицы $\mathcal{D}$ этой системы справедливы равенства

$$\mathcal{D} = \|d_{j,r}\|_{j,r=1}^{m_0}, \quad d_{j,j} = \frac{9}{4}, \quad d_{j,r} = 2, \quad j \neq r. \quad (3.18)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что система (2.40), (3.18) допускает состояние равновесия $\eta_0 = \text{colon}(\eta_*, \dots, \eta_*)$, $\eta_* = 4/(8m_0 + 1)$, которому в амплитудной системе (3.11)–(3.14) отвечает состояние равновесия $O_\gamma^{(m_0)}$ вида (2.20) с ненулевыми компонентами $\eta_{n_1, k_1} = \dots = \eta_{n_{m_0}, k_{m_0}} = \eta_*$.

Как уже отмечалось в § 2, устойчивость любой неподвижной точки (2.20) определяется по расположению спектра матрицы линеаризации A вспомогательной системы (2.40) и по знакам величин (2.42). В случае найденного выше состояния равновесия $O_\gamma^{(m_0)}$ интересующая нас матрица $A = -\eta_* \mathcal{D}$ в силу (3.18) имеет собственные значения $\lambda = -\eta_*/4$ (кратности $m_0 - 1$) и $\lambda = -1$. Для величин (2.42) получаются равенства

$$\alpha_{m,r} = 1 - \eta_* \sum_{j=1}^{m_0} d_{m,r}^{n_j, k_j}, \quad (m, r) \neq (n_s, k_s), \quad s = 1, \dots, m_0. \quad (3.19)$$

Предположим сначала, что $m \neq N/2$ и $r \neq N/2$. Из явного вида правых частей уравнений (3.11) и из отмеченного выше свойства максимальности векторов (3.15) заключаем, что в этой ситуации среди чисел $d_{m,r}^{n_j, k_j}$ из (3.19) присутствуют либо два значения, равные 3, либо одно, равное $9/2$, остальные $d_{m,r}^{n_j, k_j}$ равны 2. Это значит, что $\alpha_{m,r} = -7\eta_*/4$ или $\alpha_{m,r} = -9\eta_*/4$. Таким образом, при нечетном N все состояния равновесия $O_\gamma^{(m_0)}$, отвечающие наборам индексов (3.16), являются экспоненциально устойчивыми.

При четном N анализ знаков величин (3.19) не исчерпывается рассмотренной выше ситуацией. А именно, здесь необходимо разобрать три новых варианта: $m = N/2$, $r \neq N/2$; $m \neq N/2$, $r = N/2$; $m = N/2$, $r = N/2$. Несложный подсчет показывает, что в первых двух из них по-прежнему $\alpha_{m,r} < 0$, а в третьем имеем $\alpha_{N/2, N/2} = \eta_*/4 > 0$. Таким образом, в случае четного N все состояния равновесия $O_\gamma^{(m_0)}$ системы (3.11)–(3.14) одновременно неустойчивы, причем, что характерно, размерность неустойчивого многообразия каждого из них равна единице.

Итак, стало понятно, что при четном N вопрос об устойчивых состояниях равновесия системы (3.11)–(3.14) нуждается в отдельном рассмотрении. Однако проделанный выше анализ наводит на мысль, что устойчивыми здесь должны быть положения равновесия, получающиеся из $O_\gamma^{(m_0)}$ при добавлении еще одной ненулевой компоненты $\eta_{N/2, N/2}$. Как оказывается, эти эвристические соображения верны.

Действительно, в предположении, что N четно, рассмотрим расширенные наборы индексов $\gamma' = \gamma \cup \{(N/2, N/2)\}$, где γ – произвольный набор из (3.16). Рассмотрим, далее, вспомогательную систему (2.40), отвечающую любому набору γ' . Нетрудно заметить, что матрица $\mathcal{D}$ этой системы задается равенством

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 9/4 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & 2 & 9/4 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Отсюда, очевидно, следует, что рассматриваемая система допускает состояние равновесия $\eta_0 = \text{colon}(\eta_*, \dots, \eta_*, \eta_*/8)$, где теперь $\eta_* = 2/(4m_0 + 1)$.

