Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 2, 61–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:23:09

УДК 517.5

А. С. Романюк

Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных

Получены точные по порядку оценки наилучших M -членных тригонометрических приближений классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q .

Библиография: 38 наименований.

Введение

В настоящей работе изучаются вопросы наилучших M -членных тригонометрических приближений классов периодических функций многих переменных $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q . Введем некоторые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, – евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$; $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, обозначает множество функций $f(x)$, 2π -периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Далее всюду предполагаем, что для $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций будем обозначать $L_p^0(\pi_d)$.

Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \{k : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда классы $B_{p, \theta}^r$, введенные О. В. Бесовым [1], можно определить следующим образом (см., например, [2]):

$$B_{p, \theta}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p, \theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p, \infty}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p, \infty}^r} = \sup_s 2^{(s, r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Обратим внимание, что приведенное определение классов $B_{p, \theta}^r$ можно распространить и на крайние значения $p = 1, \infty$, несколько видоизменив при этом “блоки” $\delta_s(f, x)$.

Именно, пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле-Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j}-1}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, положим $A_s(f, x) = f(x) * A_s(x)$, где знак “*” обозначает операцию свертки. Тогда при каждом $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B_{p, \theta}^r$ определяются следующим образом:

$$B_{p, \theta}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p, \theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$B_{p, \infty}^r = \left\{ f(x) \mid \|f\|_{B_{p, \infty}^r} = \sup_s 2^{(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Отметим, что классы $B_{p, \infty}^r$ совпадают с классами H_p^r [3, с. 31], которые, в свою очередь, являются аналогами известных классов, введенных С. М. Никольским (см. [4, с. 189]). Напомним определение классов H_p^r , определив предварительно классы $H_{p, l}^r$, $l \in \mathbb{N}$ [3, с. 31].

Класс $H_{p, l}^r$ — это множество функций $f(x) \in L_p^0(\pi_d)$ таких, что

$$\|\Delta_t^l f(x)\|_p \leq \prod_{j=1}^d |t_j|^{r_j}, \quad l > \max_j r_j,$$

где $t = (t_1, \dots, t_d)$, $\Delta_t^l f(x)$ – смешанная l -я разность с шагом t_j по каждой переменной x_j , $j = \overline{1, d}$. Из теоремы, доказанной В. Н. Темляковым (см. [3, теорема 1.1]), следует, что классы $H_{p,l}^r$ с различными l эквивалентны. Поскольку всюду ниже речь будет идти только о порядковых соотношениях, и с этой точки зрения классы $H_{p,l}^r$ с различными $l > \max_j r_j$ неразличимы, то в обозначениях $H_{p,l}^r$ индекс l опускается.

Напомним также и определение классов $W_{p,\alpha}^r$ (см., например, [3, с. 31]). Пусть $F_r(x, \alpha)$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, – многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, для которых $k_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Обозначим через $W_{p,\alpha}^r$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

Далее, не умаляя общности, будем считать, что координаты вектора $r = (r_1, \dots, r_d)$ упорядочены в следующем виде: $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1, d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma_j = \gamma'_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$.

Если A – конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

Приводимые ниже результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом функции $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ назовем функциями одного порядка и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существуют постоянные $C_1 \leq C_2$ такие, что $C_1 \mu_2(N) \leq \mu_1(N) \leq C_2 \mu_2(N)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от тех параметров, которые входят в определение классов, а также метрик, в которых измеряется погрешность приближения и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Теперь приведем определение величины, которая будет нами исследоваться.

Для $f \in L_q(\pi_d)$ обозначим

$$e_M(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q,$$

где $\{k^j\}_{j=1}^M$ – система векторов $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ с целочисленными координатами, c_j – произвольные коэффициенты. Если F – некоторый функциональный класс, то полагаем

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q.$$

Величина $e_M(f)_2$ для функций одной переменной была введена С. Б. Стечкиным [5] при формулировке критерия абсолютной сходимости рядов Фурье. Несколько позже величины $e_M(f)_q$ и $e_M(F)_q$, $1 \leq q \leq \infty$, начали исследовать уже с точки зрения аппроксимации (см., например, [6]–[12]). Следует отметить, что полученные при этом результаты нашли применение в вопросах исследования других аппроксимативных характеристик, в частности колмогоровских поперечников соответствующих классов функций¹.

Систематическое изучение величин $e_M(F)_q$ на классах периодических функций многих переменных $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r было положено В. Н. Темляковым [13]. Важно отметить, что при изучении им величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < p < q \leq 2$, $r_1 > 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, было обнаружено, что наилучшие M -членные тригонометрические приближения убывают при $M \rightarrow \infty$ существенно быстрее колмогоровских поперечников $d_M(W_{p,\alpha}^r, L_q)$.

Затем исследования величин $e_M(F)_q$ на тех же классах функций $W_{p,\alpha}^r$ и H_p^r были продолжены Э. С. Белинским [14]–[17]. Об этом более подробно будет идти речь в комментариях к полученным нами результатам. Отметим еще, что в последнее время исследование наилучших M -членных приближений тех или иных функциональных классов получило мощное развитие в работах многих авторов [18]–[26]. Там же можно ознакомиться и с более подробной библиографией по данному вопросу.

Цель настоящей работы – продолжить исследования в указанном направлении на классах $B_{p,\theta}^r$. Отметим, что некоторая часть из приведенных ниже результатов была ранее опубликована с доказательством, либо анонсирована в [27]–[29]. Поскольку за последнее время методы нахождения оценок наилучших M -членных приближений получили определенные усовершенствования, то в настоящей работе приводятся модифицированные доказательства и ранее полученные автором результаты.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Напомним несколько известных утверждений, которые будут систематически использоваться на протяжении всей работы.

ТЕОРЕМА А (Литтлвуда–Пэли [4, с. 65]). Пусть задано $1 < p < \infty$. Существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что для каждой функции $f \in L_p^0(\pi_d)$ справедлива оценка

$$C_1 \|f\|_p \leq \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p. \quad (1.1)$$

¹ n -мерным колмогоровским поперечником центрально-симметричного множества Φ банахова пространства $\mathcal{X}$ называется величина

$$d_n(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{L_n} \sup_{f \in \Phi} \inf_{a \in L_n} \|f - a\|_{\mathcal{X}},$$

где L_n – подпространство размерности n пространства $\mathcal{X}$.

ЛЕММА А [3, с. 25]. Пусть $1 \leq p < q < \infty$ и $f \in L_p^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_q \ll \left\{ \sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2)$$

$$\|s\|_1 = s_1 + s_2 + \dots + s_d.$$

ЛЕММА Б [3, с. 11]. Имеет место оценка

$$\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-\beta(s, \gamma)} \asymp 2^{-\beta n} n^{\nu-1}, \quad \beta > 0. \quad (1.3)$$

ЛЕММА В [3, с. 11]. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ таковы, что $1 = \gamma_1 = \delta_1 = \dots = \gamma_\nu = \delta_\nu$ и $1 < \delta_j < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$. Тогда

$$\sum_{(s, \gamma) \leq n} 2^{\beta(s, \delta)} \ll 2^{\beta n} n^{\nu-1}, \quad \beta > 0. \quad (1.4)$$

ЛЕММА Г [3, с. 28]. Пусть $1 < p < q \leq \infty$ и $f \in L_p^0(\pi_d)$. Тогда

$$\|f\|_p \gg \left\{ \sum_s \left(\|\delta_s(f, x)\|_q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

ТЕОРЕМА Б [30]. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j — целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$, и $t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k, x)}$. Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|t\|_q. \quad (1.5)$$

Это неравенство было установлено С. М. Никольским и получило название *неравенство разных метрик*. В случае $d = 1$ и $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [31].

ТЕОРЕМА В [3, с. 32]. Для того чтобы $f \in H_p^r$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \|\delta_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 < p < \infty, \\ \|A_s(f, x)\|_p &\ll 2^{-(s, r)}, & 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

§ 2. Порядки величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ при $1 \leq p \leq 2 < q < \infty$ и $2 \leq p < q < \infty$

В этом параграфе рассмотрим один из тех случаев ($1 \leq p \leq 2 < q < \infty$), при исследовании которого проявилось так называемое явление “малой гладкости”. В связи с этим обстоятельством возникла необходимость рассмотреть несколько соотношений между параметрами r_1 , p и q , в каждом из которых требовалось несколько модифицировать метод получения оценок сверху.

Отметим, что явление “малой гладкости” впервые было обнаружено Б. С. Капиным [32] в процессе установления оценок колмогоровских поперечников классов Соболева W_1^r функций одной переменной в пространстве L_q . Иными словами, в [32] было выявлено, что поведение поперечников $d_M(W_1^r, L_q)$, $2 < q < \infty$, в случае $1 - \frac{1}{q} < r < 1$ существенно отличается от случая $r > 1$. Затем подобного рода явления были обнаружены в некоторых случаях и при исследовании аппроксимативных характеристик классов периодических функций многих переменных.

В нашей ситуации явление “малой гладкости” состоит в том, что при переходе показателя гладкости r класса $B_{p,\theta}^r$ через значение $r_1 = \frac{1}{p}$ происходит “скачок” в оценке величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$. Иными словами, оценку $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ при $r_1 = \frac{1}{p}$ нельзя получить предельным переходом из оценок $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ при $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$, либо при $r_1 > \frac{1}{p}$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $1 \leq p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp \begin{cases} M^{-\frac{1}{2}}(\log^\nu M)^{\frac{1}{\theta'}}, & r_1 = \frac{1}{p}, \\ (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}, & r_1 > \frac{1}{p}, \\ M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})_+}, & \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим оценку сверху в случае $r_1 \geq \frac{1}{p}$. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение. Пусть Ω_L – множество, содержащее не более чем L векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ с целочисленными координатами, а $P(\Omega_L, x)$ – произвольный тригонометрический полином, состоящий из гармоник с “номерами” из Ω_L . Справедлива

ЛЕММА 2.1 [16]. Пусть $2 < q < \infty$. Тогда для всякого тригонометрического полинома $P(\Omega_N, x)$ и для любого $M < N$ найдется тригонометрический полином $P(\Omega_M, x)$, для которого имеет место оценка

$$\|P(\Omega_N, x) - P(\Omega_M, x)\|_q \leq C_1 \sqrt{NM^{-1}} \|P(\Omega_N, x)\|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$.

