Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, О разрушении внутренних гравитационных волн с нелинейными источниками, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 29–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:12:21

УДК 517.957

М. О. Корпусов

О разрушении внутренних гравитационных волн с нелинейными источниками

Рассмотрено уравнение внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости при учете нелинейных источников общего вида. Для соответствующей начально-краевой задачи в ограниченной области с однородными условиями Дирихле на границе этой области доказана локальная во времени разрешимость, а также получены достаточные условия разрушения решения за конечное время.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: разрушение, нелинейная начально-краевая задача, внутренние волны, уравнение соболевского типа.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы рассмотрим трехмерное уравнение внутренних гравитационных волн при учете источников достаточно общего вида. Изучению линейной теории внутренних волн посвящены работы [1]–[6] (см. также библиографию к этим работам). Работы [7], [8] посвящены исследованию нелинейных внутренних гравитационных волн. Насколько нам известно, вопросами разрушения нелинейных внутренних гравитационных волн систематически никто не занимался. Отметим, что существуют три основных метода исследования возникновения разрушения. Первый метод – это метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [9], второй – это энергетический метод Х. А. Левина [10]–[12], и, наконец, третий – это метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работе [13] (см. также [14]). Отметим, что обобщению энергетического метода Х. А. Левина в случае уравнений соболевского типа с нелинейным оператором при производной по времени посвящены работы [15], [16], где рассматривались задачи, одним из примеров которых может служить задача

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \Delta_{p_1} u) + \Delta u - \Delta_{p_2} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и

$$\Delta_p v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) \quad \text{при } p > 2.$$

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в монографии [15] и посвященные исследованию вопросов разрушения решений нелинейных уравнений соболевского типа с производной по времени первого порядка. Здесь

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-12018-офи-м-2011, 08-01-00376-а), а также Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук” (грант МД-99.2009.1).

нашей целью будет исследование следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_3 u - \gamma^2(x_3)u) + \omega^2(x_3)\Delta_2 u + f(x, u) = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad (1.2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$ и введены следующие обозначения:

$$\Delta_3 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Для этой задачи докажем, что при условии достаточно “больших” начальных данных (функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$) решение задачи (1.1), (1.2) разрушается за конечное время. Кроме того, мы докажем, что для любых начальных данных $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ решение задачи (1.1), (1.2) существует локально во времени. Формально при исследовании достаточных условий разрушения решения задачи (1.1), (1.2) при некоторых условиях для функции $f(x, u)$ может быть применен энергетический метод Х. А. Левина в той форме, в которой он развит в работе [11]. Однако в настоящем исследовании мы его модифицируем, благодаря чему его применение к уравнению (1.1) и родственным уравнениям соболевского типа со второй производной по времени значительно упростится, и, кроме того, его можно будет применить к уравнениям вида (1.1) при учете сильной нелинейной диссипации, т. е. при учете, например, еще слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_3 u - g(x, u)),$$

что мы собираемся сделать в следующей публикации, посвященной уравнению ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками и с сильной нелинейной диссипацией. Заметим, что мы используем при доказательстве разрушения следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi\Phi' + \gamma\Phi^2 \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta, \gamma \geq 0,$$

которое впервые было выведено в работе [12].

§ 2. Разрушение сильного обобщенного решения

Прежде всего введем некоторые условия для исходных данных задачи (1.1), (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Каратеодориевой функцией или функцией Каратеодори называется функция $f(x, s)$, которая для почти всех $x \in \Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}$ и для всех $s \in \mathbb{R}$ измерима по $x \in \Omega$.

Предположим, что функция $f(x, u): \Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) функция $f(x, u)$ является каратеодориевой;
- (ii) для функции $f(x, u)$ выполнено следующее условие роста:

$$|f(x, u)| \leq a_1(x) + c_1|u|^{q+1}, \quad a_1(x) \in \mathbb{L}_+^{(q+2)/(q+1)}(\Omega), \quad q \in (0, 4]; \quad (2.1)$$

(iii) для любой функции $v(x) \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ при некотором $\vartheta > 2$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} v(x) f(x, v(x)) dx \geq \vartheta \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} f(x, s) ds dx; \quad (2.2)$$

