Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шабанов, Функция Ван дер Вардена и раскраски гиперграфов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 195–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:11:56

УДК 511.218+519.112.4+519.212.2

Д. А. Шабанов

Функция Ван дер Вардена и раскраски гиперграфов

Рассматривается классическая задача комбинаторной теории чисел о нахождении функции Ван дер Вардена $W(n, r)$. При помощи метода случайной раскраски гиперграфов получена новая асимптотическая оценка снизу для $W(n, r)$, которая улучшает предыдущие результаты в широкой области значений параметров n и r .

Библиография: 16 наименований.

Ключевые слова: теорема Ван дер Вардена, арифметические прогрессии, гиперграф, хроматическое число.

§ 1. Введение и история задачи

Б. Ван дер Варден в 1927 г. доказал (см. [1]) знаменитую теорему об арифметических прогрессиях. В данной теореме утверждается, что *в любой раскраске множества целых чисел $\mathbb{Z}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины*. Теорема Ван дер Вардена является одним из фундаментальных результатов теории Рамсея (см. [2], [3]). Приведем эквивалентную формулировку этой теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (Б. Ван дер Варден). *Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \geq 2$ существует такое минимальное число $W(n, r)$, что для каждого натурального $N \geq W(n, r)$ в любой r -цветной раскраске множества $\{1, 2, \dots, N\}$ найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n .*

Функцию $W(n, r)$ из теоремы 1 принято называть *функцией Ван дер Вардена*. Оригинальное доказательство теоремы Ван дер Вардена дает очень слабые оценки $W(n, r)$ даже для $r = 2$, из него лишь следует, что $W(n, 2) \leq A(n)$, где $A(n)$ – функция Аккермана (подробнее об этом можно прочитать в обзоре [4]). С. Шелах в 1988 г. (см. [5]) получил первую примитивно-рекурсивную оценку для $W(n, 2)$. Наилучшая оценка сверху в общем случае была получена Т. Гауэрсом (см. [6]). Он доказал, что если $r \leq (\log_2 \log_2 N)^{c_n}$, где $c_n = 2^{-2^{n+9}}$, то $W(n, r) \leq N$. В частном случае $n = 3$ данная оценка была улучшена Р. Грэмом и Й. Шолимоши (см. [7]):

$$W(3, r) \leq 2^{2^{cr}},$$

где c – некоторая абсолютная положительная константа.

Первая нетривиальная оценка снизу для $W(n, r)$ была получена П. Эрдешем и Р. Радо в 1952 г. (см. [8]). Они доказали, что

$$W(n, r) \geq \sqrt{2(n-1)r^{n-1}}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00294), Программ Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ-8784.2010.1) и “Поддержка молодых кандидатов наук” (грант № МК-3429.2010.1).

В дальнейшем эта оценка для больших (по сравнению с n) значений r была улучшена Л. Мозером в 1960 г. (см. [9]), который для некоторой абсолютной константы $C > 0$ обосновал неравенство

$$W(n, r) \geq nr^{C \ln r}. \quad (1)$$

Результат Эрдеша и Радо был асимптотически улучшен В. Шмидтом (см. [10]). Он доказал существование такой абсолютной константы $c > 0$, что для всех $n \geq 3$, $r \geq 2$ выполнено

$$W(n, r) \geq r^{n - c\sqrt{n \ln n}}. \quad (2)$$

В частном случае, когда n – простое число, а $r = 2$, Э. Берлекамп установил (см. [11]) соотношение

$$W(n + 1, 2) > 2^n n.$$

Последние наилучшие результаты в задаче о $W(n, r)$ были получены с помощью применения вероятностных методов в теории гиперграфов. Напомним ряд определений. *Гиперграфом* H называется пара $H = (V, E)$, где V – некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин*, а E – совокупность различных подмножеств множества V , которые называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -равномерным*, если каждое его ребро состоит ровно из n вершин. Раскраска вершин гиперграфа называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра гиперграфа являются неоднородными. *Хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски множества вершин. Если $\chi(H) \leq r$, то H называется *r -раскрашиваемым*.

В известной совместной работе П. Эрдеша и Л. Ловаса (см. [12]) был установлен следующий результат, дающий достаточное условие r -раскрашиваемости n -равномерного гиперграфа.

ТЕОРЕМА 2 (П. Эрдеш, Л. Ловас). *Если степень каждой вершины n -равномерного гиперграфа H не превосходит $r^{n-1}/(4n)$, то $\chi(H) \leq r$.*

Следствием из теоремы 2 явилась оценка функции $W(n, r)$:

$$W(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{4n} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (3)$$

Очевидно, что оценка (3) асимптотически улучшает предыдущий результат Шмидта (2). З. Сабо в 1990 г. получил (см. [13]) более сильную асимптотическую оценку снизу для $W(n, r)$ в случае $r = 2$. Он доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $W(n, 2) \geq 2^n n^{-\varepsilon}$. Таким образом, фактически З. Сабо обосновал неравенство вида

$$W(n, 2) \geq 2^n n^{-|o(1)|}, \quad (4)$$

однако порядок величины $o(1)$ не был указан.

§ 2. Новая оценка снизу функции Ван дер Вардена

Основным результатом настоящей работы является новая асимптотическая оценка снизу функции Ван дер Вардена $W(n, r)$. Выполнена следующая

ТЕОРЕМА 3. *Существует такое натуральное число n_0 , что для всех $n \geq n_0$ и $r \geq 2$ выполняется неравенство*

$$W(n, r) \geq r^{n-1} n^{-4 \lfloor \sqrt{\ln n / \ln(2 \ln n)} \rfloor - 1} 15^{-\lfloor \sqrt{\ln n / \ln(2 \ln n)} \rfloor - 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

Сравним полученную оценку (5) с ранее известными результатами. Ясно, что (5) асимптотически лучше оценки Ловаса (3). При $r = 2$ оценка (5) имеет тот же вид, что и оценка Сабо (4). Однако, в отличие от результата Сабо, мы даем явный вид порядка убывания бесконечно малой величины: $o(1) = \Theta((\ln \ln n / \ln n)^{1/2})$. Остается сравнить (5) с результатом Мозера (1). Ясно, что при $C \ln r \geq n$ (где C – константа, участвующая в (1)) оценка (1) асимптотически лучше (5). Однако, например, если $C \ln r \leq n - 1 - 2 \log_2 n$, то, наоборот, оценка (5) становится лучше. В итоге можно утверждать, что результат Мозера (1) лучше оценки (5) только при экспоненциально больших (по сравнению с n) значениях параметра r .

Утверждение теоремы 3 легко вытекает из следующей многопараметрической теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть заданы натуральные числа $n \geq 3$, $r \geq 2$, положительные k, c, α и число $\beta \in (0, 1]$, и пусть*

$$t = \left\lfloor \sqrt{\frac{\ln n}{c \ln(\alpha \ln n)}} \right\rfloor, \quad q = \frac{\alpha \ln n}{n}, \quad (6)$$

$$\gamma_1 = 1 + \frac{13}{4ck} - \alpha, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{1}{c} + \alpha - k, \quad \gamma_3 = 1 + \frac{3}{ck} + \alpha - k.$$

Если выполняются неравенства

$$k \leq t < \frac{n}{4}, \quad (7)$$

$$q \leq \frac{1}{2}, \quad nq = \alpha \ln n \geq 2, \quad (8)$$

$$n^{1-k/t} \beta^{1/t} > 3, \quad (9)$$

$$\gamma_1 \leq 0, \quad \gamma_2 \leq 0, \quad \gamma_3 \leq 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} n^2 2^{-n} + \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} n^{\gamma_1} + (\lceil k \rceil + 1)^2 \left(\frac{e}{\lceil k \rceil} \right)^{\lceil k \rceil} \beta n^{\gamma_2 - \alpha} + \frac{\beta}{e} n^{\gamma_3} \\ + \frac{1}{16} n^{(9/(ck)) \ln n + 2} 2^{-n/2} + \frac{3\alpha^6}{ck} \frac{\ln^6 n}{n} + \frac{12\alpha^2}{ck} n^{3+\alpha} 2^{4-n} \ln^3 n \\ + \frac{18\alpha^2}{ck} (\ln n)^3 n^{4+\alpha} 2^{-n/2} + (\beta n^{1/c-k} + n^{\gamma_2} \beta^{1-1/t}) \left(\frac{3}{1-2^{1-n}} \right) < \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (11)$$

то имеет место оценка

$$W(n, r) \geq r^{n-1} n^{-k/t} \beta^{1/t} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (12)$$

Далее мы сначала выведем теорему 3 из теоремы 4, а затем докажем теорему 4.

§ 3. Доказательство оценки снизу функции Ван дер Вардена

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Воспользуемся теоремой 4 и выберем параметры k, c, α, β из ее формулировки следующим образом:

$$k = 4, \quad c = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = \frac{1}{15}.$$

В силу такого выбора параметров получаем, что $\gamma_1 = -3/16 < 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = -1/4 < 0$ (т.е. выполнено условие (10) теоремы). Кроме того, для всех n начиная с некоторого n_1 будут выполнены неравенства (7)–(9). Остается проверить условие (11). При выбранных значениях параметров k, c, α, β левая часть (11) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2^{-n}n^2 + \frac{13}{125}n^{-3/16} + \frac{25}{15}\left(\frac{e}{4}\right)^4 n^{-2} + \frac{n^{-1/4}}{15e} \\ & + \frac{n^{(9/4)\ln n+2}}{16}2^{-n/2} + \frac{48\ln^6 n}{n} + 12n^5 2^{4-n} \ln^3 n \\ & + 18(\ln n)^3 n^6 2^{-n/2} + \frac{n^{-3}}{15} \left(\frac{3}{1-2^{1-n}} \right) + 15^{1/t-1} \left(\frac{3}{1-2^{1-n}} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что все слагаемые в сумме, кроме последнего, стремятся к нулю с ростом n . Последнее слагаемое $15^{1/t-1}(3/(1-2^{1-n}))$ имеет вид $(1/5)(1+o(1))$, потому что $t = \lfloor \ln n / \ln(2 \ln n) \rfloor$ стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, сумма в левой части (11) стремится к $1/5$ с ростом n , и, значит, начиная с некоторого n_2 будет выполнено неравенство (11).

В итоге при всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ будут выполнены все условия теоремы 4 и, следовательно, будет выполнена оценка (12) для выбранных значений параметров k, c, α, β :

$$\begin{aligned} W(n, r) & \geq r^{n-1} n^{-k/t} \beta^{1/t} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ & = r^{n-1} n^{-4 \lfloor \sqrt{\ln n / \ln(2 \ln n)} \rfloor^{-1}} 15^{-\lfloor \sqrt{\ln n / \ln(2 \ln n)} \rfloor^{-1}} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Доказательство теоремы 4 основано на применении метода случайной раскраски гиперграфов. Для случая двухцветных раскрасок этот метод был предложен в [14]. В работе [15] было предложено развитие этой техники для произвольного числа цветов. Настоящая работа опирается на идеи, использованные в указанных работах.

4.1. Общий план доказательства. Зафиксируем $n \geq 2$ и $r \geq 3$. Пусть $N \geq n$ – произвольное натуральное число. Рассмотрим гиперграф $H_N = (V_N, E_N)$, где $V_N = \{1, 2, \dots, N\}$, а E_N – совокупность всех арифметических прогрессий длины n , которые содержатся в множестве V_N . Ясно, что H_N – n -равномерный гиперграф. Из построения также вытекает, что для каждого N гиперграф H_N вложен в гиперграф H_{N+1} (в том смысле, что $V_N \subset V_{N+1}$ и $E_N \subset E_{N+1}$). Тогда $\chi(H_N) \leq \chi(H_{N+1})$. Из определения функции Ван дер Вардена $W(n, r)$ следует, что

$$W(n, r) = \min\{N : \chi(H_N) > r\}. \quad (13)$$

Таким образом, если нам удастся показать, что для некоторого N выполнено $\chi(H_N) \leq r$, то мы получим оценку снизу для $W(n, r)$, т. е. $W(n, r) > N$.