Итак, пусть $f(x)$ – некоторая функция из класса $B_{p,\theta}^r$, M – произвольное натуральное число и n подобрано из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Приближающий

полином $P(\Omega_M, x)$, доставляющий для $f(x)$ требуемую оценку приближения, будем подбирать в виде

$$P(\Omega_M, x) = \sum_{(s, \gamma') < n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} P(\Omega_{N_s}, x), \quad (2.2)$$

где $P(\Omega_{N_s}, x)$ – полиномы, которые будут построены для каждого “блока” $\delta_s(f, x)$ согласно лемме 2.1, а число $\alpha > 1$ будет подбираться в процессе построения.

Предположим, что искомым полином построен. Тогда согласно (2.2) и в силу теоремы А и неравенства Минковского будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - P(\Omega_M, x)\|_q &\ll \left\| \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} |\delta_s(f, x) - P(\Omega_{N_s}, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \\ &+ \left\| \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \delta_s(f, x) \right\|_q = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Оценим сначала слагаемое I_2 . Пусть q_0 – некоторое число, удовлетворяющее условию $p < q_0 < q$. Тогда, принимая во внимание, что $\|\delta_s(f, x)\|_{q_0} \asymp \|A_s(f, x)\|_{q_0}$, $1 < q_0 < \infty$, и воспользовавшись леммой А, получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\| \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \delta_s(f, x) \right\|_q \ll \left\{ \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \left(\|\delta_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left\{ \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \left(\|A_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Далее, применив к $A_s(f, x)$ как к полиному степени 2^{s_j} по переменной x_j неравенство (1.5), продолжим оценку:

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \left\{ \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \left(\|A_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0})} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\{ \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \left(\|A_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} = I_3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для последующей оценки I_3 нам понадобится рассмотреть несколько случаев.

а) Пусть $1 \leq \theta \leq q$. Тогда в силу неравенства [33, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{\nu_2} \right)^{\frac{1}{\nu_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\nu_1} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 < \infty, \quad (2.5)$$

имеем

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} \|A_s(f, x)\|_p^\theta 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta 2^{-(s, \gamma')(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq 2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\leq 2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \|f\|_{B_{p, \theta}^r} \leq 2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

б) Пусть $q < \theta < \infty$, и пусть

$$I_3 = \left\{ \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{q(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p^q 2^{-q((s, r) - \|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))} \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{2.7}$$

Применив к (2.7) неравенство Гёльдера с показателем $\frac{\theta}{q}$ и воспользовавшись оценкой (1.3), получим

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{-q((s, r) - \|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))\frac{\theta}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \\
&\leq \|f\|_{B_{p, \theta}^r} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{-q((s, r) - \|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))\frac{\theta}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \\
&\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{-q(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})\frac{\theta}{\theta - q}(s, \gamma)} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \asymp 2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu - 1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})}. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

в) Пусть $\theta = \infty$. Тогда, принимая во внимание, что в этом случае $B_{p, \infty}^r = H_p^r$, и в силу теоремы В $\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s, r)}$, из (2.7) будем иметь

$$\begin{aligned}
I_3 &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{-q((s, r) - \|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha n} 2^{-q(s, \gamma)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\asymp 2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu - 1)\frac{1}{q}}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Таким образом, подставив полученные оценки (2.6), (2.8) и (2.9) в (2.4), приходим к оценке

$$I_2 \ll 2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu - 1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}. \tag{2.10}$$

Теперь перейдем к оценке I_1 . Заметим, что поскольку $q \in (2, \infty)$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} |\delta_s(f, x) - P(\Omega_{N_s}, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \\ &= \left(\left\| \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} |\delta_s(f, x) - P(\Omega_{N_s}, x)|^2 \right\|_{q/2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} \left\| |\delta_s(f, x) - P(\Omega_{N_s}, x)|^2 \right\|_{q/2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} \|\delta_s(f, x) - P(\Omega_{N_s}, x)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись сначала леммой 2.1, а затем оценкой (1.5), получим

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s^{-1} 2^{\|s\|_1} \|\delta_s(f, x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\asymp \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s^{-1} 2^{\|s\|_1} \|A_s(f, x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s^{-1} 2^{\|s\|_1} 2^{2(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})\|s\|_1} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s^{-1} 2^{\frac{2\|s\|_1}{p}} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Чтобы продолжить оценку (2.11), нам понадобится теперь рассмотреть отдельно случаи $r_1 = \frac{1}{p}$ и $r_1 > \frac{1}{p}$.

Итак, пусть $r_1 = \frac{1}{p}$. Тогда зададим число α равенством

$$\alpha = \frac{q}{2} \left(1 + \frac{(\nu - 1) \log n}{n} \right),$$

а каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, удовлетворяющему условию $n \leq (s, \gamma') < \alpha n$, поставим в соответствие число

$$N_s = \left[2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \|A_s(f, x)\|_p 2^{r_1 \|s\|_1} \right] + 1, \quad 1 \leq \theta < \infty$$

(соответственно, $N_s = \left[2^n n^{-1} \|A_s(f, x)\|_p 2^{r_1 \|s\|_1} \right] + 1$ при $\theta = \infty$), где $[a]$ — целая часть числа a .

Нетрудно показать, что при таком выборе чисел N_s выполнено соотношение $\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s \ll M$. Действительно, если $1 \leq \theta < \infty$, то согласно неравенству Гёльдера (с естественной модификацией при $\theta = 1$) будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s &\ll n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 \|s\|_1} \|A_s(f, x)\|_p \\
&= n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p 2^{-(s, r)} 2^{r_1 \|s\|_1} \\
&\leq n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, r) \theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\quad \times \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 \|s\|_1 \theta'} 2^{-(s, r) \theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\
&\ll n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \|f\|_{B_{p, \theta}^r} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 (s, \gamma') \theta'} 2^{-r_1 (s, \gamma) \theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\
&\ll n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \left(\sum_{l=n}^{[\alpha n]+1} 2^{r_1 l \theta'} \sum_{l \leq (s, \gamma') < l+1} 2^{-r_1 (s, \gamma) \theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Применив к последней сумме в (2.12) соотношение (1.3), получим требуемую оценку

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s &\ll n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \left(\sum_{l=n}^{[\alpha n]+1} 2^{r_1 l \theta'} 2^{-r_1 l \theta'} l^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\
&= n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} \left(\sum_{l=n}^{[\alpha n]+1} l^{\nu-1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll n^d + 2^n n^{\frac{\nu}{\theta} - 1} n^{\frac{\nu}{\theta'}} \\
&= n^d + 2^n n^{\nu-1} \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

В случае $\theta = \infty$ для $f \in B_{p, \infty}^r$ согласно теореме В $\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s, r)}$ и, следовательно, для количества гармоник будем иметь оценку

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s &\ll n^d + 2^n n^{-1} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 \|s\|_1} \|A_s(f, x)\|_p \\
&\ll n^d + 2^n n^{-1} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 \|s\|_1} 2^{-(s, r)} \\
&= n^d + 2^n n^{-1} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 \|s\|_1} 2^{-r_1 (s, \gamma)} \\
&\ll n^d + 2^n n^{-1} \sum_{l=n}^{[\alpha n]+1} 2^{r_1 l} \sum_{l \leq (s, \gamma') < l+1} 2^{-r_1 (s, \gamma)} \\
&\ll n^d + 2^n n^{-1} \sum_{l=n}^{[\alpha n]+1} 2^{r_1 l} 2^{-r_1 l} l^{\nu-1} \ll n^d + 2^n n^{-1} n^\nu \\
&\ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M. \tag{2.13'}
\end{aligned}$$

Прежде чем продолжить оценку (2.11), заметим следующее. Может случиться, что $N_s \geq 2^{\|s\|_1}$ для некоторых векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$; тогда в роли полиномов $P(\Omega_{N_s}, x)$ будем выбирать соответствующий “блок” $\delta_s(f, x)$. Это замечание будем учитывать далее и при рассмотрении других случаев.

Таким образом, подставляя значения N_s в (2.11) и учитывая, что $r_1 = \frac{1}{p}$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &\ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\theta}-1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{\|s\|_1(\frac{2}{p}-r_1)} \|A_s(f, x)\|_p \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\theta}-1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{r_1 \|s\|_1} \|A_s(f, x)\|_p \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Далее, повторив те же выкладки, что и при проведении оценок (2.12), (2.13) и (2.13'), приходим к соотношению

$$I_1 \ll 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\theta}-1)} n^{\frac{\nu}{2\theta'}} = 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{\nu}{\theta}} n^{\frac{\nu+1}{2}}. \quad (2.14)$$

Сопоставив (2.14) с (2.10) при $\alpha = \frac{q}{2}(1 + \frac{(\nu-1)\log n}{n})$, видим, что $I_2 < I_1$, и в силу (2.3) приходим к искомой оценке сверху в случае $r_1 = \frac{1}{p}$.

Пусть теперь $r_1 > \frac{1}{p}$. Здесь нам понадобится рассмотреть отдельно случаи $\theta \geq 2$ и $1 \leq \theta < 2$.