(iv) функция $f(x, u)$ является локально по u липшиц-непрерывной, т. е. имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|f(x, u_1) - f(x, u_2)\|_{(q+2)/(q+1)} &\leq \mu(R) \|u_1 - u_2\|_{q+2}, \\ R = \max\{\|u_1\|_{q+2}, \|u_2\|_{q+2}\} \quad \forall u_1(x), u_2(x) &\in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\|\cdot\|_r$ – норма пространства Лебега $\mathbb{L}^r(\Omega)$ при $r \geq 1$, а $\mu(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что множество функций $f(x, u)$, удовлетворяющих условиям (i)–(iv), непусто. Действительно, например, при $q \in (0, 4]$ функции $f(x, u) = \chi(x)|u|^q u$ и $f(x, u) = \chi(x)|u|^{q+1}$ удовлетворяют указанным условиям, причем $\chi(x)$ – характеристическая функция произвольной измеримой подобласти $\Omega_0 \subseteq \Omega$, т. е.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Таким образом, рассматривая задачу (1.1), (1.2) при функциях $f(x, u)$, удовлетворяющих условиям (i)–(iv), мы учитываем реальную физическую ситуацию, когда источники, описываемые функцией $f(x, u)$, являются *пространственно локализованными*.

Кроме того, предположим, что имеют место следующие свойства:

$$\gamma(x_3), \omega(x_3) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), \quad (2.4)$$

$$\gamma(x_3) \in [0, \gamma_0], \quad \omega(x_3) \in [0, \omega_0], \quad \gamma_0, \omega_0 \in (0, +\infty). \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Сильным обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) назовем функцию $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при $T > 0$, удовлетворяющую равенству

$$\begin{aligned} \langle D(u), w \rangle &= 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(0, x) = u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$D(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_3 u - \gamma^2(x_3)u) + \omega^2(x_3)\Delta_2 u + f(x, u),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а через v' обозначена производная по времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Слабой производной функции* $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ в смысле скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ называется следующая величина:

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, 3.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться данным определением слабой производной и говорить об интегрировании по “частям” в указанном смысле. В частности, стандартная ситуация следующая:

$$\langle \Delta v, w \rangle \equiv -\langle \nabla v, \nabla w \rangle = -\sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle = -\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx, \\ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Докажем эффект разрушения сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2). Действительно, предположим, что существует сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) при некотором $T > 0$, т. е. $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Введем ряд обозначений:

$$\Phi(t) \equiv \Phi[u](t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx, \quad (2.7)$$

$$J(t) \equiv J[u](t) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u'|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx. \quad (2.8)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2.1. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при некотором $T > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$(\Phi')^2(t) \leq 2\Phi(t)J(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, справедливо равенство

$$\Phi' = \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u' u dx.$$

Справедливы также следующие неравенства:

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx \right| \leq \|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2, \\ \left| \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u' u dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} (\Phi')^2 &\leq \left(\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 + \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \\ &\quad + 2\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \\ &\quad + \|\nabla u'\|_2^2 \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx + \|\nabla u\|_2^2 \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \\ &= \left(\|\nabla u'\|_2^2 + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \right) \left(\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \right) = 2J(t)\Phi(t), \end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

при

$$a = \|\nabla u'\|_2 \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad b = \|\nabla u\|_2 \left(\int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Теперь приступим к выводу основного дифференциального неравенства. Для этого положим $w = u$ в равенстве (2.6), где $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ – сильное обобщенное решение в смысле определения 2.2 при некотором $T > 0$. Тогда после интегрирования по “частям” в смысле определения 2.3 мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u'' u dx + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) (\nabla_2 u, \nabla_2 u) dx \\ = \int_{\Omega} u(x) f(x, u(x)) dx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\nabla_2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx - \|\nabla u'\|_2^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u'\|_2^2, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u'' u dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u' u dx - \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u|^2 dx - \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u'|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) и (2.10) с учетом введенных обозначений (2.7), (2.8) мы получим первое энергетическое равенство

$$\Phi'' - J + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx = \int_{\Omega} u(x) f(x, u(x)) dx. \quad (2.13)$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые вспомогательные рассуждения. Введем следующий функционал:

$$\psi(v) \equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, v(x)) dx, \quad \mathcal{F}(x, v) = \int_0^v f(x, s) ds. \quad (2.14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Оператор $N_f(v) \equiv f(x, v)$, порожденный каратеодориевой функцией $f(x, v)$, называется *оператором Немыцкого*.