Итак, введем следующие обозначения:

$$N = \left\lceil r^{n-1} n^{-k/t} \beta^{1/t} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\rceil, \quad d = r^{n-1} n^{1-k/t} \beta^{1/t} - n. \quad (14)$$

Рассмотрим n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, N\}$, $E = \{\text{все арифметические прогрессии длины } n \text{ из } V\}$.

Пусть также задана произвольная (но фиксированная) нумерация ребер H . Мы покажем, что в условиях теоремы 4 гиперграф H является r -раскрашиваемым. Для этого необходимо и достаточно доказать, что для H существует правильная r -цветная раскраска множества вершин. Мы построим некоторую случайную r -цветную раскраску и оценим вероятность того, что эта раскраска является правильной для H . Если она окажется строго больше нуля, то это будет означать существование искомой раскраски.

4.2. Леммы об арифметических прогрессиях. Нам понадобятся некоторые утверждения об арифметических прогрессиях.

ЛЕММА 1. Пусть $a \in \{1, 2, \dots, N\}$. Тогда a содержится в не более чем $N(1 - 1/n)^{-1}$ арифметических прогрессиях длины n , принадлежащих V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное число $a \in \{1, 2, \dots, N\}$. Сколько арифметических прогрессий длины n из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ содержат a ? Каждая такая прогрессия однозначно определяется порядковым номером a в этой прогрессии, а также разностью прогрессии. Порядковый номер может меняться от 1 до n , а разность – от 1 до $(N - 1)/(n - 1)$. Таким образом, всего будет не более $n(N - 1)/(n - 1)$ прогрессий длины n , содержащих a .

ЛЕММА 2. Пусть A – арифметическая прогрессия в V . Тогда A пересекается с не более чем d другими арифметическими прогрессиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1 и выбора параметров (14).

ЛЕММА 3. Для любых x и y существует не более n^2 арифметических прогрессий, их одновременно содержащих. Пусть A – арифметическая прогрессия в V . Тогда существует не более чем $n^4/2$ арифметических прогрессий B с условием $|A \cap B| \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in A$, $x < y$ и $y = x + l$. Пусть B – другая прогрессия, содержащая x и y . Тогда разность m прогрессии B является делителем l , т. е. $l = ml_*$. Далее, $nm > y - x = l = ml_*$. Следовательно, $1 \leq l_* \leq n - 1$. Таким образом, разность прогрессии B может быть выбрана не более чем $n - 1$ способами, а положение x в этой прогрессии – также не более чем $n - 1$ способами. Мы доказали, что всего существует не более чем n^2 прогрессий, содержащих одновременно x и y , которые, в свою очередь, можно выбрать $\binom{n}{2}$ способами из A . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть A – арифметическая прогрессия в V . Тогда для каждого $s > n/2$ существует не более двух арифметических прогрессий B с условием $|A \cap B| = s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально.

4.3. Построение случайной раскраски. Рассмотрим на некотором вероятностном пространстве следующий набор независимых в совокупности случайных элементов:

1) $\xi_1, \dots, \xi_N$ – одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с равной вероятностью $1/r$;

2) $\eta_1, \dots, \eta_N$ – одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с одной и той же вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - rp$; параметр p мы возьмем равным $p = q/(r - 1)$, в силу условия (8) такой выбор параметра будет корректным, т. е. при любом $r \geq 2$ будет выполнено $rp \leq r/(2(r - 1)) \leq 1$;

3) случайные подмножества $\Theta(e, Y)$, где $e \in E$ – ребро гиперграфа, а $Y \subset e$ – подмножество с условием $|Y| \geq t - 1$, имеющие равномерное распределение на множестве $\binom{Y}{t-1}$; согласно условию (7) выполнено $n > t - 1 \geq 0$, поэтому определение случайных множеств $\Theta(e, Y)$ корректно.

Пусть $e \in E$ – произвольное ребро H . Для каждого $u = 1, \dots, r$ обозначим через $\mathcal{M}(e, u)$ и $\mathcal{AM}(e, u)$ следующие события:

$$\mathcal{M}(e, u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\}, \quad \mathcal{AM}(e, u) = \left\{ 0 < \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} \leq t - 2 \right\}. \quad (15)$$

Введем индуктивно случайные величины ζ_i , $i = 1, \dots, w$, следующим образом. Обозначим через $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{A}_1$ следующие события:

$$\mathcal{D}_1 = \bigcup_{e \in E: 1 \in e} \bigcup_{u=1}^r \mathcal{M}(e, u),$$

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{f \in E: 1 \in f} \bigcup_{u=1}^r \left(\left\{ \xi_1 \neq u, \eta_1 = u, \sum_{s \in f: s > 1} I\{\xi_s = u\} = n - 1 \right\} \cap \mathcal{AM}(f, u) \right),$$

и положим

$$\zeta_1 = \xi_1 I\{\overline{\mathcal{D}_1} \cup \{\eta_1 = 0\} \cup \mathcal{A}_1\} + \eta_1 I\{\mathcal{D}_1 \cap \{\eta_1 \neq 0\} \cap \overline{\mathcal{A}_1}\}.$$

Для всех $i > 1$ через $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{A}_i$ обозначим события

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i &= \bigcup_{e \in E: i \in e} \bigcup_{u=1}^r \left\{ \mathcal{M}(e, u) \cap \bigcap_{s \in e: s < i} \{\zeta_s = u\} \right\}, \\ \mathcal{A}_i &= \bigcup_{f \in E: i \in f} \bigcup_{u=1}^r \left(\left\{ \xi_i \neq u, \eta_i = u, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{s \in f: s < i} I\{\zeta_s = u\} + \sum_{s \in f: s > i} I\{\xi_s = u\} = n - 1 \right\} \cap \mathcal{AM}(f, u) \right).\end{aligned}$$

Положим

$$\zeta_i = \xi_i I\{\overline{\mathcal{D}_i} \cup \{\eta_i = 0\} \cup \mathcal{A}_i\} + \eta_i I\{\mathcal{D}_i \cap \{\eta_i \neq 0\} \cap \overline{\mathcal{A}_i}\}.$$

Несложно проверить, что случайные величины ζ_i принимают только значения $1, 2, \dots, r$. Поэтому случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ можно интерпретировать как случайную раскраску множества V (вершине i сопоставляется цвет ζ_i). Обозначим через $\mathcal{F}$ событие, заключающееся в том, что случайная раскраска $\vec{\zeta}$ не является правильной раскраской гиперграфа H , т. е.

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u=1}^r \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\}. \quad (16)$$

Наша задача состоит в том, чтобы в условиях теоремы 4 доказать неравенство $P(\mathcal{F}) < 1$.

Разобьем событие $\bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\}$ на три части в зависимости от поведения случайных величин $\{\xi_s : s \in e\}$. Введем следующие события:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0(e, u) &= \bigcup_{a=1, a \neq u}^r \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u, \xi_s = a\}, & \mathcal{C}_1(e, u) &= \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u, \xi_s = u\}, \\ \mathcal{C}_2(e, u) &= \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\} \cap \bigcap_{a=1}^r \overline{\mathcal{M}(e, a)}.\end{aligned} \quad (17)$$

Далее мы рассмотрим эти три события отдельно.

4.4. Первая составляющая часть $\mathcal{F}$: событие $\mathcal{C}_0(e, u)$. Если произошло событие $\mathcal{C}_0(e, u)$, то для любого $s \in e$ выполнено $\zeta_s = \eta_s$ в силу того, что $\zeta_s \neq \xi_s$. Получаем соотношение

$$\bigcup_{u=1}^r \mathcal{C}_0(e, u) \subset \bigcup_{u=1}^r \bigcup_{a=1, a \neq u}^r \bigcap_{s \in e} \{\eta_s = u, \xi_s = a\} = \mathcal{Q}_0(e). \quad (18)$$

Вероятность события $\mathcal{Q}_0(e)$, в свою очередь, легко считается:

$$P(\mathcal{Q}_0(e)) = \sum_{u=1}^r \sum_{a=1, a \neq u}^r \prod_{s \in e} P(\eta_s = u, \xi_s = a) = r(r-1) \left(\frac{p}{r} \right)^n. \quad (19)$$

4.5. Вторая составляющая часть $\mathcal{F}$: событие $\mathcal{C}_1(e, u)$. Предположим, что произошло событие $\mathcal{C}_1(e, u)$. Из него, очевидно, вытекают все события $\mathcal{D}_s$, $s \in e$. Тогда для вершины $s \in e$ равенство $\xi_s = \zeta_s = u$ может случиться двумя способами: либо $\eta_s \in \{0, u\}$, либо $\eta_s \notin \{0, u\}$ и случилось событие $\mathcal{A}_s$. Рассмотрим следующее разбиение события $\mathcal{C}_1(e, u)$:

$$\mathcal{C}_1(e, u) = \mathcal{S}_0(e, u) \cup \mathcal{S}_1(e, u), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(e, u) &= \mathcal{C}_1(e, u) \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\eta_s \notin \{0, u\}\} \leq t-1 \right\}, \\ \mathcal{S}_1(e, u) &= \mathcal{C}_1(e, u) \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\eta_s \notin \{0, u\}\} > t-1 \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим событие $\mathcal{S}_0(e, u)$. В силу определения (17) события $\mathcal{C}_1(e, u)$ выполнено соотношение

$$\mathcal{S}_0(e, u) \subset \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\} \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\eta_s \notin \{0, u\}\} \leq t-1 \right\}.$$

Объединение по u последних событий обозначим через $\mathcal{Q}_1(e)$. Тогда

$$\bigcup_{u=1}^r \mathcal{S}_0(e, u) \subset \bigcup_{u=1}^r \left\{ \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\} \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\eta_s \notin \{0, u\}\} \leq t-1 \right\} \right\} = \mathcal{Q}_1(e). \quad (21)$$

Для вероятности события $\mathcal{Q}_1(e)$ верна следующая оценка:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{Q}_1(e)) &= r^{1-n} \sum_{j=0}^{t-1} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} \\ &\leq r^{1-n} (1-q)^{n-t} \sum_{j=0}^{t-1} (nq)^j \leq r^{1-n} (1-q)^{n-t} (nq)^t. \end{aligned} \quad (22)$$

Последнее неравенство в (22) вытекает из условия (8): $nq = \alpha \ln n \geq 2$.

Рассмотрим теперь событие $\mathcal{S}_1(e, u)$. Зафиксируем вершину $v \in e$, для которой $\eta_v \notin \{0, u\}$. Для таких вершин, как уже было отмечено, должно выполняться событие $\mathcal{A}_v$. Отсюда следует, что для некоторых ребра f и цвета $a \neq u$ выполнено событие

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(v, f, u, a) &= \left\{ \xi_v = u, \eta_v = a, \right. \\ &\quad \left. \sum_{s \in f: s < v} I\{\zeta_s = a\} + \sum_{s \in f: s > v} I\{\xi_s = a\} = n-1 \right\} \cap \mathcal{AM}(f, a). \end{aligned}$$

Легко показать, что подобное ребро f удовлетворяет условию $f \cap e = \{v\}$. Действительно, для всех $s \in e$ выполнено $\xi_s = \zeta_s = u$, а для всех $s \in f \setminus \{v\}$ — либо $\zeta_s = a$, либо $\xi_s = a$.

