Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, Д. Майер, У. А. Сафаров, Кусочно-гладкие гомеоморфизмы окружности с несколькими изломами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 1, 101–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:00:37

УДК 517.9

А. А. Джалилов, Д. Майер, У. А. Сафаров

Кусочно гладкие гомеоморфизмы окружности с несколькими изломами

Доказано, что вероятностная инвариантная мера эргодических кусочно гладких гомеоморфизмов окружности с несколькими изломами и нетривиальным произведением величин изломов является сингулярной относительно меры Лебега.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: гомеоморфизмы окружности, число вращения, инвариантная мера.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности с несколькими изломами, т. е. отображения гладкие всюду, за исключением нескольких особых точек, в которых происходит скачок первой производной.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $f: f(x) = F(x) \pmod{1}$, $x \in S^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1 \simeq [0, 1)$. Предположим, что поднятие F гомеоморфизма f удовлетворяет следующим условиям:

(а) существуют точки $b(1), b(2), \dots, b(k) \in S^1$ такие, что в них определены производные $F'(b(i) \pm 0) > 0$ и $F'(b(i) - 0)/F'(b(i) + 0) = \sigma_i(b(i), F) \neq 1$, $i = \overline{1, k}$;

(б) $F'(x)$ — абсолютно непрерывная функция на каждом связном компоненте множества $S^1 \setminus \{b(i), i = \overline{1, k}\}$;

(с) $F''(x) \in L_1(S^1, d\ell)$;

(д) $\prod_{i=1}^k \sigma_i(b(i), F) \neq 1$.

Точки $b(1), \dots, b(k)$ называются *точками излома*, а числа $\sigma_i = \sigma_i(b(i), F)$ — *величинами излома* гомеоморфизма f . Смысл условий (а)–(с) состоит в том, что гомеоморфизм f является кусочно гладким отображением, имеющим особенности типа излома в точках $b(i)$, $i = \overline{1, k}$.

Обозначим через ρ_f число вращения гомеоморфизма f , т. е.

$$\rho_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} F^n(x) \pmod{1}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь и далее F^n обозначает n -ю итерацию функции F . Пусть число вращения ρ_f иррационально. А. Данжуа доказал [1], что если $F \in C^1(\mathbb{R}^1)$ и $\text{var}_{S^1} \ln F'(x) < \infty$, то гомеоморфизм f топологически сопряжен линейному повороту f_ρ , т. е. существует гомеоморфизм φ окружности такой, что $\varphi \circ f = f_\rho \circ \varphi$.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда исследований Германии (German Research Foundation (DFG)) (грант GZ: MA 633/20-1, AOJB: 550185).

Данный классический результат Данжуа можно использовать и в случае гомеоморфизмов с особенностями типа излома. Хорошо известно, что всякий гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения ρ_f обладает единственной вероятностной f -инвариантной мерой μ_f . При этом сопряжение φ и инвариантная мера μ_f связаны соотношением $\varphi(x) = \mu_f([0, x])$, $x \in S^1$ (см., например, [2]). В силу последнего соотношения инвариантная мера μ_f является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега ℓ тогда и только тогда, когда сопряжение φ задается абсолютно непрерывной функцией. Отметим, что вопрос о регулярности сопряжения для диффеоморфизмов окружности к настоящему времени хорошо изучен (см., например, [3]–[9]).

Важным классом гомеоморфизмов окружности с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами. В работе [10] доказано, что ренормализации гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома x_b из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, аппроксимируются дробно-линейными отображениями. Если число вращения ρ_f иррационально, то вероятностные f -инвариантные меры μ_f таких гомеоморфизмов сингулярны относительно меры Лебега ℓ [11].

Кусочно линейные (КЛ) гомеоморфизмы окружности с двумя изломами являются простейшими примерами гомеоморфизмов с двумя изломами и встречаются во многих других областях математики, например теории групп, теории гомотопий (см. [12]). Инвариантные меры КЛ гомеоморфизмов окружности с двумя изломами впервые изучались в работе [13].

ТЕОРЕМА 1.1 [13]. *Инвариантная мера КЛ гомеоморфизма окружности f с двумя изломами и иррациональным числом вращения абсолютно непрерывна относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда обе точки излома гомеоморфизма f лежат на одной траектории.*

Инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с двумя изломами “общего типа”, т. е. не являющиеся кусочно линейными, изучались в работах [14], [15]. Сформулируем основные результаты этих работ.

ТЕОРЕМА 1.2 [14]. *Пусть гомеоморфизм окружности f с поднятием F удовлетворяет следующим условиям:*

1) *число вращения ρ_f является иррациональным “ограниченного типа”, т. е. последовательность элементов разложения ρ_f в непрерывную дробь ограничена;*

2) *f имеет изломы в двух точках окружности $b(1)$, $b(2)$, не лежащих на одной траектории;*

3) *существует производная $F'(x)$ на множестве $S^1 \setminus \{b(1), b(2)\}$ и она удовлетворяет условиям Липшица на каждом связном компоненте множества $S^1 \setminus \{b(1), b(2)\}$.*

Тогда f -инвариантная мера μ_f является сингулярной относительно меры Лебега ℓ .

В работе [15] изучаются гомеоморфизмы окружности с двумя изломами, но с произвольным иррациональным числом вращения.

ТЕОРЕМА 1.3 [15]. *Предположим, что гомеоморфизм окружности f с поднятием F удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) число вращения ρ_f иррационально;
- 2) f имеет изломы в точках $b(1)$ и $b(2)$ и производная $F'(x)$ абсолютно непрерывна на каждом связном компоненте множества $S^1 \setminus \{b(1), b(2)\}$;
- 3) $F''(x) \in L_1(S^1, d\ell)$;
- 4) произведение величин изломов нетривиально, т. е. $\sigma_1 \sigma_2 \neq 1$.

Тогда вероятностная f -инвариантная мера μ_f сингулярна относительно меры Лебега.

Настоящая работа является продолжением работ [14], [15] и в определенном смысле дополняет результаты, полученные в них.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть поднятие F гомеоморфизма окружности f с k изломами удовлетворяет условиям (a)–(d) и число вращения ρ_f иррационально. Тогда вероятностная f -инвариантная мера μ_f сингулярна относительно меры Лебега ℓ на окружности S^1 .

Отметим, что вопрос о регулярности инвариантной меры гомеоморфизмов окружности с k , $k \geq 2$, изломами в точках, не лежащих на одной траектории, и с тривиальным произведением изломов, т. е. $\prod_{i=1}^k \sigma_i = 1$, в случае числа вращения “неограниченного типа” остается открытым.

§ 2. Необходимые определения и факты

Порядок на окружности S^1 определяется ориентацией на ней. Пусть точки a, b, c лежат на окружности S^1 . Запись $a \prec b \prec c$ означает то, что при движении от точки a в положительном направлении сначала достигается точка b , а потом c .

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности f с иррациональным числом вращения ρ_f . Обозначим через $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ последовательность элементов разложения числа вращения ρ_f в непрерывную дробь, т. е. $\rho_f = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Положим $p_n/q_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $n \geq 1$. Числа p_n/q_n называются *конечными дробями* для ρ_f , а q_n – *временем первого возвращения*. Числа q_n удовлетворяют разностному уравнению $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, $n \geq 1$, с начальными условиями $q_0 = 1$ и $q_1 = a_1$. Для произвольной точки $x_0 \in S^1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ замкнутый отрезок, концами которого служат точки x_0 и $x_{q_n} = f^{q_n}(x_0)$. Заметим, что при нечетном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при четном n – справа. Положим $\Delta_i^{(n)} = f^i(\Delta_0^{(n)})$, $i \geq 1$.

ЛЕММА 2.1 [16]. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in S^1$. Отрезок траектории этой точки $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ разбивает окружность на следующие непересекающиеся (за исключением концевых точек) отрезки: $\Delta_i^{(n)}$, $0 \leq i \leq q_{n-1} - 1$, $\Delta_i^{(n-1)}$, $0 \leq i \leq q_n - 1$.