Справедлива следующая известная лемма, для которой мы для удобства изложения приведем полное доказательство.

ЛЕММА 2.2. Пусть функция $f(x, v)$ удовлетворяет условиям (i)–(ii). Тогда функционал $\psi(v)$, действующий из $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ в $\mathbb{R}$, является дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше

$$\psi'_f(v): \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

имеет вид

$$\psi'_f(v) = N_f(v) \quad \forall v(x) \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия (i)–(ii) для функции $f(x, v)$; тогда для потенциальной функции $\mathcal{F}(x, v)$, определенной формулой (2.14), имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x, v)| &\leq \left| \int_0^{v(x)} f(x, s) ds \right| \leq a_1(x)|v| + \frac{c_1}{p}|v|^p \\ &\leq \frac{|a_1(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|v|^p}{p} + \frac{c_1}{p}|u|^p = a_2(x) + c_2|u|^p \end{aligned} \quad (2.15)$$

при

$$p = q + 2, \quad p' = \frac{p}{p-1} = \frac{q+2}{q+1},$$

где мы воспользовались неравенством Юнга

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

$a_2(x) \in \mathbb{L}_+^1(\Omega)$ и $c_2 > 0$. Очевидно, что по определению потенциальная функция $\mathcal{F}(x, v)$ является каратеодориевой, и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого [17] приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_{\mathcal{F}}(v): \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^1(\Omega),$$

порожденный каратеодориевой функцией $\mathcal{F}(x, v)$, является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(v)$, определенный формулой (2.14), является ограниченным и непрерывным из $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ в $\mathbb{R}$. Действительно, в силу оценки (2.15) имеет место цепочка неравенств

$$|\psi(v)| \leq \int_{\Omega} |\mathcal{F}(x, v(x))| dx \leq \int_{\Omega} a_2(x) dx + c_2 \int_{\Omega} |v|^{q+2} dx \leq c_3 + c_2 \|v\|_{q+2}^{q+2}.$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$v_n \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(v_n) - \psi(v)| \leq \|N_{\mathcal{F}}(v_n) - N_{\mathcal{F}}(v)\|_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

в силу теоремы М. А. Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого. Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(v)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u, v) \equiv \psi(u + v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v \rangle_1, \quad u, v \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$. Значит, в силу явного выражения этих скобок двойственности имеет место следующее неравенство:

$$|\omega(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} [\mathcal{F}(x, u(x) + v(x)) - \mathcal{F}(x, u(x))] dx - \int_{\Omega} N_f(u)(x)v(x) dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, u(x) + v(x)) - \mathcal{F}(x, u(x)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathcal{F}(x, u(x) + tv(x)) dt \\ &= \int_0^1 f(x, u(x) + tv(x))v(x) dt. \end{aligned}$$

Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\omega(u, v)| &\leq \int_0^1 \int_{\Omega} |N_f(u + tv)(x) - N_f(u)(x)| |v(x)| dx dt \\ &\leq \int_0^1 \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)} \|v\|_{q+2} dt. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_{q+2} \rightarrow 0} \frac{|\omega(u, v)|}{\|v\|_{q+2}} \leq \lim_{\|v\|_{q+2} \rightarrow 0} \int_0^1 \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)} dt = 0.$$

Лемма доказана.

Теперь напомним следующую теорему о цепном правиле для производной Фреше (см., например, [18]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbb{F}: \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ и $\mathbb{G}: \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_3$, причем оператор $\mathbb{F}$ дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор $\mathbb{G}$ дифференцируем по Фреше в точке $\mathbb{F}(u)$. Тогда их композиция

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{K}'_f(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u). \quad (2.16)$$

Итак, представим операторы $\mathbb{F}$ и $\mathbb{G}$ следующим образом: $\mathbb{F} = v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $\mathbb{G} = \psi(v)$, последний в силу леммы 2.2 дифференцируем по Фреше на банаховом пространстве $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Теперь заметим, что в силу условия (ii) имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega).$$