При выполнении события $\mathcal{S}_1(e, u)$ число вершин $v \in e$ с условием $\eta_v \notin \{0, u\}$ не меньше t . Введем обозначение $E(e) = \{f \in E \setminus \{e\} : |e \cap f| = 1\}$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что

$$\mathcal{S}_1(e, u) \subset \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_t = 1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcup_{\substack{\{f_1, \dots, f_t\} \in \binom{E(e)}{t} \\ f_i \cap e \neq f_j \cap e}} \bigcap_{i=1}^t \mathcal{W}(e \cap f_i, f_i, u, a_i), \quad (23)$$

причем здесь предполагается, что набор ребер $\{f_1, \dots, f_t\}$ записан согласно первоначально выбранной нумерации множества E , т.е. номер ребра f_i меньше номера ребра f_j , если $i < j$. Введем обозначения: $f_0 = e$, $\hat{f}_i = f_i \setminus \{\bigcup_{j=0}^{i-1} f_j\}$, v_i – вершина, образованная пересечением $f_0 = e$ и f_i . Если выполнено событие $\mathcal{W}(e \cap f_i, f_i, u, a_i)$, то в силу $\mathcal{AM}(f_i, a_i)$ в ребре f_i не более $t-2$ вершин s удовлетворяют условию $\xi_s \neq a_i$. При этом для них всех выполнено $\zeta_s = a_i$, поэтому для всех таких вершин имеем $\zeta_s = \eta_s = a_i$. Во множестве $\hat{f}_i$ таких вершин не более $t-3$, потому что вершина v_i не принадлежит $\hat{f}_i$ и $\xi_{v_i} = u \neq a_i$. Получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\} \cap \bigcap_{i=1}^t \mathcal{W}(e \cap f_i, f_i, u, a_i) &\subset \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\} \cap \bigcap_{i=1}^t \{\eta_{v_i} = a_i\} \\ &\cap \bigcap_{i=1}^t \left\{ \bigcap_{s \in \hat{f}_i} (\{\xi_s \neq a_i, \eta_s = a_i\} \cup \{\xi_s = a_i\}) \right\} \cap \bigcap_{i=1}^t \left\{ \sum_{s \in \hat{f}_i} I\{\xi_s \neq a_i\} \leq t-3 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Объединение последних событий по u и $a_1, \dots, a_t$ обозначим через $\mathcal{Q}_2(e, F)$, где $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ – элемент из $\binom{E(e)}{t}$ с условием $|e \cap \bigcup_{f \in F} f| = t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2(e, F) &= \bigcup_{u=1}^r \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_t = 1 \\ a_i \neq u}}^r \left\{ \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\} \cap \bigcap_{i=1}^t \{\eta_{v_i} = a_i\} \right. \\ &\quad \left. \cap \bigcap_{i=1}^t \left\{ \bigcap_{s \in \hat{f}_i} (\{\xi_s \neq a_i, \eta_s = a_i\} \cup \{\xi_s = a_i\}) \right\} \cap \bigcap_{i=1}^t \left\{ \sum_{s \in \hat{f}_i} I\{\xi_s \neq a_i\} \leq t-3 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (23) и (24) вытекает соотношение

$$\bigcup_{u=1}^r \mathcal{S}_1(e, u) \subset \bigcup_{\substack{F \in \binom{E(e)}{t} : \\ |e \cap \{\bigcup_{f \in F} f\}| = t}} \mathcal{Q}_2(e, F). \quad (26)$$

Оценим вероятность события $\mathcal{Q}_2(e, F)$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{Q}_2(e, F)) &= \sum_{u=1}^r \sum_{\substack{a_1, \dots, a_t = 1 \\ a_i \neq u}}^r r^{-n} p^t \prod_{i=1}^t \sum_{j=0}^{t-3} \binom{|\hat{f}_i|}{j} \left(\frac{r-1}{r} \right)^j p^j \left(\frac{1}{r} \right)^{|\hat{f}_i| - j} \\ &= r(r-1)^t r^{-n} p^t r^{-\sum_{i=1}^t |\hat{f}_i|} \prod_{i=1}^t \sum_{j=0}^{t-3} \binom{|\hat{f}_i|}{j} q^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq r^{1-n} q^t r^{-\sum_{i=1}^t |\widehat{f}_i|} \prod_{i=1}^t \sum_{j=0}^{t-3} \binom{n}{j} q^j \\
&\leq r^{1-n} q^t r^{-\sum_{i=1}^t |\widehat{f}_i|} (nq)^{t(t-2)}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Последнее неравенство в (27) выполняется в силу того, что $|\widehat{f}_i| < n$ и $nq \geq 2$. Далее, в силу условия $|e \cap \bigcup_{f \in F} f| = t$ получаем

$$\sum_{i=1}^t |\widehat{f}_i| = \left| \bigcup_{i=1}^t f_i \right| - t.$$

Из принципа включений и исключений вытекает неравенство

$$\left| \bigcup_{i=1}^t f_i \right| \geq \sum_{i=1}^t |f_i| - \sum_{i,j=1, i < j}^t |f_i \cap f_j| = nt - \Lambda(F).$$

В итоге, учитывая (27), получаем, что для вероятности события $\mathcal{Q}_2(e, F)$ верна оценка

$$P(\mathcal{Q}_2(e, F)) \leq q^t r^{-(n-1)(t+1)+\Lambda(F)} (nq)^{t(t-2)}. \tag{28}$$

4.6. Третья составляющая часть $\mathcal{F}$: событие $\mathcal{C}_2(e, u)$. Покажем, что при выполнении события $\mathcal{C}_2(e, u)$ сумма $\sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\}$ не может быть слишком малой. Мы установим, что

$$\mathcal{C}_2(e, u) = \mathcal{C}_2(e, u) \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} \geq t - 1 \right\}. \tag{29}$$

Действительно, рассмотрим пересечение следующих трех событий (см. определение события $\mathcal{C}_2(e, u)$ в (17)):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_2(e, u) \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} \leq t - 2 \right\} \\
&= \bigcap_{s \in e} \{\zeta_s = u\} \cap \bigcap_{a=1}^r \overline{\mathcal{M}(e, a)} \cap \left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} \leq t - 2 \right\}.
\end{aligned}$$

Из выполнения второго и третьего событий вытекает выполнение события $\mathcal{AM}(e, u)$ (см. (15)). Из выполнения первого события следует, что для любого $s \in e$ такого, что $\xi_s \neq u$, выполнено $\zeta_s = \eta_s = u$, причем множество таких вершин непусто в силу события $\mathcal{AM}(e, u)$. Рассмотрим вершину $v \in e$ с условиями $\xi_v \neq u$ и $\xi_s = u$ для всех $s \in e$, $s > v$. Ясно, что для v выполняется событие $\mathcal{A}_v$. Следовательно, $\zeta_v = \xi_v \neq u$, что противоречит выполнению первого события пересечения. Таким образом, события из рассматриваемого пересечения несовместны, и, стало быть, доказано равенство (29).

Оценим вероятность события $\mathcal{C}_2(e, u)$. Рассмотрим случайное множество $T = \{s \in e: \xi_s \neq u\}$. Из события $\mathcal{C}_2(e, u)$ следует, что, во-первых, для всех $v \in T$ выполнено $\zeta_v = \eta_v = u$, а во-вторых (см. (29)), $|T| \geq t - 1$. Если $\zeta_v \neq \xi_v$ для

некоторой вершины v , то должно выполняться событие D_v , которое, в свою очередь, влечет выполнение для некоторых ребра f_v , $v \in e \cap f_v$, и цвета $a_v \neq u$ события

$$\mathcal{B}(e, f_v, v, u, a_v) = \left\{ \mathcal{M}(f_v, a_v) \cap \bigcap_{s \in f_v: s < v} \{\zeta_s = a_v\} \cap \{\zeta_v = \eta_v = u\} \right\}. \quad (30)$$

Ясно, что вершина v является минимальным элементом множества $e \cap f_v$, поэтому для различных v ребра f_v также различны.

Далее, пусть Y – произвольное подмножество ребра e такое, что $|Y| \geq t - 1$. Тогда для любого $S \subset Y$, $S = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}$, выполняется вложение

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(e, u) \cap \{T = Y\} \subset & \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \\ & \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1} = 1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcup_{\substack{f_1, \dots, f_{t-1} \in E \\ v_i \in f_i \cap e}} \bigcap_{i=1}^{t-1} \mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i). \end{aligned} \quad (31)$$

Соотношение (31) выполняется для всех $S \in \binom{Y}{t-1}$, поэтому верно следующее вложение:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(e, u) \cap \{T = Y\} \subset & \bigcup_{\substack{S \in \binom{Y}{t-1} \\ S = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}}} \left\{ \{\Theta(e, Y) = S\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \right. \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1} = 1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcup_{\substack{f_1, \dots, f_{t-1} \in E \\ v_i \in f_i \cap e}} \bigcap_{i=1}^{t-1} \mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть $S_0 = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}$ – некоторое подмножество ребра e . Введем обозначение $E'(e) = \{f \in E \setminus \{e\} : f \cap e \neq \emptyset\}$. Будем говорить, что $F \in \binom{E'(e)}{t-1}$ определяет множество S_0 , если для каждой вершины $v_i \in S_0$ найдется такое $f_i \in F$, что $v_i \in f_i \cap e$ и v_i является минимальным элементом в $f_i \cap e$. Множество всех $F \in \binom{E'(e)}{t-1}$, которые определяют S_0 , мы будем обозначать $\widehat{F}(S_0)$. Заметим, что в случае выполнения события $\bigcap_{i=1}^{t-1} \mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i)$ набор ребер $F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}$ определяет множество $S = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}$. Следовательно, в правой части соотношения (32) объединение фактически берется только по совокупностям ребер $F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}$ из $\widehat{F}(S)$. Тогда событие из правой части (32) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(e, u) \cap \{T = Y\} \subset & \bigcup_{\substack{S \in \binom{Y}{t-1} \\ S = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}}} \bigcup_{\substack{F \in \widehat{F}(S) \\ F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}}} \left\{ \{\Theta(e, Y) = S\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \right. \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1} = 1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcap_{i=1}^{t-1} \mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Событие $\mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i)$ содержится, очевидно (см. (30)), в событии $\bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \cap \{\eta_{v_i} = u\}$. Следовательно, в силу (33) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(e, u) \cap \{T = Y\} \subset & \bigcup_{\substack{S \in \binom{Y}{t-1} \\ S = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}}} \bigcup_{\substack{F \in \widehat{F}(S) \\ F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}}} \left\{ \{\Theta(e, Y) = S\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \right. \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1}=1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \cap \bigcap_{s \in S} \{\eta_s = u\} \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем объединение обеих частей последнего соотношения по u и Y :

$$\begin{aligned} \bigcup_{u=1}^r \mathcal{C}_2(e, u) \subset & \bigcup_{Y \subset e} \bigcup_{\substack{S \in \binom{Y}{t-1} \\ S = \{v_1, \dots, v_{t-1}\}}} \bigcup_{\substack{F \in \widehat{F}(S) \\ F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}}} \bigcup_{u=1}^r \left\{ \{\Theta(e, Y) = S\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \right. \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1}=1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \cap \bigcap_{s \in S} \{\eta_s = u\} \right\} = \mathcal{S}(e). \end{aligned} \quad (34)$$

Перепишем правую часть (34) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(e) = & \bigcup_{\substack{F \in \binom{E'(e)}{t-1} \\ F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}}} \bigcup_{Y \subset e: S \subset Y} \bigcup_{u=1}^r \left\{ \{\Theta(e, Y) = S\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \right. \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1}=1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \cap \bigcap_{s \in S} \{\eta_s = u\} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Поясним равенство (35). Тройное объединение по Y , S и $F \in \widehat{F}(S)$ в определении события $\mathcal{S}(e)$ (см. (34)) можно заменить на внешнее объединение по всем $F \in \binom{E'(e)}{t-1}$, которые определяют некоторое $S \in \binom{e}{t-1}$, и внутреннее объединение по всем $Y \subset e$, которые содержат S .