Полученное разбиение обозначим через $\xi_n(x_0)$ и назовем *динамическим разбиением n -го порядка*. Опишем теперь процесс перехода от разбиения $\xi_n(x_0)$ к $\xi_{n+1}(x_0)$. Все отрезки $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_{n-1} - 1$, сохраняются, а каждый из

отрезков $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$ разбивается на $a_{n+1} + 1$ отрезков:

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{a_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0).$$

ЛЕММА 2.2. *Рассмотрим гомеоморфизм окружности f с поднятием F и иррациональным числом вращения. Пусть в точках $b(i) \in S^1$, $i = \overline{1, k}$, $b(1) \prec b(2) \prec \dots \prec b(k)$, существуют конечные односторонние производные $F'(b(i) \pm 0) > 0$, $F \in C^1([b(i), b(i+1)])$, $i = \overline{1, k}$, $b(k+1) = b(1)$ и $\sum_{i=1}^k \text{var}_{[b(i), b(i+1)]} \ln F' = \bar{v} < \infty$. Положим*

$$v = \bar{v} + \sum_{i=1}^k |\ln F'(b^{(i)} - 0) - \ln F'(b^{(i)} + 0)|.$$

Тогда для любого y_0 такого, что $f^s(y_0) \notin \{b(i), i = \overline{1, k}\}$, $0 \leq s < q_n$, справедливы неравенства

$$e^{-v} \leq \prod_{s=0}^{q_n-1} F'(y_s) \leq e^v.$$

Последние неравенства называются *неравенствами Данжуа*. Лемма 2.2 доказывается так же, как и аналогичное утверждение для диффеоморфизмов (см. [6]). Из леммы 2.2 следует, что отрезки, составляющие динамическое разбиение $\xi_n(x_0)$, имеют экспоненциально малую длину. Обозначим $\lambda = (1 + e^{-v})^{-1/2} < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть $\Delta^{(n)}$ – произвольный элемент динамического разбиения $\xi_n(x_0)$. Тогда*

$$\ell(\Delta^{(n)}) \leq C_0 \lambda^n. \quad (2.1)$$

где константа C_0 не зависит от n и x_0 .

ТЕОРЕМА ДАНЖУА [6]. *Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда гомеоморфизм f топологически сопряжен линейному повороту f_ρ .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $K > 1$ – некоторая константа. Интервалы I_1 и I_2 называются K -соизмеримыми на окружности S^1 , если справедливы неравенства $K^{-1}\ell(I_2) \leq \ell(I_1) \leq K\ell(I_2)$.

Согласно работе [5] введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Отрезок $I = [\tau, t] \subset S^1$ называется q_n -маленьким, а его концевые точки q_n -близкими, если отрезки $f^i(I)$, $0 \leq i \leq q_n - 1$, взаимно не пересекаются (за исключением концевых точек).

Из структуры динамических разбиений вытекает, что отрезок $I = [\tau, t]$ является q_n -маленьким тогда и только тогда, когда или $\tau < t \leq f^{q_n-1}(\tau)$, или $f^{q_n-1}(t) \leq \tau < t$.

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что гомеоморфизм f с поднятием F удовлетворяет условиям леммы 2.2. Пусть точки $x, y \in S^1$ являются q_n -близкими и $f^s(x), f^s(y) \notin \{b(i), i = \overline{1, k}\}$, $0 \leq s < q_n$. Тогда для любого $0 \leq k \leq q_n$ справедливо неравенство*

$$|\ln(f^k(x))' - \ln(f^k(y))'| \leq v. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = (x, y)$, $x < y$, и $0 \leq k \leq q_n - 1$. Интервалы $f^i(I)$, $0 \leq i \leq q_n - 1$, не пересекаются. Отсюда следует, что

$$|\ln(f^k(x))' - \ln(f^k(y))'| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\ln f'(f^j(x)) - \ln f'(f^j(y))| \leq v.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Двойным отношением* четверки чисел (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, называется число

$$\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}.$$

Далее в наших исследованиях понятие двойных отношений (Cross-ratio) играет важную роль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть заданы четверка чисел (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, и строго возрастающая функция $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. *Искажением двойных отношений* называется

$$\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; F) = \frac{\text{Cr}(F(z_1), F(z_2), F(z_3), F(z_4))}{\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

Пусть $m \geq 3$, $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, m}$, и $z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_m \prec z_1$ (в смысле порядка на окружности). Положим $\hat{z}_1 = z_1$ и

$$\hat{z}_i = \begin{cases} z_i, & \text{если } z_1 < z_i < 1, \\ 1 + z_i, & \text{если } 0 < z_i < z_1, \end{cases}$$

при $i = \overline{2, m}$. Очевидно, что $\hat{z}_1 < \hat{z}_2 < \dots < \hat{z}_m$. Вектор $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_m)$ называется *производным вектором* от $(z_1, z_2, \dots, z_m) \in (S^1)^m$.

Пусть f – гомеоморфизм окружности с поднятием F . Определим двойные отношения гомеоморфизма f от четверки (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, 4}$, $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$, относительно f : $\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4; f) = \text{Cr}(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4; F)$, где $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ – производный вектор четверки (z_1, z_2, z_3, z_4) .

Хорошо известно [17], что если $f \in C^{2+\nu}([z_1, z_4])$, $\nu > 0$, $[z_1, z_4] \subset S^1$, то

$$\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f) = 1 + O(|\hat{z}_4 - \hat{z}_1|^{1+\nu}).$$

Теперь приведем два утверждения из работы [15], относящихся к искажениям двойных отношений для гомеоморфизмов окружности, удовлетворяющих условиям теоремы 1.4.

Пусть гомеоморфизм окружности f с поднятием F удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $F'' \in L_1(S^1, dl)$, эту производную можно записать в виде

$$F''(\hat{x}) = g_\varepsilon(\hat{x}) + \theta_\varepsilon(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^1, \quad (2.3)$$

где $g_\varepsilon(\hat{x})$, $\theta_\varepsilon(\hat{x})$ – периодические функции на $\mathbb{R}^1$ с периодом 1, причем $g_\varepsilon(\hat{x})$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $\int_0^1 |\theta_\varepsilon| dl < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что гомеоморфизм окружности f с поднятием F удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Пусть $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, 4}$, $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$, и отрезок $[z_1, z_4]$ не содержит ни одной точки излома гомеоморфизма f . Тогда*

$$\begin{aligned} |\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f) - 1| &\leq C_1 |\hat{z}_4 - \hat{z}_1| \max_{\hat{x}, \hat{t} \in [\hat{z}_1, \hat{z}_4]} |g_\varepsilon(\hat{x}) - g_\varepsilon(\hat{t})| \\ &+ C_1 \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_4} |\theta_\varepsilon(y)| dl + C_1 \left(\int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_4} |F''(y)| dl \right)^2, \end{aligned}$$

где константа $C_1 > 0$ зависит только от f , а $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ – производный вектор от четверки (z_1, z_2, z_3, z_4) .

Теперь рассмотрим случай, когда отрезок $[z_1, z_4]$ содержит только одну точку излома $x = x_b$. Более точно, пусть x_b лежит вне среднего отрезка, т.е. $x_b \in [z_1, z_2] \cup [z_3, z_4]$. Для определенности предположим, что $x_b \in [z_1, z_2]$. Обозначим через $\sigma(x_b)$ величину излома гомеоморфизма f в точке x_b . Определим числа α , β , γ , τ , η и z следующим образом:

$$\alpha := \hat{z}_2 - \hat{z}_1, \quad \beta := \hat{z}_3 - \hat{z}_2, \quad \gamma := \hat{z}_4 - \hat{z}_3, \quad \tau := \hat{z}_2 - \hat{x}_b, \quad \eta := \frac{\beta}{\alpha}, \quad z := \frac{\tau}{\alpha}, \quad (2.4)$$

где $(\hat{z}_1, \hat{x}_b, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ – производный вектор от $(z_1, x_b, z_2, z_3, z_4)$.

Далее нам будет необходима следующая

ЛЕММА 2.4. *Предположим, что гомеоморфизм окружности f с поднятием F удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Тогда*

$$\left| \text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f) - \frac{[\sigma(x_b) + (1 - \sigma(x_b))z](1 + \eta)}{\sigma(x_b) + (1 - \sigma(x_b))z + \eta} \right| \leq C_2 \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_4} |F''(y)| dl, \quad (2.5)$$

где константа $C_2 > 0$ зависит только от f .

§ 3. Теорема о покрывающих интервалах для гомеоморфизмов окружности с изломами

Рассмотрим гомеоморфизм окружности $f \in C^1(S^1 \setminus \{b(1), b(2), \dots, b(k)\})$ с k точками излома $b(i)$, $1 \leq i \leq k$, и иррациональным числом вращения ρ_f . Предположим, что все точки изломов гомеоморфизма f лежат на разных орбитах. Если это не так, то, рассмотрев достаточно высокие ренормализации, придем к этому же случаю. Положим $B(f) = \{b(1), b(2), \dots, b(k)\}$.

