Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Трынин, Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 129–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:48:02

УДК 517.518.85

А. Ю. Трынин

Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби

Описаны классы в пространстве непрерывных функций, для которых имеет место поточечная и равномерная сходимость операторов типа Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши, и интерполяционных многочленов Лагранжа–Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta)$. Получены достаточные условия равносходимости этих интерполяционных процессов.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: интерполяционные процессы, операторы Лагранжа, теорема отсчетов, теория приближения функций.

Введение

Работа посвящена некоторым приложениям операторов лагранжева типа, рассмотренных в [1]–[4], к теории интерполирования функций многочленами Лагранжа–Якоби. Приведем не претендующую на полноту историческую справку об исследованиях в этой области.

Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении, можно найти в классических монографиях [5] и [6].

В [7] рассматриваются некоторые достаточные условия локального характера, обеспечивающие сходимость интерполяционного процесса Лагранжа в данной точке или на отрезке, вложенном в сегмент ортогональности. Выводятся неравенства для расстояния между корнями ортогонального многочлена. Несмотря на то, что в статье рассмотрен достаточно общий случай распределения, относительно которого определяется ортогональность, применительно к интерполированию Лагранжа–Якоби существенно используется тот факт, что с ростом n параметры многочленов Якоби α и β должны оставаться фиксированными.

В работе [8] получены оценки сверху функций Лебега на отрезке $[-1, 1]$ процессов Лагранжа–Якоби в случае $\alpha > -1$ и $\beta > -1$. Г. И. Натансон в [9] сделал ряд уточнений результата С. А. Агаханова [8].

Интерполяционные процессы Лагранжа в случае, когда каждая строка матрицы узлов состоит из нулей многочлена Якоби с параметрами $\alpha_n \in E \subset [-1, 0]$ и $\beta_n \in E \subset [-1, 0]$, зависящими от n , на классах абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченной вариацией рассмотрены в [10]. Интересно то, что основным инструментом исследования поведения многочленов Лагранжа

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-4383.2010.1).

послужило свойство монотонии матрицы узлов. Д. Л. Берман специально отмечает, что результаты получены без использования асимптотических формул для многочленов Якоби.

По мнению автора ряд очень интересных и полезных результатов содержится в работе [11]. Так, в [11, теорема 7] установлена поточечная сходимость интерполяционных многочленов Лагранжа–Якоби ($\alpha > -1, \beta > -1$) на интервале $(-1, 1)$ для непрерывных на $[-1, 1]$ функций ограниченной p -вариации ($1 \leq p < \infty$) в окрестности точки сходимости. А. А. Кельзон [12] заменил в этом результате требование непрерывности интерполируемой функции в каждой точке $[-1, 1]$ на интегрируемость по Риману и непрерывность в точке сходимости. Кроме того, в работе [12] расширены границы параметров многочленов Якоби до $\alpha \geq -1, \beta \geq -1$ и приведены достаточные условия сходимости на концах отрезка $[-1, 1]$.

В [13] получено достаточное условие сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Якоби в случае фиксированных $\alpha > -1, \beta > -1$, являющееся обобщением признака с односторонним условием Дини–Липшица, доказанного в [11, теорема 4].

Работы [14] и [15] посвящены построению примеров функций f :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega_m\left(f, \frac{1}{n}\right) \ln n > 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega_m\left(f, \frac{1}{n}\right) \ln n = \infty,$$

для которых последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице Якоби ($\alpha > -1, \beta > -1$) расходится (ограниченно и не ограниченно соответственно) на множестве второй категории или на заданном счетном множестве. Здесь $\omega_m(f, \cdot)$ обозначает модуль гладкости порядка m .

Результат отрицательного характера опубликован в [16, теорема 2], где установлено существование непрерывной на $[-1, 1]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа–Якоби в случае фиксированных $\alpha > -1, \beta > -1$ неограниченно расходится почти всюду на $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

В. П. Скляр в [17] предложил очень интересные исследования аппроксимативных свойств интерполяционных процессов Лагранжа–Якоби в весовых пространствах.

В случае $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ в [18] получен критерий равномерной сходимости на $[-1, 1]$ интерполяционных процессов Лагранжа–Чебышева, тем самым, полностью описан класс непрерывных функций, для которых алгебраические интерполяционные многочлены по матрице Чебышева равномерно сходятся.

В настоящей работе, в частности, проводится исследование аппроксимативных свойств интерполяционных многочленов Лагранжа–Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, x)$ с узлами в нулях ортогональных многочленов Якоби. При этом каждая строка матрицы узлов интерполяции состоит из нулей многочлена $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ с параметрами α_n, β_n , зависящими от n .

Прежде чем формулировать полученные результаты, договоримся о некоторых обозначениях. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиусом ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0. \quad (1)$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ нули решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y &= 0, \\ y(0, \lambda) &= 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \end{aligned} \quad (2)$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, задачи Коши

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y &= 0, \\ y(0, \lambda) &= 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \end{aligned} \quad (3)$$

попадающие в $[0, \pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \dots < x_{\tilde{n}(\lambda),\lambda} \leq \pi, \quad x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{\tilde{n}(\lambda)+1,\lambda} > \pi. \quad (4)$$

Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{\tilde{n}(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ — нули продолжения решения задачи Коши (2), или (3), после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0, \pi]$ с сохранением ограниченности вариации.

Задачи Коши (2) и (3) в случае, когда $q_\lambda \in L[0, \pi]$, имеют единственное обобщенное решение, которое можно интерпретировать как непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения (см., например, [19, гл. IV, § 1, 2])

$$y(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{h(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \tau)) q_\lambda(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau$$

в случае задачи Коши (2) или

$$y(x, \lambda) = \frac{h(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x - \tau)) q_\lambda(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau$$

для задачи Коши (3). Из теоремы Пикара (см., например, [19, гл. IV, § 1]) следует, что все нули (4) простые, а условие (1) и теорема осцилляции (см., например, [20, гл. 1, § 3, теорема 3.3]), адаптированная к условиям (1) в случае $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\lambda)$, гарантируют их существование для достаточно больших λ . Далее, если не оговорено противное, для краткости будем обозначать $\tilde{n} = \tilde{n}(\lambda)$. Теорема осцилляции, или метод контурного интегрирования, обеспечивает также неограниченное возрастание количества нулей при условии (1), $\tilde{n}(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поэтому корректно определение операторов типа Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши вида (2) или (3) и ставящих в соответствие любой функции $f \in C[0, \pi]$ интерполирующую ее в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^{\tilde{n}}$ непрерывную функцию по правилу

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \quad (5)$$

В [1] получен результат, позволяющий определять наличие или отсутствие аппроксимативной сходимости в точке значений операторов (5). При этом приближаемая функция f должна обладать только условием непрерывности на $[0, \pi]$. Информация о функции f может быть ограничена только ее значениями в узлах $x_{k,\lambda}$, находящихся в окрестности точки, в которой исследуются аппроксимативные свойства (5). Заметим, что из результатов работы [21] следует, что

задача представления функции в качестве предела значений операторов (5) при изменении q_λ и $h(\lambda)$ не устойчива в пространстве непрерывных функций. В [1] описан класс непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций, исчезающих на концах этого отрезка, для которых имеет место равномерная сходимость на $[0, \pi]$, а также класс непрерывных на $[0, \pi]$ функций, для которых имеет место сходимость равномерно внутри интервала $(0, \pi)$ значений операторов (5).

Подбирая соответствующим образом функции q_λ (заметим, что условие (1) является достаточным, но не необходимым для наличия нулей (4)), получаем единое представление в виде оператора (5) различных интерполяционных конструкций лагранжева типа таких, как классические интерполяционные многочлены, кардинальные функции Уиттекера, интерполяционные операторы, построенные по специальным функциям математической физики, и др. Так, например, с точностью до преобразования Лиувилля многочлены Чебышева и многочлены Якоби в случаях $\alpha = \pm \frac{1}{2}$, $\beta = \pm \frac{1}{2}$ (см. [5, гл. VII, § 3] или [6, § 4.24]) являются решениями дифференциальных уравнений задач (2), (3) с потенциалом, удовлетворяющим условию (1).

Кроме того, в [1] предложен ряд модификаций оператора (5). Аналоги некоторых из операторов, рассмотренных в [1], будут получены в настоящей работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. На пространстве непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций f определим *операторы*

$$A_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} (s_{k-1, \lambda}(x) + s_{k, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}), \quad (6)$$

$$\tilde{A}_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \frac{(f(x_{k+1, \lambda}) + f(x_{k, \lambda}))}{2} s_{k, \lambda}(x), \quad (7)$$

$$B_\lambda(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (s_{k+1, \lambda}(x) + s_{k, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}), \quad (8)$$

$$\tilde{B}_\lambda(f, x) = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \frac{(f(x_{k-1, \lambda}) + f(x_{k, \lambda}))}{2} s_{k, \lambda}(x), \quad (9)$$

$$C_\lambda(f, x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} (s_{k+1, \lambda}(x) + 2s_{k, \lambda}(x) + s_{k-1, \lambda}(x)) f(x_{k, \lambda}), \quad (10)$$

$$\tilde{C}_\lambda(f, x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} s_{k, \lambda}(x) (f(x_{k+1, \lambda}) + 2f(x_{k, \lambda}) + f(x_{k-1, \lambda})), \quad (11)$$

где $s_{k, \lambda}(x) := \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k, \lambda}, \lambda)(x - x_{k, \lambda})}$.

Предлагаемые операторы не обладают интерполяционными свойствами, как S_λ , т. е. значения операторов A_λ , B_λ , C_λ и $\tilde{A}_\lambda$, $\tilde{B}_\lambda$, $\tilde{C}_\lambda$ не обязаны совпадать с аппроксимируемой функцией в точках $x_{k, \lambda}$, $0 \leq k \leq \tilde{n}$, $\tilde{n} \in \mathbb{N}$. Однако их аппроксимативные качества существенно менее чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции, поэтому с их помощью можно аппроксимировать произвольный элемент пространства $C[0, \pi]$. Отметим, что эти операторы можно считать “внутренним” аналогом процессов Бернштейна.

В настоящей работе получены критерии равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ (т. е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$) и поточечной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta)$ (после стандартной замены $x = \cos \theta$), а также аналогичные критерии сходимости значений введенных в [1] операторов (5) в случае, когда в качестве $y(x, \lambda)$ берутся функции

$$u_n(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(\cos \theta). \quad (12)$$

Аналогично термину “взвешенная сходимость”, использованному, например, в [5, гл. VII, § 4], для краткости будем называть функции $u_n(\theta)$ “взвешенными” многочленами Якоби. Такие операторы будем обозначать $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta)$. Кроме того, в настоящей работе получена теорема равносходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta)$ и операторов $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta)$. В случае, когда значения параметров $\alpha_n \leq -1$ или $\beta_n \leq -1$ такие, что функции $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ не являются многочленами, в качестве интерполяционного процесса Лагранжа рассматриваем последовательность значений операторов

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(f, x) := \sum_{x_{k,n} \in [-1, 1]} \frac{P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)}{(P_n^{(\alpha_n, \beta_n)})'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}),$$

т. е. таких же, как операторы (5).