В исходной амплитудной системе (3.11)–(3.14) данному состоянию соответствует положение равновесия $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$ вида (2.20) с ненулевыми компонентами $\eta_{n_1, k_1} = \dots = \eta_{n_{m_0}, k_{m_0}} = \eta_*$, $\eta_{N/2, N/2} = \eta_*/8$.

Исследование устойчивости неподвижной точки $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$ начнем с анализа спектра матрицы A , получающейся из (3.20) при умножении первых m_0 строк на $-\eta_*$, а последней строки – на величину $-\eta_*/8$. Непосредственная проверка показывает, что эта матрица имеет собственные значения $\lambda = -\eta_*/4$ (кратности m_0) и $\lambda = -1$.

Перейдем теперь к анализу знаков величин $\alpha_{m,r}$, которые для состояния равновесия $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$ имеют вид

$$\alpha_{m,r} = 1 - \eta_* \sum_{j=1}^{m_0} d_{m,r}^{n_j, k_j} - \frac{\eta_*}{8} d_{m,r}^{N/2, N/2}, \quad (m, r) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, m_0, \\ (m, r) \neq \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right). \quad (3.21)$$

В первую очередь обратим внимание на то, что при $m \neq N/2$, $r \neq N/2$ коэффициенты $d_{m,r}^{n_j, k_j}$ принимают те же значения, что и в случае (3.19), а $d_{m,r}^{N/2, N/2} = 2$. Тем самым, и здесь правые части из (3.21) имеют два возможных значения $\alpha_{m,r} = -7\eta_*/4$ или $\alpha_{m,r} = -9\eta_*/4$. В остальных же двух ситуациях, а именно при $m = N/2$, $r \neq N/2$ или $m \neq N/2$, $r = N/2$, выполняются равенства $\alpha_{N/2, r} = \alpha_{m, N/2} = -\eta_*$. Это означает, что все состояния равновесия $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$ системы (3.11)–(3.14), как и ожидалось, оказываются экспоненциально устойчивыми.

Подводя итог, остановимся на информации об аттракторах исходной системы (3.1), которую можно извлечь из проведенного анализа. Опираясь на аналогичный теореме 2.1 результат о соответствии, убеждаемся в том, что при любом фиксированном N , при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при некоторой общности положения относительно параметров a_1 , a_2 эта система имеет не менее $s_0(N)$ устойчивых инвариантных торов размерности $m_0(N)$ или $m_0(N) + 1$ (в зависимости от четности N). В частности, при $N = 5$ она допускает не менее 32 устойчивых двумерных торов. Интересно также отметить, что в отличие от ситуации, рассмотренной в § 2, здесь с ростом N неограниченно увеличивается не только количество сосуществующих устойчивых инвариантных торов, но и размерность каждого из них.

§ 4. Анализ непрерывных моделей

В этом параграфе приведем сводку результатов о динамических свойствах уравнения (1.9) в единичном квадрате $(x, y) \in \Omega$ с нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана.

Начнем с исследования краевой задачи

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = Lu, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0, \quad (4.1)$$

где $L = a_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + a_2^2 \partial^2 / \partial y^2$. Точнее, будем рассматривать динамическую систему, порождаемую решениями этой краевой задачи в фазовом пространстве

$(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$. Здесь, как обычно, через $\overset{\circ}{W}_2^2$ обозначено замыкание в метрике соболевского пространства W_2^2 линейала гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям из (4.1).

Анализ краевой задачи (4.1) существенно опирается на тот факт, что при $\varepsilon = 0$ ее общее решение записывается в виде тригонометрического ряда

$$u = \sum_{n,k=0}^{\infty} [\xi_{n,k} \exp(i\omega_{n,k}t) + \bar{\xi}_{n,k} \exp(-i\omega_{n,k}t)] e_{n,k}(x, y), \quad (4.2)$$