Мы введем понятие “правильного” покрытия точек изломов из множества $B(f)$. Пусть $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, 4}$, $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$, и r_n принимает значения из множества $\{q_{n-1}, q_n, q_{n-1} + q_n\}$. Предположим, что отрезок $[z_1, z_4]$ r_n -маленький, т. е. интервалы $f^j([z_1, z_4])$, $0 \leq j < r_n$, попарно не пересекаются. Пусть система отрезков $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j < r_n\}$ покрывает элементы некоторого непустого подмножества $\hat{B} \subset B(f)$. Число элементов подмножества $\hat{B}$ обозначим m . Для каждого элемента $b(i_s) \in \hat{B}$ существует число l_{i_s} , $0 \leq l_{i_s} < r_n$, такое, что $\bar{b}^{(n)}(i_s) = f^{-l_{i_s}}(b(i_s)) \in [z_1, z_4]$. Точка $\bar{b}^{(n)}(i_s)$ называется r_n -прообразом элемента $b(i_s)$ в $[z_1, z_4]$. Множество r_n -прообразов элементов $\hat{B}$ также состоит из m элементов: $\bar{b}^{(n)}(i_1), \bar{b}^{(n)}(i_2), \dots, \bar{b}^{(n)}(i_m)$, обозначим максимальный элемент этого множества через $\hat{b}_t^{(n)}$. Ясно, что $\hat{b}_t^{(n)} = \bar{b}^{(n)}(i_t)$ для некоторого t , $0 \leq t \leq m$. Введем следующие обозначения:

$$\eta(j) = \frac{\ell([f^j(z_2), f^j(z_3)])}{\ell([f^j(z_1), f^j(z_2)])}, \quad z^{(i_s)}(j) = \frac{\ell([f^j(\bar{b}^{(n)}(i_s)), f^j(z_2)])}{\ell([f^j(z_1), f^j(z_2)])}, \quad (3.1)$$

$$1 \leq s \leq m, \quad 0 \leq j < r_n.$$

В случаях $\bar{b}^{(n)}(i_s) \in [z_1, z_2]$ числа $z^{(i_s)}(j)$ называются *нормированными* координатами элементов $f^j(\bar{b}^{(n)}(i_s))$. Когда точка $\bar{b}^{(n)}(i_s)$ движется от z_2 к z_1 , нормированные координаты $z^{(i_s)}(j)$ меняются от 0 до 1. Из леммы 2.3 легко следует, что

$$e^{-v}\xi(0) \leq \eta(j) \leq e^v\xi(0), \quad e^{-v}z^{(i_s)}(0) \leq z^{(i_s)}(j) \leq e^v z^{(i_s)}(0), \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.2)$$

для всех $1 \leq j < r_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $K > M \geq 1$, $\zeta \in (0, 1)$, $\delta > 0$ – постоянные числа, n – натуральное число и $x_0 \in S^1$. Мы скажем, что тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$, $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, 4}$, $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно покрывает точки излома подмножества $\hat{B}$, если для некоторого $r_n \in \{q_{n-1}, q_n, q_n + q_{n-1}\}$ выполняются следующие условия:

- 1) $[z_1, z_4] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и система отрезков $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq r_n - 1\}$ покрывает каждую точку из $\hat{B}$ только один раз;
- 2) $z_2 = \hat{b}_t^{(n)}$ и $\bar{b}^{(n)}(i_s) \in [z_1, z_2]$, $1 \leq s \leq m$, $s \neq t$;
- 3) $M\ell([z_2, z_3]) \leq \ell([z_1, z_2]) \leq K\ell([z_2, z_3])$, $K^{-1}\ell([z_3, z_4]) \leq \ell([z_2, z_3]) \leq K\ell([z_3, z_4])$;
- 4) длины отрезков $f^{r_n}([z_1, z_2])$, $f^{r_n}([z_2, z_3])$ и $f^{r_n}([z_3, z_4])$ попарно K -соизмеримы;
- 5) $\max\{\ell([f^{r_n}(z_i), x_0]), \ell([z_i, x_0]), i = \overline{1, 4}\} \leq K\ell([z_1, z_2])$;
- 6) $\max_{1 \leq s \leq m}\{z^{(i_s)}(0)\} < \zeta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Подмножество особых точек $\hat{B} \subset \{b(1), b(2), \dots, b(k)\}$ гомеоморфизма f называется *нетривиальным*, если $\prod_{b \in \hat{B}} \sigma(b, F) \neq 1$.

Теперь сформулируем теорему о покрывающих интервалах, которая играет ключевую роль при доказательстве теоремы 1.4.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что гомеоморфизм f удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Пусть $x_0 \in S^1$ и $M \geq 1$, $\delta, \zeta \in (0, 1)$ – постоянные числа. Тогда существует такая константа $K = K(f, M, \zeta) > M$, что для любого достаточно большого n существуют нетривиальное подмножество $\hat{B} = \hat{B}(n) = \{b(i_1), b(i_2), \dots, b(i_m)\}$, точки $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, 4}$, $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$, и число $r_n = r_n(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \{q_{n-1}, q_n, q_n + q_{n-1}\}$ такие, что отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно покрывают точки $\hat{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in S^1$. Рассмотрим теперь динамическое разбиение $\xi_n(x_0)$. Для определенности предположим, что n – нечетное число. Тогда $x_{q_n} \prec x_0 \prec x_{q_{n-1}}$. Из структуры динамического разбиения следует равенство $\bar{b}^{(n)}(i) = f^{-l_i}(b(i))$, $i = \overline{1, k}$, для некоторых однозначно определенных чисел $l_i \in [0, q_n]$. Заметим, что $l_i \in [0, q_n]$, если $\bar{b}^{(n)}(i) \in [x_0, x_{q_{n-1}}]$, и $l_i \in [0, q_{n-1}]$, если $\bar{b}^{(n)}(i) \in [x_{q_n}, x_0]$. Точки $\bar{b}^{(n)}(i)$, $i = \overline{1, k}$, назовем q_n -прообразами особых точек $b(i)$.

Положим $B_k^{(n)} = \{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}, \bar{b}^{(n)}(i), i = \overline{1, k}\}$, $d_n = \ell([x_{q_n}, x_{q_{n-1}}])$.

Теперь при помощи констант $M > 1$, $\zeta \in (0, 1)$ и полной вариации v функции $\ln F'$ определим число m_0 :

$$m_0 = \max\{k + 4, [M\zeta^{-1}] + 1, [e^v] + 1\},$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть.

Для каждого $l \geq 0$ определим разбиение $D_l^{(n)}$ отрезка $[x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$ при помощи точек $t_s = x_{q_n} + m_0^{-(l+1)} d_n s$, $s = 0, 1, \dots, m_0^{l+1}$. Очевидно, что длина каждого отрезка $I_l^{(n)}$ разбиения $D_l^{(n)}$ равна $m_0^{-(l+1)} d_n$. При переходе от $D_l^{(n)}$ к $D_{l+1}^{(n)}$ каждый отрезок разбиения $D_l^{(n)}$ разбивается на m_0 отрезков $D_{l+1}^{(n)}$. Отрезок разбиения $D_l^{(n)}$, не содержащий ни одного элемента $B_k^{(n)}$, называется $l^{(n)}$ -пустым отрезком. Поскольку число отрезков разбиения $D_0^{(n)}$ больше, чем число элементов $B_k^{(n)}$, существует хотя бы один $0^{(n)}$ -пустой отрезок. Кроме того, каждый $l^{(n)}$ -занятый отрезок разбиения $D_l^{(n)}$ содержит хотя бы один $(l+1)^{(n)}$ -пустой отрезок разбиения $D_{l+1}^{(n)}$. Отметим, что левый и правый крайние отрезки разбиения $D_l^{(n)}$ содержат x_{q_n} и $x_{q_{n-1}}$ соответственно. Это означает, что данные крайние отрезки при любом $l \geq 0$ являются $l^{(n)}$ -занятыми. Удалим из отрезка $[x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$ все $l^{(n)}$ -пустые отрезки. Мы получим естественное разбиение подмножества $B_k^{(n)}$ на непустые непересекающиеся группы. Возникшее разбиение подмножества $B_k^{(n)}$ обозначим через $G_l^{(n)}$.