Введем следующее событие:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_3(e, F) = & \bigcup_{Y \subset e: S \subset Y} \bigcup_{u=1}^r \left\{ \{\Theta(e, Y) = S\} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{\xi_s = u\} \right. \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1}=1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \cap \bigcap_{s \in S} \{\eta_s = u\} \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

где e – ребро H , а $F \in \binom{E'(e)}{t-1}$ (здесь $F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}$, причем ребра записаны согласно изначальной нумерации) определяет некоторое $S \in \binom{e}{t-1}$. В силу

соотношений (34) и (35) получаем

$$\bigcup_{u=1}^r \mathcal{C}_2(e, u) \subset \bigcup_{\substack{F \in \binom{E^t(e)}{t-1}, \exists F \in \widehat{F}(S): \\ F = \{f_1, \dots, f_{t-1}\}}} \mathcal{Q}_3(e, F). \quad (37)$$

Оценим вероятность события $\mathcal{Q}_3(e, F)$. Обозначим через $U(F)$ множество $\bigcup_{f \in F} f = U(F)$. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\{ \Theta(e, Y) = S \} \cap \bigcap_{s \in e \setminus Y} \{ \xi_s = u \} \cap \bigcap_{s \in Y \setminus S} \{ \xi_s \neq u, \eta_s = u \} \right. \\ & \quad \left. \cap \bigcup_{\substack{a_1, \dots, a_{t-1} = 1 \\ a_i \neq u}}^r \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{ \xi_s = a_i \} \cap \bigcap_{s \in S} \{ \eta_s = u \} \right) \\ & \leq \frac{1}{\binom{|Y|}{t-1}} r^{|Y|-n} \left(\frac{q}{r} \right)^{|Y \setminus U(F)|} (r-1)^{t-1} r^{-|U(F)|} p^{|U(F) \cap Y|}. \end{aligned} \quad (38)$$

Поясним данное неравенство. При фиксированных значениях параметров $a_1, \dots, a_{t-1}$ значения случайных величин ξ_s , $s \in U(F)$, однозначно определены (вероятность того, что для любого $i = 1, \dots, t-1$ и любого $s \in f_i$ выполнено $\{ \xi_s = a_s \}$ для наперед заданных цветов a_s , равна $r^{-|U(F)|}$). При этом для всех $s \in U(F) \cap Y$ должно быть выполнено $\eta_s = u$ (вероятность этого события равна $p^{|U(F) \cap Y|}$). Наконец, для всех $s \in Y \setminus U(F)$ выполнено $\xi_s \neq u$ и $\eta_s = u$ (возникает множитель $(q/r)^{|Y \setminus U(F)|}$). Отметим, что неравенство в (38) может возникнуть тогда, когда при условии $f_i \cap f_j \cap e \neq \emptyset$ имеет место несовпадение цветов: $a_i \neq a_j$ (в этом случае вероятность соответствующего события равна нулю).

Из (38) и (36) получаем оценку вероятности события $\mathcal{Q}_3(e, F)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{Q}_3(e, F)) & \leq \sum_{u=1}^r \sum_{Y \subseteq e: S \subset Y} \frac{1}{\binom{|Y|}{t-1}} r^{|Y|-n} \left(\frac{q}{r} \right)^{|Y \setminus U(F)|} (r-1)^{t-1} r^{-|U(F)|} p^{|U(F) \cap Y|} \\ & = r \sum_{y=t-1}^n \binom{n-t+1}{y-t+1} \frac{1}{\binom{y}{t-1}} r^{y-n} \left(\frac{q}{r} \right)^{|Y \setminus U(F)|} (r-1)^{t-1} r^{-|U(F)|} p^{|U(F) \cap Y|}. \end{aligned} \quad (39)$$

Поясним переход к сумме по y . Сумму по Y , содержащему S , можно представить в виде двойной суммы: сначала по $y = |Y|$, а затем по Y , содержащему S и имеющему мощность y . Таких множеств при фиксированном S ($|S| = t-1$) будет $\binom{n-t+1}{y-t+1}$.

Преобразуем сумму в правой части (39), используя равенство $\binom{n}{t-1} \binom{n-t+1}{y-t+1} = \binom{n}{y} \binom{y}{t-1}$. Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{Q}_3(e, F)) & \leq \\ & \leq r \sum_{y=t-1}^n \binom{n-t+1}{y-t+1} \frac{1}{\binom{y}{t-1}} r^{y-n} \left(\frac{q}{r} \right)^{|Y \setminus U(F)|} (r-1)^{t-1} r^{-|U(F)|} p^{|U(F) \cap Y|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \sum_{y=t-1}^n \binom{n}{y} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} r^{y-n} \left(\frac{q}{r}\right)^{y-|U(F) \cap e|} (r-1)^{t-1} r^{-|U(F)|} p^{|U(F) \cap e|} \\
&= r^{1-n+|U(F) \cap e|-|U(F)|} (r-1)^{t-1} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} \sum_{y=t-1}^n \binom{n}{y} (p(r-1))^{y-|U(F) \cap e|} p^{|U(F) \cap e|} \\
&= r^{1-n-|U(F)|} r^{|U(F) \cap e|} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (r-1)^{t-1-|U(F) \cap e|} \sum_{y=t-1}^n \binom{n}{y} p^y (r-1)^y \\
&\leq r^{1-nt+\Lambda(F)} \left(\frac{r}{r-1}\right)^{|U(F) \cap e|} (r-1)^{t-1} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n. \tag{40}
\end{aligned}$$

В пояснениях нуждается только лишь последнее неравенство в (40). Здесь мы воспользовались принципом включения и исключения, согласно которому

$$|U(F)| \geq \sum_{f \in F} |f| - \sum_{i,j=1: i < j}^{t-1} |f_i \cap f_j| = n(t-1) - \Lambda(F).$$

Оценка (40) завершает оценивание вероятностей различных составляющих события $\mathcal{F}$, заключающегося в том, что случайная раскраска $\vec{\zeta}$ не является правильной раскраской вершин гиперграфа H .

4.7. Различные конфигурации ребер. Прежде чем оценивать вероятность события $\mathcal{F}$, мы рассмотрим некоторые конфигурации ребер гиперграфа H .

1. Будем говорить, что тройка ребер $(A; B, C)$ образует *треугольник типа Δ* , если $|A \cap B| = 1$, $|A \cap C| = 1$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $1 \leq |B \cap C| \leq n/2$. При этом выделенное ребро A называется *основанием* треугольника. Введем событие

$$\mathcal{Q}_4(A; B, C) = \bigcup_{a=1}^r \mathcal{M}(A, a) \cap \bigcup_{b=1}^r \mathcal{AM}(B, b) \cap \bigcup_{c=1}^r \mathcal{AM}(C, c). \tag{41}$$

Вероятность события $\mathcal{Q}_4(A; B, C)$, очевидным образом, удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{P}(\mathcal{Q}_4(A; B, C)) \leq r^3 r^{-n} \binom{2n-2}{2t-4} r^{2t-4-3n/2}. \tag{42}$$

2. Пусть два ребра A и B таковы, что $|A \cap B| \geq 6$. Введем событие

$$\mathcal{Q}_5(A, B) = \bigcup_{a=1}^r \bigcup_{u=1, u \neq a}^r \mathcal{M}(B, a) \cap \bigcap_{s \in A \cap B} \{\eta_s = u\}, \tag{43}$$

вероятность которого есть

$$\mathbf{P}(\mathcal{Q}_5(A, B)) = r^{1-n} (r-1) p^{|A \cap B|} \leq r^{2-n} p^6. \tag{44}$$

3. Пусть два ребра A и B таковы, что $2 \leq |A \cap B| \leq 5$. Введем событие

$$\mathcal{Q}_6(A, B) = \bigcup_{a=1}^r \bigcup_{u=1, u \neq a}^r \mathcal{M}(B, a) \cap \bigcap_{s \in A} \{\{\xi_s = u\} \cup \{\xi_s \neq u, \eta_s = u\}\}. \tag{45}$$

Вероятность этого события также легко посчитать:

$$\begin{aligned} P(Q_6(A, B)) &= r^{1-n}(r-1)p^{|A \cap B|} \left(\frac{1}{r} + \frac{q}{r} \right)^{n-|A \cap B|} \leq r^{2-n}p^2(1+q)^n r^{5-n} \\ &= r^{7-2n}p^2(1+q)^n. \end{aligned} \quad (46)$$

4. Пусть $(A; B, C)$ – треугольник типа Δ (см. п. 1). Введем событие

$$Q_7(A; B, C) = \bigcup_{a=1}^r \bigcup_{u=1, u \neq a}^r \mathcal{M}(B, a) \cap \mathcal{M}(C, a) \cap \bigcap_{s \in A} \{ \xi_s = u \} \cup \{ \xi_s \neq u, \eta_s = u \}. \quad (47)$$

Вероятность события $Q_7(A; B, C)$, очевидно, есть

$$\begin{aligned} P(Q_7(A; B, C)) &= r(r-1) \left(\frac{1}{r} + \frac{q}{r} \right)^{n-|A \cap (B \cup C)|} p^{|A \cap (B \cup C)|} r^{-|(B \cup C)|} \\ &\leq (1+q)^n r^{4-n} p^2 r^{-3n/2} = (1+q)^n r^{4-5n/2} p^2. \end{aligned} \quad (48)$$

5. Пусть e – некоторое ребро и $F \subset E$. Будем говорить, что пара (e, F) является *конфигурацией первого типа*, если $F \subset E(e)$ и для любых различных $f, g \in F$ выполнено $f \cap g = \emptyset$. Напомним, что $E(e) = \{f \in E: |f \cap e| = 1\}$. Введем обозначение CONF1 для класса конфигураций первого типа. Пусть $(e, F) \in \text{CONF1}$ и, кроме того, $|F| = t$. Тогда $\Lambda(F) = 0$ и в силу (28) получаем следующую оценку вероятности события $Q_2(e, F)$:

$$P(Q_2(e, F)) \leq q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)}. \quad (49)$$

Если же $(e, F) \in \text{CONF1}$ и $|F| = t-1$, то из (40) получаем оценку события $Q_3(e, F)$:

$$\begin{aligned} P(Q_3(e, F)) &\leq r^{1-nt+\Lambda(F)} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{|U(F) \cap e|} (r-1)^{t-1} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \\ &= r^{1-nt} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{t-1} (r-1)^{t-1} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n = r^{-(n-1)t} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n. \end{aligned} \quad (50)$$

6. Пусть e – некоторое ребро и $F \subset E(e)$, причем для любых двух ребер $f, g \in F$ выполнено $e \cap f \cap g = \emptyset$. Пусть также никакие два ребра $f, g \in F$ не дополняют ребро e до треугольника типа Δ (т. е. тройка $(e; f, g)$ не является треугольником типа Δ для любых $f, g \in F$). Тогда возможны два варианта: либо никакие два ребра из F не пересекаются (и, следовательно, $(e, F) \in \text{CONF1}$), либо нашлись два таких ребра $f, g \in F$, что $|f \cap g| > n/2$. В последнем случае будем говорить, что пара (e, F) является *конфигурацией второго типа*. Введем по аналогии обозначение CONF2 для класса конфигураций второго типа.

Теперь мы перейдем к доказательству того, что в условиях теоремы 4 вероятность события $\mathcal{F}$ строго меньше 1.

4.8. Применение локальной леммы для оценки вероятности события $\mathcal{F}$. Напомним, что в силу определений (16) и (17) событий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{C}_i(e, u)$, $i = 0, 1, 2$, $e \in E$, $u = 1, \dots, r$, имеет место равенство

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{u=1}^r (\mathcal{C}_0(e, u) \cup \mathcal{C}_1(e, u) \cup \mathcal{C}_2(e, u)).$$

Из доказанных соотношений (18), (20), (21), (26) и (37) следует, что выполняется вложение

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{e \in E} \{\mathcal{Q}_0(e) \cup \mathcal{Q}_1(e)\} \cup \bigcup_{e \in E} \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t}} \mathcal{Q}_2(e, F) \cup \bigcup_{F \in \binom{E'(e)}{t-1}, \exists F: F \in \widehat{F}(S)} \mathcal{Q}_3(e, F). \quad (51)$$

Рассмотрим объединение по $F \in \binom{E(e)}{t}$ событий $\mathcal{Q}_2(e, F)$. Для набора F здесь возможны три варианта: либо $(e, F) \in \text{CONF1}$, либо $(e, F) \in \text{CONF2}$, либо найдутся два ребра $f, g \in F$, дополняющие e до треугольника типа Δ . Пусть F принадлежит третьему типу: тогда событие $\mathcal{Q}_2(e, F)$ в силу своего определения (25) содержится в объединении событий $\mathcal{Q}_4(e; A, B)$ (см. определение в (41)) по всем таким $A, B \in E(e)$, что $(e; A, B)$ – треугольник типа Δ . Таким образом, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t}} \mathcal{Q}_2(e, F) \subset & \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t}: (e, F) \in \text{CONF1}} \mathcal{Q}_2(e, F) \cup \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t}: (e, F) \in \text{CONF2}} \mathcal{Q}_2(e, F) \\ & \cup \bigcup_{\substack{A, B \in E(e): \\ (e; A, B) \text{ типа } \Delta}} \mathcal{Q}_4(e; A, B). \end{aligned} \quad (52)$$

Теперь рассмотрим объединение по $F \in \binom{E'(e)}{t-1}$ событий $\mathcal{Q}_3(e, F)$, причем объединение берется только по F , которые определяют некоторое $S \in \binom{e}{t-1}$. Напомним, что $E'(e) = \{f \in E \setminus \{e\}: f \cap e \neq \emptyset\}$. Для набора F здесь возможны следующие альтернативы:

1) найдется $f \in F$ с условием $|e \cap f| \geq 6$; событие $\mathcal{Q}_3(e, F)$ в таком случае, очевидно, является частью события $\mathcal{Q}_5(e, f)$ (ср. определения событий в (36) и (43));

2) найдется $f \in F$ с условием $2 \leq |e \cap f| \leq 5$; тогда событие $\mathcal{Q}_3(e, F)$ вложено в событие $\mathcal{Q}_6(e, f)$ (ср. определения событий в (36) и (45));

3) все $f \in F$ также принадлежат и $E(e)$, но существуют такие два ребра $f, g \in F$, что $(e; f, g)$ образуют треугольник типа Δ ; в этом случае $\mathcal{Q}_3(e, F)$ оказывается вложенным в событие $\mathcal{Q}_7(e; f, g)$ (см. определение последнего события в (47));

4) если предыдущие ситуации не выполнены, то остается только два варианта: либо $(e, F) \in \text{CONF1}$, либо $(e, F) \in \text{CONF2}$.