где

$$\omega_{n,k} = \sqrt{1 + \pi^2(a_1^2 n^2 + a_2^2 k^2)}, \quad e_{n,k}(x, y) = 2 \cos(\pi n x) \cos(\pi k y), \quad (4.3)$$

$$n, k = 0, 1, \dots,$$

а $\xi_{n,k}$ – произвольные комплексные амплитуды, удовлетворяющие требованию $\sum_{n,k} \omega_{n,k}^4 |\xi_{n,k}|^2 < \infty$. Действительно, данное обстоятельство позволяет для изучения аттракторов задачи (4.1) воспользоваться бесконечномерным аналогом асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского, который, следуя установившейся традиции, будем называть методом квазинормальных форм. Как и в конечномерном случае, суть этого метода в том, что возможные автоколебательные режимы исходной задачи ищутся в виде асимптотического ряда

$$u = u_0(t, \tau, x, y) + \varepsilon u_1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (4.4)$$

где первое слагаемое u_0 определяется формулами (4.2), (4.3), в которых комплекснозначные функции $\xi_{n,k} = \xi_{n,k}(\tau)$, $n, k \geq 0$, пока произвольны.

Последующий способ действий стандартен: подставляя соотношение (4.4) в (4.1) и приравнявая коэффициенты при ε , для нахождения u_1 получаем линейную неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 - L u_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_0 - \frac{u_0^3}{3} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0,$$

в которой переменная τ считается параметром. Заметим, далее, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4.5) в классе формальных тригонометрических рядов переменных $\omega_{n,k}t$, $n, k \geq 0$, является отсутствие в ее правой части слагаемых, пропорциональных гармоникам $\exp(\pm i\omega_{n,k}t) e_{n,k}(x, y)$, $n, k \geq 0$. Поэтому приравняем упомянутые слагаемые к нулю. В результате для амплитуд $\xi_{n,k}$ приходим к некоторой счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений – так называемой квазинормальной форме.

На завершающем этапе распорядимся выбором параметров a_1, a_2 таким образом, чтобы между собственными частотами $\omega_{n,k}$ из (4.3) отсутствовали всевозможные резонансные соотношения третьего порядка, т.е. чтобы было исключено одновременное выполнение равенств

$$\omega_{n_0, k_0} = m_1 \omega_{n_1, k_1} + m_2 \omega_{n_2, k_2} + m_3 \omega_{n_3, k_3}, \quad (4.6)$$

$$n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3, \quad k_0 = \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3$$

для любого набора индексов (n_j, k_j) , $j = 0, \dots, 3$, для любого целочисленного вектора (m_1, m_2, m_3) , $|m_1| + |m_2| + |m_3| = 3$, и при любой расстановке знаков $+$ и $-$ во втором и третьем из этих соотношений (тождественные резонансы $\omega_{n_0, k_0} = \omega_{n_0, k_0} + \omega_{m, s} - \omega_{m, s}$ из рассмотрения, естественно, исключаются). Тогда, как показывает несложная проверка, интересующая нас система для $\eta_{n, k} = |\xi_{n, k}|^2$ принимает наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n, k}}{d\tau} = \eta_{n, k} & \left(1 - \frac{9}{4}\eta_{n, k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{n, m} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m, k} - 6\eta_{n, 0} - 6\eta_{0, k} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} \eta_{m, r} - 4 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{\infty} \eta_{0, r} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m, 0} - 8\eta_{0, 0} \right), \quad n, k \geq 1, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n, 0}}{d\tau} = \eta_{n, 0} & \left(1 - 3\eta_{n, 0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m, 0} - 3 \sum_{r=1}^{\infty} \eta_{n, r} \right. \\ & \left. - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{0, m} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m, r} - 8\eta_{0, 0} \right), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{0, k}}{d\tau} = \eta_{0, k} & \left(1 - 3\eta_{0, k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{0, m} - 3 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{m, k} \right. \\ & \left. - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{m, 0} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{m, r} - 8\eta_{0, 0} \right), \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{d\eta_{0, 0}}{d\tau} = \eta_{0, 0} \left(1 - 4\eta_{0, 0} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{0, m} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{m, 0} - 2 \sum_{m, r=1}^{\infty} \eta_{m, r} \right). \quad (4.10)$$