Итак, пусть $\theta \geq 2$. Тогда полагаем

$$\alpha = \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) / \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right), \quad (2.15)$$

$$N_s = \left[2^{n(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} 2^{-(s, \gamma)(r_1 - \frac{1}{p})} \right] + 1. \quad (2.16)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s &\ll n^d + 2^{n(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{-(s, \gamma)(r_1 - \frac{1}{p})} \\ &\ll n^d + 2^{n(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} n^{\nu-1} = n^d + 2^n n^{\nu-1} \\ &\ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M. \end{aligned}$$

Подставив в (2.11) вместо N_s их значения из (2.16) и воспользовавшись затем неравенством Гёльдера с показателем $\theta/2$ (с соответствующей модификацией при

$\theta = 2$), получим

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{\frac{2}{p}(s, \gamma)} 2^{(r_1 - \frac{1}{p})(s, \gamma)} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{2(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p^2 2^{-(s, \gamma)(r_1 - \frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\quad \times \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{-(s, \gamma)(r_1 - \frac{1}{p}) \frac{\theta}{\theta - 2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \ll 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \|f\|_{B_{p, \theta}^r} \\
&\quad \times 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(\nu - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \leq 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} n^{(\nu - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Если же $\theta = \infty$, то согласно теореме В будем иметь

$$\begin{aligned}
I_1 &\ll 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{\frac{2}{p}(s, \gamma)} 2^{(r_1 - \frac{1}{p})(s, \gamma)} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{-(r_1 - \frac{1}{p})(s, \gamma)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p})} n^{\frac{\nu - 1}{2}} = 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} n^{\frac{\nu - 1}{2}}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Сопоставив оценки (2.17) и (2.18) с оценкой I_2 (см. (2.10)) при α , определенном в (2.15); видим, что $I_2 < I_1$, и, следовательно, согласно (2.3) будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f(x) - P(\Omega_M, x)\|_q &\ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} n^{(\nu - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \\
&\asymp (M^{-1} \log^{\nu - 1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu - 1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Если же $1 \leq \theta < 2$, то полагаем

$$\alpha = \left(\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) - (\nu - 1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \frac{\log n}{n} \right) / \left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \tag{2.20}$$

и

$$N_s = \left[2^{n(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} n^{(\nu - 1)} 2^{-(s, \gamma)(r_1 - \frac{1}{p})} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right] + 1.$$

В таком случае

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s &\ll n^d + 2^{n(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} n^{\nu - 1} 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p})} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \\
&\leq n^d + 2^n n^{\nu - 1} \|f\|_{B_{p, \theta}^r}^\theta \ll 2^n n^{\nu - 1} \asymp M.
\end{aligned}$$

Подставив в соотношение (2.11) эти значения N_s , получим

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(r_1 + \frac{1}{p})(s, \gamma)} 2^{-(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^{2-\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{-(r_1 - \frac{1}{p})(s, \gamma) \frac{\theta}{2\theta-2}} \right)^{1 - \frac{1}{\theta}} \\
 &\ll 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + 1)} n^{-\frac{\nu-1}{2}} \|f\|_{B_{p, \theta}^r}^{\frac{2-\theta}{2}} 2^{-\frac{n}{2}(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)(1 - \frac{1}{\theta})} \\
 &\leq 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что и в этом случае $I_2 \leq I_1$ при значении α , определенном в (2.20), и поэтому согласно (2.3)

$$\begin{aligned}
 \|f(x) - P(\Omega_M, x)\|_q &\ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \\
 &\asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Теперь перейдем к получению оценки сверху величины $e_M(B_{p, \theta}^r)_q$ в случае $\frac{1}{q} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$. Пусть сначала $\theta > q$. Тогда, положив

$$\alpha = \frac{q}{2} - \left(\frac{q}{2} - 1 \right) (\nu - 1) \frac{\log n}{n}, \quad (2.21)$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
 I_2 &\ll 2^{-\frac{qn}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{\frac{q}{2}(\nu-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})} \\
 &\asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \\
 &= M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta})}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Оценим I_1 . С этой целью положим

$$N_s = [2^n 2^{(s, \tilde{\gamma})(\frac{1}{p} - r_1)} 2^{-\alpha n(\frac{1}{p} - r_1)}] + 1, \quad (2.23)$$

где координаты вектора $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_d)$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma'_1 = \tilde{\gamma}_1 = \dots = \gamma'_\nu = \tilde{\gamma}_\nu, \quad 1 < \tilde{\gamma}_j < \gamma'_j, \quad j = \overline{\nu+1, d}.$$

Воспользовавшись леммой В, получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} N_s &\leq 2^{-\alpha n(\frac{1}{p} - r_1) + n} \sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, \tilde{\gamma})(\frac{1}{p} - r_1)} + n^d \\
 &\ll 2^{-\alpha n(\frac{1}{p} - r_1) + n} 2^{\alpha n(\frac{1}{p} - r_1)} n^{\nu-1} + n^d \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M.
 \end{aligned}$$

Таким образом, подставив в (2.11) N_s , определенные соотношением (2.23), и α , определенное равенством (2.21), будем иметь при $q < \theta < \infty$

$$\begin{aligned}
I_1 &\ll 2^{\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)-\frac{n}{2}} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, \tilde{\gamma})(\frac{1}{p}+r_1)} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll 2^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{2(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p^2 2^{-(s, \tilde{\gamma})(-\frac{1}{p}+r_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\quad \times \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{-(s, \tilde{\gamma})(-\frac{1}{p}+r_1)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \\
&\leq 2^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} \|f\|_{B_{p, \theta}^r} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, \tilde{\gamma})(\frac{1}{p}-r_1)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \\
&\ll 2^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} 2^{\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \\
&= 2^{-\frac{n}{2}+\alpha n(\frac{1}{p}-r_1)} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \\
&\leq 2^{-\frac{n}{2}+\frac{qn}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} n^{-(\nu-1)(\frac{q}{2}-1)(\frac{1}{p}-r_1)} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \\
&\asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{q'}{q\theta'})}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Если $\theta = \infty$, то согласно теореме В для $f \in B_{p, \infty}^r$ имеем $\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s, r)}$ и тогда вследствие (2.11)

$$\begin{aligned}
I_1 &\ll 2^{\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)-\frac{n}{2}} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, \tilde{\gamma})(r_1+\frac{1}{p})} 2^{-(s, \tilde{\gamma})2r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < \alpha n} 2^{(s, \tilde{\gamma})(\frac{1}{p}-r_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll 2^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} 2^{\frac{\alpha n}{2}(\frac{1}{p}-r_1)} n^{\frac{\nu-1}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}+\alpha n(\frac{1}{p}-r_1)} n^{\frac{\nu-1}{2}} \\
&\asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{q'}{q})}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Таким образом, подставив оценки (2.24), (2.25) и (2.22) в (2.3), приходим к искомой оценке сверху $e_M(B_{p, \theta}^r)_q$ в случае $\theta > q$.

Для завершения оценок сверху осталось рассмотреть случай $1 \leq \theta < q$. По заданному M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и определим числа

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2} - 1 \right) (\nu - 1) \log n, \\
n_2 &= \frac{q}{2}n + \frac{q}{2} (\nu - 1) \log n.
\end{aligned}$$

Функцию $f \in B_{p,\theta}^r$ представим в виде

$$f(x) = \left(\sum_{(s,\gamma) < n} + \sum_{n \leq (s,\gamma) < n_1} + \sum_{n_1 \leq (s,\gamma) < n_2} + \sum_{(s,\gamma) \geq n_2} \right) \delta_s(f, x) \quad (2.26)$$

и заметим, что согласно теореме Литтлвуда–Пэли каждое слагаемое в (2.26), с соответствующими постоянными, принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$.

Приближающий полином $P(\Omega_M, x)$ для $f \in B_{p,\theta}^r$ будем подбирать в виде

$$P(\Omega_M, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \leq (s,\gamma) < n_1} P_1(\Omega_{N_s}, x) + \sum_{n_1 \leq (s,\gamma) < n_2} P_2(\Omega_{M_s}, x), \quad (2.27)$$

где $P_1(\Omega_{N_s}, x)$ и $P_2(\Omega_{M_s}, x)$ – полиномы, которые будут сконструированы в процессе установления оценки.

Итак, предположим, что искомый полином $P(\Omega_M, x)$ построен. Тогда согласно (2.26) и (2.27) можем записать

$$\begin{aligned} \|f(x) - P(\Omega_M, x)\|_q &\leq \left\| \sum_{n \leq (s,\gamma) < n_1} (\delta_s(f, x) - P_1(\Omega_{N_s}, x)) \right\|_q \\ &\quad + \left\| \sum_{n_1 \leq (s,\gamma) < n_2} (\delta_s(f, x) - P_2(\Omega_{M_s}, x)) \right\|_q \\ &\quad + \left\| \sum_{(s,\gamma) \geq n_2} \delta_s(f, x) \right\|_q = I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Проведем оценки каждого из полученных слагаемых.

Повторив те же рассуждения, что и при оценке I_1 , получим

$$I_4 \ll \left(\sum_{n \leq (s,\gamma) < n_1} 2^{\frac{2}{p}\|s\|_1} N_s^{-1} \|A_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Числа N_s выберем следующим образом:

$$N_s = \left[2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - \frac{1}{p})} 2^{(s,\gamma')(\frac{1}{p} - r_1)} 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_p n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \right] + 1.$$

Тогда согласно неравенству Гёльдера (с естественной модификацией при $\theta = 1$) и

лемме В будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq (s, \gamma) < n_1} N_s &\ll n_1^d + 2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - \frac{1}{p})} n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \\
&\times \sum_{n \leq (s, \gamma) < n_1} 2^{(s, \gamma')(\frac{1}{p} - r_1)} 2^{(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p \\
&\leq n_1^d + 2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - \frac{1}{p})} n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma') < n_1} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\times \left(\sum_{n \leq (s, \gamma) < n_1} 2^{(s, \gamma')(\frac{1}{p} - r_1)\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \\
&\ll n_1^d + 2^n n^{\nu-1} 2^{n_1(r_1 - \frac{1}{p})} n_1^{-\frac{\nu-1}{\theta'}} \|f\|_{B_{p, \theta}^r} 2^{n_1(\frac{1}{p} - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{\theta'}} \\
&\ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M.
\end{aligned}$$

Теперь, подставив в (2.29) эти значения N_s и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\begin{aligned}
I_4 &\ll 2^{-\frac{n}{2}} n_1^{-\frac{\nu-1}{2}} 2^{\frac{n_1}{2}(\frac{1}{p} - r_1)} n_1^{\frac{\nu-1}{2\theta'}} \left(\sum_{n \leq (s, \gamma) < n_1} 2^{(s, r)} \|A_s(f, x)\|_p 2^{(s, \gamma')(\frac{1}{p} - r_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll 2^{\frac{n_1}{2}(\frac{1}{p} - r_1) - \frac{n}{2}} n_1^{\frac{\nu-1}{2}(\frac{1}{\theta'} - 1)} \asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Переходя к оценке I_5 , проделаем следующую процедуру. Каждому $l \in \mathbb{N}$, $n_1 \leq l < n_2$, поставим в соответствие числа

$$S_l = \left(\sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{2.31}$$

$$m_l = \left[2^{-l\frac{q'}{q}} S_l^\theta 2^{n\frac{q'}{2}} n^{(\nu-1)\frac{q'}{2}} \right]. \tag{2.32}$$

Пусть

$$\sum_{n_1 \leq (s, \gamma) < n_2} \delta_s(f, x) = \sum_{n_1 \leq l < n_2} \left(\sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \delta_s(f, x) + \sum''_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \right), \tag{2.33}$$

где первая сумма внутри скобок содержит m_l блоков $\delta_s(f, x)$ по тем $s = (s_1, \dots, s_d)$, которым соответствуют наибольшие значения $\|A_s(f, x)\|_p$, а вторая – остальные. Приближающие полиномы $P_2(\Omega_{M_s}, x)$ будем строить согласно лемме 2.1 только для тех блоков $\delta_s(f, x)$, которые попали в первую сумму.