§ 1. Формулировки основных результатов

Пусть $\alpha_n > -1$, $\beta_n > -1$; тогда $\{P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}\}_{n=0}^\infty$ – последовательность многочленов такая, что $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ – классический ортогональный на отрезке $[-1, 1]$ многочлен Якоби степени n при каждом $n \in \mathbb{N}$ (см. [5], [6]) для случая $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$. Сделаем стандартную замену переменной $x = \cos \theta$. Тогда дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Якоби $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ с помощью преобразования Лиувилля [6, § 1.8] приводятся к виду (см., например, [5, гл. VII, § 3] или [6, § 4.24, (4.24.2)])

$$u_n''(\theta) + \left(\frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right) u_n(\theta) = 0. \quad (13)$$

Функции $u_n(\theta)$, определяемые в (12), представляют собой решения задачи Коши с уравнением (13) и начальными условиями

$$\begin{aligned} u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right), \\ u_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{d}{d\theta} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(\cos \theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ – классический многочлен Якоби степени n с параметрами α_n, β_n и стандартной нормировкой [6, гл. IV, § 4.1, (4.1.1)]

$$P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(1) = \binom{n + \alpha_n}{n}. \quad (15)$$

Заметим, что условия $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$ обеспечивают суммируемость весовой функции классических ортогональных многочленов Якоби. В силу [6, теорема 4.23.2] при $\alpha_n \leq -1$ или $\beta_n \leq -1$ функции $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ являются многочленами, только когда $\alpha_n \in \mathbb{Z}, \beta_n \in \mathbb{Z}$. Тем не менее, аналитическое продолжение по α и β на всю действительную ось решений уравнения (13) возможно. Вид функции $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ в этом случае описывается формулой [6, (4.21.2)]. Договоримся считать, что функция $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ – классический многочлен Якоби при $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$ и $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ – гипергеометрический ряд в случае, когда выполняется хотя бы одно из условий $\alpha_n \leq -1$ или $\beta_n \leq -1$ [6, (4.21.2)]. В этих двух случаях используем стандартную нормировку (15) и называем функции $u_n(\theta)$ “взвешенными” многочленами Якоби.

Если не оговорено иное, считаем, что последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \beta_n \in \mathbb{R}, \quad \alpha_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad \beta_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Пусть $f \in C[a, b]$, где $[a, b] \subset (0, \pi)$. Доопределим функцию f на отрезке $[0, \pi]$ до непрерывной функции F следующим образом:

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \text{при } \theta \in [a, b], \\ 0 & \text{при } [0, \pi] \setminus \left(\frac{3a}{4}, \frac{\pi + 3b}{4}\right), \\ \text{линейная} & \text{при } \theta \in \left(\frac{3a}{4}, a\right) \text{ и } \theta \in \left(b, \frac{\pi + 3b}{4}\right). \end{cases} \quad (17)$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмем фиксированную положительнозначную последовательность $\{\vartheta_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta_n = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_n}{\omega(F, \frac{1}{n})} = \infty; \quad \varepsilon_n = \exp\left\{-\frac{\vartheta_n}{\omega(F, \frac{1}{n})}\right\}. \quad (18)$$

Учитывая то, что в силу (12) и (13) на отрезке $[\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2}]$ функция u_n имеет конечное число нулей $\theta_{k,n}$ (если $\alpha_n > -1$ и $\beta_n > -1$, то этот факт вытекает из основной теоремы алгебры, при $\alpha_n \leq -1$ или $\beta_n \leq -1$ – из теоремы Штурма [20, гл. I, § 3, теорема 3.1] и (16)), перенумеруем их в порядке возрастания, а их количество обозначим $\check{n} + 1 = \check{n}(n, \alpha_n, \beta_n, a, b) + 1$. Для любого натурального n и $\theta \in [a, b]$ обозначим через p, p_1, p_2, m_1 и m_2 такие целые числа, что имеют место соотношения

$$m_1 = \left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor + 1, \quad m_2 = \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor, \quad (19)$$

$$\theta_{p,n} \leq \theta < \theta_{p+1,n}, \quad \theta_{p_1,n} \leq a < \theta_{p_1+1,n}, \quad \theta_{p_2,n} \leq b < \theta_{p_2+1,n},$$

где номера k_1 и k_2 определяются из неравенств $\theta_{k_1-1,n} < \theta - \varepsilon_n \leq \theta_{k_1,n}$, $\theta_{k_2,n} \leq \theta + \varepsilon_n < \theta_{k_2+1,n}$. Введем последовательности

$$\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right\}}}{2\pi u'_n\left(\frac{a}{2}\right)}, & u_n\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \\ \frac{\sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right\}}}{2\pi \sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{u'_n\left(\frac{a}{2}\right)}{u_n\left(\frac{a}{2}\right)} \right)^2}}, & u_n\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, \alpha_n, \beta_n) = \left[\frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right]^2 \left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right\}. \quad (21)$$

Теперь сформулируем критерий сходимости в точке по “взвешенным” многочленам Якоби.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (16) и $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$. Доопределим функцию f до F на отрезке $[0, \pi]$, как в (17). Пусть $\{\vartheta_n\}_{n=1}^\infty, \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – фиксированные положительнозначные последовательности, удовлетворяющие условиям (18). Индексы m_1, m_2 и p выберем так, чтобы выполнялись соотношения (19). Тогда для операторов вида (5), где в качестве решений задачи Коши берутся “взвешенные” многочлены Якоби $u_n(\theta)$ (см. (12)), равномерно по θ на $[a, b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - F(\theta) + \eta_n u_n(\theta) \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0, \quad (22)$$

где последовательность $\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$ определена в (20), а штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (22) равна нулю.

Этот результат является критерием сходимости значений операторов (5), построенных по u_n , в точке, так как из него следует необходимое и достаточное условие приближения этими операторами функции $f \in C(a, b)$ в точке:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n u_n(\theta) \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} = 0.$$

Следующая теорема представляет собой критерий равномерной внутри интервала $(0, \pi)$ сходимости операторов (5) по “взвешенным” многочленам Якоби.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (16), $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$. Доопределим функцию f до F на отрезке

$[0, \pi]$, как в (17). Пусть $\{\vartheta_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – фиксированные положительнoзначные последовательности, удовлетворяющие условиям (18). Для любого натурального n и $\theta \in [a, b]$ обозначим числа p_1 , p_2 и m_1 , m_2 , как в (19). Тогда для того, чтобы операторы вида (5), где в качестве решений задачи Коши берутся “взвешенные” многочлены Якоби $u_n(\theta)$ (см. (12)), равномерно по θ на $[a, b]$ аппроксимировали функцию $f \in C[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cdot) - f\|_{C[a, b]} = 0, \quad (23)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p_1 \leq p \leq p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2'} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0, \quad (24)$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p_1 \leq p \leq p_2} \left| \sum_{m=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0, \quad (25)$$

где штрих означает отсутствие в сумме слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (24) равна нулю.

Для равномерной аппроксимации на отрезке $[a, b]$ непрерывной функции, заданной значениями в нулях многочленов Якоби, можно использовать операторы (6)–(11).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Введем операторы

$$\begin{aligned} A^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\check{n}} (s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) + s_{k-1,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta)) F(\theta_{k,n}), \\ \tilde{A}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &= \sum_{k=0}^{\check{n}-1} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) \frac{F(\theta_{k+1,n}) + F(\theta_{k,n})}{2}, \\ B_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\check{n}-1} (s_{k+1,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) + s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta)) F(\theta_{k,n}), \\ \tilde{B}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &= \sum_{k=1}^{\check{n}} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) \frac{F(\theta_{k-1,n}) + F(\theta_{k,n})}{2}, \\ C_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\check{n}-1} (s_{k-1,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) + 2s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) + s_{k+1,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta)) F(\theta_{k,n}), \\ \tilde{C}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &= \sum_{k=1}^{\check{n}-1} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) \frac{F(\theta_{k+1,n}) + 2F(\theta_{k,n}) + F(\theta_{k-1,n})}{4}, \end{aligned}$$

где $s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) \equiv s_{k, \lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) \equiv \frac{u_n(\theta)}{u'_n(\theta_{k,n})(\theta - \theta_{k,n})}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$, и последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (16). Доопределим функцию f на отрезке $[0, \pi]$, как в (17). Тогда равномерно по θ на $[a, b]$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) = f(\theta), \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) = f(\theta). \quad (27)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$, и последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (16). Доопределим функцию f на отрезке $[0, \pi]$, как в (17). Тогда равномерно по θ на $[a, b]$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) = f(\theta). \quad (28)$$

Главную часть погрешности аппроксимации непрерывной функции f с помощью операторов (5) часто удобно представлять с помощью формулы Неваи, которая для многочленов Лагранжа–Якоби в случае фиксированных α и β получена в [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (16), $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$. Доопределим функцию f на отрезке $[0, \pi]$, как в (17). Тогда для операторов вида (5), где в качестве решений задачи Коши берутся “взвешенные” многочлены Якоби $u_n(\theta)$ (см. (12)), равномерно по θ на $[a, b]$ справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(\theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) (F(\theta_{k+1,n}) - F(\theta_{k,n})) \right) = 0, \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(\theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) (F(\theta_{k-1,n}) - F(\theta_{k,n})) \right) = 0, \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(\theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) (F(\theta_{k+1,n}) - 2F(\theta_{k,n}) + F(\theta_{k-1,n})) \right) = 0, \quad (31)$$

где $s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) = \frac{u_n(\theta)}{u'_n(\theta_{k,n})(\theta - \theta_{k,n})}$.