Рассмотрим какое-либо из возможных состояний равновесия получившейся системы (4.7)–(4.10) с конечным числом ненулевых положительных координат

$$\eta_{n_1, k_1}, \dots, \eta_{n_p, k_p}, \quad p \geq 1. \quad (4.11)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Среди состояний равновесия (4.11) системы (4.7)–(4.10) устойчивыми являются только неподвижные точки, для которых

$$p = 1, \quad \eta_{n_1, k_1} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при } n_1 = 0, k_1 \geq 1 \text{ или } n_1 \geq 1, k_1 = 0, \\ \frac{1}{4} & \text{при } n_1 = k_1 = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Все же остальные ее состояния равновесия из семейства (4.11) экспоненциально неустойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка показывает, что система в вариациях на любом из состояний равновесия (4.11), (4.12) имеет вид

$$\frac{dh_{n,k}}{d\tau} = \alpha_{n,k} h_{n,k}, \quad n, k \geq 0,$$

где в зависимости от индексов n, k и n_1, k_1 числа $\alpha_{n,k}$ принимают значения -1 и $-1/3$. Таким образом, убеждаемся в экспоненциальной устойчивости каждой из этих неподвижных точек.

Рассмотрим теперь любое из оставшихся состояний равновесия (4.11) и определим по нему величины

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{s: n_s > 0, k_s > 0} \eta_{n_s, k_s}, & \Sigma_2 &= \sum_{s: n_s > 0, k_s = 0} \eta_{n_s, k_s}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{s: n_s = 0, k_s > 0} \eta_{n_s, k_s}, & \Sigma_4 &= \sum_{s: n_s = k_s = 0} \eta_{n_s, k_s} \end{aligned} \quad (4.13)$$

(если в каком-либо из случаев множество индексов s оказывается пустым, то соответствующую сумму полагаем равной нулю). Предположим, далее, что заведомо не пусто множество $\{s: n_s > 0, k_s > 0\}$, и зафиксируем принадлежащий ему индекс s_0 . После этого подставим в уравнение из (4.7) при $n = n_{s_0}$, $k = k_{s_0}$ компоненты выбранного состояния равновесия. В результате получаем некоторое верное равенство, из которого с учетом соотношений (4.13) выводим

$$1 - 2\Sigma_1 - 4\Sigma_2 - 4\Sigma_3 - 8\Sigma_4 \geq \frac{1}{4} \eta_{n_{s_0}, k_{s_0}}. \quad (4.14)$$

Установленное неравенство (4.14) влечет неустойчивость интересующего нас состояния равновесия. Действительно, линеаризуем на нем исходную систему (4.7)–(4.10) и из получившейся линейной системы возьмем уравнение для компоненты $h_{m,r}$ при $m > \max_{1 \leq s \leq p} n_s$, $r > \max_{1 \leq s \leq p} k_s$. Нетрудно заметить, что это уравнение записывается в виде

$$\frac{dh_{m,r}}{d\tau} = (1 - 2\Sigma_1 - 4\Sigma_2 - 4\Sigma_3 - 8\Sigma_4) h_{m,r}.$$

Отсюда и из (4.14) требуемый факт вытекает очевидным образом.

Итак, показана неустойчивость любого состояния равновесия (4.11) в случае $\Sigma_1 > 0$. Если $\Sigma_1 = 0$, то соответствующее состояние равновесия является одновременно и решением подсистемы, получающейся из (4.7)–(4.10) при $\eta_{n,k} = 0$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$. После нормировок $4\eta_{n,0} \rightarrow \eta_{n,0}$, $4\eta_{0,k} \rightarrow \eta_{0,k}$, $4\eta_{0,0} \rightarrow \eta_{0,0}$ и последующих переобозначений $\eta_0 = \eta_{0,0}$, $\eta_n = \eta_{[n/2]+1,0}$, $\eta_{n+1} = \eta_{0,[n/2]+1}$, $n \geq 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа, упомянутая подсистема приобретает вид

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \eta_0 \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \right), \quad \frac{d\eta_n}{d\tau} = \eta_n \left(1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \eta_k - 2\eta_0 - \frac{3}{4}\eta_n \right), \quad n \geq 1. \quad (4.15)$$

Для завершения обоснования теоремы достаточно убедиться в том, что неустойчивым будет любое состояние равновесия системы (4.15) с количеством