Обозначим через $|A|$ число элементов конечного множества A . Далее нам необходима следующая

ЛЕММА 3.1. *Пусть r – натуральное число. Тогда существует число $s_0 = s_0(r, n)$, $0 \leq s_0 \leq r(k+1)$, такое, что $|G_{s_0}^{(n)}| = |G_{s_0+r}^{(n)}|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиения $D_0^{(n)}, D_r^{(n)}, \dots, D_{r(k+1)}^{(n)}$ и порожденные ими разбиения $G_0^{(n)}, G_r^{(n)}, \dots, G_{r(k+1)}^{(n)}$ множества $B_k^{(n)}$. Из структуры разбиений $G_l^{(n)}$ следует, что $|G_l^{(n)}| \leq |G_{l+1}^{(n)}|$ при любом $l \geq 0$. В частности, $|G_0^{(n)}| \leq |G_r^{(n)}| \leq \dots \leq |G_{r(k+1)}^{(n)}|$. В последней цепочке неравенств возможны два случая: при некотором $t_0 = t_0(n)$, $0 \leq t_0 \leq k$, справедливо или

$|G_{rt_0}^{(n)}| = |G_{r(t_0+1)}^{(n)}|$, или $|G_0^{(n)}| < |G_r^{(n)}| < \dots < |G_{r(k+1)}^{(n)}|$. В первом случае положим $s_0 = rt_0$. Предположим, что $|G_0^{(n)}| < |G_r^{(n)}| < \dots < |G_{r(k+1)}^{(n)}|$. Отсюда, учитывая $|G_0^{(n)}| \geq 2$, получим, что $|G_{r(k+1)}^{(n)}| \geq k+3$. С другой стороны, $|G_{r(k+1)}^{(n)}| \leq |B_k^{(n)}| = k+3$. Следовательно, $|G_{r(k+1)}^{(n)}| = k+3$, т.е. число элементов разбиения $G_{r(k+1)}^{(n)}$ совпадает с числом элементов $B_k^{(n)}$. Другими словами, каждое подмножество разбиения $G_{r(k+1)}^{(n)}$ содержит только один элемент $B_k^{(n)}$. Отсюда следует, что $|G_s^{(n)}| = k+3$ при всех $s \geq r(k+1)$. В качестве s_0 можно взять $r(k+1)$. Из построения видно, что число s_0 зависит от n , но не превосходит числа $r(k+1)$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Теперь достаточно воспользоваться утверждением леммы 3.1 при $r = 9$. Положим $s_0 = s_0(9, n)$. По условию теоремы 1.4 произведение величин изломов гомеоморфизма f нетривиально, т.е. $\prod_{i=1}^k \sigma(b^{(i)}, F) \neq 1$. Тогда найдется хотя бы одно подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \in G_{s_0}^{(n)}$ такое, что произведение величин изломов особых точек с q_n -прообразами в $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ (которое обозначим через $\sigma(\tilde{E}_{s_0}^{(n)})$) не равно 1.

Для подмножества $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ возможны три случая.

I. Подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ не содержит ни одного элемента $\{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\}$.

II. Подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ содержит только один элемент множества $\{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\}$.

III. Подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ содержит только два элемента множества $\{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\}$, а именно x_{q_n} и x_0 .

Далее покажем, что случай $\{x_0, x_{q_{n-1}}\} \subset \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ невозможен.

Утверждение теоремы докажем для каждого случая отдельно.

Случай I. Пусть $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \cap \{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\} = \emptyset$. Тогда или $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_{q_n}, x_0)$, или $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_0, x_{q_{n-1}})$. Пусть для определенности $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_0, x_{q_{n-1}})$. Случай $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_{q_n}, x_0)$ рассматривается аналогично.

Из утверждения леммы 3.1 можно вывести, что подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ покрывается одним или двумя отрезками разбиения $D_{s_0}^{(n)}$. Объединение отрезков разбиения $D_{s_0}^{(n)}$, покрывающих $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$, обозначим через $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$. Точно так же можно определить отрезки $\tilde{J}_{s_0+p}^{(n)}$, $0 \leq p \leq 9$. Ясно, что $\tilde{J}_{s_0}^{(n)} \supset \tilde{J}_{s_0+1}^{(n)} \supset \dots \supset \tilde{J}_{s_0+9}^{(n)}$. Из утверждения леммы 3.1 вытекает, что к отрезку $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$ слева и справа прилегают два $s_0^{(n)}$ -пустых отрезка разбиения $D_{s_0}^{(n)}$, лежащие внутри интервала $(x_0, x_{q_{n-1}})$. Эти два отрезка обозначим через $L_{s_0}^{(n)}$ и $R_{s_0}^{(n)}$ соответственно.

Положим $\bar{b}_{s_0}^{(n)} = \max \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$. Теперь определим точки z_i , $i = \overline{1, 4}$, следующим образом:

$$z_1 = \bar{b}_{s_0}^{(n)} - d_n m_0^{-(s_0+7)}, \quad z_2 = \bar{b}_{s_0}^{(n)}, \quad z_3 = \bar{b}_{s_0}^{(n)} + d_n m_0^{-(s_0+6)}, \\ z_4 = \bar{b}_{s_0}^{(n)} + d_n m_0^{-(s_0+6)} + d_n m_0^{-(s_0+7)}.$$

Проверим, что отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условиям 1)–6) определения 3.1.

Длина отрезка $\tilde{J}_{s_0+9}^{(n)}$, покрывающего подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$, не превосходит $2d_n m_0^{-(s_0+9)}$, а длины соседних к $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$ отрезков $L_{s_0}^{(n)}$ и $R_{s_0}^{(n)}$ равны $d_n m_0^{-s_0}$. Точка $z_2 = \bar{b}_{s_0}^{(n)}$ принадлежит отрезку $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$. Используя определения точек z_1, z_2, z_3, z_4 , получим

$$\ell([z_1, z_2]) = m_0^{-7} \ell(L_{s_0}^{(n)}), \quad \ell([z_2, z_4]) = (m_0 + 1) m_0^{-7} \ell(R_{s_0}^{(n)}).$$

Отсюда следует, что $[z_1, z_4] \subset L_{s_0}^{(n)} \cup \tilde{J}_{s_0}^{(n)} \cup R_{s_0}^{(n)} \subset (x_0, x_{q_n-1})$. Поскольку отрезок $[x_0, x_{q_n-1}]$ является q_n -маленьким, отрезки $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq q_n - 1\}$ попарно не пересекаются и только один раз покрывают особые точки с q_n -прообразами в $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$.

Можно легко проверить, что отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условию 2) определения 3.1. В силу неравенства Данжуа отрезки $[x_{q_n}, x_0]$ и $[x_0, x_{-q_n}]$ являются e^v -соизмеримыми. Отсюда, учитывая $[x_0, x_{-q_n}] \subset [x_0, x_{q_n-1}]$, получаем

$$\frac{\ell([x_{q_n}, x_{q_n-1}])}{\ell([x_0, x_{q_n-1}])} \leq \frac{\ell([x_{q_n}, x_0]) + \ell([x_0, x_{q_n-1}])}{\ell([x_0, x_{q_n-1}])} \leq 1 + e^v.$$

Очевидно, что $\frac{\ell([x_{q_n}, x_{q_n-1}])}{\ell([x_0, x_{q_n-1}])} > 1 > (1 + e^v)^{-1}$. Таким образом, отрезки $[x_{q_n}, x_{q_n-1}]$ и $[x_0, x_{q_n-1}]$ являются $(1 + e^v)$ -соизмеримыми. Отсюда, используя $\ell([z_1, z_4]) = (m_0 + 2) m_0^{-(s_0+7)} d_n$, получим, что $[z_1, z_4]$ и $[x_0, x_{q_n-1}]$ являются $((m_0 + 2)^{-1} m_0^{s_0+7} (1 + e^v)^{-1})$ -соизмеримыми. Положим $K = \sup_n \max\{m_0 e^{2v}, m_0^{s_0+7}\}$. В силу утверждения леммы 3.1 имеем

$$s_0 = s_0(9, n) \leq 9(k + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $K = \max\{m_0 e^{2v}, m_0^{9k+16}\}$. Учитывая $m_0 > M$, получаем, что отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условию 3) определения 3.1 с константой K . В силу неравенства Данжуа отрезки $[z_s, z_{s+1}]$ и $[f^{q_n}(z_s), f^{q_n}(z_{s+1})]$ при каждом $s = \overline{1, 3}$ являются e^v -соизмеримыми. Отсюда, а также из $\ell([z_s, z_{s+1}]) = d_n m_0^{-(s_0+7)}$, $s = \overline{1, 3}$, и $\ell([z_2, z_3]) = d_n m_0^{-(s_0+6)}$ следует, что отрезки $[f^{q_n}(z_s), f^{q_n}(z_{s+1})]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условию 4) определения 3.1 с константой K .