Для определения возможности аппроксимации ограничимся рассмотрением значений приближаемой функции в узлах $\theta_{k,n}$ вблизи θ , т. е. получим локальный вариант предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть для последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются соотношения (16) и $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$. Доопределим функцию f на отрезке $[0, \pi]$, как в (17). Тогда для операторов вида (5), где в качестве решений задачи Коши берутся “взвешенные” многочлены Якоби $u_n(\theta)$

(см. (12)), равномерно по θ на $[a, b]$ справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(\theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) (F(\theta_{k+1,n}) - F(\theta_{k,n})) \right) = 0, \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(\theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) (F(\theta_{k-1,n}) - F(\theta_{k,n})) \right) = 0, \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(\theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - \frac{1}{4} \sum_{k=k_1}^{k_2} s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) (F(\theta_{k+1,n}) - 2F(\theta_{k,n}) + F(\theta_{k-1,n})) \right) = 0, \quad (34)$$

где k_1 и k_2 определяются из неравенств $\theta_{k_1-1,n} < \theta - \varepsilon_n \leq \theta_{k_1,n}$, $\theta_{k_2,n} \leq \theta + \varepsilon_n < \theta_{k_2+1,n}$ при ε_n из (18). Если $k_2 < k_1$, то суммы в (32)–(34) равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если гладкость функции $f \in C[a, b]$ допускает выбор последовательности ϑ_n , удовлетворяющей требованиям (18) и такой, что $k_2 \leq k_1$ (тогда в отрезок $[\theta - \varepsilon_n, \theta + \varepsilon_n]$ будет попадать не более одного узла $\theta_{k_1, \lambda}$), или такой, что в отрезок $[\theta - \varepsilon_n, \theta + \varepsilon_n]$ будет попадать не более $K(n) = o(\frac{1}{\omega(F, 2\pi/\sqrt{\lambda_n})})$ узлов $\theta_{k,n}$, то это означает возможность равномерной на отрезке $[a, b]$ аппроксимации функции f с помощью операторов $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}$.

Для исследования аппроксимативных свойств операторов (5), построенных по “взвешенным” многочленам Якоби, можно пользоваться признаком Дини–Липшица.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют условиям (16) и функция $f \in C[a, b]$ принадлежит классу Дини–Липшица, т. е. ее модуль непрерывности такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f, \frac{1}{n}) \ln n = 0$. Тогда выполняется соотношение (23).

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (принцип локализации). Для операторов $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}$, построенных в рамках соблюдения условий предложения 2, на классе функций $C[a, b]$ справедлив принцип локализации. Более того, из соотношений (18) и (32) следует, что аппроксимативные свойства оператора $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}$ в точке $\theta \in [a, b]$ зависят от значений функции $f \in C[a, b]$ лишь в окрестности $[\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2}] \cap (\theta - \varepsilon_n, \theta + \varepsilon_n)$. Величина этой окрестности определяется гладкостью функции f .

В настоящей работе получено достаточное условие равносходимости значений операторов (5) и классических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов, состоящей из нулей многочленов Якоби $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$. Это условие содержит соотношение между гладкостными свойствами аппроксимируемой функции и скоростью роста последовательности $\{|\alpha_n| + |\beta_n|\}_{n=1}^{\infty}$.

Сделаем линейную замену переменной $\phi(\theta): [\frac{a}{2}, \pi - \frac{\pi-b}{2}] \leftrightarrow [0, \pi]$, т. е.

$$\phi(\theta) = \frac{(2\theta - a)\pi}{\pi + (b - a)}, \quad \theta(\phi) = \frac{(\pi + b - a)\phi + a\pi}{2\pi}. \quad (35)$$

Рассмотрим круг K в комплексной плоскости переменной τ с центром на действительной оси и границей ∂K , проходящей через точки $\tau = -\frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi$

и $\tau = \frac{3\pi+b-2a}{2(\pi+b-a)}\pi$. При любом фиксированном $\phi \in [0, \pi]$ функции

$$\left(\frac{\sin(\theta(\tau)/2)}{\sin(\theta(\phi)/2)} \right)^{\pm 1}, \quad \left(\frac{\cos(\theta(\tau)/2)}{\cos(\theta(\phi)/2)} \right)^{\pm 1}$$

если и имеют полюсы, то ближайшие к окружности ∂K соответственно в точках $\tau = -\frac{a}{(\pi+b-a)}\pi$ и $\tau = \frac{2\pi-a}{(\pi+b-a)}\pi$, т. е. на расстоянии не менее $\min\left\{\frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi, \frac{\pi-b}{2(\pi+b-a)}\pi\right\}$ от окружности ∂K . Отсюда следует существование константы $1 < \mathcal{M}_0(a, b) < \infty$, зависящей только от a и b , такой, что

$$\max \left(\max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin(\theta(\tau)/2)}{\sin(\theta(\phi)/2)} \right|, \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos(\theta(\tau)/2)}{\cos(\theta(\phi)/2)} \right|, \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin(\theta(\tau)/2)}{\sin(\theta(\phi)/2)} \right|^{-1}, \right. \\ \left. \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos(\theta(\tau)/2)}{\cos(\theta(\phi)/2)} \right|^{-1} \right) = \mathcal{M}_0(a, b). \quad (36)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$, и пара последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ связаны между собой условием равномерной сходимости, если после доопределения функции f до F на отрезке $[0, \pi]$, как в (17), найдутся константа $\nu \geq 0$ и ограниченная последовательность $\{\mu_n\}_{n=2}^\infty$, каждый член которой удовлетворяет неравенству $\frac{1}{\ln n} \leq \mu_n \leq \mu < \infty$, такие, что для функции F и последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=2}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=2}^\infty$ одновременно справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega \left(F, \frac{1}{n} \right) \mu_n \ln n = 0, \quad (37)$$

$$|\alpha_n| + |\beta_n| \leq \frac{\ln(\mu_n \ln n)}{\ln \mathcal{M}_0(a, b)} + \nu, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$, и пара последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ связаны между собой условием равномерной сходимости. Тогда для классических интерполяционных процессов Лагранжа–Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta)$ и значений операторов (5), построенных с помощью функций $u_n(\theta)$, имеет место равномерно по θ на $[a, b]$ соотношение

$$|\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta)| = o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где o -символ зависит от a, b , $\|f\|_{C(a, b)}$, выбора константы ν и последовательности $\{\mu_n\}_{n=2}^\infty$ из определения 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\alpha_n \leq -1$ или $\beta_n \leq -1$ через $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ обозначен гипергеометрический ряд. В этом случае согласно ограничению (38) в силу [6, теорема 4.23.2] $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, x)$ является многочленом, только когда $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда $\mu_n = \frac{1}{\ln n}$, в частности, когда $\alpha_n \equiv \alpha$ и $\beta_n \equiv \beta$, последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ связаны условием равномерной сходимости с произвольной непрерывной функцией $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subset (0, \pi)$. Если $\mu_n \equiv \mu$, то последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ связаны условием равномерной сходимости только с функциями класса Дини–Лишницца. В этом случае в силу следствия 2 и теоремы 4 последовательность $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta)$ должна равномерно сходиться на отрезке $[a, b]$.

Даже если узлы интерполяции значений операторов вида (5) и последовательности интерполяционных многочленов совпадают, вообще говоря, равносходимость этих интерполяционных процессов не всегда имеет место.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для любой точки $x \in [0, \pi] \setminus \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n^2}(f, \cdot) - f\|_{C[0, \pi]} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}_0, f, x) - f(x)| > 0,$$

где $f = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|$, а $\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}_0, f, x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа по матрице равноотстоящих узлов $\mathfrak{M}_0 = \{\frac{k\pi}{n}\}_{k=0; n=1}^{n; \infty}$, совпадающих с узлами оператора интерполирования $S_{n^2}(f, x)$ (см. (5)), построенного по задаче Коши (3) при $q_\lambda \equiv 0$.

Прежде чем доказывать теоремы 1–4, приведем ряд утверждений, которыми будем пользоваться далее.

§ 2. Вспомогательные результаты

Будем обозначать через $C_0[0, \pi]$ пространство непрерывных исчезающих на концах отрезка функций с чебышевской нормой, т. е. $C_0[0, \pi] = \{f: f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. Далее, если не оговорено противное, договоримся о следующих обозначениях. В предположении $\rho_\lambda \geq 0$ при каждом неотрицательном λ считаем, что функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиусом $\rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda})$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле:

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right), \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (39)$$

В случае задачи Коши (3), кроме того, предположим, что функции $h(\lambda)$ отличны от нуля, т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right), \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (40)$$

При каждом $\lambda > 0$ доопределим функцию $q_\lambda(x)$ следующим образом:

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x), & \text{если } x \in [0, \pi], \\ q_\lambda(\pi), & \text{если } x > \pi, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Через $x_{k, \lambda}$, $k \in \mathbb{Z}$, обозначим нули решения $y(x, \lambda)$ задачи Коши (2) или (3), рассматриваемой на всей действительной оси, перенумерованные в порядке возрастания таким образом, чтобы выполнялись неравенства (4).

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмем фиксированную положительнозначную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta(\lambda) = o(1), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})} = \infty; \quad \varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})}\right\}. \quad (42)$$

Например, в качестве $\vartheta(\lambda)$ можно взять функцию $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}$, тогда $\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})}}\right\}$.

Для любого положительного λ и $x \in [0, \pi]$ обозначим через p , m_1 и m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right], \quad (43)$$

$$x_{p,\lambda} \leq x < x_{p+1,\lambda},$$

где номера нулей k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leq x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \leq x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

ТЕОРЕМА 5 (критерий сходимости в точке [1]). Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (39) в случае задачи Коши (2) или условию (40) в случае задачи (3). Доопределим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin [0, \pi]. \quad (44)$$

Тогда для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (2), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) + \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| = 0. \quad (45)$$

Для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (3), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) + \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| = 0. \quad (46)$$

Здесь штрих означает отсутствие в суммах из (45) или (46) слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (см. (43)), то суммы в (45) и (46) равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Теорема 5 является критерием сходимости в точке значений операторов S_λ . Действительно, например, в случае задачи Коши (2) из утверждения теоремы 5, в частности, следует, что для того, чтобы в точке $x \in [0, \pi]$ имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |S_\lambda(f, x) - f(x)| = 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p - 2m} \right| = 0.$$

Здесь штрих означает отсутствие в сумме слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (см. (43)), то сумма равна нулю.

ТЕОРЕМА 6 (критерий равномерной сходимости [1]). Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (39) в случае задачи Коши (2) или условию (40) в случае задачи (3). Тогда для того, чтобы значения оператора (5), построенного по решениям задачи Коши (2) или (3), равномерно на $[0, \pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ аппроксимировали функцию $f \in C_0[0, \pi]$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|S_\lambda(f, \cdot) - f\|_{C[0, \pi]} = 0, \quad (47)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{0 \leq p \leq \tilde{n}} \left| \sum'_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda}))}{p - 2m} \right| = 0, \quad (48)$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{0 \leq p \leq \tilde{n}} \left| \sum'_{m=1}^{[\frac{\tilde{n}}{2}] - 1} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda}))}{p - 2m} \right| = 0, \quad (49)$$

где штрих означает отсутствие в сумме слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (см. (43)), то сумма в (48) равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В классе непрерывных на $[0, \pi]$ функций утверждения теорем 5, 6 остаются справедливыми [1], если сходимость в (45)–(47) ослабить до равномерной внутри $(0, \pi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Из теоремы 6, в частности, следует [1, предложение 12] сходимость (47) операторов (5) для функций из класса Дини–Липшица.