ненулевых координат, не меньшим двух. В связи с этим фиксируем произвольно натуральные числа $n_1 < \dots < n_s$, где $s \geq 2$. Несложная проверка показывает, что данному набору индексов соответствует единственное состояние равновесия системы (4.15) с координатами $\eta_{n_j} > 0$, $j = 1, \dots, s$, $\eta_m = 0$ при $m \neq n_j$. Точнее, для ненулевых компонент этого состояния равновесия справедливы формулы

$$\eta_{n_j} = \left(s - \frac{1}{4}\right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (4.16)$$

Вопрос о его устойчивости сводится к аналогичному вопросу в рамках конечномерной системы (2.40), в которой $\eta = \text{colon}(\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_s})$, а матрица $\mathcal{D}$ определена равенством

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

В свою очередь, матрица линеаризации системы (2.40) на состоянии равновесия (4.16) получается из (4.17) при умножении на $-(s - 1/4)^{-1}$. Поскольку матрица (4.17) имеет собственные значения $\lambda = -1/4$ (кратности $s - 1$) и $\lambda = s - 1/4$, рассматриваемое состояние равновесия будет неустойчивым.

Предположим теперь, что в наборе индексов $n_1 < \dots < n_s$, где по-прежнему $s \geq 2$, присутствует значение $n_1 = 0$. Тогда такому набору соответствует единственное состояние равновесия с компонентами

$$\eta_{n_1} = (4s - 3)^{-1}, \quad \eta_{n_j} = 4(4s - 3)^{-1}, \quad j = 2, \dots, s; \quad \eta_n = 0 \quad \forall n \neq n_j, \quad (4.18)$$

устойчивость которого обусловлена системой вида (2.40) с матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 2 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 3/4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & \dots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Заметим, что матрица линеаризации этой системы на рассматриваемом состоянии равновесия получается из (4.19) в результате умножения первой строки на $-(4s - 3)^{-1}$, а всех остальных строк – на величину $-4(4s - 3)^{-1}$. Отсюда несложно вывести, что она имеет собственные значения $\lambda = (4s - 3)^{-1}$ (кратности $s - 1$) и $\lambda = -1$. Следовательно, как и в предыдущем случае, состояние равновесия (4.18) является неустойчивым. Теорема доказана.

Предпринятый анализ позволяет заключить, что все инвариантные торы краевой задачи (4.1), отвечающие состояниям равновесия амплитудной системы, отличным от (4.11), (4.12), если и существуют, то заведомо неустойчивы. Устойчивыми в ней являются только периодические по t решения, зависящие от одной пространственной переменной x или y . В системе (4.7)–(4.10)

этим периодическим решениям соответствуют устойчивые неподвижные точки (4.11), (4.12). Поскольку указанных неподвижных точек счетное число, в исходной задаче (4.1) реализуется хорошо известное явление буферности. Точнее, справедливо следующее утверждение [2], [3].

ТЕОРЕМА 4.2. *Для любых фиксированных $n_0 \in \mathbb{N}$, $a_{**} > a_* > 0$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_0, a_*, a_{**}) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $a_* \leq a_1 \leq a_{**}$, $a_* \leq a_2 \leq a_{**}$ краевая задача (4.1) имеет наборы экспоненциально орбитально устойчивых циклов*

$$\begin{aligned} u &= u_n(\varphi, x, a_1, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{n,0}(1 + \varepsilon\delta_n(a_1, \varepsilon)), \quad n = 0, 1, \dots, n_0, \\ u &= u_n(\varphi, y, a_2, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{0,n}(1 + \varepsilon\delta_n(a_2, \varepsilon)), \quad n = 1, \dots, n_0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь $u_n(\varphi, z, a, \varepsilon)$, $u_n(\varphi + 2\pi, z, a, \varepsilon) \equiv u_n(\varphi, z, a, \varepsilon)$ и $\delta_n = \delta_n(a, \varepsilon)$ – некоторые достаточно гладкие по своим переменным $(\varphi, z, a, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \times [a_*, a_{**}] \times [0, \varepsilon_0]$ и $(a, \varepsilon) \in [a_*, a_{**}] \times [0, \varepsilon_0]$ функции, причем

$$\delta_n(a, 0) \equiv 0, \quad u_n(\varphi, z, a, 0) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi \cos(\pi n z) & \text{при } n > 0, \\ 2 \cos \varphi & \text{при } n = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