Следовательно, имеет место соотношение

$$\bigcup_{\substack{\exists F \in \binom{E'(e)}{t-1}: \\ F \in \widehat{F}(S)}} \mathcal{Q}_3(e, F) \subset \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t-1}: (e, F) \in \text{CONF1}} \mathcal{Q}_3(e, F) \cup \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t-1}: (e, F) \in \text{CONF2}} \mathcal{Q}_3(e, F)$$

$$\bigcup_{\substack{A, B \in E(e): \\ (e; A, B) \text{ типа } \Delta}} \mathcal{Q}_7(e; A, B) \cup \bigcup_{f \neq e: |e \cap f| \geq 6} \mathcal{Q}_5(e, f) \cup \bigcup_{f \neq e: 2 \leq |e \cap f| \leq 5} \mathcal{Q}_6(e, f). \quad (53)$$

Для события $\mathcal{F}$ в силу (51)–(53) получаем вложение

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \subset & \bigcup_{e \in E} \left\{ \mathcal{Q}_0(e) \cup \mathcal{Q}_1(e) \cup \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t}: (e, F) \in \text{CONF1}} \mathcal{Q}_2(e, F) \right. \\ & \cup \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t}: (e, F) \in \text{CONF2}} \mathcal{Q}_2(e, F) \cup \bigcup_{\substack{A, B \in E(e): \\ (e; A, B) \text{ типа } \Delta}} \mathcal{Q}_4(e, A, B) \\ & \cup \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t-1}: (e, F) \in \text{CONF1}} \mathcal{Q}_3(e, F) \cup \bigcup_{F \in \binom{E(e)}{t-1}: (e, F) \in \text{CONF2}} \mathcal{Q}_3(e, F) \\ & \left. \cup \bigcup_{\substack{A, B \in E(e): \\ (e; A, B) \text{ типа } \Delta}} \mathcal{Q}_7(e; A, B) \cup \bigcup_{f \neq e: |e \cap f| \geq 6} \mathcal{Q}_5(e, f) \cup \bigcup_{f \neq e: 2 \leq |e \cap f| \leq 5} \mathcal{Q}_6(e, f) \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Далее нам понадобится классическое утверждение, носящее название *локальной леммы*. Впервые оно было доказано в работе [12]. Мы сформулируем данную теорему в специальном случае, удобном для дальнейших рассуждений.

ТЕОРЕМА 5. Пусть на некотором вероятностном пространстве заданы события $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N$. Пусть $S_1, \dots, S_N$ – такие подмножества множества $\mathcal{R}_N = \{1, \dots, N\}$, что для любого $i = 1, \dots, N$ событие $\mathcal{B}_i$ не зависит от алгебры, порожденной событиями $\{\mathcal{B}_j, j \in \mathcal{R}_N \setminus S_i\}$. Если для каждого $i = 1, \dots, N$ выполнены неравенства

$$P(\mathcal{B}_i) < \frac{1}{2}, \quad \sum_{j \in S_i \setminus \{i\}} P(\mathcal{B}_j) \leq \frac{1}{4}, \quad (55)$$

то $P(\bigcap_{j=1}^N \overline{\mathcal{B}_j}) \geq \prod_{j=1}^N (1 - 2P(\mathcal{B}_i)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти, например, в книге [16].

Рассмотрим систему событий Ψ , состоящую из всех событий $\mathcal{Q}$, принадлежащих одному из следующих восьми типов:

- 1) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0(e)$ для некоторого ребра e ;
- 2) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1(e)$ для некоторого ребра e ;
- 3) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_2(e, F)$ для некоторого ребра e и $F \in \binom{E(e)}{t}$, причем $(e, F) \in \text{CONF1}$ или $(e, F) \in \text{CONF2}$;
- 4) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_3(e, F)$ для некоторого ребра e и $F \in \binom{E(e)}{t-1}$, причем $(e, F) \in \text{CONF1}$ или $(e, F) \in \text{CONF2}$;
- 5) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_4(e; A, B)$ для некоторого ребра e и $A, B \in E(e)$, причем $(e; A, B)$ – треугольник типа Δ ;
- 6) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_5(e, f)$ для некоторых ребер e и f , причем $|e \cap f| \geq 6$;

7) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_6(e, f)$ для некоторых ребер e и f , причем $2 \leq |e \cap f| \leq 5$;

8) $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_7(e; A, B)$ для некоторого ребра e и $A, B \in E(e)$, причем $(e; A, B)$ – треугольник типа Δ .

В силу (54) выполнено неравенство

$$P(\mathcal{F}) \leq P\left(\bigcup_{\mathcal{Q} \in \Psi} \mathcal{Q}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{\mathcal{Q} \in \Psi} \overline{\mathcal{Q}}\right). \quad (56)$$

Мы покажем, что вероятность события $\bigcap_{\mathcal{Q} \in \Psi} \overline{\mathcal{Q}}$ строго больше нуля. Согласно локальной лемме (см. теорему 5) достаточно для каждого $\mathcal{Q} \in \Psi$ предъявить такую систему событий $\Psi_{\mathcal{Q}} \subset \Psi$, чтобы $\mathcal{Q}$ и алгебра, порожденная $\{\mathcal{Q} \in \Psi \setminus \Psi_{\mathcal{Q}}\}$, были независимы, а также чтобы выполнялись неравенства, аналогичные (55):

$$P(\mathcal{Q}) < \frac{1}{2}, \quad \sum_{B \in \Psi_{\mathcal{Q}} \setminus \{\mathcal{Q}\}} P(B) \leq \frac{1}{4}. \quad (57)$$

Прежде чем строить системы событий $\Psi_{\mathcal{Q}}$, мы оценим суммы некоторых вероятностей, которые нам понадобятся далее.

4.9. Вспомогательная аналитика. Часть 1. Рассмотрим произвольное ребро X гиперграфа H . Оценим некоторые суммы вероятностей событий, связанных с этим ребром.

1. Сколько существует ребер $e \in E$ с условием $e \cap X \neq \emptyset$? Ребра e и X – это арифметические прогрессии из V , поэтому согласно лемме 2 таких ребер будет не более чем $d + 1$. Тогда в силу оценок (19) и (22) получаем, что для любого $X \in E$

$$\begin{aligned} & \sum_{f \in E: f \cap X \neq \emptyset} (P(\mathcal{Q}_0(f)) + P(\mathcal{Q}_1(f))) \\ & \leq (d + 1)r(r - 1) \left(\frac{p}{r}\right)^n + (d + 1)r^{1-n}(1 - q)^{n-t}(nq)^t = W_1. \end{aligned} \quad (58)$$

2. Посчитаем число событий типа $\mathcal{Q}_2(e, F)$, для которых $(e, F) \in \text{CONF1}$, $|F| = t$ и $\{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset$. Если $e \cap X \neq \emptyset$, то ребро e можно выбрать не более чем $d + 1$ способами, а набор F – не более чем $\binom{d}{t}$ способами. Если же некоторое $f \in F$ имеет непустое пересечение с X , то для f существует не более $d + 1$ вариантов, для e – не более d вариантов, а остальные ребра F можно будет выбрать не более чем $\binom{d-1}{t-1}$ способами. Следовательно, всего будет не более чем $(d + 1)\binom{d}{t}(t + 1)$ событий $\mathcal{Q}_2(e, F)$ с указанными свойствами. Тогда в силу оценки (49) вероятности события $\mathcal{Q}_2(e, F)$ получаем, что для любого $X \in E$ выполнено неравенство

$$\sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF1}: \\ \{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} P(\mathcal{Q}_2(e, F)) \leq (d + 1) \binom{d}{t} (t + 1) q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)} = W_2. \quad (59)$$

Аналогично, используя (50), получаем оценку суммы вероятностей событий $\mathcal{Q}_3(e, F)$, для которых $(e, F) \in \text{CONF1}$, $|F| = t - 1$ и $\{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset$:

$$\sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF1}: \\ \{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} P(\mathcal{Q}_3(e, F)) \leq (d + 1) \binom{d}{t-1} t r^{-(n-1)t} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1 + q)^n = W_3. \quad (60)$$

3. Теперь рассмотрим события $\mathcal{Q}_4(A; B, C)$ для тройки $(A; B, C)$ – треугольника типа Δ – с условием $X \cap \{A \cup B \cup C\} \neq \emptyset$. Предположим сначала, что $X \cap A \neq \emptyset$. Тогда для A существует не более $d + 1$ вариантов, для ребра B – не более d вариантов. Ребро C должно пересекать и A , и B , причем по разным вершинам, поэтому согласно лемме 3 прогрессию C с такими условиями можно будет выбрать не более чем n^4 способами. Если X пересекает B или C , то первое ребро, как и ранее, выбирается $d + 1$ способами, ребро A – d способами, а третье ребро – n^4 способами. Следовательно, всего будет не более $3(d + 1)dn^4$ событий. Из оценки (42) получаем неравенство

$$\sum_{\substack{(A; B, C) \text{ типа } \Delta \\ \{A \cup B \cup C\} \cap X \neq \emptyset}} P(\mathcal{Q}_4(A; B, C)) \leq 3(d + 1)dn^4 r^{2t-1-5n/2} \binom{2n-2}{2t-4} = W_4. \quad (61)$$

Из оценки общего числа треугольников типа Δ также следует (в силу (48)), что

$$\sum_{\substack{(A; B, C) \text{ типа } \Delta \\ \{A \cup B \cup C\} \cap X \neq \emptyset}} P(\mathcal{Q}_7(A; B, C)) \leq 3(d + 1)dn^4(1 + q)^n r^{4-5n/2} p^2 = W_7. \quad (62)$$

4. Оценим число событий $\mathcal{Q}_5(A, B)$, удовлетворяющих условиям $|A \cap B| \geq 6$ и $\{A \cup B\} \cap X \neq \emptyset$. Ясно, что ребро, с которым пересекается X , можно выбрать не более чем $d + 1$ способами, а второе ребро в силу леммы 3 – не более чем $n^4/2$ способами. При этом можно сначала выбирать A в качестве ребра, с которым пересекается X , а можно, наоборот, сначала выбирать B . Таким образом, всего будет не более $(d + 1)n^4$ событий с указанными свойствами. Следовательно, из (44) получаем неравенство

$$\sum_{\substack{A \neq B: |A \cap B| \geq 6 \\ \{A \cup B\} \cap X \neq \emptyset}} P(\mathcal{Q}_5(A, B)) \leq (d + 1)n^4 r^{2-n} p^6 = W_5. \quad (63)$$

Рассуждая аналогично и используя (46), получаем оценку суммы вероятностей событий $\mathcal{Q}_6(A, B)$ для пар ребер (A, B) , удовлетворяющих условиям $2 \leq |A \cap B| \leq 5$ и $\{A \cup B\} \cap X \neq \emptyset$:

$$\sum_{\substack{A \neq B: 2 \leq |A \cap B| \leq 5 \\ \{A \cup B\} \cap X \neq \emptyset}} P(\mathcal{Q}_6(A, B)) \leq (d + 1)n^4 r^{7-2n} p^2 (1 + q)^n = W_6. \quad (64)$$