Поэтому если мы положим $\mathbb{B}_1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{B}_2 = \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ и $\mathbb{B}_3 = \mathbb{R}$ в теореме 2.1, то мы получим, что имеет место равенство (2.16) для функционала $\psi(v)$, определенного формулой (2.14):

$$\frac{d}{dt} \psi(v) = \int_{\Omega} v' f(x, v) dx \quad \forall v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \quad (2.17)$$

Теперь можно перейти к выводу второго энергетического равенства. Действительно, возьмем в равенстве (2.6) в качестве функции w производную по времени решения этой задачи: $w = u'$; тогда с учетом (2.17) и после интегрирования по “частям” в смысле определения 2.3 получим равенство

$$\int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u') dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u' u'' dx + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) (\nabla_2 u, \nabla_2 u') dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx,$$

из которого с учетом обозначения (2.8) получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} J + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx.$$

Отсюда после интегрирования по $t \in [0, T]$ получим второе энергетическое равенство

$$E(t) \equiv J(t) + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx = E(0). \quad (2.18)$$

Теперь потребуем выполнения следующего условия для начальных данных задачи:

$$E(0) \leq 0. \quad (2.19)$$

Тогда из (2.18) получим неравенство $E(t) \leq 0$. Значит,

$$J(t) + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим, что по своей сути условие (2.19), которое можно с учетом начальных условий переписать в виде

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u_0|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx, \quad (2.21)$$

есть условие достаточной большой величины начальных данных. Действительно, если мы возьмем, например, $f(x, u) = \chi(x) u^2$ (где $\chi(x)$ – характеристическая функция произвольной измеримой подобласти $\Omega_0 \subseteq \Omega$), то получим после очевидных преобразований условие

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u_0|^2 dx \leq \frac{2}{3} \int_{\Omega_0} u_0^3 dx,$$

которое при фиксированном $u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ при достаточно большом $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $u_0(x) \geq 0$, для почти всех $x \in \Omega$ всегда выполнено.

Теперь воспользуемся условием (iii), и тогда из (2.20) мы получим неравенство

$$J(t) + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx \leq \frac{2}{\vartheta} \int_{\Omega} u(x) f(x, u(x)) dx \quad \forall t \in [0, T],$$

откуда получим следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} u(x) f(x, u(x)) dx - \frac{\vartheta}{2} J(t) - \frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx \geq 0. \quad (2.22)$$

Однако тогда из равенства (2.13) мы получим

$$\begin{aligned} \Phi'' - \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)J + \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx \\ = \int_{\Omega} u(x) f(x, u(x)) dx - \frac{\vartheta}{2} J(t) - \frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u|^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

По условию (iii) имеем $\vartheta > 2$, поэтому из (2.23) приходим к неравенству

$$\Phi'' \geq \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)J \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда и из (2.9) получим искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 \geq 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right), \quad (2.24)$$

причем в силу условия (iii) имеет место неравенство $\alpha > 1$. Пусть теперь выполнено дополнительное условие

$$\Phi'(0) > 0 \iff \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u_1 u_0 dx > 0. \quad (2.25)$$

Поскольку $\Phi(t) \geq 0$ по определению (2.7), из неравенства (2.25) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha \frac{(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} \geq 0 &\implies \frac{d}{dt} \left[\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \right] \geq 0 \implies \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \geq \frac{\Phi'(0)}{\Phi^\alpha(0)} = c_4 > 0 \\ &\implies \frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \Phi^{1-\alpha} \geq c_4 > 0 \implies \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}(0)} - \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}} \geq c_4(\alpha-1)t \\ &\implies \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}(0)} - c_4(\alpha-1)t \implies \Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi_0^{1-\alpha} - c_4(\alpha-1)t]^{1/(\alpha-1)}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Следовательно, найдется такой момент времени $T_0 \in [0, T_1]$, что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\alpha-1} [\Phi'(0) \Phi^{2\alpha-1}(0)]^{-1} = \frac{4}{\vartheta-2} [\Phi'(0) \Phi^{\vartheta/2}(0)]^{-1}, \quad \vartheta > 2. \quad (2.27)$$

Теперь докажем, что для любых начальных данных $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ величина $T_0 = T_0(u_0, u_1)$ больше нуля, т. е. докажем локальную по времени разрешимость задачи (1.1), (1.2) в сильном обобщенном смысле определения 2.2.