Операторы S_λ интерполируют аппроксимируемую функцию, но они, как видно из теорем 5, 6, достаточно чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. Поэтому для приближения “плохих” функций можно пользоваться операторами (6)–(11). Хотя эти конструкции не обладают интерполяционными свойствами, они подходят для аппроксимации любых непрерывных на $[0, \pi]$ функций, исчезающих на концах отрезка.

ТЕОРЕМА 7 [1]. Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ , $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (39) в случае задачи Коши (2) или условию (40) в случае задачи (3). Тогда равномерно по x на отрезке $[0, \pi]$ и на шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ выполнено

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda(f, x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{A}_\lambda(f, x) = f(x), \quad (50)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda(f, x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{B}_\lambda(f, x) = f(x), \quad (51)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda(f, x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{C}_\lambda(f, x) = f(x). \quad (52)$$

Приведем полученные в [1] асимптотические формулы решений задач Коши (2) и (3), обеспечивающие достаточно хороший порядок приближения для выбранного метода изучения аппроксимативных свойств операторов (5) равномерно на всем семействе (39) потенциалов, являющихся, вообще говоря, функциями двух переменных x и λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [1, предложение 2]. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шар радиусом ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т. е. для любого действительного λ

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и произвольного $x \in [0, \pi]$ решение задачи Коши (2) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left| y(x, \lambda) - \gamma(x, \lambda, h) \cos(\sqrt{\lambda}x) - \tilde{\beta}(x, \lambda, h) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\lambda} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad (53)$$

$$\begin{aligned} |y'(x, \lambda) + \sqrt{\lambda}\gamma(x, \lambda, h) \sin(\sqrt{\lambda}x) - \tilde{\beta}(x, \lambda, h) \cos(\sqrt{\lambda}x)| \\ \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} |y''(x, \lambda) + \lambda\gamma(x, \lambda, h) \cos(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}\tilde{\beta}(x, \lambda, h) \sin(\sqrt{\lambda}x)| \\ \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)}{2} \left(1 + \frac{|h(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\tilde{\beta}(x, \lambda, h) = h(\lambda) + \frac{1}{2} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau, \quad \gamma(x, \lambda, h) = 1 - \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [1, предложение 3]. Решение задачи Коши (3) при тех же условиях, налагаемых на потенциал q_λ , что и в предложении 3, для всех $\lambda \geq \lambda_1$ на отрезке $[0, \pi]$ удовлетворяет неравенствам

$$\left| y(x, \lambda) - \frac{h(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \delta(x, \lambda, h) \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda\sqrt{\lambda}}, \quad (56)$$

$$|y'(x, \lambda) - h(\lambda) \cos(\sqrt{\lambda}x) - \sqrt{\lambda}\delta(x, \lambda, h) \sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda}, \quad (57)$$

$$|y''(x, \lambda) + h(\lambda)\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) - \lambda\delta(x, \lambda, h) \cos(\sqrt{\lambda}x)| \leq \frac{\rho_\lambda(1 + \pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (58)$$

где

$$\delta(x, \lambda, h) = \frac{h(\lambda)}{2\lambda} \int_0^x q_\lambda(\tau) d\tau.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [1, предложение 4]. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (см. (39)) для нулей решений задачи Коши (2), попадающих в $[0, \pi]$ и перенумерованных в порядке возрастания согласно (4), справедливы следующие асимптотические формулы:

$$x_{k,\lambda} = \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right), \quad (59)$$

$$y'(x_{k,\lambda}, \lambda) = \sqrt{\lambda + h^2(\lambda)} \left((-1)^{(k+1)} + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \quad (60)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, где скорость стремления к нулю в o -символе не зависит ни от $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$, ни от k , $0 \leq k \leq \tilde{n}$. Для перенумерованных согласно (4) нулей решений задачи Коши (3) с произвольной действительнозначной функцией $h(\lambda) \neq 0$ и функциями q_λ , удовлетворяющими соотношению (40), справедливы асимптотические формулы

$$x_{k,\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi + o\left(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln \lambda}\right), \quad (61)$$

$$y'(x_{k,\lambda}, \lambda) = h(\lambda) \left((-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \right) \quad (62)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, где стремление к нулю в o -символе равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и k , $0 \leq k \leq \tilde{n}$.

СЛЕДСТВИЕ 3 [1, предложение 5]. Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и функции q_λ принадлежат $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ – шару радиусом ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. выполняется условие (39). (В случае задачи Коши (3) необходимо, кроме того, отличие от нуля значений функции $h(\lambda)$.) Тогда номер $\tilde{n} = \tilde{n}(\lambda)$ наибольшего из нулей решения $y(x, \lambda)$ задачи Коши (3) согласно нумерации (4) удовлетворяет соотношению

$$o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \leq \sqrt{\lambda} - \tilde{n} < 1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right),$$

а задачи Коши (2) – соотношению

$$o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right) \leq \sqrt{\lambda} - (\tilde{n} + 1) + \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} < 1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right).$$

В следующих предложениях выделена главная часть погрешности приближения непрерывной функции оператором (5), построенным с помощью решений задач Коши (2) или (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 [1, предложение 9]. Пусть $y(x, \lambda)$ – решения задачи Коши (2) или (3). Для задачи Коши (2) выполняются соотношения (39), а для задачи Коши (3) – соотношения (40). Если $f \in C_0[0, \pi] = \{f: f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$, то равномерно по $x \in [0, \pi]$ и по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \{f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\} s_{k,\lambda}(x) \right) = 0, \quad (63)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \{f(x_{k-1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\} s_{k,\lambda}(x) \right) = 0, \quad (64)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\tilde{n}-1} \{f(x_{k+1,\lambda}) - 2f(x_{k,\lambda}) + f(x_{k-1,\lambda})\} s_{k,\lambda}(x) \right) = 0, \quad (65)$$

где $s_{k,\lambda}(x) = \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})}$.

Важным представляется тот факт, что погрешность приближения непрерывной функции, исчезающей на концах отрезка, оператором (5) определяется значениями функции в узлах интерполяции, расположенных вблизи точки, в которой исследуется возможность аппроксимации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [1, предложение 10]. Пусть $y(x, \lambda)$ – решения задачи Коши (2) или (3). Для задачи Коши (2) выполняются соотношения (39), а для задачи Коши (3) – соотношения (40). Считаем, что функции $\vartheta(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ определяются из условий (42) и $f \in C_0[0, \pi] = \{f: f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. Доопределим функции f и q_λ с помощью определений (41) и (44). Тогда равномерно по $x \in [0, \pi]$ и по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{f(x_{k+1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (66)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{f(x_{k-1, \lambda}) - f(x_{k, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0, \quad (67)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(f(x) - S_\lambda(f, x) - \frac{1}{4} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{f(x_{k+1, \lambda}) - 2f(x_{k, \lambda}) + f(x_{k-1, \lambda})\} s_{k, \lambda}(x) \right) = 0. \quad (68)$$

Здесь целые числа k_1 и k_2 , являющиеся номерами нулей продолженного на $\mathbb{R}$ решения соответствующей задачи Коши согласно (4), удовлетворяют соотношениям $x_{k_1-1, \lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leq x_{k_1, \lambda}$, $x_{k_2, \lambda} \leq x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1, \lambda}$. Если $k_2 < k_1$, то суммы в (66)–(68) равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 9 [1]. Если гладкость функции $f \in C_0[0, \pi]$ допускает выбор функции $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющей требованиям (42) и такой, что $k_2 \leq k_1$ (тогда в отрезок $[x - \varepsilon(\lambda), x + \varepsilon(\lambda)]$ будет попадать не более одного узла $x_{k_1, \lambda}$, или такой, что в отрезок $[x - \varepsilon(\lambda), x + \varepsilon(\lambda)]$ будет попадать не более $K(\lambda) = o\left(\frac{1}{\omega(f, 2\pi/\sqrt{\lambda})}\right)$ узлов $x_{k, \lambda}$, то это означает возможность равномерной на отрезке $[0, \pi]$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ (удовлетворяющих условию (39), а в случае задачи Коши (3) дополнительно условию $h(\lambda) \neq 0$) аппроксимации функции f с помощью операторов (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 10 (принцип локализации [1]). Для операторов (5), построенных в рамках соблюдения условий предложения 7, на классе функций $C_0[0, \pi]$ справедлив принцип локализации. Более того, из соотношений (42) и (66) следует, что аппроксимативные свойства оператора (5) в точке $x \in [0, \pi]$ зависят от значений функции $f \in C_0[0, \pi]$ лишь в окрестности $[0, \pi] \cap (x - \varepsilon(\lambda), x + \varepsilon(\lambda))$. Величина этой окрестности определяется гладкостью функции f . Если положить, например, $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})}$, то узлы интерполяции для исследования возможности аппроксимации непрерывной функции можно брать только из $\varepsilon(\lambda)$ -окрестности аргумента, где $\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})}}\right\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11 [1]. Если $f \in C[0, \pi]$, то соотношения (45)–(47) и (63)–(68) выполняются равномерно внутри $(0, \pi)$, т. е. равномерно на любом компакте $\mathbf{K}$, содержащемся в $(0, \pi)$.

§ 3. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b] \subset (0, \pi)$. В силу (12) внутри интервала $(0, \pi)$ нули u_n и $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ совпадают.