Заметим, что точки $z_i, f^{q_n}(z_i)$, $i = \overline{1, 4}$, принадлежат отрезку $[x_{q_n}, x_{q_n-1}]$. Очевидно, что

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \ell([z_i, x_0]), \max_{1 \leq i \leq 4} \ell([f^{q_n}(z_i), x_0]) \leq \ell([x_{q_n}, x_{q_n-1}]) = d_n.$$

Из явного вида длины отрезка $\ell([z_1, z_2])$ следует, что $d_n = m_0^{s_0+7} \ell([z_1, z_2])$. Отсюда видно, что $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условию 5) определения 3.1 с константой K . Проверим, что $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условию 6) определения 3.1.

Из определения точек z_s , $s = \overline{1, 4}$, вытекает, что

$$\max_{i: b^{(n)}(i) \in \tilde{E}_{s_0}^{(n)}} \frac{\ell([b^{(n)}(i), z_2])}{\ell([z_1, z_2])} \leq \frac{d_n m_0^{-(s_0+8)}}{d_n m_0^{-(s_0+7)}} = m_0^{-1} < \zeta.$$

Случай II. Обозначим через $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$, $E_{s_0}^{(n)}(x_0)$ и $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ подмножества из $G_{s_0}^{(n)}$, содержащие x_{q_n} , x_0 и $x_{q_{n-1}}$ соответственно. В силу предположения $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ совпадает только с одним из них и эти подмножества попарно не пересекаются. Заметим, что если найдется хотя бы одно нетривиальное подмножество $E_{s_0}^{(n)}$, отличное от них, то мы приходим к случаю I. Пусть все подмножества ранга s_0 , не содержащие точки x_{q_n} , x_0 , $x_{q_{n-1}}$, тривиальные. Отсюда, учитывая $\sigma(B(F)) \neq 1$, получим

$$\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_0))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})) \neq 1.$$

Обозначим через $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ и $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ отрезки s_0 -го ранга, покрывающие $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ и $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ соответственно. В силу леммы 3.1 к отрезку $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}(x_0)$ с обеих сторон примыкают $s_0^{(n)}$ -пустые отрезки длиной $d_n m_0^{-s_0}$.

Теперь рассмотрим подмножество

$$E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}) = f^{-q_n}(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})) \cup E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cup f^{-q_{n-1}}(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})).$$

Используя неравенство Данжуа, получим

$$\ell(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})), \ell(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) \leq e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}.$$

Имеем также $\ell(E_{s_0}^{(n)}(x_0)) \leq 2e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}$. Отсюда следует, что

$$E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}) \subset (x_0 - 2e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}, x_0 + 2e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}).$$

Определим точки z_i , $i = \overline{1, 4}$, по формулам

$$\begin{aligned} z_2 &= \max E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}), & z_1 &= z_2 - d_n m_0^{-(s_0+6)}, \\ z_3 &= z_2 + d_n m_0^{-(s_0+3)}, & z_4 &= z_2 + d_n m_0^{-(s_0+3)} + d_n m_0^{-(s_0+6)}. \end{aligned}$$

Поскольку z_2 – максимальная точка подмножества $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}})$, а длина отрезка $[z_1, z_4]$ равна $2d_n(m_0^{-(s_0+3)} + m_0^{-(s_0+6)})$, концевые точки z_1 и z_4 не выходят за пределы соседних $s_0^{(n)}$ -пустых отрезков.

Построенная тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно покрывает точки нетривиального подмножества $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}})$, $r_n = q_n + q_{n-1}$.

Мы лишь проверим, что система отрезков $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1\}$ покрывает каждую точку подмножества $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}})$ только один раз. Остальные условия определения 3.1, связанные с длинами отрезков, проверяются путем простых вычислений, как в случае I.

Отрезок $[z_1, z_4]$ разобьем на две части: $[z_1, z_4] = [z_1, x_0] \cup (x_0, z_4]$. Покажем, что отрезки $f^j([z_1, x_0])$, $0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1$, покрывают точки излома гомеоморфизма f с q_{n-1} -прообразами в $E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cap [z_1, x_0]$ и q_n -прообразами в $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ только один раз. Поскольку $[z_1, x_0] \subset [x_{q_n}, x_0]$, отрезки $f^j([z_1, x_0])$, $0 \leq j \leq q_{n-1} - 1$, покрывают каждую точку излома гомеоморфизма f с q_n -прообразами в $[z_1, x_0] \cap E_{s_0}^{(n)}(x_0)$ только один раз.

Из утверждения леммы 3.1 следует, что слева от отрезка $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ находится s_0 -пустой отрезок. Длина отрезка $f^{q_{n-1}}([z_1, x_0]) = [f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$ в силу неравенства Данжуа не больше, чем $e^v \ell([z_1, x_0])$. Легко проверить, что последнее число меньше, чем сумма длин отрезков $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ и соседнего $s_0^{(n)}$ -пустого. Другими словами, $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$ покрывается отрезком $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ и его $s_0^{(n)}$ -пустым соседним отрезком. Ясно, что подмножество лежащих в $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$ q_n -прообразов точек изломов гомеоморфизма f совпадает с $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$. Поскольку $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}] \subset [x_0, x_{q_n}]$, отрезки $f^i([f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}])$, $0 \leq i \leq q_n - 1$, только один раз покрывают точки излома с q_n -прообразами в $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$.

Аналогично можно показать, что отрезки $f^j((x_0, z_4])$, $0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1$, покрывают точки излома f с q_n -прообразами в $E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cap (x_0, z_4]$ и с q_{n-1} -прообразами в $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ только один раз.

Случай III. Сначала покажем, что подмножество $\{x_0, x_{q_{n-1}}\}$ не может быть частью $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$. Предположим, что $\{x_0, x_{q_{n-1}}\} \subset \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$. Тогда множество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ покрывается одним отрезком $I_{s_0+9}^{(n)}$ разбиения $D_{s_0+9}^{(n)}$. Следовательно, имеем вложение $\Delta_0^{(n-1)} \subset I_{s_0+9}^{(n)}$. Ясно, что $\ell(\Delta_0^{(n-1)}) \leq m_0^{-(s_0+9)} d_n$. Отсюда следует, что $\ell(\Delta_0^{(n)}) \geq (m_0^{(s_0+9)} - 1) \ell(\Delta_0^{(n-1)})$. Теперь, используя неравенство Данжуа, получим, что $\ell(\Delta_0^{(n)}) \leq e^v \ell(\Delta_0^{(n-1)})$. Используя определение m_0 , можно легко показать, что $m_0^{(s_0+9)} - 1 > e^v$. Следовательно, $\ell(\Delta_0^{(n)}) > \ell(\Delta_0^{(n-1)})$. Мы пришли к противоречию с предположением.

Предположим теперь, что $x_{q_n}, x_0 \in \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$. Из предположения и определения подмножеств $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ и $E_{s_0}^{(n)}(x_0)$ вытекает, что $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} = E_{s_0}^{(n)}(x_0) = E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$.

Если $\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_0))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) = 1$, то найдется нетривиальное подмножество $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ разбиения $G_{s_0}^{(n)}$, не содержащее точек x_{q_n}, x_0 и $x_{q_{n-1}}$, т. е. мы приходим снова к случаю I.

Пусть $\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_0))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) \neq 1$. Множество точек излома с q_n -прообразами в $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ разобьем на два непересекающихся подмножества:

- 1) $V_1 = \{\bar{b}: \bar{b} \in E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}), f^j(\bar{b}) \text{ является точкой излома гомеоморфизма } f \text{ для некоторого } j, q_n - q_{n-1} \leq j \leq q_n - 1\}$;
- 2) $V_2 = \{\bar{b}: \bar{b} \in E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}), f^i(\bar{b}) \text{ является точкой излома гомеоморфизма } f \text{ для некоторого } i, 0 < i \leq q_n - q_{n-1} - 1\}$.