§ 3. Локальная во времени разрешимость

Перепишем задачу (1.1), (1.2) в следующей операторной форме:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \frac{d^2 u}{dt^2} + \mathbb{B} u &= N_f(u), \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\mathbb{A} \equiv -\Delta_3 + \gamma^2(x_3)I, \quad \mathbb{B} \equiv -\omega^2(x_3)\Delta_2, \quad (3.2)$$

а через $N_f(u)$ обозначен, как всегда, оператор Немыцкого, порожденный каратеодориевой функцией $f(x, u)$. Первое, что нам необходимо доказать, – это обратимость оператора $\mathbb{A}$ и липшиц-непрерывность обратного оператора. Для этой цели мы воспользуемся следующим вариантом теоремы Браудера–Минти (см., например, [19]).

ТЕОРЕМА БРАУДЕРА–МИНТИ. Пусть оператор $\mathbb{A}$, действующий из банахова пространства $\mathbb{W}$ в сильно сопряженное $\mathbb{W}^*$, является радиально-непрерывным, сильно монотонным и коэрцитивным. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{W}$, который является липшиц-непрерывным.

В формулировке этой теоремы участвуют три понятия, для которых мы для полноты изложения приведем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Оператор $\mathbb{A}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^*$ называется *радиально-непрерывным*, если

$$\varphi(s) = \langle \mathbb{A}(u + sv), v \rangle \in \mathbb{C}[0, 1] \quad (3.3)$$

для всех $u, v \in \mathbb{W}$, где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Оператор $\mathbb{A}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^*$ называется *сильно монотонным*, если существует такая постоянная $m > 0$, что имеет место следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geq m \|u - v\|^2, \quad (3.4)$$

где $\|\cdot\|$ – норма банахова пространства $\mathbb{W}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Оператор $\mathbb{A}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^*$ называется *коэрцитивным*, если существует такая функция

$$\gamma(s): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

что имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle \geq \gamma(\|u\|) \|u\| \quad \forall u \in \mathbb{W}. \quad (3.5)$$

Теперь надо проверить, что оператор $\mathbb{A}$, определенный формулой (3.2), является радиально-непрерывным, сильно монотонным и коэрцитивным как оператор, действующий из $\mathbb{W} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{W}^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т. е. что он удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера–Минти.

(I) Докажем, что оператор $\mathbb{A}$ является радиально-непрерывным. Действительно, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \langle \mathbb{A}(u + sv), v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla(u + sv), \nabla v) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3)(u + sv)v dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + s \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3)uv dx + s \int_{\Omega} \gamma^2(x_3)v^2 dx. \end{aligned}$$

Ясно, что $\varphi(s) \in \mathbb{C}[0, 1]$ для любых $u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Следовательно, оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является радиально-непрерывным.

(II) Докажем теперь, что оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным. Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u - v|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx = \|u - v\|^2, \end{aligned}$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма банахова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Таким образом, оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным с постоянной $m = 1$.

(III) Докажем коэрцитивность оператора $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Действительно, имеет место цепочка выражений

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным с функцией $\gamma(s) = s$.

Поэтому в силу теоремы Браудера–Минти оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, определенный формулой (3.2), является обратимым, причем обратный оператор

$$\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

является липшиц-непрерывным. Докажем, что при этом постоянная Липшица равна 1. Действительно, в силу доказанного свойства (II) сильной монотонности оператора $\mathbb{A}$ имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geq \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (3.6)$$

из которого в силу стандартного определения нормы $\|\cdot\|_*$ сильно сопряженного банахова пространства $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ к банахову пространству $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$,

$$\|f\|_* \equiv \sup_{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|v\| \leq 1} |\langle f, v \rangle|, \quad (3.7)$$

имеет место неравенство

$$\|\mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v)\|_* \|u - v\| \geq \langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle. \quad (3.8)$$

Действительно, неравенство (3.8) есть простейшее следствие из (3.7). Именно, справедлива общая формула

$$|\langle f, w \rangle| \leq \|f\|_* \|w\|. \quad (3.9)$$

Докажем это неравенство. Действительно, если w равно ϑ – нулевому элементу банахова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то это неравенство выполнено. Пусть теперь $w \neq \vartheta$; тогда из (3.7) вытекает неравенство

$$|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_* \quad \forall \|v\| \leq 1.$$