Сделаем линейную замену переменной $\phi(\theta): [\frac{a}{2}, \pi - \frac{\pi-b}{2}] \leftrightarrow [0, \pi]$, т. е.

$$\phi(\theta) = \frac{(2\theta - a)\pi}{\pi + (b - a)}, \quad \theta(\phi) = \frac{(\pi + b - a)\phi + a\pi}{2\pi}. \quad (69)$$

После замены функции $z(\phi(\theta), \lambda_n) \equiv u_n(\theta)$ уравнение (13), рассматриваемое на отрезке $[\frac{a}{2}, \pi - \frac{\pi-b}{2}]$, имеет вид

$$z''(\phi, \lambda_n) + \left(\frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{\pi + (b-a)}{2\pi} \phi + \frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{\pi + (b-a)}{2\pi} \phi + \frac{a}{2}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right) z(\phi, \lambda_n) = 0$$

(здесь $\phi \in [0, \pi]$) или вид

$$z''(\phi, \lambda_n) + [\lambda_n - q_{\lambda_n}(\phi)]z(\phi, \lambda_n) = 0,$$

если положить

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right), \\ q_{\lambda_n}(\phi) &= \left(\frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi + (b-a)}{4\pi} \phi + \frac{a}{4} \right)} - \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \left(\frac{\pi + (b-a)}{4\pi} \phi + \frac{a}{4} \right)} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Отсюда следует представление

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n^2 \left(\frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right)^2 \left(1 + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{n} + \left(\frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2n} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4n^2 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4n^2 \cos^2 \frac{a}{4}} \right). \end{aligned}$$

В силу (16) имеем

$$\lambda_n = n^2 \left(\frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right)^2 \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \right) \right), \quad (71)$$

т. е. для любых $0 < a < b < \pi$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при $n \geq n_0$ будут выполняться неравенства

$$\frac{1}{8} n^2 \leq \lambda_n \leq 2n^2. \quad (72)$$

Если окажется выполненным равенство $u_n(\frac{a}{2}) = 0$, будем считать, что такие n принадлежат $\mathbb{N}_1$. Обозначим $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$. В силу нормировки (15) имеем

$P^{(\alpha_n, \beta_n)} \neq 0$. Если $n \in \mathbb{N}_1$, то, учитывая (12), по теореме Пикара получаем $u'_n(\frac{a}{2}) \neq 0$. Поэтому $z(\phi, \lambda_n)$ – решение задачи Коши вида (3) при $n \in \mathbb{N}_1$:

$$\begin{aligned} z''(\phi, \lambda_n) + [\lambda_n - q_{\lambda_n}(\phi)]z(\phi, \lambda_n) &= 0, \\ z(0, \lambda_n) = 0, \quad z'(0, \lambda_n) &= \frac{\pi + (b-a)}{2\pi} u'_n\left(\frac{a}{2}\right) = h(\lambda_n) \neq 0. \end{aligned} \quad (73)$$

В остальных случаях, т. е. когда $n \in \mathbb{N}_2$, в силу инвариантности оператора (5) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу сменим нормировку многочлена $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ таким образом, чтобы $z(\phi, \lambda_n)$ стало решением задачи Коши вида (2):

$$\begin{aligned} z''(\phi, \lambda_n) + [\lambda_n - q_{\lambda_n}(\phi)]z(\phi, \lambda_n) &= 0, \\ z(0, \lambda_n) = 1, \quad z'(0, \lambda_n) &= \frac{\pi + (b-a)}{2\pi} \frac{u'_n(\frac{a}{2})}{u_n(\frac{a}{2})} = h(\lambda_n). \end{aligned} \quad (74)$$

Заметим, что при условии (16) найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$ (см. (72)), что для всех $n \geq n_0$ выполняется соотношение $\lambda_n > 0$. Кроме того, для любого $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} V_0^\pi[q_{\lambda_n}] &= \left(\frac{\pi + (b-a)}{2\pi}\right)^2 V_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi+b}{2}} \left(\frac{1 - 4\alpha_n^2}{16 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 - 4\beta_n^2}{16 \cos^2 \frac{\theta}{2}}\right) \\ &\leq \left(\frac{\pi + (b-a)}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{|1 - 4\alpha_n^2|}{16} V_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi+b}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) + \frac{|1 - 4\beta_n^2|}{16} V_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi+b}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\pi + (b-a)}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{|1 - 4\alpha_n^2|}{16} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{a}{4}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi+b}{4}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{|1 - 4\beta_n^2|}{16} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi+b}{4}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{a}{4}}\right)\right) \\ &< \left(\frac{\pi + (b-a)}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{|1 - 4\alpha_n^2|}{16} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{|1 - 4\beta_n^2|}{16} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi+b}{4}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку

$$V_0^\pi[q_{\lambda_n}] < \frac{|1 - 4\alpha_n^2|}{16} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{|1 - 4\beta_n^2|}{16} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi+b}{4}} = \rho_{\lambda_n}. \quad (75)$$

Функции q_{λ_n} принадлежат шарам $V_{\rho_{\lambda_n}}[0, \pi]$. При условии (16) для последовательностей $\{\rho_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ (см. (75)) и $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ (см. (70)) выполняется соотношение (39). Действительно, для $n > n_0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_{\lambda_n} \frac{\ln \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} &= \left(\frac{|1 - 4\alpha_n^2|}{16} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{|1 - 4\beta_n^2|}{16} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi+b}{4}}\right) \\ &\quad \times \frac{\ln\left(\left(\frac{\pi+(b-a)}{2\pi}\right)^2 \left\{\frac{\frac{1}{4}-\alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4}-\beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2\right\}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\pi+(b-a)}{2\pi}\right)^2 \left\{\frac{\frac{1}{4}-\alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4}-\beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2\right\}}} \\ &\stackrel{(71)}{=} \left(\frac{|1 - 4\alpha_n^2|}{16} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{|1 - 4\beta_n^2|}{16} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi+b}{4}}\right) \frac{\ln\left(\left(\frac{\pi+(b-a)}{2\pi}\right)^2 n^2 \left\{1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right)\right\}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\pi+(b-a)}{2\pi}\right)^2 n^2 \left\{1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right)\right\}}}. \end{aligned}$$

Учитывая (16), имеем

$$0 \leq \rho_{\lambda_n} \frac{\ln \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (76)$$

Рассмотрим непрерывную на $[0, \pi]$ функцию (17). Сделаем замену переменной:

$$\check{f}(\phi) = F(\theta(\phi)). \quad (77)$$

Операторы (5) инвариантны относительно двухпараметрической группы преобразований независимой переменной, состоящей из однопараметрических групп, – масштабных преобразований и преобразований сдвига, т.е. при $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [-\frac{\pi a}{\pi+b-a}, \frac{\pi(2\pi-a)}{\pi+b-a}]$ согласно замене (69), определениям (17), (70) и (73) или (74) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) &\equiv \sum_{k: \theta_{k,n} \in [0, \pi]} F(\theta_{k,n}) \frac{u_n(\theta)}{u'_n(\theta_{k,n})(\theta - \theta_{k,n})} \\ &\equiv \sum_{k: \theta_{k,n} \in (\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2})} F(\theta_{k,n}) \frac{u_n(\theta)}{u'_n(\theta_{k,n})(\theta - \theta_{k,n})} \equiv \sum_{k: \theta_{k,n} \in (\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2})} F(\theta_{k,n}) s_{k,n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(\theta) \\ &\equiv \sum_{k=\nu_1+1}^{\nu_2-1} \check{f}(\phi_{k,\check{n}}) \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{k,\check{n}}, \lambda_n) \frac{2\pi}{\pi+b-a} (\frac{\pi+(b-a)}{2\pi} \phi + \frac{a}{2} - (\frac{\pi+(b-a)}{2\pi} \phi_{k,\check{n}} + \frac{a}{2}))} \\ &\equiv \sum_{\check{k}=0}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{\check{k},\check{n}}) \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{\check{k},\check{n}}, \lambda_n)(\phi - \phi_{\check{k},\check{n}})} \equiv \sum_{\check{k}=0}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{\check{k},\check{n}}) s_{\check{k},\lambda_n}(\phi). \end{aligned} \quad (78)$$

Здесь $\check{k} = k - \nu_1 - 1$, а $\check{n} + 1 = \nu_2 - \nu_1 - 1$ – количество нулей функции $z(\phi, \lambda_n)$, попадающих в отрезок $[0, \pi]$. Отметим то, что в силу следствия 3 и соотношений (69), (72) имеем $\check{n} \cong n$ при $n \rightarrow \infty$.

Из (69), (17) и (77) следует, что при каждом $n > n_0$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \check{f} &\in C_0[0, \pi], \\ \omega(\check{f}, \delta) &\leq \omega\left(F, \frac{\pi+b-a}{2\pi}\delta\right) \leq \omega(F, \delta) \leq \max\left\{\omega(f, \delta), \max\left(\frac{2|f(a)|}{a}, \frac{2|f(b)|}{\pi-b}\right)\delta\right\} \\ &\leq \max\left\{\omega(f, \delta), \max\left(\frac{2\|f\|_{C[a,b]}}{a}, \frac{2\|f\|_{C[a,b]}}{\pi-b}\right)\delta\right\}, \\ &\| \check{f} \|_{C[0, \pi]} \leq \| f \|_{C[a, b]}. \end{aligned} \quad (79)$$

Последовательность всех натуральных чисел представим как объединение двух подпоследовательностей $\{n_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{n_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$, положив $n_{1,j} \in \mathbb{N}_1$, $n_{2,j} \in \mathbb{N}_2$. В случае задачи Коши (73) из (46) следует соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| S_{\lambda_{n_{1,j}}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \theta) - f(\theta) \right| \\ + \frac{\sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_{n_{1,j}}^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_{n_{1,j}}^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n_{1,j} + \frac{\alpha_{n_{1,j}} + \beta_{n_{1,j}} + 1}{2} \right)^2 \right\}} u_{n_{1,j}}(\theta)}{2\pi u'_{n_{1,j}}(\frac{a}{2})} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{m=m_1}^{m_2} \left| \frac{F(\theta_{2m+1,n_{1,j}}) - 2F(\theta_{2m,n_{1,j}}) + F(\theta_{2m-1,n_{1,j}})}{p-2m} \right| = 0. \quad (80)$$

Для подпоследовательности $\{n_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$ в случае задачи Коши (74) из равенства (45) получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \left| S_{\lambda_{n_{2,j}}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \theta) - f(\theta) \right. \\ & + \frac{\sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_{n_{2,j}}^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_{n_{2,j}}^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n_{2,j} + \frac{\alpha_{n_{2,j}} + \beta_{n_{2,j}} + 1}{2} \right)^2 \right\}} u_{n_{2,j}}(\theta)}{2\pi \sqrt{\left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_{n_{2,j}}^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_{n_{2,j}}^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n_{2,j} + \frac{\alpha_{n_{2,j}} + \beta_{n_{2,j}} + 1}{2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{u'_{n_{2,j}}(\frac{a}{2})}{u_{n_{2,j}}(\frac{a}{2})} \right)^2}} \\ & \left. \times \sum_{m=m_1}^{m_2} \left| \frac{F(\theta_{2m+1,n_{2,j}}) - 2F(\theta_{2m,n_{2,j}}) + F(\theta_{2m-1,n_{2,j}})}{p-2m} \right| \right| = 0. \quad (81) \end{aligned}$$

Здесь p , m_1 и m_2 определены соотношениями (19), штрих у сумм в равенствах (80) и (81) означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (см. (19)), то суммы в (80) и (81) равны нулю. Из (80) и (81) следует равенство (22). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу соотношений (70), (75) и (76) задачи Коши (73) и (74) удовлетворяют условиям теоремы 6. Следовательно, в силу (78) теорема доказана.

Из предложений 6, 7, согласно тождеству (78) аналогично доказываются предложения 1, 2 соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из замечаний 8–10 таким же образом устанавливаем справедливость утверждений следствия 2, а также замечаний 1, 2. Из теоремы 7 и тождества (78) вытекает справедливость теоремы и следствия 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Соотношение (28) можно считать некоторым “внутренним аналогом” известного процесса С. Н. Бернштейна, предложенного им для аппроксимации непрерывных функций алгебраическими многочленами в случае матрицы узлов Чебышева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Вновь сделаем замену (69), (77) и, пользуясь определением в (17) и инвариантностью оператора (5) относительно умножения функции $y(x, \lambda)$ на отличную от нуля константу, перейдем, как в соотношении (78), от $u_n(\theta)$ к решениям задачи (73) или (74), в зависимости от принадлежности n множеству $\mathbb{N}_1$ или $\mathbb{N}_2$ соответственно.