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned}
 I_5 &\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{\|s\|_1} M_s^{-1} \|\delta_s(f, x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \sum_{l=n_1}^{n_2} \sum''_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \right\|_q \\
 &\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^l \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} M_s^{-1} \|A_s(f, x)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \sum_{l=n_1}^{n_2} \sum''_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \right\|_q \\
 &= \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Оценим слагаемое $\mathcal{J}_1$, предположив сначала, что $r_1 \geq \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$. Для каждого вектора $s = (s_1, \dots, s_d)$, $l \leq (s, \gamma) < l+1$, $n_1 \leq l < n_2$, положим

$$M_s = \left[2^{\frac{l}{2}} \|A_s(f, x)\|_2 2^{n_1(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} (2^n n^{\nu-1})^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} \right] + 1. \tag{2.35}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=n_1}^{n_2} \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} M_s &\ll n_2^d + 2^{n_1(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} (2^n n^{\nu-1})^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} \\
 &\quad \times \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{\frac{l}{2}} \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_2.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Далее, принимая во внимание, что во внутренней сумме правой части (2.36) содержится m_l слагаемых, и воспользовавшись неравенством (1.5) и неравенством Гёльдера (с естественной модификацией при $\theta = 1$), получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{\frac{l}{2}} \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_2 &\ll \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l(r_1 - \frac{1}{p})} \left(\sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} m_l^{\frac{1}{\theta'}} \\
 &\leq \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l(r_1 - \frac{1}{p})} S_l m_l^{\frac{1}{\theta'}} \leq 2^{\frac{nq'}{2\theta'}} n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}} \sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-l(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q}{q\theta'})} S_l^\theta \\
 &\leq 2^{\frac{nq'}{2\theta'}} n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}} 2^{-n_1(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \sum_{l=n_1}^{n_2} S_l^\theta \\
 &\leq 2^{-\frac{nq}{2}(r_1 - \frac{1}{p})} n^{(\nu-1)\frac{q'}{2\theta'}} n^{(\nu-1)(\frac{q}{2}-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Подставив (2.37) в (2.36) и выполнив несложные преобразования, приходим к оценке

$$\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} M_s \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Таким образом, подставив M_s , определенные в (2.35), и воспользовавшись оценкой (2.37), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{n_1}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} (2^n n^{\nu-1})^{\frac{q'}{4\theta'} - \frac{1}{2}} \\ &\ll 2^{-\frac{nq}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{q}{2}-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} n^{(\nu-1)(\frac{q'}{\theta'}-1)} \\ &\asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Если же имеет место случай $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, то каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $l \leq (s, \gamma) < l+1$, $n_1 \leq l < n_2$, поставим в соответствие число

$$M_s = \left[2^{\frac{l}{2}} \|A_s(f, x)\|_2 2^{n_2(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} (2^n n^{\nu-1})^{1 - \frac{q'}{2\theta'}} \right] + 1. \quad (2.39)$$

С помощью рассуждений, приводимых при выводе (2.36) и (2.37), убеждаемся в том, что и в данном случае справедливо соотношение

$$\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum'_{l \leq (s, \gamma) < l+1} M_s \ll M.$$

Подставив в выражение для $\mathcal{J}_1$ значения M_s из (2.39) и выполнив ряд преобразований, аналогичных тем, что и в случае $r_1 \geq \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, получим

$$\mathcal{J}_1 \ll M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}(\frac{q'}{\theta'}-1)} \leq M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}. \quad (2.40)$$

Таким образом, объединив (2.38) с (2.40), находим

$$\mathcal{J}_1 \ll M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})_+}. \quad (2.41)$$

Оценим $\mathcal{J}_2$. Здесь мы будем пользоваться леммой А. Занумеруем “блоки” $\delta_s(f, x)$, входящие в $\mathcal{J}_2$, в порядке убывания норм $\|A_s(f, x)\|_p$, обозначив их $a_i(f, l)$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда, принимая во внимание определение S_l (см. (2.31)), можем записать

$$a_i(f, l) \leq i^{-\frac{1}{\theta}} 2^{-lr_1} S_l$$

и, следовательно, в силу леммы А

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{i > m_l} a_i^q(f, l) 2^{l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} \sum_{i > m_l} a_i^\theta(f, l) a_i^{q-\theta}(f, l) 2^{l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})q} \sum_{l \leq (s, \gamma) < l+1} 2^{(s, r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} S_l^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Теперь, подставив вместо m_l их значения из (2.32), получим

$$\mathcal{J}_2 \ll \left(2^{-\frac{nq'}{2} \cdot \frac{q-\theta}{\theta}} n^{-(\nu-1)\frac{q'}{2} \cdot \frac{q-\theta}{\theta}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{l=n_1}^{n_2} 2^{-lq(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} S_l^\theta \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда после несложных преобразований находим

$$\mathcal{J}_2 \ll M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})} \quad (2.42)$$

в случае $r_1 \geq \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$ и

$$\mathcal{J}_2 \ll M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \quad (2.43)$$

в случае $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$. Подставив полученные оценки (2.41)–(2.43) в (2.34), находим

$$I_5 \ll M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})}. \quad (2.44)$$

Наконец, для оценки сверху I_6 , повторив рассуждения, которые использовались при нахождении оценки I_2 , будем иметь

$$I_6 \ll 2^{-n_2(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})} \asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(q-1)(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q\theta'})}. \quad (2.45)$$

Следовательно, подставив (2.45), (2.44) и (2.30) в (2.28), приходим к требуемой оценке сверху $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ и в случае $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$, $1 \leq \theta < q$.

Таким образом, все оценки сверху в теореме доказаны.

При нахождении соответствующих оценок снизу будем пользоваться двойственным соотношением, которое вытекает из более общего результата С. М. Никольского (см., например, [34, с. 25]).

Пусть $f \in L_q(\pi_d)$; тогда

$$e_M(f)_q = \inf_{\Omega_M} \sup_{\substack{P \in L^\perp(\Omega_M) \\ \|P\|_{q'} \leq 1}} \left| \int_{\pi_d} f(x) P(x) dx \right|, \quad (2.46)$$

где $L^\perp(\Omega_M)$ – множество функций, ортогональных подпространству тригонометрических полиномов с “номерами” гармоник из множества Ω_M . Отметим также, что оценки снизу достаточно установить при $\nu = d$.

Итак, рассмотрим последовательно все случаи теоремы.

Пусть $r_1 = \frac{1}{p}$. Тогда по заданному M подберем l из соотношения

$$l = \frac{q}{2} \log M - (q-1)(d-1) \log \log M$$

и рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sum_{(s,1) \leq l} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-1} \cos k_j x_j,$$

где $\rho^+(s_j) = \{k_j : 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}\}$.

Оценим сначала $\|g_1\|_{B_{p,\theta}^r}$ при $1 < p < 2$. С этой целью введем обозначения

$$\begin{aligned}\delta_s^+(g_1, x) &= \prod_{j=1}^d \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-1} \cos k_j x_j, \\ d_s(x) &= \prod_{j=1}^d \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j.\end{aligned}$$

Поскольку $\|d_s(x)\|_p \asymp 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})}$, то согласно неравенству Бернштейна (см., например, [3, с. 14])

$$\|\delta_s^+(g_1, x)\|_p \ll 2^{-(s,1)} \|d_s(x)\|_p \asymp 2^{-(s,1)\frac{1}{p}}. \quad (2.47)$$

Следовательно, принимая во внимание то, что $r_1 = \frac{1}{p}$, будем иметь

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_{(s,1) \leq l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s^+(g_1, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(s,1) \leq l} 2^{(s,1)\frac{\theta}{p}} \|\delta_s^+(g_1, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll \left(\sum_{(s,1) \leq l} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll l^{\frac{d}{\theta}}\end{aligned} \quad (2.48)$$

при $1 \leq \theta < \infty$. Если же $\theta = \infty$, то согласно (2.47)

$$\|g_1\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s^+(g, x)\|_p \ll \sup_s 2^{(s,1)\frac{1}{p}} 2^{-(s,1)\frac{1}{p}} = 1. \quad (2.48')$$

Пусть теперь $p = 1$. Тогда заметим, что $r = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, и рассмотрим функцию

$$F(x) = \sum_{k>0} \prod_{j=1}^d k_j^{-1} \cos k_j x_j.$$

Известно (см., например, [3, с. 39]), что эта функция принадлежит классу bH_1^r , $b > 0$, $r = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, и поэтому согласно теореме В

$$\|A_s(F, x)\|_1 \ll 2^{-(s,1)}.$$

Следовательно, при $r = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ и $1 \leq \theta < \infty$ будем иметь

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{B_{1,\theta}^r} &= \left(\sum_{(s,1) \leq l} 2^{(s,1)\theta} \|A_s(g_1, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(s,1) \leq l} 2^{(s,1)\theta} \|A_s(F, x)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll \left(\sum_{(s,1) \leq l} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll l^{\frac{d}{\theta}}.\end{aligned} \quad (2.49)$$

Аналогично, если $\theta = \infty$, то

$$\|g_1\|_{B_{1,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(g_1, x)\|_1 = \sup_s 2^{(s,1)} \|A_s(F, x)\|_1 \ll \sup_s 2^{(s,1)} 2^{-(s,1)} = 1. \quad (2.49')$$

Из (2.48), (2.48'), (2.49) и (2.49') заключаем, что функция

$$f_1(x) = C_1 l^{-\frac{d}{\theta}} g_1(x), \quad C_1 > 0,$$

принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $r = (\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}) \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < 2$.