В случае краевой задачи

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = Lu, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad (4.22)$$

где по-прежнему $L = a_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + a_2^2 \partial^2 / \partial y^2$, имеем несколько иную ситуацию. Как показано в монографиях [2], [3], при отсутствии резонансов, подобных (4.6), отвечающая ей амплитудная система

$$\frac{d\eta_{n,k}}{d\tau} = \eta_{n,k} \left(1 - \frac{9}{4}\eta_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{n,m} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} \eta_{m,r} \right), \quad n, k \geq 1,$$

вообще не имеет устойчивых состояний равновесия с конечным числом ненулевых положительных координат. Таким образом, вопрос об аттракторах задачи (4.22) пока остается открытым. Ясно лишь, что эти аттракторы заведомо отличны от циклов и конечномерных инвариантных торов.

§ 5. Заключение

Полученные выше результаты свидетельствуют о том, что аттракторы гиперболических краевых задач могут существенно отличаться от аттракторов их дискретных аппроксимаций. Действительно, аттракторами краевой задачи (4.1) являются только циклы (4.20), (4.21) и таковых при подходящем уменьшении ε может быть сколь угодно много. Далее, при переходе от (4.1) к соответствующей дискретной модели (2.1) аналоги этих циклов хотя и сохраняются, но в подавляющем большинстве становятся неустойчивыми (в амплитудной системе (2.23)–(2.31) им отвечают состояния равновесия с одной ненулевой координатой, среди которых устойчивы только неподвижные точки (2.54), (2.55)).

Что же касается остальных аттракторов системы (2.1), отличных от устойчивых циклов, то их уместно назвать ложными.

Смысл термина “ложные” достаточно ясен из контекста. К таковым будем относить аттракторы дискретной модели, не имеющие аналогов в исходной краевой задаче. В случае системы (2.1) ложными являются устойчивые инвариантные торы размерности 2, 3 и 4, доставляемые теоремами 2.1, 2.3–2.5. В случае системы (3.1) реализуется крайняя ситуация – все ее аттракторы оказываются ложными.

Природа обнаруженного феномена, на наш взгляд, заключается в следующем. Для гиперболических краевых задач характерна ситуация, когда их аттракторы формируются одновременно как на низких, так и на высоких модах. Однако собственные частоты $\omega_{n,k}$ распределенной модели, отвечающие высоким модам, отнюдь не близки к соответствующим частотам $\sigma_{n,k}$ в дискретном случае. В самом деле, для краевой задачи (4.1) и системы (2.1) соответствующие предельные равенства $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{n,k} = \omega_{n,k}$ имеют место при $n, k \sim 1$, но нарушаются при $n \sim N$ или $k \sim N$.

Отмеченное обстоятельство приводит к тому, что часть аттракторов дискретной модели будет заведомо отличаться, по крайней мере на количественном уровне, от соответствующих аттракторов исходной гиперболической задачи. Но, как свидетельствуют разобранные в настоящей статье примеры, в некоторых случаях количественные изменения перерастают в качественные.

Обратим внимание на еще один весьма неожиданный факт. Казалось бы, наиболее естественный способ борьбы с ложными аттракторами – это повышение точности аппроксимации, т.е. увеличение количества N уравнений в дискретной модели. Однако данный путь не приводит к желаемой цели. Действительно, в рассмотренных нами примерах с ростом N ложные аттракторы не только сохраняются, но и неограниченно увеличиваются в числе.

Итак, стало понятно, что об аттракторах гиперболических краевых задач, вообще говоря, нельзя судить по поведению при $t \rightarrow \infty$ соответствующих им разностных аппроксимаций. В связи с этим уместно вспомнить приведенные в [13] результаты компьютерного исследования краевой задачи

$$u_{tt} + (2u^2 + bu - 2\varepsilon)u_t + u = a^2 \Delta u, \quad u(t, x + 2\pi, y) \equiv u(t, x, y + 2\pi) \equiv u(t, x, y) \quad (5.1)$$

при $\varepsilon = 0.2$, $b = 4$ и при различных значениях параметра a . На основании численного интегрирования аналогичной (2.1) дискретной модели в работе [13] сделаны следующие выводы о динамике исходной задачи (5.1).