Оценим норму разности

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) \|_{C[a,b]} \\ & = \left\| \sum_{k=1}^{\check{n}} F(\theta_{k,n}) \frac{-P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(\cos \theta) \sin \theta_{k,n}}{\frac{dP_n^{(\alpha_n, \beta_n)}}{d\theta}(\cos \theta_{k,n})(\cos \theta - \cos \theta_{k,n})} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^{\check{n}} F(\theta_{k,n}) \frac{u_n(\theta)}{u'_n(\theta_{k,n})(\theta - \theta_{k,n})} \right\|_{C[a,b]} = \left\| \sum_{k=1}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{k,n}) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{-u_n(\theta(\phi))(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\phi_{k,n})}{\frac{du'_n}{d\phi}(\theta(\phi_{k,n}))(\sin \frac{\theta(\phi_{k,n})}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi_{k,n})}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}(\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\phi_{k,n}))} \\
& - \sum_{k=1}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{k,n}) \frac{u_n(\theta(\phi))\frac{\pi+b-a}{2\pi}}{\frac{du'_n}{d\phi}(\theta(\phi_{k,n}))(\theta(\phi) - \theta(\phi_{k,n}))} \Big\|_{C[0,\pi]} = \Big\| \sum_{k=1}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{k,n}) \\
& \times \frac{-z(\phi, \lambda_n)(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\phi_{k,n})}{z'(\phi_{k,n}, \lambda_n)(\sin \frac{\theta(\phi_{k,n})}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi_{k,n})}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}(\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\phi_{k,n}))} \\
& - \sum_{k=1}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{k,n}) \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{k,n}, \lambda_n)(\phi - \phi_{k,n})} \Big\|_{C[0,\pi]} = \Big\| \sum_{k=1}^{\check{n}} \check{f}(\phi_{k,n}) \\
& \times \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{k,n}, \lambda_n)} \left\{ \frac{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\phi_{k,n})}{(\sin \frac{\theta(\phi_{k,n})}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi_{k,n})}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}(\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\phi_{k,n}))} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\phi - \phi_{k,n}} \right\} \Big\|_{C[0,\pi]}. \quad (82)
\end{aligned}$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$G_n(\phi, \tau) = \frac{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{-(\alpha_n+\frac{1}{2})}(\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{-(\beta_n+\frac{1}{2})}(\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))} + \frac{1}{\phi - \tau}. \quad (83)$$

По каждому из аргументов в полосах $\{\operatorname{Re} \phi \in [0, \pi], \operatorname{Im} \phi \in \mathbb{R}\}$ и $\{\operatorname{Re} \tau \in [0, \pi], \operatorname{Im} \tau \in \mathbb{R}\}$ функция G_n мероморфна и имеет единственную особую точку $\phi = \tau$.

Разложим каждое слагаемое из (83) в ряд Лорана по переменной τ в проколотой окрестности точки $\tau = \phi$. Первый коэффициент главной части ряда Лорана функции $\frac{1}{\phi - \tau}$ равен -1 . Потом разложим в ряд Лорана по переменной τ функцию

$$\frac{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{\alpha_n+\frac{1}{2}}(\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{\beta_n+\frac{1}{2}}\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{\alpha_n+\frac{1}{2}}(\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{\beta_n+\frac{1}{2}}(\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))}$$

в полюсе первого порядка $\tau = \phi$. Первый коэффициент главной части ряда Лорана есть

$$a_{-1} = \lim_{\tau \rightarrow \phi} (\tau - \phi) \frac{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{\alpha_n+\frac{1}{2}}(\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{\beta_n+\frac{1}{2}}\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{\alpha_n+\frac{1}{2}}(\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{\beta_n+\frac{1}{2}}(\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))} = 1.$$

Следовательно, при любом фиксированном $\phi \in [0, \pi]$ точка $\tau = \phi$ является устранимой особой точкой функции G_n по переменной τ , и после ее устранения мы имеем аналитическую функцию G_n в полосе $\{\operatorname{Re} \tau \in [0, \pi], \operatorname{Im} \tau \in \mathbb{R}\}$. Аналогично устанавливается аналитичность функции G_n в полосе $\{\operatorname{Re} \phi \in [0, \pi], \operatorname{Im} \phi \in \mathbb{R}\}$ при каждом фиксированном $\tau \in [0, \pi]$.

Оценим $\max_{\phi, \tau \in [0, \pi]} |G_n(\phi, \tau)|$. Зафиксируем произвольное $\phi \in [0, \pi]$. Рассмотрим круг K в комплексной плоскости переменной τ с центром на действительной оси и границей ∂K , проходящей через точки $\tau = -\frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi$ и $\tau = \frac{3\pi+b-2a}{2(\pi+b-a)}\pi$. Имеем оценку

$$\max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \frac{1}{|\phi - \tau|} \leq \left(\min \left\{ \frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi, \frac{\pi-b}{2(\pi+b-a)}\pi \right\} \right)^{-1} = \mathcal{M}_1(a, b). \quad (84)$$

Функция

$$\frac{\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)}$$

при любом $\phi \in [0, \pi]$ аналитична в замкнутом круге $\overline{K}$, за исключением полюса первого порядка $\tau = \phi$, расстояние от которого до окружности ∂K не менее $\min\left\{\frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi, \frac{\pi-b}{2(\pi+b-a)}\pi\right\}$. Следовательно, существует константа $0 < \mathcal{M}_2(a, b) < \infty$, зависящая только от a и b , такая, что

$$\max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right| \leq \mathcal{M}_2(a, b). \quad (85)$$

Наконец, при любом фиксированном $\phi \in [0, \pi]$ функции $\left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}}\right)^{\pm 1}$ и $\left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}}\right)^{\pm 1}$ если и имеют полюсы, то ближайшие к окружности ∂K в точках $\tau = -\frac{a}{\pi+b-a}\pi$ и $\tau = \frac{2\pi-a}{\pi+b-a}\pi$ соответственно, т.е. на расстоянии не менее $\min\left\{\frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi, \frac{\pi-b}{2(\pi+b-a)}\pi\right\}$ от окружности ∂K . Отсюда следует существование константы $1 < \mathcal{M}_0(a, b) < \infty$, зависящей только от a и b , такой, как в (36).

В силу принципа максимума модуля аналитической функции и неравенства треугольника из соотношений (36), (84) и (85) получаем

$$\begin{aligned} \|G_n\|_{C([0, \pi] \times [0, \pi])} &= \max_{\substack{\tau \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, \pi]}} |G_n(\phi, \tau)| \leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} |G_n(\phi, \tau)| \\ &= \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\alpha_n + \frac{1}{2})} (\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{-(\beta_n + \frac{1}{2})} \frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{-(\alpha_n + \frac{1}{2})} (\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{-(\beta_n + \frac{1}{2})} (\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))} + \frac{1}{\phi - \tau} \right| \\ &\leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}} (\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{1}{\phi - \tau} \right| \\ &\leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}}}{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}}} \right| \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{1}{\phi - \tau} \right| \\ &\leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right|^{|\alpha_n| + \frac{1}{2}} \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right|^{|\beta_n| + \frac{1}{2}} \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\frac{\pi+b-a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{1}{\phi - \tau} \right| \leq \mathcal{M}_2(a, b) (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_n | + | \beta_n | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b). \end{aligned}$$

Таким образом, получили оценку

$$\begin{aligned} \|G_n\|_{C([0, \pi] \times [0, \pi])} &= \max_{\tau \in [0, \pi], \phi \in [0, \pi]} |G_n(\phi, \tau)| \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b) (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_n | + | \beta_n | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b), \end{aligned} \quad (86)$$

где константы $\mathcal{M}_2(a, b)$, $\mathcal{M}_0(a, b)$, $\mathcal{M}_1(a, b)$ зависят только от a и b . Оценим $\max_{\phi, \tau \in [0, \pi]} \left| \frac{\partial G_n(\phi, \tau)}{\partial \tau} \right|$. Аналитичность функции G_n по переменной τ при каждом фиксированном $\phi \in [0, \pi]$ уже установлена. Представим производную $\frac{\partial}{\partial \tau}$ первого слагаемого функции $G_n(\phi, \tau)$ в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}} (\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))} \right\} \\
 &= \frac{\pi + b - a}{4\pi} \left(\alpha_n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}} \\
 & \quad \times \left\{ \left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right\} \\
 & \quad - \frac{\pi + b - a}{4\pi} \left(\beta_n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}} \\
 & \quad \times \left\{ \left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right\} \\
 & \quad + \left\{ \left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right\} \\
 &= \left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} \left\{ \frac{\pi + b - a}{4\pi} \left[\left(\alpha_n + \frac{1}{2} \right) \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(\beta_n + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right\}. \quad (87)
 \end{aligned}$$

При любом фиксированном $\phi \in [0, \pi]$ функции $\left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}} \right)^{\pm 1}$ имеют ближайшие к окружности ∂K полюсы в точках $\tau = -\frac{a}{\pi + b - a}\pi$ и $\tau = \frac{2\pi - a}{\pi + b - a}\pi$, т. е. на расстоянии не менее $\min \left\{ \frac{a}{2(\pi + b - a)}\pi, \frac{\pi - b}{2(\pi + b - a)}\pi \right\}$ от окружности ∂K . Отсюда следует существование константы $1 \leq \mathcal{M}_3(a, b) < \infty$, зависящей только от a и b , такой, что

$$1 \leq \max \left(\max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}} \right|, \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}} \right| \right) \leq \mathcal{M}_3(a, b). \quad (88)$$

Функция $\frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)}$ при любом $\phi \in [0, \pi]$ аналитична в замкнутом круге $\bar{K}$, за исключением полюса первого порядка $\tau = \phi$, который находится на расстоянии не менее $\min \left\{ \frac{a}{2(\pi + b - a)}\pi, \frac{\pi - b}{2(\pi + b - a)}\pi \right\}$ от окружности ∂K . Следовательно, существует константа $0 < \mathcal{M}_4(a, b) < \infty$, зависящая только от a и b , такая, что

$$\max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right| \leq \mathcal{M}_4(a, b). \quad (89)$$

Кроме того, из (84) получаем

$$\max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\phi - \tau} \right| \leq \left(\min \left\{ \frac{a}{2(\pi + b - a)} \pi, \frac{\pi - b}{2(\pi + b - a)} \pi \right\} \right)^{-2} = (\mathcal{M}_1(a, b))^2. \quad (90)$$