Теперь построим функцию $P_1(x)$, которая удовлетворяла бы требованиям, предъявляемым к $P(x)$ из (2.46). Пусть

$$v_1(x) = \sum_{(s,1) \leq l} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j \quad (2.50)$$

и Ω_M – произвольный набор из M векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ с целочисленными координатами. Обозначим через

$$u_1(x) = \sum_{k \in \Omega_M}^* \prod_{j=1}^d \cos k_j x_j$$

функцию, содержащую только те слагаемые из (2.50), которые имеют “номера” из множества Ω_M , и положим $w_1(x) = v_1(x) - u_1(x)$. В таком случае при $1 < q' < 2$ будем иметь

$$\|w_1\|_{q'} \leq \|v_1\|_{q'} + \|u_1\|_2 \leq \|v_1\|_{q'} + \sqrt{M}. \quad (2.51)$$

Далее, воспользовавшись теоремой Литтлвуда–Пэли и неравенством $|a+b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{q'} &\ll \left\| \left(\sum_{(s,1) \leq l} |\delta_s(v_1, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q'} = \left\| \left(\sum_{(s,1) \leq l} |\delta_s^+(v_1, x)|^2 \right)^{\frac{q'}{2}} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \left\| \sum_{(s,1) \leq l} |\delta_s^+(v_1, x)|^{q'} \right\|_1^{\frac{1}{q'}} = \left(\sum_{(s,1) \leq l} \|\delta_s^+(v_1, x)\|_{q'}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\asymp \left(\sum_{(s,1) \leq l} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq 2^{\frac{l}{q}} \left(\sum_{(s,1)=l} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \asymp 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Таким образом, с учетом значения l , из (2.52) и (2.51) приходим к оценке

$$\|w_1\|_{q'} \ll 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + \sqrt{M} \ll 2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}}.$$

Следовательно, функция $P_1(x) = C_2 2^{-\frac{l}{q}} l^{-\frac{d-1}{q'}} w_1(x)$ с некоторой постоянной $C_2 > 0$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к $P(x)$ из соотношения (2.46).

Подставив функции $f_1(x)$ и $P_1(x)$ в (2.46), получим

$$e_M(f_1)_q \gg \left(\sum_{l_1 < (s,1) \leq l} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-1} \right) 2^{-\frac{l}{q}} l^{-\frac{d-1}{q'}} l^{-\frac{d}{\theta}}, \quad (2.53)$$

где l_1 – число, удовлетворяющее условию $2^{l_1} l_1^{d-1} \asymp M$. Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{l_1 < (s,1) \leq l} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-1} &= \sum_{l_1 < (s,1) \leq l} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-1} \asymp \sum_{l_1 < (s,1) \leq l} 1 \\ &= \sum_{i=l_1+1}^l \sum_{(s,1)=i} 1 \asymp \sum_{i=l_1+1}^l i^{d-1} \gg l_1^d, \end{aligned}$$

то согласно (2.53) будем иметь

$$e_M(f_1)_q \gg 2^{-\frac{l}{q}} l^{-\frac{d-1}{q'}} l_1^{\frac{d}{\theta'}} \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log^d M)^{\frac{1}{\theta'}},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $r_1 > \frac{1}{p}$. Заметим, что в этом случае искомую оценку снизу достаточно получить при $q = 2$. По заданному M подберем l таким, чтобы выполнялись соотношения $M \asymp 2^l l^{d-1}$ и $2^l l^{d-1} \geq 2M$, и рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_3 2^{-l(1-\frac{1}{p})} l^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{l \leq (s,1) \leq l+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j, \quad C_3 > 0. \quad (2.54)$$

Пусть сначала $p = 1$. Тогда поскольку функция

$$F_r(x) = \sum_{k > 0} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

принадлежит классу bH_1^r , $b > 0$ (см., например, [3, с. 39]), то согласно теореме В $\|A_s(F_r, x)\|_1 \ll 2^{-(s,r)}$. Воспользовавшись этим неравенством, нетрудно проверить, что функция

$$f_2(x) = C_3 l^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{l \leq (s,1) \leq l+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j, \quad C_3 > 0,$$

принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$.

Если же $p > 1$, то поступим следующим образом. Запишем $f_2(x)$ в виде

$$f_2(x) = C_3 2^{-l(1-\frac{1}{p})} l^{-\frac{d-1}{\theta}} g_l(x), \quad C_3 > 0, \quad (2.55)$$

и для оценки $\|g_l\|_{B_{p,\theta}^r}$ воспользуемся неравенством Бернштейна (см. [3, с. 14]). Поскольку

$$\begin{aligned} \|\delta_s^+(g_l, x)\|_p &= \left\| \prod_{j=1}^d \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-r_1} \cos k_j x_j \right\|_p \ll \prod_{j=1}^d 2^{-s_j r_1} \left\| \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j \right\|_p \\ &\asymp \prod_{j=1}^d 2^{-s_j r_1} 2^{s_j(1-\frac{1}{p})} = 2^{-(s,1)(r_1-1+\frac{1}{p})}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{B_{p,\theta}^r} &\asymp \left(\sum_{l \leq (s,1) \leq l+d} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s^+(g_l, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\ll \left(\sum_{l \leq (s,1) \leq l+d} 2^{(s,1)r_1\theta} 2^{-(s,1)(r_1-1+\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\sum_{l \leq (s,1) \leq l+d} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{l(1-\frac{1}{p})} l^{\frac{d-1}{\theta}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

при $1 \leq \theta < \infty$ и

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{B_{p,\infty}^r} &= \sup_{\substack{s: \\ l \leq (s,1) \leq l+d}} 2^{(s,r)} \|\delta_s^+(g_l, x)\|_p \\ &\ll \sup_{\substack{s: \\ l \leq (s,1) \leq l+d}} 2^{(s,1)r_1} 2^{-(s,1)(r_1-1+\frac{1}{p})} \asymp 2^{l(1-\frac{1}{p})} \end{aligned} \quad (2.57)$$

при $\theta = \infty$.

Таким образом, согласно (2.57) и (2.56) функция $f_2(x)$, определенная равенством (2.55), принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 < p < \infty$.

Представим функцию $P(x)$ из соотношения (2.46) как функцию

$$P_2(x) = C_4 2^{-\frac{l}{2}} l^{-\frac{d-1}{2}} w_1(x), \quad C_4 > 0, \quad (2.58)$$

которая, как легко проверить, при $q = 2$ удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям.

Подставив функции из (2.58) и (2.55) в (2.46), будем иметь

$$\begin{aligned}
e_M(f_2)_2 &\gg 2^{-l(1-\frac{1}{p})} l^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{-\frac{l}{2}} l^{-\frac{d-1}{2}} \left(\sum_{(s,1)=l+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \right) \\
&= 2^{-l(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{-(d-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{(s,1)=l+d} \prod_{j=1}^d \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-r_1} \right) \\
&\gg 2^{-l(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{-(d-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{(s,1)=l+d} \prod_{j=1}^d 2^{s_j(1-r_1)} \right) \\
&\asymp 2^{-l(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{-(d-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta})} \sum_{(s,1)=l+d} 2^{-(s,1)(r_1-1)} \\
&\asymp 2^{-l(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{-(d-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta})} 2^{-l(r_1-1)} l^{d-1} \\
&= 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} l^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует требуемая оценка снизу $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ в случае $r_1 > \frac{1}{p}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось получить оценку снизу $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ в случае $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$.

Аналогично, как и в случае $r_1 = \frac{1}{p}$, будем рассматривать функцию $f_2(x)$ (см. (2.55)), где число l , фигурирующее в ее определении, найдем из соотношения

$$l = \frac{q}{2} \log M - (d-1)(q-1) \log \log M.$$

Тогда, взяв в качестве $P(x)$ функцию

$$P_3(x) = C_5 2^{-\frac{l}{q}} l^{-\frac{d-1}{q'}} w_1(x), \quad C_5 > 0,$$

и воспользовавшись соотношением (2.46), получим

$$\begin{aligned}
e_M(f_2)_q &\gg 2^{-l(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} l^{-(d-1)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'})} \left(\sum_{(s,1)=l+d} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \right) \\
&\gg 2^{-l(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} l^{-(d-1)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'})} 2^{-l(r_1-1)} l^{d-1} \\
&= 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} l^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-\frac{q}{2}(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{(q-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{q'}{q\theta'})}.
\end{aligned}$$

Обратим внимание, что полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху при $r_1 \geq \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$. Если же $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p} - \frac{q'}{q\theta'}$, то заметим следующее. С одной стороны, установленная выше оценка сверху $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ в этом случае не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, значит, требуемую оценку снизу достаточно установить при $d = 1$. С другой стороны, в одномерном случае проведенные выше рассуждения позволяют получить нужную оценку для всех $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Теорема доказана полностью.

Отметим, что при $1 < p \leq 2 < q < \infty$ порядки величин $e_M(H_p^r)_q$ при всех возможных значениях параметра r_1 , а также величин $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, кроме случая $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$, анонсированы в [15]. Порядок $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, при $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$ был установлен в [16]. Точные порядки величин $e_M(H_1^r)_q$ и $e_M(W_{1,\alpha}^r)_q$ при $2 < q < \infty$ легко получить как следствия соответствующих оценок приближений ядер Бернулли $F_r(x, \alpha)$ и тригонометрических поперечников классов H_1^r . Эти результаты также анонсированы в [14].

Теперь перейдем к рассмотрению случая $2 \leq p \leq q < \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $2 \leq p \leq q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда при $r_1 > \frac{1}{2}$ имеет место порядковая оценка

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из теоремы 2.1 при $p = 2$ согласно включению $B_{p,\theta}^r \subset B_{2,\theta}^r$, $p \geq 2$. При нахождении оценки снизу будем пользоваться известным результатом Рудина–Шапиро (см., например, [35, с. 155]): для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется полином

$$R_m(x) = \sum_{j=2^{m-1}}^{2^m-1} \varepsilon_j e^{ijx}, \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

такой, что $\|R_m\|_\infty \ll 2^{\frac{m}{2}}$.