Во-первых, утверждается, что в широком диапазоне изменения параметра a эта задача имеет целый набор сосуществующих устойчивых автоколебательных режимов, отличающихся друг от друга главным образом пространственной сложностью (в [13] они названы режимами самоорганизации). Во-вторых, каждый из режимов самоорганизации характеризуется аномально большим значением энергии E_0 (см. (2.57)), которая, в свою очередь, монотонно убывает с уменьшением коэффициента a .

Проведенный нами анализ позволяет взглянуть на перечисленные факты с иной точки зрения. По всей видимости, устойчивые режимы, о которых пишут авторы статьи [13], действительно существуют, но только не в самой

краевой задаче (5.1), а в отвечающей ей дискретной модели. Отметим, что именно для ложных аттракторов характерны большие значения энергии, которая в силу (2.59) убывает при уменьшении параметров a_1 , a_2 .

В заключение обратим внимание на прикладную значимость наших результатов. Как оказывается, переход от дискретной модели какого-либо физического процесса к непрерывной правомерен отнюдь не всегда. Например, двумерную дискретную решетку генераторов, рассмотренную в § 1, нельзя заменить на непрерывную. Связано это с тем, что такая замена принципиально меняет динамические свойства системы.

Список литературы

1. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений”, Тр. МИАН, **222**, Наука, М., 1998, 3–191; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **222** (1998), 1–189.
2. А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
3. Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, М., 2005.
4. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений”, *УМН*, **55:2** (2000), 95–120; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “The buffer property in resonance systems of non-linear hyperbolic equations”, *Russian Math. Surveys*, **55:2** (2000), 297–321.
5. А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Асимптотическая теория колебаний в системе Витта”, *Динамические системы*, т. 6 (Москва, 1998), Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **67**, ВИНТИ, М., 1999, 5–68; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Asymptotic theory of oscillations in Vitt systems”, *J. Math. Sci. (New York)*, **105:1** (2001), 1697–1737.
6. А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента”, *Дифференциальные уравнения. Некоторые математические задачи оптимального управления*, Тр. МИАН, **233**, Наука, М., 2001, 153–207; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “The buffer phenomenon in an RCLG-oscillator: Theoretical analysis and experimental results”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **233** (2001), 143–196.
7. А. А. Витт, “Распределенные автоколебательные системы”, *Журн. техн. физики*, **4:1** (1934), 146–157.
8. A. C. Scott, “Distributed multimode oscillators of one and two spatial dimensions”, *IEEE Trans. on circuit theory*, **17:1** (1970), 55–60.
9. A. C. Scott, “Tunnel diode arrays for information processing and storage”, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, **1:3** (1971), 267–275.
10. Э. Скотт, *Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур*, Физматлит, М., 2007; пер. с англ.: A. Scott, *Nonlinear science. Emergence and dynamics of coherent structures*, Oxf. Texts Appl. Eng. Math., **8**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, 4-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер. 2-го изд.: N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, Hindustan Publishing Corp., Delhi; Gordon and Breach, New York, 1961.

12. Ю. Н. Бибилов, *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации*, Изд-во ЛГУ, Л., 1991.
13. Ю. С. Колесов, А. Е. Харьков, “Сходство и различие динамики плоских и трехмерных нелинейных волн”, *Матем. сб.*, **196**:2 (2005), 57–84; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, A. E. Khar’kov, “Similarity and difference in the dynamics of plane and 3-dimensional non-linear waves”, *Sb. Math.*, **196**:2 (2005), 201–229.

А. Ю. КОЛЕСОВ (A. YU. KOLESOV)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
17.11.2009

Е. Ф. МИЩЕНКО (E. F. MISHCHENKO)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Н. Х. РОЗОВ (N. KH. ROZOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: rozov@rozov.mccme.ru