В частности, для $v = \frac{w}{\|w\|}$ получим выражение

$$|\langle f, w \rangle| \leq \|f\|_* \|w\|.$$

Поэтому неравенство (3.8) есть следствие неравенства (3.9), в котором надо положить

$$f = \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), \quad w = u - v.$$

Из неравенств (3.6) и (3.8) вытекает неравенство

$$\|u - v\| \leq \|\mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v)\|_* \quad \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (3.10)$$

Теперь положим $w_1 = \mathbb{A}(u)$, $w_2 = \mathbb{A}(v)$. Отсюда и из (3.10) в силу доказанной обратимости оператора $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ приходим к неравенству

$$\|\mathbb{A}^{-1}(w_1) - \mathbb{A}^{-1}(w_2)\| \leq \|w_1 - w_2\|_* \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.11)$$

Таким образом, нами доказано, что оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1.

Теперь положим

$$v = \mathbb{A}u \quad (3.12)$$

в задаче (3.1), (3.2) и с учетом обратимости оператора $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v = N_f(\mathbb{A}^{-1}v), \quad (3.13)$$

$$v(0) = v_0 \equiv \mathbb{A}u_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad v'(0) = v_1 \equiv \mathbb{A}u_1 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.14)$$

В классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ задача (3.13), (3.14) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(t) = v_0 + v_1 t - \int_0^t \int_0^s [-\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v(\sigma) + N_f(\mathbb{A}^{-1}v)(\sigma)] d\sigma ds. \quad (3.15)$$

Будем искать решение v уравнения (3.15) в классе $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Для этого мы сначала изучим свойства оператора $\mathbb{B} \equiv -\omega^2(x_3)\Delta_2$. Прежде всего докажем, что

$$\mathbb{B}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.16)$$

Действительно, пусть $w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$; тогда для каждого $h \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{B}w\|_* &= \sup_{\|h\| \leq 1} |\langle \mathbb{B}w, h \rangle| \leq \sup_{\|h\| \leq 1} \left| \int_\Omega \omega^2(x_3) (\nabla_2 w, \nabla_2 h) dx \right| \\ &\leq \omega_0^2 \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\int_\Omega |\nabla_2 w|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla_2 h|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \omega_0^2 \sup_{\|h\| \leq 1} \|\nabla w\|_2 \|\nabla h\|_2 \leq \omega_0^2 \|\nabla w\|_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Значит, (3.16) доказано.

В силу линейности оператора $\mathbb{B}$ и цепочки неравенств (3.17) приходим к неравенству

$$\|\mathbb{B}w_1 - \mathbb{B}w_2\|_* \leq \omega_0^2 \|w_1 - w_2\|. \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь свойства оператора Немыцкого $N_f(u)$, порожденного каратеодориевой функцией $f(x, u)$, удовлетворяющей условию роста (ii) и условию (iv) локальной по $u \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ липшиц-непрерывности. В силу известной теоремы М. А. Красносельского (см. [17]) о непрерывности оператора Немыцкого приходим к выводу, что оператор Немыцкого

$$N_f(u): \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

является непрерывным в соответствующих сильных топологиях банаховых пространств $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$, т. е. из условия

$$u_n \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty$$

вытекает, что

$$N_f(u_n) \rightarrow N_f(u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

В силу исходного предположения $q \in (0, 4]$ (см. условие (ii)) имеет место следующее плотное и непрерывное вложение:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \quad (3.19)$$

поэтому в силу рефлексивности $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.20)$$

Поскольку $q > 0$ и рассматриваемая область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной, мы получаем следующую цепочку плотных и непрерывных вложений:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.21)$$