Вновь в силу принципа максимума модуля аналитической функции и неравенства треугольника из соотношений (36), (87)–(90) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} G_n \right\|_{C([0, \pi] \times [0, \pi])} &= \max_{\tau \in [0, \pi], \phi \in [0, \pi]} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} G_n(\phi, \tau) \right| \leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} G_n(\phi, \tau) \right| \\ &\leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{(\sin \frac{\theta(\tau)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\tau)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{(\sin \frac{\theta(\phi)}{2})^{\alpha_n + \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta(\phi)}{2})^{\beta_n + \frac{1}{2}} (\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau))} \right\} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\phi - \tau} \right| \\ &\leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{\pi + b - a}{4\pi} \left[\left(\alpha_n + \frac{1}{2} \right) \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}} - \left(\beta_n + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}} \right] \right\} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \left(\frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\phi - \tau} \right| \\ &\leq \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right|^{| \alpha_n | + \frac{1}{2}} \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right|^{| \beta_n | + \frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(| \alpha_n | + \frac{1}{2} \right) \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}} \right| + \left(| \beta_n | + \frac{1}{2} \right) \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}} \right| \right] \right\} \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\sin \frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin \frac{\theta(\phi)}{2}} \right|^{| \alpha_n | + \frac{1}{2}} \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\cos \frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos \frac{\theta(\phi)}{2}} \right|^{| \beta_n | + \frac{1}{2}} \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\frac{\pi + b - a}{2\pi} \sin \theta(\tau)}{\cos \theta(\phi) - \cos \theta(\tau)} \right| \\ &\quad + \max_{\substack{\phi \in [0, \pi] \\ \tau \in \partial K}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\phi - \tau} \right| \\ &\leq (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_n | + \frac{1}{2}} (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \beta_n | + \frac{1}{2}} \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} \left[\left(| \alpha_n | + \frac{1}{2} \right) + \left(| \beta_n | + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad + (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_n | + \frac{1}{2}} (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \beta_n | + \frac{1}{2}} \mathcal{M}_4(a, b) + (\mathcal{M}_1(a, b))^2, \end{aligned}$$

т. е. справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \tau} G_n \right\|_{C([0, \pi] \times [0, \pi])} \leq (\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_n| + |\beta_n| + 1} \times \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [|\alpha_n| + |\beta_n| + 1] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} + (\mathcal{M}_1(a, b))^2. \quad (91)$$

Отметим, что в силу (17), (75), (76) и (59) или (61) найдется номер n_0 , начиная с которого по крайней мере $[\frac{a}{12\pi}n]$ первых и $[\frac{\pi-b}{12\pi}n]$ последних слагаемых в суммах (82) равны нулю. Поэтому, сгруппировав слагаемые в (82) парами, с учетом определения (83) получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta)| &= \left| \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \check{f}(\phi_{k,n}) \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{k,n}, \lambda_n)} G_n(\phi, \phi_{k,n}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{[\frac{\tilde{n}}{2}]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i,n}) \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{2i,n}, \lambda_n)} G_n(\phi, \phi_{2i,n}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \check{f}(\phi_{2i-1,n}) \frac{z(\phi, \lambda_n)}{z'(\phi_{2i-1,n}, \lambda_n)} G_n(\phi, \phi_{2i-1,n}) \right\} \right|. \quad (92) \end{aligned}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}_1$ и $z(\phi, \lambda_n)$ – решение задачи (74). В силу (62) и (82) имеем

$$\begin{aligned} |L_{n_{1,j}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{1,j}}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \theta)| \\ &= \left| z(\phi, \lambda_{n_{1,j}}) \sum_{i=1}^{[\frac{n_{1,j}}{2}]} \left\{ \frac{\check{f}(\phi_{2i,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{1,j}})}{z'(\phi_{2i,n_{1,j}}, \lambda_{n_{1,j}})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\check{f}(\phi_{2i-1,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{1,j}})}{z'(\phi_{2i-1,n_{1,j}}, \lambda_{n_{1,j}})} \right\} \right| \\ &= \left| z(\phi, \lambda_{n_{1,j}}) \sum_{i=1}^{[\frac{n_{1,j}}{2}]} \left\{ \frac{\check{f}(\phi_{2i,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})(1 + o(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\check{f}(\phi_{2i-1,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})(1 + o(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}))} \right\} \right| \\ &= \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \sum_{i=1}^{[\frac{n_{1,j}}{2}]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{1,j}}) \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \check{f}(\phi_{2i-1,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{1,j}}) \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right) \right\} \right| \\ &\leq \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \sum_{i=1}^{[\frac{n_{1,j}}{2}]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{1,j}}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \check{f}(\phi_{2i-1,n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{1,j}}) \right\} \right| \end{aligned}$$

$$+ \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \right| \left| \left[\frac{\check{n}_{1,j}}{2} \right] \cdot 2 \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \|G_{n_{1,j}}\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right|.$$

Отсюда получаем оценку

$$\begin{aligned} & |L_{n_{1,j}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{1,j}}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \theta)| \\ & \leq \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{1,j}}{2}\right]} \{ \check{f}(\phi_{2i, n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i, n_{1,j}}) - \check{f}(\phi_{2i-1, n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i, n_{1,j}}) \} \right| \\ & \quad + \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{1,j}}{2}\right]} \{ \check{f}(\phi_{2i-1, n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i, n_{1,j}}) \right. \\ & \quad \left. - \check{f}(\phi_{2i-1, n_{1,j}}) G_{n_{1,j}}(\phi, \phi_{2i-1, n_{1,j}}) \} \right| \\ & \quad + \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \right| \left| \left[\frac{n_{1,j}}{2} \right] \cdot 2 \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \|G_{n_{1,j}}\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Учитывая (61), имеем

$$\begin{aligned} & |L_{n_{1,j}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{1,j}}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \theta)| \\ & \leq \left| \frac{z(\varphi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \right| \left| \left[\frac{\check{n}_{1,j}}{2} \right] \left\{ \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}}\right) \|G_{n_{1,j}}\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} G_{n_{1,j}} \right\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left| \frac{z(\varphi, \lambda_{n_{1,j}})}{h(\lambda_{n_{1,j}})} \right| \left| \left[\frac{\check{n}_{1,j}}{2} \right] \cdot 2 \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \|G_{n_{1,j}}\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (56), (86), (91) и следствия 3 получаем оценку

$$\begin{aligned} & |L_{n_{1,j}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{1,j}}}^{(\alpha_{n_{1,j}}, \beta_{n_{1,j}})}(F, \theta)| \\ & = O(1) \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b) (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \\ & \quad + O(1) \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}} \\ & \quad + O(1) \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} (\mathcal{M}_2(a, b) (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_n | + | \beta_n | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right). \end{aligned} \tag{93}$$

Сначала оценим первое слагаемое. В силу (72) найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \\ &= \mathcal{M}_2(a, b)\omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{1,j}}\right) (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} + \omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{1,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b). \end{aligned}$$

Учитывая свойство модуля непрерывности и условие (38), из (37) и (79) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{1,j}}\right) \mu_{n_{1,j}} \ln n_{1,j} + \omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{1,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(\check{f}, \frac{1}{n_{1,j}}\right) \mu_{n_{1,j}} \ln n_{1,j} \\ &\quad + [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(\check{f}, \frac{1}{n_{1,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(F, \frac{1}{n_{1,j}}\right) \mu_{n_{1,j}} \ln n_{1,j} \\ &\quad + [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(F, \frac{1}{n_{1,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b) = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (93) можно оценить следующим образом:

$$O(1) \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) = o(1). \quad (94)$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в (93). Из (72) и (38) получаем, что для $n > n_0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1} \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [| \alpha_{n_{1,j}} | + | \beta_{n_{1,j}} | + 1] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}} \\ &\leq \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu_{n_{1,j}} (\ln n_{1,j}) \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} \left[\frac{\ln(\mu_{n_{1,j}} \ln n_{1,j})}{\ln \mathcal{M}_0(a, b)} + \nu + 1 \right] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{1,j}} \\ &\leq \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu(\ln n_{1,j}) \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} \left[\frac{\ln(\mu \ln n_{1,j})}{\ln \mathcal{M}_0(a, b)} + \nu + 1 \right] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{1,j}} = o(1), \end{aligned}$$

т. е. в силу (79) и того, что $\|\check{f}\|_{C[0,\pi]} = \|F\|_{C[0,\pi]}$, имеем

$$\begin{aligned} & O(1)\|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{1,j}}| + |\beta_{n_{1,j}}| + 1} \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [|\alpha_{n_{1,j}}| + |\beta_{n_{1,j}}| + 1] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}} \\ & = O(1)\|f\|_{C[a,b]} \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{1,j}}| + |\beta_{n_{1,j}}| + 1} \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [|\alpha_{n_{1,j}}| + |\beta_{n_{1,j}}| + 1] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{1,j}}}} = o(1). \quad (95) \end{aligned}$$

Наконец, последнее слагаемое в (93) оценим с помощью (72) и (38):

$$\begin{aligned} 0 & \leq (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{1,j}}| + |\beta_{n_{1,j}}| + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right| \\ & \leq (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu_{n_{1,j}} \ln n_{1,j} + \mathcal{M}_1(a, b)) \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) \right| \\ & \leq (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu \ln n_{1,j} + \mathcal{M}_1(a, b)) \left| o\left(\frac{1}{\ln n_{1,j}}\right) \right| = o(1), \end{aligned}$$

т. е.

$$O(1)(\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{1,j}}| + |\beta_{n_{1,j}}| + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{1,j}}}\right) = o(1).$$