Итак, выберем по заданному M число l таким, чтобы выполнялись соотношения $2^l l^{d-1} \asymp M$, $2^l l^{d-1} \geq 2M$, и рассмотрим функцию

$$f_3(x) = C_6 2^{-l(r_1 + \frac{1}{2})} l^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1) \leq l} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j), \quad C_6 > 0.$$

Поскольку

$$\delta_s(f_3, x) = C_6 2^{-l(r_1 + \frac{1}{2})} l^{-\frac{d-1}{\theta}} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j),$$

то легко убедиться, что функция $f_3(x)$, с соответствующей постоянной $C_6 > 0$, принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Функцию $P_4(x)$, которая удовлетворяла бы требованиям, налагаемым на функцию $P(x)$ из (2.46), построим следующим образом. Пусть

$$v_2(x) = \sum_{(s,1) \leq l} \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j), \quad u_2(x) = \sum_{(s,1) \leq l}^* \prod_{j=1}^d R_{s_j}(x_j),$$

где “звездочка” означает, что полином $u_2(x)$ содержит только те гармоники функции $v_2(x)$, которые имеют “номера” из множества Ω_M . Тогда, обозначив $w_2(x) = v_2(x) - u_2(x)$, будем иметь

$$\|w_2\|_{q'} \leq \|w_2\|_2 \leq \|v_2\|_2 + \|u_2\|_2 \ll 2^{\frac{l}{2}} l^{\frac{d-1}{2}}.$$

Из этого соотношения заключаем, что функция

$$P_4(x) = C_7 2^{-\frac{l}{2}} l^{-\frac{d-1}{2}} w_2(x), \quad C_7 > 0,$$

удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям. Таким образом, подставив $f_3(x)$ и $P_4(x)$ в (2.46), будем иметь

$$\begin{aligned} e_M(f_3)_q &\gg 2^{-l(r_1+1)} l^{-(d-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta})} (2^l l^{d-1} - M) \\ &\gg 2^{-l(r_1+1)} l^{-(d-1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{\theta})} 2^l l^{d-1} = 2^{-lr_1} l^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

Отметим, что с помощью аналогичных рассуждений нетрудно показать, что для классов $W_{p,\alpha}^r$ имеет место соотношение

$$e_M(W_{p,\alpha}^r)_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}$$

при $r_1 > \frac{1}{2}$, $2 \leq p \leq q < \infty$.

§ 3. Порядки $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ при $1 \leq p \leq q \leq 2$, $(p, q) \neq (1, 1)$ и $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq 2$, $(p, q) \neq (1, 1)$, и $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тогда при $1 \leq \theta \leq \infty$

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим в (3.1) оценку сверху в случае $1 \leq p < q \leq 2$. Покажем, что если $\theta \geq q$, то требуемая оценка следует из оценки приближения функций $f(x)$ из класса $B_{p,\theta}^r$ их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье

$$S_n^\gamma(f, x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x), \quad M \asymp 2^n n^{\nu-1}.$$

Действительно, пусть q_0 – произвольное число, удовлетворяющее условию $p < q_0 < q$. В таком случае, согласно лемме А и теореме Б, для $f \in B_{p,\theta}^r$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_q &= \left\| \sum_{(s,\gamma) \geq n} \delta_s(f, x) \right\|_q \\ &\ll \left\{ \sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|\delta_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\asymp \left\{ \sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|A_s(f, x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\{ \sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(\|A_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть $q < \theta < \infty$. Тогда, применив к последней сумме неравенство Гёльдера с показателем θ/q , продолжим оценку (3.2):

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-((s,r) - \|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-(s, r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-(s, \bar{\gamma})(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ – вектор с координатами $r_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $j = \overline{1, d}$, а $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_d)$ – вектор с координатами $\bar{\gamma}_j = (r_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) / (r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})$, $j = \overline{1, d}$.

Поскольку $\bar{\gamma}_j = \gamma_j$, $j = \overline{1, \nu}$, и $\gamma_j < \bar{\gamma}_j$, $j = \overline{\nu + 1, d}$, то, воспользовавшись для оценки последней суммы в (3.3) соотношением (1.3), получим

$$\|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_q \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})}.$$

Отсюда в силу того, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, будем иметь при $q < \theta < \infty$

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \ll M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

Из (3.2) также легко получить нужную оценку и при $\theta = q$:

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \ll M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

Если же $\theta = \infty$, то $\|A_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s,r)}$, и, следовательно, из оценки (3.2) находим

$$\begin{aligned} e_M(B_{p,\theta}^r)_q &\ll \left\{ \sum_{(s,\gamma) \geq n} \left(2^{-(s,r)} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-(s, r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n} 2^{-(s, \bar{\gamma})(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{\frac{\nu-1}{q}} \asymp M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q}}. \end{aligned}$$

Теперь остановимся на получении оценки сверху величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ в случае $1 \leq \theta < q$. Построим для $f \in B_{p,\theta}^r$ приближающий полином $P(\Omega_M, x)$, который доставляет требуемую оценку приближения. Пусть n удовлетворяет соотношению $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и $n_0 = n + (\nu - 1) \log n$. Полином $P(\Omega_M, x)$ будем строить в виде

$$P(\Omega_M, x) = R(x) + Q(x),$$

где $R(x) = \sum_{(s,\gamma) < n} A_s(f, x)$, а слагаемое $Q(x)$ построим в процессе нахождения оценки.

Для натурального l по-прежнему положим

$$S_l = \left(\sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \|A_s(f, x)\|_p^\theta 2^{(s,r)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

и пусть $m_l^* = \lceil 2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^\theta \rceil + 1$. Рассмотрим полином

$$R^*(x) = \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} A_s(f, x) \quad (3.4)$$

и каждому $l \in [n, n_0]$, $l \in \mathbb{N}$, сопоставим из внутренней суммы (3.4) m_l^* “блоков” $A_s(f, x)$ с наибольшими значениями $\|A_s(f, x)\|_p$. Расположим эти значения в порядке убывания и обозначим их $\alpha_i(f, l)$, $i = \overline{1, m_l^*}$. Совокупность таким образом полученных “блоков” $A_s(f, x)$ по всем $l \in [n, n_0]$, $l \in \mathbb{N}$, обозначим $Q(x)$.

Покажем, что количество гармоник K , которые образуют полином $P(\Omega_M, x)$, не превышает по порядку M . Действительно,

$$\begin{aligned} K &\ll 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^l m_l^* \\ &\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \\ &\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^\theta = 2^n n^{\nu-1} (1 + \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^\theta) \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M. \end{aligned}$$

Получим теперь оценку сверху для $\|f(x) - P(\Omega_M, x)\|_q$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f(x) - P(\Omega_M, x)\|_q &= \|f(x) - R(x) - Q(x)\|_q \\ &= \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma) < n_0} A_s(f, x) + R^*(x) - Q(x) \right\|_q \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma) < n_0} A_s(f, x) \right\|_q + \|R^*(x) - Q(x)\|_q = I_7 + I_8. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее, согласно лемме А и теореме Б, имеем

$$\begin{aligned}
 I_7 &\ll \left\{ \sum_{(s,\gamma) \geq n_0} \left(\|A_s(f, x)\|_p 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n_0} \|A_s(f, x)\|_p^{\theta} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
 &\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n_0} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^{\theta} 2^{-(s,\gamma)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
 &\leq 2^{-n_0(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \leq 2^{-n_0(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $n_0 = n + (\nu - 1) \log n$, из (3.6) получаем оценку

$$I_7 \ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} n^{-(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{3.7}$$

Оценим I_8 . Согласно лемме А и принятым обозначениям имеем

$$\begin{aligned}
 I_8 &\ll \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i>m_l^*} \alpha_i^q(f, l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i>m_l^*} \alpha_i^{\theta}(f, l) \alpha_i^{q-\theta}(f, l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\ll \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} m_l^{*- \frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{-l\theta r_1} 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \right. \\
 &\quad \times \left. \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\ll \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} m_l^{*- \frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q} S_l^{q-\theta} S_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} m_l^{*- \frac{q-\theta}{\theta}} 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q} S_l^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Подставив вместо m_l^* их значения, продолжим оценку (3.8):

$$\begin{aligned}
 &\ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} S_l^{\theta} 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q} 2^{lq(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lq(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} S_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} = (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} I_9. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

При последующей оценке I_9 будем рассматривать два случая.

Пусть $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$. Тогда

$$\begin{aligned} I_9 &\leq 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} S_l^\theta \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^{\frac{\theta}{q}} \leq 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.9), получим

$$I_8 \ll 2^{-n(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} n^{(\nu-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})} \asymp M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta}}. \quad (3.11)$$

В случае $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 \leq \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$ будем иметь

$$I_9 \ll 2^{-n_0(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^{\frac{\theta}{q}} \leq 2^{-n_0(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})},$$

и согласно (3.9)

$$I_8 \ll M^{-(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}. \quad (3.12)$$

Таким образом, принимая во внимание оценки (3.12), (3.11) и (3.7) и воспользовавшись (3.5), приходим к искомой оценке сверху величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ и в случае $1 \leq \theta < q$.

Для завершения оценки сверху осталось рассмотреть случай $1 < p = q \leq 2$. Отметим, что при этом, с незначительными изменениями, используется та же схема рассуждений, что и при $1 < p < q \leq 2$.

Пусть $p \leq \theta \leq \infty$. Рассмотрим приближение $f \in B_{p,\theta}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^{\gamma'}(f, x) = \sum_{(s, \gamma') < n} \delta_s(f, x)$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_p &\ll \left\| \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} \|\delta_s(f, x)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Предположим, что $p < \theta < \infty$. Тогда, применив к последней сумме в (3.13) неравенство Гёльдера с показателем θ/p , продолжим оценку:

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-p(s, r)\frac{\theta}{\theta-p}} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^r} 2^{-r_1 n} n^{(\nu-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \leq 2^{-r_1 n} n^{(\nu-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_p \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}}.$$

Из (3.13) легко получить требуемую оценку и при $\theta = p$:

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_p \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Если же $\theta = \infty$, то, принимая во внимание, что в таком случае для $f \in B_{p,\infty}^r$ имеем $\|\delta_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s,r)}$, из (3.13) находим

$$\begin{aligned} e_M(f)_p &\ll \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_p \ll \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-p(s,r)} \right)^{\frac{1}{p}} \ll 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{p}} \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Требуемые оценки сверху в случае $p \leq \theta \leq \infty$ установлены.

Рассмотрим случай $1 \leq \theta < p$. Пусть $f \in B_{p,\theta}^r$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ и $n_0 = n + (\nu - 1) \log n$. Положим

$$P_1(\Omega_M, x) = R_1(x) + Q_1(x),$$

где $R_1(x) = \sum_{(s,\gamma) < n} \delta_s(f, x)$, а $Q_1(x)$ построим по той же схеме, что и $Q(x)$. Для натурального l положим

$$\tilde{S}_l = \left(\sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \|\delta_s(f, x)\|_p^{\theta} 2^{(s,r)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

и пусть $\tilde{m}_l = \lfloor 2^n n^{\nu-1} 2^{-l} \tilde{S}_l^{\theta} \rfloor + 1$. Рассмотрим полином

$$R_1^*(x) = \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} \delta_s(f, x) \quad (3.14)$$

и каждому $l \in [n, n_0)$, $l \in \mathbb{N}$, сопоставим из внутренней суммы (3.14) $\tilde{m}_l$ “блоков” $\delta_s(f, x)$ с наибольшими значениями $\|\delta_s(f, x)\|_p$. Эти значения для каждого $l \in [n, n_0)$, $l \in \mathbb{N}$, упорядочим в порядке убывания и обозначим $\tilde{\alpha}_i(f, l)$, $i = \overline{1, \tilde{m}_l}$. Совокупность таким образом полученных “блоков” $\delta_s(f, x)$ образует некоторый полином, который и обозначим $Q_1(x)$. Нетрудно проверить, что количество гармоник в полиноме $P_1(\Omega_M, x)$ в таком случае не превышает по порядку M .