5. Осталось рассмотреть события $\mathcal{Q}_2(e, F)$ и $\mathcal{Q}_3(e, F)$, когда пара (e, F) является конфигурацией второго типа (см. п. 4.7, пп. 6). Что представляет собой такая конфигурация? Все ребра $f \in F$ пересекают e по одной вершине, причем по разным вершинам (т.е. $e \cap f \cap g = \emptyset$ для любых $f, g \in F$). Кроме того, для любой пары $f, g \in F$ либо $|f \cap g| = 0$, либо $|f \cap g| > n/2$. Предположим, что $|f_1 \cap f_2| > n/2$. Может ли так случиться, что еще для некоторого третьего ребра $f_3 \in F$ также выполнено $|f_1 \cap f_3| > n/2$? Напомним, что для двух арифметических прогрессий одинаковой длины пересечение более чем по половине

элементов означает совпадение разностей, т. е. их объединение – это арифметическая прогрессия большой длины. Таким образом, если $|f_1 \cap f_2| > n/2$ и $|f_1 \cap f_3| > n/2$, то все эти ребра являются частями большой арифметической прогрессии и, следовательно, одно ребро содержится в объединении двух других. Пусть, например, $f_1 \subset f_2 \cup f_3$. Тогда вершина из пересечения $e \cap f_1$ принадлежит либо f_2 , либо f_3 , что противоречит строению конфигурации второго типа (см. п. 4.7, пп. 6). Значит, если $|f_1 \cap f_2| > n/2$, то для любого третьего ребра $f_3 \in F$ выполнено $(f_1 \cup f_2) \cap f_3 = \emptyset$. В итоге в конфигурации (e, F) второго типа набор ребер F разбивается на непересекающиеся подмножества, каждое из них состоит либо из одного ребра, либо из пары плотно пересекающихся (больше чем по $n/2$ вершинам) ребер, и, кроме того, ребра из разных подмножеств не имеют общих вершин.

Теперь мы готовы рассмотреть события $\mathcal{Q}_2(e, F)$, для которых $(e, F) \in \text{CONF2}$ и $\{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset$. Предположим сначала, что $e \cap X \neq \emptyset$. Тогда из оценки (28) и проведенного анализа конфигураций второго типа получаем неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF2}: \\ |F|=t, e \cap X \neq \emptyset}} \mathbb{P}(\mathcal{Q}_2(e, F)) &\leq \sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF2}: \\ |F|=t, e \cap X \neq \emptyset}} q^t r^{-(n-1)(t+1)+\Lambda(F)} (nq)^{t(t-2)} \\ &= q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)} \sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF2}: \\ |F|=t, e \cap X \neq \emptyset}} r^{\Lambda(F)} \\ &\leq q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)} (d+1) \frac{1}{t!} \sum_{k=1}^{t/2} \frac{t!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil+1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-2k}. \quad (65) \end{aligned}$$

Поясним последнее неравенство в (65). Ребро e можно выбрать не более чем $d+1$ способами. Далее, наборы F были не упорядочены. Мы перейдем к суммированию по упорядоченным наборам, поэтому возникает множитель $(t!)^{-1}$. В конфигурации второго типа множество F разбито на непересекающиеся подмножества, каждое из них состоит либо из одного ребра, либо из пары ребер, причем хотя бы одна пара должна существовать (иначе это будет уже конфигурация первого типа). Пусть пар ровно k , $1 \leq k \leq t/2$. Разбить на k пар и $t-2k$ одиночных ребер можно $t!/2^k$ способами. Каждое одиночное ребро не дает вклада в функцию $\Lambda(F)$, потому что не пересекается с другими ребрами F , а каждая пара (f, g) дает вклад $|f \cap g|$. Для каждого одиночного ребра существует не более d вариантов. В каждой паре (f, g) для первого ребра f существует не более d вариантов выбора, а второе ребро g должно удовлетворять условию $|f \cap g| > n/2$. Для каждого $s \in (n/2, n-1]$ в силу леммы 4 можно выбрать не более двух ребер g с условием $|f \cap g| = s$. Таким образом, мы обосновали неравенство

$$\sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF2}: \\ |F|=t, e \cap X \neq \emptyset}} r^{\Lambda(F)} \leq (d+1) \frac{1}{t!} \sum_{k=1}^{t/2} \frac{t!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil+1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-2k}, \quad (66)$$

из которого и следует оценка (65).

Теперь рассмотрим случай, когда $\{\bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset$. Выделенное ребро f_0 , с которым пересекается X , можно выбрать не более чем $d + 1$ способами, а ребро e в конфигурации (e, F) – не более чем d способами. Далее, для любого набора F с условием $(e, F) \in \text{CONF2}$, содержащего f_0 , выделенное ребро f_0 либо является одиночным, либо принадлежит плотно пересекающейся паре ребер. Тогда получаем неравенство

$$\sum_{\substack{(e, F) \in \text{CONF2}: |F|=t \\ \{\bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} r^{\Lambda(F)} \leq (d+1)d \frac{1}{t!} \left(t \sum_{k=1}^{(t-1)/2} \frac{(t-1)!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-1-2k} \right. \\ \left. + t(t-1)2 \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right) \sum_{k=0}^{(t-2)/2} \frac{(t-2)!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-2-2k} \right). \quad (67)$$

Поясним полученное соотношение (67). Первая сумма по k отвечает случаю одиночного ребра f_0 , оно может иметь t различных номеров в упорядоченном наборе из t ребер и вклад в функцию $\Lambda(F)$ не дает. Вторая сумма по k отвечает случаю, когда f_0 принадлежит паре плотно пересекающихся ребер. Номера для пары можно выбрать $t(t-1)$ способами и для каждого $s > n/2$ в силу леммы 4 можно выбрать не более двух ребер g с условием $|f_0 \cap g| = s$. При этом вклад в функцию $\Lambda(F)$ будет равен s .

Оценим правые части соотношений (66) и (67). Для правой части (66) имеем

$$(d+1) \frac{1}{t!} \sum_{k=1}^{t/2} \frac{t!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-2k} \leq (d+1)d^t \sum_{k=1}^{t/2} \left(\frac{r^n}{(r-1)d} \right)^k \\ \leq (d+1)d^t \sum_{k=1}^{t/2} \left(\frac{2r^{n-1}}{d} \right)^k \leq 2(d+1)d^{t-1}r^{n-1} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d} \right)^{-1}. \quad (68)$$

Для правой части (67) получаем неравенство

$$(d+1)d \frac{1}{t!} \left(t \sum_{k=1}^{(t-1)/2} \frac{(t-1)!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-1-2k} \right. \\ \left. + t(t-1)2 \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right) \sum_{k=0}^{(t-2)/2} \frac{(t-2)!}{2^k} (2d)^k \left(\sum_{s=\lceil n/2 \rceil + 1}^{n-1} r^s \right)^k d^{t-2-2k} \right) \\ \leq (d+1)d^{t-1}2r^{n-1} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d} \right)^{-1} + (d+1)d^{t-1}4r^{n-1} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d} \right)^{-1} \\ = 6(d+1)d^{t-1}r^{n-1} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d} \right)^{-1}. \quad (69)$$

В итоге из неравенств (65), (67)–(69), а также из доказанного ранее соотношения (28) получаем следующую оценку сумм вероятностей событий $\mathcal{Q}_2(e, F)$,

для которых $(e, F) \in \text{CONF2}$ и $\{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t \\ \{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_2(e, F)) \\
 & \leq \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t \\ e \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_2(e, F)) + \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t \\ \{\bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_2(e, F)) \\
 & \leq q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)} 2(d+1) d^{t-1} r^{n-1} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} \\
 & \quad + q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)} \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: \\ \{\bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} r^{\Lambda(F)} \\
 & \leq 8(d+1) d^{t-1} q^t r^{-(n-1)t} (nq)^{t(t-2)} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} = W_8. \tag{70}
 \end{aligned}$$

6. Рассмотрим событие $\mathcal{Q}_3(e, F)$, при котором пара (e, F) является конфигурацией второго типа. В силу оценки (40) и проведенного анализа конфигураций второго типа получаем неравенства

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t-1 \\ \{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_3(e, F)) \\
 & \leq \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t-1 \\ e \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_3(e, F)) + \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t-1 \\ \{\bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_3(e, F)) \\
 & \leq r^{1-nt} (r-1)^{t-1} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \left(\sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t-1 \\ e \cap X \neq \emptyset}} r^{\Lambda(F)} \left(\frac{r}{r-1}\right)^{|U(F) \cap e|} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t-1 \\ \{\bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} r^{\Lambda(F)} \left(\frac{r}{r-1}\right)^{|U(F) \cap e|} \right).
 \end{aligned}$$

Для любой конфигурации второго типа (e, F) выполнены соотношения $|U(F) \cap e| = |\{\bigcup_{f \in F} f\} \cap e| = |F|$. Используя этот факт и оценки (66)–(69), всюду в которых заменяем t на $t-1$, получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{(e,F) \in \text{CONF2}: |F|=t-1 \\ \{e \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap X \neq \emptyset}} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_3(e, F)) \leq r^{1-nt} (r-1)^{t-1} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \\
 & \quad \times \left(\frac{r}{r-1}\right)^{t-1} 8(d+1) d^{t-2} r^{n-1} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} \\
 & = 8(d+1) d^{t-2} r^{-(n-1)(t-1)} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} = W_9. \tag{71}
 \end{aligned}$$

4.10. Выбор систем событий Ψ_B . Событие $B \in \Psi$ может принадлежать одному из пяти следующих классов.

Класс 1: $B = Q_i(e)$ для некоторого $e \in E$ и $i \in \{0, 1\}$. Такое событие B в силу (18) и (21) лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in e\}$. Тогда оно не зависит от алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus e\}$ и случайными множествами $\{\Theta(f, Y) : f \cap e = \emptyset, Y \subset f\}$.

В качестве Ψ_B возьмем все события $Q_0(f)$ и $Q_1(f)$, если $f \cap e \neq \emptyset$; все события $Q_4(A; B, C)$ и $Q_7(A; B, C)$, если $\{A \cup B \cup C\} \cap e \neq \emptyset$; все события $Q_5(A, B)$ и $Q_6(A, B)$, если $\{A \cup B\} \cap e \neq \emptyset$; все события $Q_2(g, F)$ и $Q_3(g, F)$, если $\{g \cup \bigcup_{f \in F}\} \cap e \neq \emptyset$ и (g, F) – конфигурация первого или второго типа (см. п. 4.7, пп. 6). Из определений событий $Q_0(f)$, $Q_1(f)$, $Q_4(A; B, C)$, $Q_7(A; B, C)$, $Q_5(A, B)$, $Q_6(A, B)$, $Q_2(g, F)$, $Q_3(g, F)$ (см. соответственно (18), (21), (41), (47), (43), (45), (25), (36)) следует, что при таком выборе Ψ_B событие B не зависит от алгебры, порожденной $\{Q \in \Psi \setminus \Psi_B\}$.

Проверим выполнение неравенства (57). В силу универсальных оценок (58)–(64), (70), (71), обоснованных в п. 4.9, получаем неравенство

$$\sum_{Q \in \Psi_B \setminus \{B\}} P(Q) \leq W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9 = W_0. \quad (72)$$

Класс 2: $B = Q_i(A; B, C)$ для некоторых ребер $A, B, C \in E$, которые образуют треугольник типа Δ , и $i \in \{4, 7\}$. Такое событие B в силу (41) и (47) лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in A \cup B \cup C\}$. Тогда оно не зависит от алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus \{A \cup B \cup C\}\}$ и случайными множествами $\{\Theta(f, Y) : f \cap \{A \cup B \cup C\} = \emptyset, Y \subset f\}$.