Пусть $I_{s_0+p}^{(n)}(x_0)$ и $I_{s_0+p}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$, $0 \leq p \leq 9$, — отрезки $(s_0 + p)$ -го ранга, покрывающие $E_{s_0}^{(n)}(x_0)$ и $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ соответственно. В силу определения разбиения $D_l^{(n)}$ имеем

$$\ell(I_{s_0+p}^{(n)}(x_0)) = \ell(I_{s_0+p}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) = d_n m_0^{-(s_0+p)}, \quad 0 \leq p \leq 9. \quad (3.3)$$

Используя лемму Данжуа, получаем

$$\ell(f^{q_n - q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}}))), \ell(f^{-q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}})))) < d_n m_0^{-(s_0+7)}. \quad (3.4)$$

Положим $E_{s_0}^{(n)}(x_0, x_{q_{n-1}}) = E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cup f^{q_n - q_{n-1}}(V_1) \cup f^{-q_{n-1}}(V_2)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & E_{s_0}^{(n)}(x_0, x_{q_{n-1}}) \\ & \subset I_{s_0+9}^{(n)}(x_0) \cup f^{q_n - q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) \cup f^{-q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) = H_{s_0+9}^{(n)}. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (3.3) и (3.4) следует, что $\ell(H_{s_0+9}^{(n)}) < 2d_n m_0^{-(s_0+7)}$.

Теперь определим точки z_i , $i = \overline{1, 4}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} z_2 &= \max E_{s_0}^{(n)}(x_0, x_{q_{n-1}}), & z_1 &= z_2 - 2d_n m_0^{-(s_0+6)}, \\ z_3 &= z_2 + 2d_n m_0^{-(s_0+4)}, & z_4 &= z_2 + d_n m_0^{-(s_0+4)} + d_n m_0^{-(s_0+6)}. \end{aligned}$$

Покажем, что тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно покрывает точки излома f с q_n -прообразами в $E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cup E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ и числом $r_n = q_n$, а также покажем выполнение условия 1) определения 3.1. Остальные условия можно легко проверить, как и в случае I. Отрезок $[z_1, z_4]$ разобьем на две части: $[z_1, z_4] = [z_1, x_0] \cup [x_0, z_4]$, а систему отрезков $\{f^i([z_1, x_0]), 0 \leq i \leq q_n - 1\}$ разобьем на две подсистемы: $\{f^i([z_1, x_0]), 0 \leq i \leq q_{n-1} - 1\}$ и $\{f^i([z_1, x_0]), q_{n-1} \leq i \leq q_n - 1\}$.

Ясно, что первая система интервалов только один раз покрывает точки излома гомеоморфизма f , q_{n-1} -прообразы которых лежат в отрезке $[x_{q_n}, x_0]$, а также q_n -прообразы которых составляют подмножество V_1 . Отметим, что точки излома f с q_n -прообразами в V_2 покрываются второй системой отрезков только один раз.

Теперь рассмотрим систему отрезков $\{f^i([x_0, z_4]), 0 \leq i \leq q_n - 1\}$. Из определения z_4 следует, что $[x_0, z_4] \subset [x_0, x_{q_{n-1}}]$. Для точки z_2 возможны два случая: $z_2 > x_0$ или $z_2 \leq x_0$. Если $z_2 > x_0$, то точки излома с q_n -прообразами, лежащими в $[x_0, z_2]$, покрываются системой отрезков $\{f^i([x_0, z_4]), 0 \leq i \leq q_n - 1\}$ только один раз. В случае $z_2 \leq x_0$ отрезок $[x_0, z_4]$ не содержит ни одного q_n -прообраза точек излома гомеоморфизма f . Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1.4

Приведем необходимые леммы и, используя их, докажем теорему 1.4.

ЛЕММА 4.1. Пусть в точке $x = x_0$ поднятие $\Phi(x)$ сопряжения φ имеет положительную производную $\Phi'(x_0) = \omega_0$. Тогда существуют $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и константа $C_3 = C_3(R_1, \omega_0)$ для любого $R_1 > 1$ такие, что для любых точек $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, лежащих в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и удовлетворяющих условиям:

- (i) отрезки $[z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4]$ попарно R_1 -соизмеримы,
- (ii) $\max(|z_1 - x_0|, |z_4 - x_0|) \leq R_1 |z_1 - z_2|$,

справедливо неравенство

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi) - 1| < C_3 \varepsilon.$$

Определим в области $\{(x, y) : x > 0, 0 \leq y \leq 1\}$ следующие функции:

$$F_i(x, y) = \frac{[\sigma_i + (1 - \sigma_i)y](1 + x)}{\sigma_i + (1 - \sigma_i)y + x}, \quad i = \overline{1, k},$$

где σ_i – величины изломов гомеоморфизма f в точках $b(i)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\{b(i_1), b(i_2), \dots, b(i_m)\}$ – произвольное нетривиальное подмножество точек изломов гомеоморфизма f , т. е. $\prod_{s=1}^m \sigma_{i_s} = A \neq 1$. Тогда существуют константы $\Omega_0 = \Omega_0(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_m}) > 1$ и $\tau_0 = \tau_0(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_m}) \in (0, 1)$ такие, что для всех $x_s \geq \Omega_0$, $y_s \in [0, \tau_0]$, $s = \overline{1, m}$, справедливо неравенство

$$\left| \prod_{s=1}^m F_{i_s}(x_s, y_s) - A \right| \leq \frac{|A - 1|}{4}. \quad (4.1)$$

Отметим, что утверждение леммы 4.2 мы используем в ходе доказательства леммы 4.3. При помощи τ_0 и Ω_0 определим две новые константы $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\Omega}_0$, которые будут играть важную роль в доказательстве теоремы 1.4.

Положим

$$\bar{\tau}_0 = \min \tau_0(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_m}), \quad \bar{\Omega}_0 = \max \Omega_0(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_m}), \quad (4.2)$$

где минимум и максимум берутся по всем нетривиальным подмножествам точек изломов $\{b(i_1), b(i_2), \dots, b(i_m)\}$ гомеоморфизма f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Пусть гомеоморфизм f удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку число вращения ρ_f иррационально, инвариантная мера μ не имеет атомов и сопряжение $\varphi(x)$ задается монотонной функцией $\mu_f([0, x])$, $x \in S^1$. Конечная производная поднятия $\Phi'(x)$ существует в силу монотонности функции Φ почти для всех x по мере Лебега. Мы покажем, что $\Phi'(x) = 0$ во всех точках x , где существует конечная производная. Предположим, что $\Phi'(x_0) = \omega_0 > 0$ в некоторой точке $x_0 \in S^1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ определяется леммой 4.1. Теперь при помощи констант $\bar{\Omega}_0$ и $\bar{\tau}_0$ (см. (4.2)) определим две новые константы M_0 и ζ_0 :

$$M_0 = \bar{\Omega}_0 e^v, \quad \zeta_0 = \bar{\tau}_0 e^v,$$

где $v > 0$ – полная вариация $\ln F'$ по окружности S^1 . Пусть $K_0 = K_0(f, M_0, \zeta_0) > M_0 > 1$ – константа, определяемая в утверждении теоремы 3.1. В силу утверждения теоремы 3.1 для достаточно больших n существуют нетривиальное подмножество $\hat{B} = \{b(i_1), b(i_2), \dots, b(i_m)\}$ особых точек гомеоморфизма f , точки $z_i \in S^1$, $i = \overline{1, 4}$, $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$, и число $r_n \in \{q_{n-1}, q_n, q_{n-1} + q_n\}$ такие, что тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ $(K_0, M_0, \delta, \zeta_0; x_0)$ -правильно покрывает точки $\hat{B}$.

Поскольку образы тройки отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ за r_n шагов покрывают все точки нетривиального подмножества $\hat{B}$, двойственные отношения $\text{Cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $\text{Cr}(f^{r_n}(z_1), f^{r_n}(z_2), f^{r_n}(z_3), f^{r_n}(z_4))$ существенно отличаются. Более точно, имеет место следующая

ЛЕММА 4.3. При достаточно больших n справедливо неравенство

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) - 1| \geq R_2, \quad (4.3)$$

где константа $R_2 > 0$ зависит лишь от f .

Поскольку отрезки $[z_s, z_{s+1}]$, $s = \overline{1, 3}$, $(K_0, M_0, \delta, \zeta_0; x_0)$ -правильно покрывают точки изломов из $\widehat{B}$, эти отрезки, а также $[f^{r_n}(z_s), f^{r_n}(z_{s+1})]$, $s = \overline{1, 3}$, удовлетворяют условиям (i), (ii) леммы 4.1 с константой $R_1 = K_0$.

Используя утверждение леммы 4.1, получаем

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; \varphi) - 1| \leq C_4 \varepsilon, \quad (4.4)$$

$$|\text{Dist}(f^{r_n}(z_1), f^{r_n}(z_2), f^{r_n}(z_3), f^{r_n}(z_4); \varphi) - 1| \leq C_4 \varepsilon, \quad (4.5)$$

где константа $C_4 > 0$ зависит от R_1 и ω .