Таким образом, для $f \in B_{p,\theta}^r$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|f(x) - P_1(\Omega_M, x)\|_p &\leq \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma) < n_0} \delta_s(f, x) \right\|_p \\ &\quad + \|R_1^*(x) - Q_1(x)\|_p = I_{10} + I_{11}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применив для оценки I_{10} теорему Литтлвуда–Пэли и воспользовавшись соотношением (2.5), получим

$$\begin{aligned}
I_{10} &\ll \left\| \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n_0} |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \ll \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n_0} \|\delta_s(f, x)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n_0} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \sup_{(s,\gamma) \geq n_0} 2^{-(s,r)} \left(\sum_{(s,\gamma) \geq n_0} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&\ll 2^{-n_0 r_1} \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \leq 2^{-n_0 r_1} \leq 2^{-n r_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Переходя к оценке I_{11} , обозначим через $\mathcal{D}_f$ множество векторов $s = (s_1, \dots, s_d)$, по которым “блоки” $\delta_s(f, x)$ содержатся в $R_1^*(x) - Q_1(x)$. Тогда согласно теореме Литтлвуда–Пэли и определению множества $\mathcal{D}_f$ будем иметь

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \left\| \sum_{s \in \mathcal{D}_f} \delta_s(f, x) \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathcal{D}_f} |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq \left(\sum_{s \in \mathcal{D}_f} \|\delta_s(f, x)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > \tilde{m}_l} \tilde{\alpha}_i^p(f, l) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Поскольку в силу определения чисел $\tilde{\alpha}_i(f, l)$ имеет место неравенство

$$\tilde{\alpha}_i(f, l) \leq i^{-\frac{1}{\theta}} 2^{-l r_1} \tilde{S}_l,$$

то из (3.17) находим

$$\begin{aligned}
I_{11} &\ll \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > \tilde{m}_l} \tilde{\alpha}_i^\theta(f, l) \tilde{\alpha}_i^{p-\theta}(f, l) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \tilde{m}_l^{-\frac{p-\theta}{\theta}} 2^{-l(p-\theta)r_1} \tilde{S}_l^{p-\theta} 2^{-l\theta r_1} \sum_{l \leq (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \tilde{m}_l^{-\frac{p-\theta}{\theta}} 2^{-l p r_1} \tilde{S}_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-pl(r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \tilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $r_1 \geq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$. Тогда из (3.18) имеем

$$\begin{aligned}
I_{11} &\ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}} 2^{-n(r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \tilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\ll 2^{-n r_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \|f\|_{B_{p,\theta}^r}^{\frac{\theta}{p}} \leq 2^{-n r_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \\
&\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Если же $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, то из (3.18) находим

$$I_{11} \ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}} 2^{-n_0(r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \tilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{-nr_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}. \quad (3.20)$$

Сопоставив (3.20), (3.19) и (3.16) и воспользовавшись (3.15), приходим к искомой оценке. Оценка сверху из формулировки теоремы полностью доказана.

При доказательстве оценки снизу будем пользоваться методом, который применялся В. Н. Темляковым при установлении оценки снизу величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < p \leq q \leq 2$ (см., например, [3, с. 94]). Мы также сначала рассмотрим случай $1 < p \leq q \leq 2$.

Итак, по заданному M подберем $n \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялись соотношения $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $2^n n^{d-1} \geq 4M$, и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f_4(x) &= C_8 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} \\ &\stackrel{\text{df}}{=} C_8 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \tilde{d}_n(x), \quad C_8 > 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $f_4 \in B_{p,\theta}^r$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|f_4\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f_4, x)\|_\theta^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(\tilde{d}_n, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} \|\delta_s(\tilde{d}_n, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\asymp 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} = n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1. \end{aligned}$$

Далее, пусть по-прежнему Ω_M обозначает некоторое множество из M d -мерных векторов $\{k^1, \dots, k^M\}$ с целочисленными координатами. Для каждого вектора s , $(s, 1) = n$, рассмотрим множества $\Omega_M \cap \rho(s)$. Тогда в силу выбора числа n множество S векторов s таких, что $(s, 1) = n$ и $|\Omega_M \cap \rho(s)| \leq \frac{1}{2} |\rho(s)|$, будет содержать по крайней мере половину всех s таких, что $\|s\|_1 = n$, и, следовательно, $|S| \asymp n^{d-1}$. Пусть далее $t(x)$ обозначает произвольный полином с “номерами”

гармоник из Ω_M . Тогда согласно лемме Γ будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f_4 - t\|_q &\gg \left(\sum_{(s,1)=n} \|\delta_s(f_4 - t, x)\|_2^q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\gg \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f_4 - t, x)\|_2^q \right)^{\frac{1}{q}} 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \\
&\gg |S|^{\frac{1}{q}} 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} 2^{\frac{n}{2}} \\
&= 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \\
&\asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ в случае $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$. Если же $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 \leq \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, то необходимая оценка снизу следует из одномерного случая.

В завершение осталось рассмотреть случай $p = 1$, $1 < q \leq 2$. Пусть числа M и n имеют прежний смысл. Рассмотрим функцию

$$f_5(x) = C_9 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(s,1)=n} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_1} \cos k_j x_j, \quad C_9 > 0.$$

Аналогично тому, как было показано выше для функции $f_2(x)$ (см. (2.54)), нетрудно проверить, что и функция $f_5(x)$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$. Тогда в силу леммы Γ будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f_5 - t\|_q &\gg \left(\sum_{(s,1)=n} \|\delta_s(f_5 - t, x)\|_2^q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\gg \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s(f_5 - t, x)\|_2^q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Далее, поскольку для каждого $s \in S$

$$\|\delta_s(f_5 - t, x)\|_2 \gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} \prod_{j=1}^d 2^{-s_j r_1} 2^{\frac{s_j}{2}} = 2^{-(s,1)(r_1-\frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}},$$

то из (3.21) находим

$$\begin{aligned}
\|f_5 - t\|_q &\gg \left(\sum_{s \in S} 2^{-\|s\|_1(r_1-1+\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \\
&\asymp 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} \left(\sum_{s \in S} 1 \right)^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp 2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \\
&\asymp M^{-(r_1-1+\frac{1}{q})} (\log^{d-1} M)^{r_1-1+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

Оценки снизу, а вместе с ними и теорема доказаны.

Отметим следующее. Точные порядки величин $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < p \leq q \leq 2$, $r_1 > 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, и $e_M(H_p^r)_q$, $1 < p \leq q \leq 2$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, были установлены В. Н. Темляковым (см., например, [3, с. 92]). Затем Э. С. Белинский [16] получил оценку сверху величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < p \leq q \leq 2$, и в случае $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 \leq 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, которая в сочетании с оценкой снизу, установленной ранее В. Н. Темляковым, дала возможность получить точный порядок $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < p \leq q \leq 2$, для всех $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Порядки величин $e_M(W_{1,\alpha}^r)_q$ и $e_M(H_1^r)_q$, $1 < q \leq 2$, следуют из соответствующих оценок M -членных приближений ядер Бернулли $F_r(x, \alpha)$ (см. [14]) и оценок приближения классов H_1^r ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье [3, с. 35].

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$, $r_1 > 0$. Тогда при $1 \leq \theta \leq \infty$ справедлива оценка

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ при $q \leq p$, то оценка сверху величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ сводится к оценке сверху $e_M(B_{p,\theta}^r)_p$, $2 \leq p < \infty$.

Пусть $f \in B_{p,\theta}^r$ и $2 < \theta < \infty$. Тогда в силу теоремы Литтлвуда–Пэли, неравенства Минковского и неравенства Гёльдера будем иметь при $M \asymp 2^n n^{d-1}$

$$\begin{aligned} e_M(f)_p &\ll \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_p = \left\| \sum_{(s,\gamma') \geq n} \delta_s(f, x) \right\|_p \\ &\ll \left\| \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} |\delta_s(f, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = \left(\left\| \sum_{(s,\gamma') \geq n} |\delta_s(f, x)|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} \|\delta_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{2(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-2(s,r)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\theta}^r} \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-2(s,r)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \\ &\leq \left(\sum_{(s,\gamma') \geq n} 2^{-2r_1(s,\gamma)\frac{\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Также нетрудно убедиться в том, что при $\theta = 2$

$$e_M(f)_p \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{3.22'}$$

В случае $\theta = \infty$, учитывая, что $\|\delta_s(f, x)\|_p \ll 2^{-(s,r)}$, получим

$$\begin{aligned} e_M(f)_q &\leq \|f(x) - S_n^{\gamma'}(f, x)\|_p \ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} \|\delta_s(f, x)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-2(s,r)} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 2^{-nr_1} n^{\frac{\nu-1}{2}} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Таким образом, из (3.22), (3.22') и (3.23) получаем требуемые оценки сверху величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_p$ в случае $2 \leq \theta \leq \infty$.

Пусть теперь $1 \leq \theta < 2$. Тогда, проведя рассуждения, аналогичные изложенным выше для случая $1 < p = q \leq 2$, $1 \leq \theta < p$, получим следующие оценки для I_{10} и I_{11} :

$$I_{10} \ll M^{-r_1}, \quad (3.24)$$

$$I_{11} \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}. \quad (3.25)$$

Воспользовавшись соотношением (3.18), из (3.24) и (3.25) приходим к искомой оценке и в случае $1 \leq \theta < 2$.

При доказательстве оценки снизу мы будем использовать схему рассуждений, которая применялась Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым в [18] при нахождении оценки снизу величины $e_M(W_{p,\alpha}^r)_q$, $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$. Заметим также, что при этом достаточно ограничиться случаем $1 < q < 2$.

Приведем необходимые обозначения и определения.