В качестве Ψ_B возьмем все события $Q_0(f)$ и $Q_1(f)$, если $f \cap \{A \cup B \cup C\} \neq \emptyset$; все события $Q_4(A_1; B_1, C_1)$ и $Q_7(A_1; B_1, C_1)$, если $\{A_1 \cup B_1 \cup C_1\} \cap \{A \cup B \cup C\} \neq \emptyset$; все события $Q_5(A_1, B_1)$ и $Q_6(A_1, B_1)$, если $\{A_1 \cup B_1\} \cap \{A \cup B \cup C\} \neq \emptyset$; все события $Q_2(g, F)$ и $Q_3(g, F)$, если (g, F) – конфигурация первого или второго типа и $\{g \cup \bigcup_{f \in F}\} \cap \{A \cup B \cup C\} \neq \emptyset$. Ясно, что при таком выборе Ψ_B событие B не зависит от алгебры, порожденной $\{Q \in \Psi \setminus \Psi_B\}$.

Проверим выполнение неравенства (57). В силу универсальных оценок (58)–(64), (70), (71) и того факта, что B зависит от трех ребер, получаем неравенство

$$\sum_{Q \in \Psi_B \setminus \{B\}} P(Q) \leq 3(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9) = 3W_0. \quad (73)$$

Класс 3: $B = Q_5(A, B)$ для некоторых ребер $A, B \in E$ с условием $|A \cap B| \geq 6$ или $B = Q_6(A, B)$ для некоторых ребер $A, B \in E$ с условием $2 \leq |A \cap B| \leq 5$. Такое событие B в силу определений (43) и (45) лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in A \cup B\}$. Тогда оно не зависит от алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus \{A \cup B\}\}$ и случайными множествами $\{\Theta(f, Y) : f \cap \{A \cup B\} = \emptyset, Y \subset f\}$.

В качестве Ψ_B возьмем все события $Q_0(f)$ и $Q_1(f)$, если $f \cap \{A \cup B\} \neq \emptyset$; все события $Q_4(A_1; B_1, C_1)$ и $Q_7(A_1; B_1, C_1)$, если $\{A_1 \cup B_1 \cup C_1\} \cap \{A \cup B\} \neq \emptyset$; все события $Q_5(A_1, B_1)$ и $Q_6(A_1, B_1)$, если $\{A_1 \cup B_1\} \cap \{A \cup B\} \neq \emptyset$; все события

$\mathcal{Q}_2(g, F)$ и $\mathcal{Q}_3(g, F)$, если (g, F) – конфигурация первого или второго типа и $\{g \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap \{A \cup B\} \neq \emptyset$. Ясно, что при таком выборе Ψ_B событие $\mathcal{B}$ не зависит от алгебры, порожденной $\{\mathcal{Q} \in \Psi \setminus \Psi_B\}$.

Проверим выполнение неравенства (57). В силу универсальных оценок (58)–(64), (70), (71) и того факта, что $\mathcal{B}$ зависит от двух ребер, получаем неравенство

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Psi_B \setminus \{\mathcal{B}\}} P(\mathcal{Q}) \leq 2(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9) = 2W_0. \quad (74)$$

Класс 4: $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_2(e, F)$ для некоторых $e \in E$ и $F \in \binom{E(e)}{t}$, причем (e, F) является конфигурацией первого или второго типа. Удобно ввести обозначение $U(e, F) = e \cup \bigcup_{f \in F} f$. Такое событие $\mathcal{B}$ в силу (25) лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in U(e, F)\}$. Тогда оно, очевидно, не зависит от алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus U(e, F)\}$ и случайными множествами $\{\Theta(f, Y) : f \cap U(e, F) = \emptyset, Y \subset f\}$.

В качестве Ψ_B возьмем все события $\mathcal{Q}_0(f)$ и $\mathcal{Q}_1(f)$, если $f \cap U(e, F) \neq \emptyset$; все события $\mathcal{Q}_4(A; B, C)$ и $\mathcal{Q}_7(A; B, C)$, если $\{A \cup B \cup C\} \cap U(e, F) \neq \emptyset$; все события $\mathcal{Q}_5(A, B)$ и $\mathcal{Q}_6(A, B)$, если $\{A \cup B\} \cap U(e, F) \neq \emptyset$; все события $\mathcal{Q}_2(g, F)$ и $\mathcal{Q}_3(g, F)$, если (g, F) – конфигурация первого или второго типа и $\{g \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap U(e, F) \neq \emptyset$. Ясно, что при таком выборе Ψ_B событие $\mathcal{B}$ не зависит от алгебры, порожденной $\{\mathcal{Q} \in \Psi \setminus \Psi_B\}$.

Проверим выполнение неравенства (57). В силу универсальных оценок (58)–(64), (70), (71) и того факта, что $\mathcal{B}$ зависит от $t + 1$ ребер, получаем неравенство

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Psi_B \setminus \{\mathcal{B}\}} P(\mathcal{Q}) \leq (t+1)(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9) = (t+1)W_0. \quad (75)$$

Класс 5: Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_3(e, F)$ для некоторых $e \in E$ и $F \in \binom{E(e)}{t-1}$, причем (e, F) является конфигурацией первого или второго типа. Как и в случае класса 4, удобно ввести обозначение $U(e, F) = e \cup \bigcup_{f \in F} f$. Такое событие $\mathcal{B}$ в силу (36) лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in U(e, F)\}$ и случайными подмножествами $\{\Theta(e, Y) : Y \subset e\}$. Ясно, что $\mathcal{B}$ не зависит от алгебры, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus U(e, F)\}$ и случайными множествами $\{\Theta(f, Y) : f \cap U(e, F) = \emptyset, Y \subset f\}$.

В качестве Ψ_B возьмем все события $\mathcal{Q}_0(f)$ и $\mathcal{Q}_1(f)$, если $f \cap U(e, F) \neq \emptyset$; все события $\mathcal{Q}_4(A; B, C)$ и $\mathcal{Q}_7(A; B, C)$, если $\{A \cup B \cup C\} \cap U(e, F) \neq \emptyset$; все события $\mathcal{Q}_5(A, B)$ и $\mathcal{Q}_6(A, B)$, если $\{A \cup B\} \cap U(e, F) \neq \emptyset$; все события $\mathcal{Q}_2(g, F)$ и $\mathcal{Q}_3(g, F)$, если (g, F) – конфигурация первого или второго типа и $\{g \cup \bigcup_{f \in F} f\} \cap U(e, F) \neq \emptyset$. При таком выборе Ψ_B событие $\mathcal{B}$ не зависит от алгебры, порожденной $\{\mathcal{Q} \in \Psi \setminus \Psi_B\}$.

Проверим выполнение неравенства (57). В силу универсальных оценок (58)–(64), (70), (71) и того факта, что $\mathcal{B}$ зависит от t ребер, получаем неравенство

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Psi_B \setminus \{\mathcal{B}\}} P(\mathcal{Q}) \leq t(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9) = tW_0. \quad (76)$$

Подведем промежуточные итоги. Из оценок (72)–(76) следует, что для обоснования пары неравенств (57) достаточно проверить, что

$$(t+1)W_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (77)$$

Выполнение второго неравенства в (57) при этом очевидно, а первое неравенство в (57) следует из того, что величина W_0 мажорирует правые части оценок (19), (22), (28), (40), (42), (44), (46), (48). Для доказательства (77) понадобятся несложные оценки, содержащиеся в следующем пункте.

4.11. Вспомогательная аналитика. Часть 2. Сначала установим неравенство для t , которое нам понадобится далее. Из определения параметра t (см. (6)) и условий (7), (8) получаем соотношение

$$t \leq \frac{t^2}{k} \leq \frac{\ln n}{ck \ln(\alpha \ln n)} \leq \frac{\ln n}{ck \ln 2} \leq \frac{3 \ln n}{2ck}. \quad (78)$$

Кроме того, отметим, что из условий (10) вытекают неравенства

$$\alpha > 1, \quad k \geq \alpha + 1 > 2, \quad t \geq \lceil k \rceil \geq 3. \quad (79)$$

Величина W_0 (см. (72)) состоит из девяти слагаемых W_i , $i = 1, \dots, 9$. Мы рассмотрим и оценим эти слагаемые, умноженные на $t+1$, отдельно.

1. Величина W_1 имеет вид $W_1 = (d+1)r(r-1)(p/r)^n + (d+1)r^{1-n} \times (1-q)^{n-t}(nq)^t$. Тогда в силу определения (14) величины d и условий (7) и (8) первое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} (t+1)(d+1)r(r-1)\left(\frac{p}{r}\right)^n &\leq (t+1)nr^{n-1}r^{1-n}(r-1)\left(\frac{q}{r-1}\right)^n \\ &= (t+1)n(r-1)^{1-n}q^n \leq n^2 2^{-n}. \end{aligned} \quad (80)$$

Оценим второе слагаемое. Учитывая выбор параметра q в (6) и соотношения (8), (78) и (79), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} (t+1)(d+1)r^{1-n}(1-q)^{n-t}(nq)^t &\leq \frac{13}{(t+1)^3} e^t n e^{-q(n-t)} (\alpha \ln n)^t \\ &= \frac{13}{(t+1)^3} \exp\{t + \ln n - \alpha \ln n + qt + t \ln(\alpha \ln n)\} \\ &\leq \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} \exp\left\{\frac{3}{2ck} \ln n + \ln n - \alpha \ln n + \frac{1}{2}t + \frac{1}{ck} \ln n\right\} \\ &\leq \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} \exp\left\{\frac{3}{2ck} \ln n + \ln n - \alpha \ln n + \frac{3}{4ck} \ln n + \frac{1}{ck} \ln n\right\} \\ &= \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} \exp\left\{\frac{13}{4ck} \ln n + \ln n - \alpha \ln n\right\} = \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} n^{\gamma_1}. \end{aligned} \quad (81)$$

В пояснениях нуждается лишь первое неравенство в (81). Функция $13e^t/(t+1)^4$ возрастает при $t > 3$, поэтому $13e^t/(t+1)^4 \geq 13e^3/(3+1)^4 > 1$. Отсюда получаем, что для $t \geq 3$ выполнено $(t+1) \leq 13e^t/(t+1)^3$.

Из оценок (80) и (81) получаем, что в условиях теоремы 4 выполняется неравенство

$$(t+1)W_1 \leq n^2 2^{-n} + \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} n^{\gamma_1}. \quad (82)$$

2. Теперь рассмотрим величину W_2 (см. (59)). Нам понадобятся некоторые предварительные соотношения. Во-первых, выполнены неравенства

$$(t+1)^2(d+1) \binom{d}{t} \leq (t+1)^2(d+1) \frac{d^t}{t!} \leq (t+1)^2(d+1) \left(\frac{(d+1)e}{t} \right)^t \leq k_1(d+1)^{t+1}, \quad (83)$$

где $k_1 = (\lceil k \rceil + 1)^2(e/\lceil k \rceil)^{\lceil k \rceil}$. Последнее неравенство в (83) верно в силу того, что функция $(t+1)^2(e/t)^t$ строго убывает при $t \geq \lceil k \rceil \geq 3$ (см. (79)). Во-вторых, из выбора параметров q и t (см. (6)) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} q^t(nq)^{t(t-2)} &= n^{-t}(nq)^{t(t-1)} \leq n^{-t}(nq)^{t^2} = n^{-t} \exp\{t^2 \ln(\alpha \ln n)\} \\ &\leq n^{-t} \exp\left\{\frac{1}{c} \ln n\right\} = n^{-t+1/c}. \end{aligned} \quad (84)$$

В итоге из (83) и (84), а также из начального выбора параметра d (см. (14)) получаем оценку сверху величины $(t+1)W_2$:

$$\begin{aligned} (t+1)W_2 &= (d+1) \binom{d}{t} (t+1)^2 q^t r^{-(n-1)(t+1)} (nq)^{t(t-2)} \\ &\leq k_1(d+1)^{t+1} r^{-(n-1)(t+1)} n^{1/c-t} \leq k_1 n^{(t+1)(1-k/t)} \beta^{(t+1)/t} n^{1/c-t} \\ &\leq k_1 \beta n^{t+1-(k(t+1)/t)} n^{1/c-t} = k_1 \beta n^{1+1/c-k-k/t} \\ &\leq k_1 \beta n^{1+1/c-k} = k_1 \beta n^{\gamma_2-\alpha}. \end{aligned} \quad (85)$$

3. Оценим величину W_3 (см. (60)). По аналогии с (83) получаем

$$(t+1)(d+1) \binom{d}{t-1} t \leq (t+1)t \left(\frac{de}{t-1} \right)^{t-1} (d+1) \leq (d+1)t \left(\frac{e}{t-1} \right)^{t-1} (t+1)t. \quad (86)$$

Далее, в силу (6) выполнено

$$\frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \leq \left(\frac{t-1}{n} \right)^{t-1} e^{qn} = \left(\frac{t-1}{n} \right)^{t-1} n^\alpha. \quad (87)$$

Наконец, из (86), (87), (78) и (14) получаем оценку сверху величины $(t+1)W_3$:

$$\begin{aligned} (t+1)W_3 &= (t+1)(d+1) \binom{d}{t-1} t r^{-(n-1)t} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \\ &\leq (t+1)t \left(\frac{e}{t-1} \right)^{t-1} (d+1)^t r^{-(n-1)t} \left(\frac{t-1}{n} \right)^{t-1} n^\alpha \\ &\leq (t+1)t e^{t-1} r^{-(n-1)t} n^{t(1-k/t)} \beta r^{-(n-1)t} n^{\alpha+1-t} \leq \beta e^{2t-1} n^{1+\alpha-k} \\ &\leq \frac{\beta}{e} n^{3/(ck)+1+\alpha-k} = \frac{\beta}{e} n^{\gamma_3}. \end{aligned} \quad (88)$$

Поясним два последних неравенства в (88). При $t \geq 3$ (см. (79)) выполнено $t(t+1) < e^t$. Кроме того, из (78) следует, что $e^{2t} \leq n^{3/(ck)}$.