Отсюда и из (94), (95) и (93) следует утверждение теоремы в случае подпоследовательности $n = n_{1,j}$. Пусть $n \in \mathbb{N}_2$ и $z(\phi, \lambda_n)$ – решение задачи (74). В силу (82), (83), а также в силу (92) получаем

$$\begin{aligned} & \left| L_{n_{2,j}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{2,j}}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \theta) \right| \\ & = \left| z(\phi, \lambda_{n_{2,j}}) \sum_{i=1}^{\left[\frac{n_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \frac{\check{f}(\phi_{2i, n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i, n_{2,j}})}{z'(\phi_{2i, n_{2,j}}, \lambda_{n_{2,j}})} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\check{f}(\phi_{2i-1, n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i-1, n_{2,j}})}{z'(\phi_{2i-1, n_{2,j}}, \lambda_{n_{2,j}})} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Используя асимптотическую формулу (60), получим

$$\begin{aligned} & \left| L_{n_{2,j}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{2,j}}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \theta) \right| \\ & = \left| z(\phi, \lambda_{n_{2,j}}) \sum_{i=1}^{\left[\frac{n_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \frac{\check{f}(\phi_{2i, n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i, n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})} (1 + o(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}))} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\check{f}(\phi_{2i-1, n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i-1, n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})} (1 + o(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}))} \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| z(\phi, \lambda_n) \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \frac{\check{f}(\phi_{2i,n}) G_n(\phi, \phi_{2i,n})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right)\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\check{f}(\phi_{2i-1,n_{2,j}}) G_n(\phi, \phi_{2i-1,n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right)\right) \right\} \right| \\
&= \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{2,j}}) \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right)\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \check{f}(\phi_{2i-1,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{2,j}}) \left(1 + o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right)\right) \right\} \right|.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\left| L_{n_{2,j}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{2,j}}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \theta) \right| \\
&\leq \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{2,j}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \check{f}(\phi_{2i-1,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{2,j}}) \right\} \right| \\
&+ \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \right| \left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2} \right] \cdot 2 \| \check{f} \|_{C[0,\pi]} \| G_{n_{2,j}} \|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right) \\
&\leq \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{2,j}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \check{f}(\phi_{2i-1,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{2,j}}) \right\} \right| \\
&+ \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \sum_{i=1}^{\left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2}\right]} \left\{ \check{f}(\phi_{2i-1,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i,n_{2,j}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \check{f}(\phi_{2i-1,n_{2,j}}) G_{n_{2,j}}(\phi, \phi_{2i-1,n_{2,j}}) \right\} \right| \\
&+ \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \right| \left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2} \right] \cdot 2 \| \check{f} \|_{C[0,\pi]} \| G_{n_{2,j}} \|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right).
\end{aligned}$$

Учитывая (59), продолжим оценку:

$$\begin{aligned}
 & \left| L_{n_{2,j}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{2,j}}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \theta) \right| \\
 & \leq \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \left\| \left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2} \right] \left\{ \omega \left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}} \right) \|G_{n_{2,j}}\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} G_{n_{2,j}} \right\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}} \right\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left| \frac{z(\phi, \lambda_{n_{2,j}})}{\sqrt{\lambda_{n_{2,j}} + h^2(\lambda_{n_{2,j}})}} \left\| \left[\frac{\check{n}_{2,j}}{2} \right] \cdot 2\|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \|G_{n_{2,j}}\|_{C([0,\pi] \times [0,\pi])} o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right) \right\} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \right. \right.
 \end{aligned}$$

В силу (53), (86), (91) и следствия 3 имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| L_{n_{2,j}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \cos \theta) - S_{\lambda_{n_{2,j}}}^{(\alpha_{n_{2,j}}, \beta_{n_{2,j}})}(F, \theta) \right| \\
 & \leq O(1) \omega \left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}} \right) (\mathcal{M}_2(a, b) (\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \\
 & \quad + O(1) \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1} \right. \\
 & \quad \times \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \left. \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}} \\
 & \quad + O(1) (\mathcal{M}_2(a, b) (\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right). \quad (96)
 \end{aligned}$$

Из (72) и (38) для второго слагаемого в (96) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 & \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1} \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}} \\
 & \leq \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu_{n_{2,j}}(\ln n_{2,j}) \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} \left[\frac{\ln(\mu_{n_{2,j}} \ln n_{2,j})}{\ln \mathcal{M}_0(a, b)} + \nu + 1 \right] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{2,j}} \\
 & \leq \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu(\ln n_{2,j}) \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} \left[\frac{\ln(\mu \ln n_{2,j})}{\ln \mathcal{M}_0(a, b)} + \nu + 1 \right] + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{2,j}} = o(1),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 & O(1) \|\check{f}\|_{C[0,\pi]} \left((\mathcal{M}_0(a, b))^{|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1} \left\{ \frac{\mathcal{M}_3(a, b)}{2} [|\alpha_{n_{2,j}}| + |\beta_{n_{2,j}}| + 1] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mathcal{M}_4(a, b) \right\} + (\mathcal{M}_1(a, b))^2 \right) \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}} = o(1). \quad (97)
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в (96). В силу (72) найдется $n_0 \in \mathbb{N}_2$ такое, что для всех $n_{2,j} \geq n_0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{2,j}} | + | \beta_{n_{2,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)\omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{2,j}}\right) (\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{2,j}} | + | \beta_{n_{2,j}} | + 1} + \omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{2,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b). \end{aligned}$$

Учитывая условие (38), из (37) и (79) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{2,j}} | + | \beta_{n_{2,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{2,j}}\right) \mu_{n_{2,j}} \ln n_{2,j} + \omega\left(\check{f}, \frac{3\sqrt{2}\pi}{n_{2,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(\check{f}, \frac{1}{n_{2,j}}\right) \mu_{n_{2,j}} \ln n_{2,j} \\ &\quad + [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(\check{f}, \frac{1}{n_{2,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b) \\ &\leq \mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(F, \frac{1}{n_{2,j}}\right) \mu_{n_{2,j}} \ln n_{2,j} \\ &\quad + [3\sqrt{2}\pi + 1] \omega\left(F, \frac{1}{n_{2,j}}\right) \mathcal{M}_1(a, b) = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$O(1)\omega\left(\check{f}, \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda_{n_{2,j}}}}\right) (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{2,j}} | + | \beta_{n_{2,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) = o(1). \quad (98)$$

Наконец, последнее слагаемое в (96) оценим с помощью (72) и (38):

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{2,j}} | + | \beta_{n_{2,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) \left| o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right) \right| \\ &\leq (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu_{n_{2,j}} \ln n_{2,j} + \mathcal{M}_1(a, b)) \left| o\left(\frac{1}{\ln n_{2,j}}\right) \right| \\ &\leq (\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{\nu+1} \mu \ln n_{2,j} + \mathcal{M}_1(a, b)) \left| o\left(\frac{1}{\ln n_{2,j}}\right) \right| = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку

$$O(1)(\mathcal{M}_2(a, b)(\mathcal{M}_0(a, b))^{| \alpha_{n_{2,j}} | + | \beta_{n_{2,j}} | + 1} + \mathcal{M}_1(a, b)) o\left(\frac{1}{\ln \lambda_{n_{2,j}}}\right) = o(1).$$

Отсюда и из (96)–(98) следует утверждение теоремы в случае подпоследовательности $\{n_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Теорема 4 гарантирует справедливость теорем 1, 2, а также замечания 8 (в случае фиксированных $\alpha > -1$, $\beta > -1$ см. [6, гл. XIV,

§ 14.4]), переформулированных в терминах классических многочленов Лагранжа по матрице узлов Якоби с параметрами $\alpha_n \geq -1, \beta_n \geq -1$, связанными с аппроксимируемой функцией условиями равносходимости согласно определению 3.

Утверждение замечания 5 следует из результата С. Н. Бернштейна [22, ч. 3, гл. 2, § 2] (о расходимости интерполяционного процесса Лагранжа функции $|x|$ по матрице равноотстоящих узлов всюду на множестве $x \in [-1, 1] \setminus \{-1, 0, 1\}$), замечания 8, инвариантности относительно преобразования сдвига и линейности операторов $S_{n^2}(f, \cdot)$ и $\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}_0, f, \cdot)$.

Список литературы

1. А. Ю. Трынин, “Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке”, *Матем. сб.*, **200**:11 (2009), 61–108; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “A generalization of the Whittaker–Kotel’nikov–Shannon sampling theorem for continuous functions on a closed interval”, *Sb. Math.*, **200**:11 (2009), 1633–1679.
2. А. Ю. Трынин, “Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке”, *Матем. сб.*, **198**:10 (2007), 141–158; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “Tests for pointwise and uniform convergence of sinc approximations of continuous functions on a closed interval”, *Sb. Math.*, **198**:10 (2007), 1517–1534.
3. А. Ю. Трынин, “Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:5 (2007), 1155–1166; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “Estimates for the Lebesgue functions and the Nevai formula for the sinc-approximations of continuous functions on an interval”, *Siberian Math. J.*, **48**:5 (2007), 929–938.
4. А. Ю. Трынин, “Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 6, 66–78; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “A criterion for the uniform convergence of sinc-approximations on a segment”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:6 (2008), 58–69.
5. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1976.
6. Г. Серё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
7. Я. Л. Геронимус, “О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в корнях ортогональных многочленов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27**:3 (1963), 529–560.
8. С. А. Агаханов, “Оценка функции Лебега для интерполяционного процесса по корням полиномов Якоби”, *Изв. вузов. Матем.*, 1967, № 11, 3–6.
9. Г. И. Натансон, “Двусторонняя оценка функции Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Якоби”, *Изв. вузов. Матем.*, 1967, № 11, 67–74.
10. Д. Л. Берман, “Принцип монотонии в теории интерполяции функции действительного переменного”, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 4, 10–17.
11. Г. П. Неваи, “Замечания об интерполировании”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **25**:1–2 (1974), 123–144.
12. А. А. Кельзон, “Об интерполировании функций ограниченной p -вариации”, *Изв. вузов. Матем.*, 1978, № 5, 131–134; англ. пер.: A. A. Kel’zon, “Interpolation of functions with bounded p -variation”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **22**:5 (1978), 99–102.

13. С. С. Пилипчук, “О признаках сходимости интерполяционных процессов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1979, №12, 39–44; англ. пер.: S. S. Pilipčuk, “Tests for the convergence of interpolation processes”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **23**:12 (1979), 41–46.
14. С. С. Пилипчук, “О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа на множествах второй категории”, *Изв. вузов. Матем.*, 1979, №3, 45–52; англ. пер.: S. S. Pilipčuk, “Divergence of Lagrange interpolation processes on sets of second category”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **23**:3 (1979), 30–36.
15. С. С. Пилипчук, “О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа на счетных множествах”, *Изв. вузов. Матем.*, 1980, №12, 38–44.
16. А. А. Привалов, “О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве положительной меры”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:4 (1976), 837–859; англ. пер.: A. A. Privalov, “The divergence of the Lagrange interpolation processes with respect to Jacobi nodes on a set of positive measure”, *Siberian Math. J.*, **17**:4 (1976), 630–648.
17. В. П. Скляр, *Прямые и обратные теоремы теории приближений для наилучших приближений с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$* , деп. в ВИНТИ 5160-81.
18. А. А. Привалов, “Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, №5, 49–59; англ. пер.: A. A. Privalov, “Uniform convergence criteria for Lagrange interpolation processes”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **30**:5 (1986), 65–77.
19. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
20. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **59**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
21. А. Ю. Трынин, “Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, №9, 60–73; англ. пер.: A. Yu. Trynin, “Absence of stability of interpolation with respect to eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **44**:9 (2000), 58–71.
22. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949; англ. пер.: I. P. Natanson, *Constructive function theory*, vol. I–III, Ungar Publ., New York, 1964–1965.

А. Ю. ТРЫНИН (A. Yu. TRYNIN)
 Саратовский государственный университет
 им. Н. Г. Чернышевского
 E-mail: tayu@rambler.ru; atrynin@gmail.com

Поступило в редакцию
 14.12.2009
 21.11.2010