Поскольку φ осуществляет сопряжение с линейным поворотом, нетрудно видеть, что

$$\text{Cr}(\varphi(f^{r_n}(z_1)), \varphi(f^{r_n}(z_2)), \varphi(f^{r_n}(z_3)), \varphi(f^{r_n}(z_4))) = \text{Cr}(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)). \quad (4.6)$$

Из формул (4.4)–(4.6) непосредственно вытекает, что

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) - 1| \leq C_5 \varepsilon, \quad (4.7)$$

где константа $C_5 > 0$ не зависит от ε и n . При достаточно малых ε соотношения (4.7) и (4.3) не могут выполняться одновременно. Это противоречие доказывает теорему 1.4.

§ 5. Доказательства лемм 4.1–4.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Предположим, что существует конечная производная поднятия Φ в точке x_0 и $\Phi'(x_0) = \omega_0 > 0$. По определению производной для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеют место неравенства

$$\omega_0 - \varepsilon < \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} < \omega_0 + \varepsilon. \quad (5.1)$$

Рассмотрим точки $z_i \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяющие условиям (i), (ii) леммы. Для определенности предположим, что $z_i < x_0$, $i = \overline{1, 4}$. В остальных случаях лемма доказывается аналогично. При $x = z_i$, $i = \overline{1, 4}$, из (5.1) вытекает, что

$$(\omega_0 - \varepsilon)(x_0 - z_i) < \Phi(x_0) - \Phi(z_i) < (\omega_0 + \varepsilon)(x_0 - z_i). \quad (5.2)$$

Отсюда можно легко вывести следующие неравенства:

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_2) + (x_0 - z_1)}{z_2 - z_1} < \frac{\Phi(z_2) - \Phi(z_1)}{z_2 - z_1} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_2) + (x_0 - z_1)}{z_2 - z_1}, \quad (5.3)$$

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_3) + (x_0 - z_1)}{z_3 - z_1} < \frac{\Phi(z_3) - \Phi(z_1)}{z_3 - z_1} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_3) + (x_0 - z_1)}{z_3 - z_1}, \quad (5.4)$$

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_2)}{z_4 - z_2} < \frac{\Phi(z_4) - \Phi(z_2)}{z_4 - z_2} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_2)}{z_4 - z_2}, \quad (5.5)$$

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_3)}{z_4 - z_3} < \frac{\Phi(z_4) - \Phi(z_3)}{z_4 - z_3} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_3)}{z_4 - z_3}. \quad (5.6)$$

Из условий (i) и (ii) леммы вытекает, что

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \max \left\{ \frac{x_0 - z_i}{z_2 - z_1}, \frac{x_0 - z_i}{z_3 - z_1}, \frac{x_0 - z_i}{z_4 - z_2}, \frac{x_0 - z_i}{z_4 - z_3} \right\} \leq K_1, \quad (5.7)$$

где константа $K_1 > 1$ зависит лишь от R_1 и не зависит от ε . Очевидно, что

$$\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi) = \frac{\Phi(z_2) - \Phi(z_1)}{z_2 - z_1} \frac{\Phi(z_4) - \Phi(z_3)}{z_4 - z_3} \frac{z_3 - z_1}{\Phi(z_3) - \Phi(z_1)} \frac{z_4 - z_2}{\Phi(z_4) - \Phi(z_2)}.$$

Отсюда, используя (5.3)–(5.7), получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Перепишем $\prod_{s=1}^m F_{i_s}(x_s, y_s)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^m F_{i_s}(x_s, y_s) &= \prod_{s=1}^m \frac{[\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s](1 + x_s)}{\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s + x_s} = \prod_{s=1}^m [\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s] \\ &\times \prod_{s=1}^m \frac{1 + x_s}{\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s + x_s} \equiv \Psi_1(y_1, \dots, y_m) \times \Psi_2(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Согласно соотношениям

$$\lim_{y_s \rightarrow 0, s=\overline{1, m}} \Psi_1(y_1, \dots, y_m) = A, \quad \lim_{x_s \rightarrow \infty, s=\overline{1, m}} \Psi_2(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m) = 1,$$

когда переменные y_s , $s = \overline{1, m}$, равномерно близки к нулю, функция $\Psi_1 = \Psi_1(y_1, \dots, y_m)$ близка к A , а функция $\Psi_2 = \Psi_2(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m)$ близка к 1 при больших значениях x_s , $s = \overline{1, m}$. Учитывая эти замечания и явный вид функций Ψ_1 и Ψ_2 , оценим $|\Psi_1 \Psi_2 - A|$. Сначала оценим Ψ_1 . Предположим, что $0 \leq y_s \leq \tau_0 < 1$. Константу τ_0 выберем позже. Легко понять, что

$$|\Psi_1 - A| = A \left| \prod_{s=1}^m \left(1 + \frac{(1 - \sigma_{i_s})}{\sigma_{i_s}} y_s \right) - 1 \right| \leq C_6 \tau_0,$$

где константа $C_6 > 0$ зависит только от $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_m}$. Положим $\tau_0 = \min\{\frac{|A-1|}{8C_4}, 1\}$. Тогда

$$|\Psi_1 - A| < \frac{|A - 1|}{8} \quad (5.9)$$

при $0 \leq y_s \leq \tau_0$, $s = \overline{1, m}$.

Теперь оценим $|\Psi_2 - 1|$ при больших значениях x_s , $s = \overline{1, m}$. Используя явный вид функции Ψ_2 , покажем, что для всех y_s , $0 \leq y_s \leq 1$, и $x_s > 0$, $s = \overline{1, m}$, справедливо неравенство

$$|\Psi_2 - 1| \leq R_2 \sum_{s=1}^m \frac{1}{x_s}, \quad (5.10)$$

где константа $R_2 > 0$ зависит лишь от $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_m}$.

Предположим, что $x_s \geq \Omega_0 > 0$, $s = \overline{1, m}$. В силу (5.10) имеем $|\Psi_2 - 1| \leq R_2 m \frac{1}{\Omega_0}$. Отсюда, а также из (5.9) вытекает, что

$$|\Psi_1 \Psi_2 - A| \leq |\Psi_1 - A| + |\Psi_1| |\Psi_2 - 1| \leq \frac{|A - 1|}{8} + \left(A + \frac{|A - 1|}{8} \right) R_2 m \frac{1}{\Omega_0}.$$

Выберем Ω_0 таким, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{|A - 1|}{8} + \left(A + \frac{|A - 1|}{8} \right) R_2 m \frac{1}{\Omega_0} = \frac{|A - 1|}{4},$$

откуда следует, что $\Omega_0 = \frac{(8A + |A - 1|)R_2 m}{|A - 1|}$. В итоге имеем $|\Psi_1 \Psi_2 - A| \leq \frac{|A - 1|}{4}$ при $0 \leq y_s \leq \tau_0$ и $x_s \geq \Omega_0$, $s = \overline{1, m}$. Отсюда, а также из (5.8) вытекает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Напомним, что тройка отрезков $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ $(K_0, M_0, \delta, \zeta_0; x_0)$ -правильно покрывает нетривиальное подмножество особых точек $\widehat{B} = \{b(i_1), b(i_2), \dots, b(i_m)\}$.

По определению 3.1 имеем $z_2 = \bar{b}^{(n)}(i_t)$ и $\bar{b}^{(n)}(i_s) \in [z_1, z_2]$, $s = \overline{1, m}$, $s \neq t$. Перепишем $\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) &= \prod_{s=1}^m \text{Dist}(f^{l_{i_s}}(z_1), f^{l_{i_s}}(z_2), f^{l_{i_s}}(z_3), f^{l_{i_s}}(z_4); f) \\ &\times \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq l_{i_s}, s=\overline{1, m}}}^{r_n-1} \text{Dist}(f^p(z_1), f^p(z_2), f^p(z_3), f^p(z_4); f). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Сначала оценим первый сомножитель в (5.11). Из утверждения леммы 2.4 и определения (4.1) функций $F_i(x, y)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{Dist}(f^{l_{i_t}}(z_1), f^{l_{i_t}}(z_2), f^{l_{i_t}}(z_3), f^{l_{i_t}}(z_4); f) &= \frac{\sigma_{i_t}(1 + \eta(l_{i_t}))}{\sigma_{i_t} + \eta(l_{i_t})} + \psi_t \\ &= F_{i_t}(\eta(l_{i_t}), 0) + \psi_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dist}(f^{l_{i_s}}(z_1), f^{l_{i_s}}(z_2), f^{l_{i_s}}(z_3), f^{l_{i_s}}(z_4); f) &= \frac{(\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})z^{(i_s)}(l_{i_s}))(1 + \eta(l_{i_s}))}{\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})z^{(i_s)}(l_{i_s}) + \eta(l_{i_s})} + \psi_s \\ &= F(\eta(l_{i_s}), z^{(i_s)}(l_{i_s})) + \psi_s, \quad s = \overline{1, m}, \quad s \neq t, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $|\psi_s| \leq C_2 \int_{F^{l_{i_s}}(\hat{z}_1)}^{F^{l_{i_s}}(\hat{z}_4)} |F''(y)| dy$, $s = \overline{1, m}$.