4. Рассмотрим величину W_4 . В силу определения (61) и соотношений (14), (78) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} (t+1)W_4 &= (t+1)3(d+1)dn^4r^{2t-1-5n/2} \binom{2n-2}{2t-4} \\ &\leq 3(t+1)r^{2n-2}n^2n^4r^{2t-1-5n/2} \frac{(2n)^{2t-4}}{(2t-4)!} \leq \frac{3}{8}r^{2t-3-n/2}n^{2t+2}2^{2t} \\ &\leq \frac{3}{8}2^{2t-3-n/2}e^{(2t+2)\ln n+2t\ln 2} \\ &\leq \frac{3}{64}\exp\left\{-\frac{\ln 2}{2}n + \frac{3}{ck}\ln^2 n + \frac{6}{ck}\ln n + 2\ln n\right\} \\ &\leq \frac{1}{16}\exp\left\{-\frac{\ln 2}{2}n + \frac{9}{ck}\ln^2 n + 2\ln n\right\} = \frac{1}{16}n^{(9/(ck))\ln n+2}2^{-n/2}. \quad (89) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались условием $t < n/4$ (см. (7)), а также тем, что функция $(t+1)/(2t-4)!$ не превосходит 2 при $t \geq 3$.

5. Рассмотрим величину W_5 . Из соотношений (63), (14), (78) получаем оценку сверху для $(t+1)W_5$:

$$\begin{aligned} (t+1)W_5 &= (t+1)(d+1)n^4r^{2-n}p^6 \leq (t+1)r^{n-1}nn^4r^{2-n}\left(\frac{\alpha \ln n}{(r-1)n}\right)^6 \\ &\leq \frac{3}{2ck}\ln n \frac{r}{(r-1)^6}(\alpha \ln n)^6n^{-1} \leq \frac{3\alpha^6}{ck}\frac{\ln^6 n}{n}. \quad (90) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $r \leq 2(r-1)$ при $r \geq 2$.

6. Оценим величину $(t+1)W_6$ (см. (64)). Как и в пп. 1–5 воспользуемся соотношениями (14) и (78):

$$\begin{aligned} (t+1)W_6 &= (t+1)2(d+1)n^4r^{7-2n}p^2(1+q)^n \leq \frac{3}{2ck}(\ln n)2n^5r^{6-n}\left(\frac{\alpha \ln n}{(r-1)n}\right)^2n^\alpha \\ &\leq \frac{12\alpha^2}{ck}n^{3+\alpha}r^{4-n}\ln^3 n \leq \frac{12\alpha^2}{ck}n^{3+\alpha}2^{4-n}\ln^3 n. \quad (91) \end{aligned}$$

В предпоследнем неравенстве мы воспользовались оценкой $r \leq 2(r-1)$ при $r \geq 2$, а также тем, что $n > 4t \geq 12$.

7. Рассмотрим величину W_7 . В силу определения (62) и соотношений (14), (78) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} (t+1)W_7 &= (t+1)3(d+1)dn^4r^{4-5n/2}p^2(1+q)^n \\ &\leq 3(t+1)r^{2n-2}n^2n^4r^{4-5n/2}\left(\frac{\alpha \ln n}{(r-1)n}\right)^2n^\alpha \\ &\leq (12\alpha^2)\frac{3}{2ck}(\ln n)r^{-n/2}n^{4+\alpha}\ln^2 n \leq \frac{18\alpha^2}{ck}(\ln n)^3n^{4+\alpha}2^{-n/2}. \quad (92) \end{aligned}$$

8. Рассмотрим величину W_8 (см. (70)). Используя (84), выражения для параметров d , (14), и t , (6), получаем оценку сверху величины $(t+1)W_8$:

$$\begin{aligned}
 (t+1)W_8 &= (t+1)8(d+1)d^{t-1}q^t r^{-(n-1)t}(nq)^{t(t-2)} \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} \\
 &\leq (t+1)(d+1)^t r^{-(n-1)t} n^{1/c-t} e^{-t \ln(\alpha \ln n)} \left(1 - \frac{2}{3 - nr^{1-n}}\right)^{-1} \\
 &\leq 2^t \beta n^{1/c-k} e^{-t \ln(\alpha \ln n)} \left(\frac{3 - nr^{1-n}}{1 - nr^{1-n}}\right) \leq \beta n^{1/c-k} \left(\frac{3 - nr^{1-n}}{1 - nr^{1-n}}\right) \\
 &\leq \beta n^{1/c-k} \left(\frac{3}{1 - 2^{1-n}n}\right). \tag{93}
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались, во-первых, условием (9), из которого следует, что $d \geq 3r^{n-1}$, во-вторых, тем, что из условия (8) следует $\ln(\alpha \ln n) \geq \ln 2$, поэтому $2^t \leq e^{t \ln(\alpha \ln n)}$, в-третьих, очевидным неравенством $r \geq 2$.

9. Остается оценить выражение $(t+1)W_9$ (см. (71)). Здесь мы будем действовать аналогично оценке величины $(t+1)W_3$. С помощью (87), (78) и (14) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 (t+1)W_9 &= (t+1)(d+1)d^{t-2}r^{-(n-1)(t-1)} \frac{1}{\binom{n}{t-1}} (1+q)^n \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} \\
 &\leq (t+1)(d+1)^{t-1} r^{-(n-1)(t-1)} \left(\frac{t-1}{n}\right)^{t-1} n^\alpha \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} \\
 &\leq t^t n^{-(t-1)k/t} \beta^{(t-1)/t} n^\alpha \left(1 - \frac{2r^{n-1}}{d}\right)^{-1} \\
 &\leq 2^{t^2} n^{-k+k/t+\alpha} \beta^{(t-1)/t} \left(\frac{3}{1 - 2^{1-n}n}\right) \\
 &\leq \exp\left\{\frac{\ln n}{c \ln(\alpha \ln n)} \ln 2\right\} n^{-k+k/t+\alpha} \beta^{1-1/t} \left(\frac{3}{1 - 2^{1-n}n}\right) \\
 &\leq n^{1/c+1+\alpha-k} \beta^{1-1/t} \left(\frac{3}{1 - 2^{1-n}n}\right) = n^{\gamma_2} \beta^{1-1/t} \left(\frac{3}{1 - 2^{1-n}n}\right). \tag{94}
 \end{aligned}$$

Множитель $(1 - (2r^{n-1})/d)^{-1}$ здесь оценивался точно так же, как в п. 8. Кроме того, мы воспользовались очевидными неравенствами $(t+1)(t-1)^{t-1} \leq t^t \leq 2^{t^2}$, а также тем, что $\alpha \ln n \geq 2$.

4.12. Завершение доказательства теоремы 4. Соберем вместе полученные в предыдущих пунктах оценки слагаемых, входящих в выражение (72) для величины W_0 . Из (82), (85), (88)–(94) получаем неравенства

$$\begin{aligned}
 (t+1)W_0 &\leq 2^{-n}n^2 + \frac{13}{(\lceil k \rceil + 1)^3} n^{\gamma_1} + k_1 \beta n^{\gamma_2-\alpha} + \frac{\beta}{e} n^{\gamma_3} + \frac{1}{16} n^{(9/(ck)) \ln n + 2} 2^{-n/2} \\
 &\quad + \frac{3\alpha^6 \ln^6 n}{ck} + \frac{12\alpha^2}{ck} n^{3+\alpha} 2^{4-n} \ln^3 n + \frac{18\alpha^2}{ck} (\ln n)^3 n^{4+\alpha} 2^{-n/2} \\
 &\quad + (\beta n^{1/c-k} + n^{\gamma_2} \beta^{1-1/t}) \left(\frac{3}{1 - 2^{1-n}n}\right) < \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

последнее из которых выполнено в силу условия (11) теоремы 4. Таким образом, искомое соотношение (77) установлено. Из него следуют необходимые для применения локальной леммы неравенства (57). Согласно локальной лемме вероятность одновременного выполнения дополнений к событиям $\mathcal{B} \in \Psi$ строго больше нуля. Тогда из (56) получаем

$$P(\mathcal{F}) < 1.$$

Итак, мы доказали, что вероятность того, что построенная случайная раскраска $\vec{\zeta}$ не является правильной раскраской вершин гиперграфа H , строго меньше единицы. Значит, $\vec{\zeta}$ является правильной с положительной вероятностью, и $\chi(H) \leq r$.

По построению гиперграф H есть гиперграф H_N , где N выбрано согласно (14), поэтому из (13) получаем неравенство

$$W(n, r) > N = \left\lfloor r^{n-1} n^{-k/t} \beta^{1/t} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\rfloor.$$

Следовательно,

$$W(n, r) \geq N + 1 \geq r^{n-1} n^{-k/t} \beta^{1/t} \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

и искомое неравенство (12) обосновано. Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. B. L. van der Waerden, "Beweis einer Baudetschen Vermutung", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **15** (1927), 212–216.
2. Р. Грэхэм, *Начала теории Рамсея*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: R. L. Graham, *Rudiments of Ramsey theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1981.
3. R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 1990.
4. И. Д. Шкредов, "Теорема Семере́ди и задачи об арифметических прогрессиях", *УМН*, **61**:6 (2006), 111–178; англ. пер.: I. D. Shkredov, "Szemerédi's theorem and problems on arithmetic progressions", *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1101–1166.
5. S. Shelah, "Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers", *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:3 (1988), 683–697.
6. W. T. Gowers, "A new proof of Szemerédi's theorem", *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.
7. R. Graham, J. Solymosi, "Monochromatic equilateral right triangles on the integer grid", *Topics in discrete mathematics*, Algorithms Combin., **26**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 129–132.
8. P. Erdős, R. Radó, "Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set", *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952), 417–439.
9. L. Moser, "Notes on number theory. II. On a theorem of van der Waerden", *Canad. Math. Bull.*, **3** (1960), 23–25.
10. W. M. Schmidt, "Two combinatorial theorems on arithmetic progressions", *Duke Math. J.*, **29**:1 (1962), 129–140.

11. E. R. Berlekamp, “A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions”, *Canad. Math. Bull.*, **11** (1968), 409–414.
12. P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and finite sets* (Keszthely, 1973), North Holland, Amsterdam, 1973, 609–627.
13. Z. Szabó, “An application of Lovasz’ local lemma – a new lower bound for the van der Waerden number”, *Random Structures Algorithms*, **1**:3 (1990), 343–360.
14. J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.
15. Д. А. Шабанов, “О хроматическом числе конечных систем подмножеств”, *Матем. заметки*, **85**:6 (2009), 951–954; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On the chromatic number of finite systems of subsets”, *Math. Notes*, **85**:5–6 (2009), 902–905.
16. Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.

Д. А. ШАБАНОВ (D. A. SHABANOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: shabanov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
09.12.2009