Для вектора $s = (s_1, \dots, s_d)$, s_j – четные числа, $s_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, по-прежнему будем обозначать

$$\rho^+(s) = \{k: 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, \quad k_j \in \mathbb{N}\}$$

и для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$B_n = \left\{ s: (s, 1) = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}, \quad \overline{Q}'_n = \bigcup_{s \in B_n} \rho^+(s).$$

Пусть $\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)$ – множество полиномов вида $t(x) = \sum_{|k| \in \overline{Q}'_n} c_k e^{i(k,x)}$, где $|k| = (|k_1|, \dots, |k_d|)$. Наряду с нормой пространства L_q будем рассматривать норму пространства $B_{q,\theta}^0$, которую для тригонометрических полиномов $t(x) \in \mathcal{T}(\overline{Q}'_n)$ определим формулой

$$\|t\|_{B_{q,\theta}^0} = \left(\sum_{s \in B_n} \|A_s(t, x)\|_q^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad 1 \leq \theta \leq \infty,$$

с естественной модификацией определения при $\theta = \infty$. Аналогичным образом определяется $\|f\|_{B_{q,\theta}^0}$ для функций $f(x)$ из $L_q(\pi_d)$ при условии сходимости ряда $\sum_s \|A_s(f, x)\|_q^\theta$. Отметим, что если $1 < q < \infty$, то

$$\|f\|_{B_{q,\theta}^0} \asymp \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|_q^\theta \right)^{1/\theta}.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – система функций из пространства $L_q(\mathcal{D})$. Для $f \in L_q(\mathcal{D})$ положим

$$e_M(f, \Phi)_q = \inf_{\substack{\{n_i\}=\Lambda \subset \mathbb{Z}_+, |\Lambda|=M \\ \{c_i\} \in \mathbb{R}^M}} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^M c_i \varphi_{n_i}(x) \right\|_{L_q(\mathcal{D})}.$$

Если F – некоторый класс функций из $L_q(\mathcal{D})$, то полагаем

$$e_M(F, \Phi)_q = \sup_{f \in F} e_M(f, \Phi)_q.$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА Г [18]. *Существует постоянная $C(d) > 0$ такая, что для любого набора функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^l \subset B_{1,1}^0$, $l < C' |\overline{Q}'_n|$, справедлива оценка*

$$e_M(\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty,\infty}^0}, \Phi)_{B_{1,1}^0} \geq C_1 n^{d-1}, \quad C_1 = C_1(d, C') > 0,$$

для всех $M \leq C(d) |\overline{Q}'_n|$.

Теперь перейдем непосредственно к установлению оценки снизу в нашей теореме. По заданному M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{d-1}$, и пусть $P_{\overline{Q}'_n}$ – оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)$. Как следует из теоремы Литтлвуда–Пэли (см., например, [3, с. 7]), этот оператор ограничен как оператор, действующий из L_q в L_q при $q \in (1, \infty)$, и, таким образом, для тригонометрической системы $T = \{e^{i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ справедливо соотношение

$$e_M(\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty,\infty}^0}, T)_q \gg e_M(\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty,\infty}^0}, \{e^{i(k,x)}\}_{k \in \overline{Q}'_n})_q. \quad (3.26)$$

Далее, поскольку для $t(x) \in \mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty,\infty}^0}$

$$\begin{aligned} \|t\|_{B_{\infty,\theta}^r} &= \left(\sum_{s \in B_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(t, x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\leq 2^{nr_1} \max_{s \in B_n} \|A_s(t, x)\|_\infty \left(\sum_{s \in B_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{nr_1} \|t\|_{B_{\infty,\infty}^0} n^{\frac{d-1}{\theta}}, \end{aligned}$$

то отсюда заключаем, что существует постоянная $C_{10} > 0$ такая, что

$$C_{10} 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty,\infty}^0} \subset B_{\infty,\theta}^r \cap \mathcal{T}(\overline{Q}'_n). \quad (3.27)$$

Из (3.26) и (3.27) находим

$$\begin{aligned} e_M(B_{\infty, \theta}^r)_q &\geq e_M(B_{\infty, \theta}^r \cap \mathcal{T}(\overline{Q}'_n))_q \\ &\gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} e_M(\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty, \infty}^0}, \{e^{i(k, x)}\}_{k \in \overline{Q}'_n})_q. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Теперь запишем соотношение между нормами полиномов из $\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)$ в пространствах L_q при $1 < q \leq 2$ и $B_{1,1}^0$. С одной стороны, для $t \in \mathcal{T}(\overline{Q}'_n)$ (см. [18])

$$\|t\|_q \gg \left(\sum_{s \in B_n} \|\delta_s(t, x)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \gg \|t\|_{B_{q,2}^0}, \quad (3.29)$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} \|t\|_{B_{1,1}^0} &\asymp \sum_{s \in B_n} \|A_s(t, x)\|_1 \leq \left(\sum_{s \in B_n} \|A_s(t, x)\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s \in B_n} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \|t\|_{B_{1,2}^0} n^{\frac{d-1}{2}} \leq \|t\|_{B_{q,2}^0} n^{\frac{d-1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Сопоставив (3.29) и (3.30), получаем

$$\|t\|_q \gg n^{-\frac{d-1}{2}} \|t\|_{B_{1,1}^0}. \quad (3.31)$$

Таким образом, согласно (3.31) из (3.28) приходим к оценке

$$e_M(B_{\infty, \theta}^r)_q \gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{\theta})} e_M(\mathcal{T}(\overline{Q}'_n)_{B_{\infty, \infty}^0}, \{e^{i(k, x)}\}_{k \in \overline{Q}'_n})_{B_{1,1}^0}. \quad (3.32)$$

Применив к (3.32) теорему Г при $\Phi = \{e^{i(k, x)}\}_{k \in \overline{Q}'_n}$ и $l = |\overline{Q}'_n|$, находим

$$e_M(B_{\infty, \theta}^r)_q \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}}. \quad (3.33)$$

Наконец, принимая во внимание, что $B_{\infty, \theta}^r \subset B_{p, \theta}^r$ при $1 \leq p < \infty$, из (3.33) получаем оценку

$$e_M(B_{p, \theta}^r)_q \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}},$$

которая совпадает по порядку с оценкой сверху в случае $r_1 \geq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$. Если же $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, то искомая оценка следует из одномерного случая. Теорема доказана.

В заключение отметим, что порядки величин $e_M(W_{p, \alpha}^r)_q$ и $e_M(H_p^r)_q$, $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, известны. Оценки снизу этих величин установлены в [18, с. 74]. Соответствующие оценки сверху являются следствием оценок приближения классов $W_{p, \alpha}^r$ и H_p^r ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье, которые получены соответственно в [36] и [37].

Обратим также внимание, что величины $e_M(B_{p, \theta}^r)_q$, $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$, в случае $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$ и $\nu > 1$ убывают при $M \rightarrow \infty$ существенно быстрее наилучших приближений классов $B_{p, \theta}^r$ тригонометрическими полиномами с “номера́ми” гармоник из соответствующих гиперболических крестов [38].

Список литературы

1. Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // ДАН СССР. 1959. Т. 126. №6. С. 1163–1165.
2. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
3. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
4. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
5. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // ДАН СССР. 1955. Т. 102. №2. С. 37–40.
6. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // УМН. 1974. Т. 29. №3. С. 161–178.
7. Осколков К. И. Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Матем. сб. 1977. Т. 103. №4. С. 563–589.
8. Майоров В. Е. О линейных поперечниках соболевских классов // ДАН СССР. 1978. Т. 243. №5. С. 1127–1130.
9. Майоров В. Е. О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // Матем. сб. 1980. Т. 113. №3. С. 437–463.
10. Masovoz G. Y. On trigonometric n -widths and their generalization // J. of Approxim. Theory. 1984. V. 41. № 4. P. 361–366.
11. Кашин Б. С. Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 187–191.
12. Белинский Э. С. Приближение “плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Матем. сб. 1987. Т. 132. №1. С. 20–27.
13. Темляков В. Н. О приближении периодических функций многих переменных // ДАН СССР. 1984. Т. 279. №2. С. 301–305.
14. Белинский Э. С. Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники // ДАН СССР. 1985. Т. 284. №6. С. 1294–1297.
15. Белинский Э. С. Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1987. Т. 180. С. 46–47.
16. Белинский Э. С. Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1988. С. 16–33.
17. Belinskii E. S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε -entropy // Anal. Math. 1989. V. 15. № 2. P. 67–74.
18. Кашин Б. С., Темляков В. Н. О наилучших m -членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №5. С. 57–86.
19. Темляков В. Н. Нелинейные поперечники по Колмогорову // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №6. С. 891–902.
20. DeVore R. A., Temlyakov V. N. Nonlinear Approximation in Finite-Dimensional Spaces // J. of complexity. 1997. V. 13. P. 489–508.
21. Temlyakov V. N. Greedy Algorithm and m -Term Trigonometric Approximation // Constructive Approx. 1998. V. 14. P. 569–587.

22. *Temlyakov V. N.* Greedy Algorithms and m -Term Approximation with Regard to Redundant Dictionaries // J. of Approximation Theory. 1999. V. 98. P. 117–145.
23. *Dinh Dung.* On Asymptotic Orders of n -Term Approximations and Non-Linear n -Widths // Vietnam J. of Mathematics. 1999. V. 27. № 4. P. 363–367.
24. *Dinh Dung.* Continuons Algorithms in n -Term Approximation and Non-Linear-Widths // J. of Approximation Theory. 2000. V. 102. P. 217–242.
25. *Belinskii E. S.* Decomposition theorems and approximation by a “floating” system of exponentials // Transactions of the American Mathematical Society. 1998. V. 350. № 1. P. 43–53.
26. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. матем. журн. 2001. Т. 53. №3. С. 392–416.
27. *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова периодических функций многих переменных // Межд. конф. “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная 90-летию акад. С. М. Никольского. Москва, 27 апреля – 3 мая 1995. С. 231–232.
28. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. матем. журн. 1995. Т. 47. №8. С. 1097–1111.
29. *Романюк А. С.* Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49. №9. С. 1250–1261.
30. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
31. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. P. 889–906.
32. *Кашин Б. С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн. Моск. ун-та. Мат. и мех. 1981. №5. С. 50–54.
33. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
34. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
35. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
36. *Галеев Э. М.* Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // УМН. 1977. Т. 32. №3. С. 251–252.
37. *Никольская Н. С.* Приближение периодических функций класса SH_p^r суммами Фурье // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. №4. С. 761–780.
38. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. №10. С. 1398–1408.