По построению отрезок $[z_1, z_4]$ является r_n -маленьким, а значит, отрезки $f^j([z_1, z_4])$, $0 \leq j < r_n$, попарно не пересекаются (за исключением концевых точек). Отсюда, используя утверждение следствия 2.1, получаем

$$\ell(f^j([z_1, z_4])) \leq C_0 \lambda^n, \quad 0 \leq j < r_n, \quad (5.13)$$

где C_0 – постоянная.

Аналогичные оценки справедливы и для длин отрезков $F^j([\hat{z}_1, \hat{z}_4])$, $0 \leq j < r_n$. В силу условия теоремы 1.4 имеем $F'' \in L_1(S^1, d\ell)$. Следовательно, функция $\int_0^x |F''| d\ell$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует $N = N(\varepsilon) \geq 1$ такое, что при $n \geq N$ справедлива оценка

$$\int_{F^{l_{is}}(\hat{z}_1)}^{F^{l_{is}}(\hat{z}_4)} |F''(y)| d\ell < \varepsilon, \quad s = \overline{1, m}. \quad (5.14)$$

Предположим, что $\eta(0)$ и $z^{(i_s)}(0)$, $s = \overline{1, m}$, удовлетворяют следующим соотношениям: $\eta(0) > \overline{\Omega}_0 e^v = M_0$, $z^{(i_s)}(0) < \overline{\tau}_0 e^{-v} = \zeta_0$, $s = \overline{1, m}$. Отсюда, используя соотношения (3.2), получим, что $\eta(l_{i_s}) > \overline{\Omega}_0$ и $z^{i_s}(l_{i_s}) < \overline{\tau}_0$, $s = \overline{1, m}$.

Из утверждения леммы 4.2 вытекает, что

$$\left| F_{i_t}(\eta(l_{i_t}), 0) \prod_{s=1, s \neq t}^m F_{i_s}(\eta(l_{i_s}), z^{(i_s)}(l_{i_s})) - A \right| \leq \frac{|A-1|}{8}. \quad (5.15)$$

Объединяя (5.12)–(5.15), получим

$$\left| [F_{i_t}(\eta(l_{i_t}), 0) + \psi_t] \prod_{s=1, s \neq t}^m (F_{i_s}(\eta(l_{i_s}), z^{(i_s)}(l_{i_s})) + \psi_s) - A \right| \leq \frac{|A-1|}{4} \quad (5.16)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теперь оценим второй сомножитель в (5.11). Используя разложения (2.3) и теорему 2.1, получим

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq l_{i_s}, s=\overline{1, m}}}^{r_n-1} \text{Dist}(f^i(z_1), f^i(z_2), f^i(z_3), f^i(z_4); f) - 1 \right| \\ & \leq C_7 \sum_{i=0}^m (\ell([f^i(z_1), f^i(z_4)])) \max_{x, t \in [f^i(z_1), f^i(z_4)]} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t)| \\ & \quad + C_7 \sum_{i=0}^{r_n-1} \int_{F^i(\hat{z}_1)}^{F^i(\hat{z}_4)} |\theta(y)| d\ell + C_7 \sum_{i=0}^{r_n-1} \left(\int_{F^i(\hat{z}_1)}^{F^i(\hat{z}_4)} |F''(y)| d\ell \right)^2, \quad (5.17) \end{aligned}$$

где константа $C_7 > 0$ зависит лишь от f .

Отметим, что функции $\int_0^x |F''(y)| d\ell$ и $g_\varepsilon(x)$ равномерно непрерывны на отрезке $[0, 1]$. В силу оценки (5.13) существует $N_1 = N_1(\varepsilon) > 1$ такое, что при каждом $n \geq N_1$ справедливо $\ell(f^i([z_1, z_2])) \leq \delta_1$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, $0 \leq i < r_n$. Если $x, t \in [F^i(\hat{z}_1), F^i(\hat{z}_4)]$ при некотором i , $0 \leq i < r_n$, то $\int_t^x |F''(y)| d\ell < \varepsilon$,

$|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t)| < \varepsilon$. Напомним, что $\int_{S^1} |\theta(y)| d\ell < \varepsilon$. Отсюда, а также из неравенства (5.17) следует, что

$$\left| \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq l_{i_s}, s=1, \overline{m}}}^{r_n-1} \text{Dist}(f^i(z_1), f^i(z_2), f^i(z_3), f^i(z_4); f) - 1 \right| \leq (2 + \|F''\|_{L_1}) C_8 \varepsilon,$$

где константа $C_8 > 0$ зависит лишь от f .

Из (5.11), (5.12), (5.16), а также из последнего соотношения вытекает утверждение леммы.

Авторы выражают свою благодарность К. М. Ханину и А. Ю. Теплинскому за полезные обсуждения.

Список литературы

1. A. Denjoy, “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **11** (1932), 333–375.
2. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
3. В. И. Арнольд, “Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:1 (1961), 21–86; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Small denominators. I: Mappings of the circumference onto itself”, *Amer. Math. Soc. Transl. II. Ser.*, **46** (1965), 213–284.
4. M. R. Herman, “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **49**:1 (1979), 5–233.
5. Y. Katznelson, D. Ornstein, “The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **9**:4 (1989), 681–690.
6. Я. Г. Синай, К. М. Ханин, “Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами”, *УМН*, **44**:1(265) (1989), 57–82; англ. пер.: Ya. G. Sinai, K. M. Khanin, “Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 69–99.
7. J. Moser, “A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations. II”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **20** (1966), 499–535.
8. J.-C. Yoccoz, “Il n’y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math.*, **298**:7 (1984), 141–144.
9. А. Ю. Теплинский, К. М. Ханин, “Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями”, *УМН*, **59**:2(356) (2004), 137–160; англ. пер.: A. Yu. Teplinskii, K. M. Khanin, “Rigidity for circle diffeomorphisms with singularities”, *Russian Math. Surveys*, **59**:2 (2004), 329–353.
10. К. М. Ханин, Е. В. Вул, “Circle homeomorphisms with weak discontinuities”, *Dynamical systems and statistical mechanics* (Moscow, 1991), Adv. Soviet Math., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 57–98.
11. А. А. Джалилов, К. М. Ханин, “Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с изломом”, *Функц. анализ и его прил.*, **32**:3 (1998), 11–21; англ. пер.: A. A. Dzhalilov, K. M. Khanin, “On an invariant measure for homeomorphisms of a circle with a point of break”, *Funct. Anal. Appl.*, **32**:3 (1998), 153–161.
12. M. Stein, “Groups of piecewise linear homeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **332**:2 (1992), 477–514.

13. M.-R. Herman, “Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant”, *Harmonic analysis*, v. II (Chicago, 1981), Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983, 708–725.
14. A. A. Dzhililov, I. Liousse, “Circle homeomorphisms with two break points”, *Nonlinearity*, **19**:8 (2006), 1951–1968.
15. A. A. Dzhililov, I. Liousse, D. Mayer, “Singular measures of piecewise smooth circle homeomorphisms with two break points”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **24**:2 (2009), 381–403.
16. Я. Г. Синай, *Современные проблемы эргодической теории*, Физматлит, М., 1995; пер. с англ.: Ya. G. Sinai, *Topics in ergodic theory*, Princeton Math. Ser., **44**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.
17. G. Świątek, “Rational rotation numbers for maps of the circle”, *Comm. Math. Phys.*, **119**:1 (1988), 109–128.

А. А. Джалилов (A. A. DZHALILOV)
Механико-математический факультет
Самаркандского государственного университета
им. А. Навои, Узбекистан
E-mail: ahtam21@rambler.ru

Поступило в редакцию
20.11.2009
07.12.2010

Д. МАЙЕР (D. MAYER)
Institut für Theoretische Physik,
Clausthal-Zellerfeld, Germany
E-mail: dieter.mayer@tu-clausthal.de

У. А. Сафаров (U. A. SAFAROV)
Механико-математический факультет
Самаркандского государственного университета
им. А. Навои, Узбекистан
E-mail: safarovua@mail.ru