В силу свойства (iv) для функции $f(x, u)$ мы приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого, порожденный этой (каратеодориевой) функцией, удовлетворяет условию

$$\|N_f(u_1) - N_f(u_2)\|_{(q+2)/(q+1)} \leq \mu(R) \|u_1 - u_2\|_{q+2} \quad (3.22)$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, где $\mu(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента, причем

$$R = \max\{\|u_1\|_{q+2}, \|u_2\|_{q+2}\}.$$

В силу цепочки вложений (3.21) и неравенства (3.22) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|N_f(u_1) - N_f(u_2)\|_* &\leq c_5 \|N_f(u_1) - N_f(u_2)\|_{(q+2)/(q+1)} \leq c_5 \mu(R) \|u_1 - u_2\|_{q+2} \\ &\leq c_5 c_6 \mu(c_6 R^*) \|u_1 - u_2\|, \quad R^* = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где c_5 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\|w\|_* \leq c_5 \|w\|_{(q+2)/(q+1)} \quad \forall w \in \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$

а c_6 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$:

$$\|w\|_{q+2} \leq c_6 \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Поэтому из (3.23) получим неравенство

$$\|N_f(u_1) - N_f(u_2)\|_* \leq \bar{\mu}(R^*) \|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (3.24)$$

где $\bar{\mu}(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента и $R^* = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}$.

Рассмотрим теперь замкнутое, ограниченное и выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$:

$$\mathbb{V}_r \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) : \|v\| \equiv \text{ess. sup}_{t \in [0, T]} \|v\|_* \leq r \right\}, \quad r > 0. \quad (3.25)$$

Перепишем теперь интегральное уравнение (3.15) в следующем операторном виде:

$$v = \mathbb{H}(v), \quad \mathbb{H}(v) \equiv v_0 + v_1 t - \int_0^t \int_0^s [-\mathbb{B} \mathbb{A}^{-1} v(\sigma) + N_f(\mathbb{A}^{-1} v)(\sigma)] d\sigma ds. \quad (3.26)$$

Прежде всего докажем, что оператор $\mathbb{H}(v)$ действует из $\mathbb{V}_r$ в $\mathbb{V}_r$ при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $r > 0$. Действительно, в силу линейности операторов $\mathbb{B}$ и $\mathbb{A}^{-1}$ и неравенств (3.18) и (3.11) имеют место оценки

$$\|\mathbb{B} \mathbb{A}^{-1} v\| \leq \omega_0^2 \|\mathbb{A}^{-1} v\| \leq \omega_0^2 \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad (3.27)$$

а в силу условия роста (ii) для функции $f(x, u)$ и неравенства (3.11) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|N_f(\mathbb{A}^{-1} v)\| &\leq c_5 \left(\int_\Omega |a_1(x)|^{(q+2)/(q+1)} dx \right)^{(q+1)/(q+2)} \\ &\quad + c_5 \text{ess. sup}_{t \in [0, T]} \left(\int_\Omega |\mathbb{A}^{-1} v|^{q+2} dx \right)^{(q+1)/(q+2)} \\ &\leq c_7 + c_5 c_6^{q+1} \text{ess. sup}_{t \in [0, T]} \|\mathbb{A}^{-1} v\|^{q+1} \leq c_7 + c_8 \|v\|^{q+1}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$c_7 = c_5 \left(\int_\Omega |a_1(x)|^{(q+2)/(q+1)} dx \right)^{(q+1)/(q+2)}, \quad c_8 = c_5 c_6^{q+2};$$

здесь мы воспользовались следующим неравенством:

$$(a + b)^{1/\alpha} \leq a^{1/\alpha} + b^{1/\alpha} \quad \text{при } \alpha \in [1, +\infty), \quad a, b \geq 0.$$

С учетом полученных оценок (3.27) и (3.28) и определения (3.26) нелинейного оператора $\mathbb{H}(v)$ мы получим неравенство

$$\|\mathbb{H}(v)\| \leq \|v_0\|_* + T \|v_1\|_* + T^2 [\omega_0^2 \|v\| + c_7 + c_8 \|v\|^{q+1}]. \quad (3.29)$$

Поэтому при условии, что

$$\|v_0\|_* \leq \frac{r}{2}, \quad T \|v_1\|_* + T^2 [\omega_0^2 \|v\| + c_7 + c_8 \|v\|^{q+1}] \leq \frac{r}{2}, \quad (3.30)$$

условие (3.29) может быть выполненным при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $r > 0$. Из условий (3.30) и неравенства (3.29) приходим к выводу о том, что

$$| \|\mathbb{H}(v)\| | \leq r \quad \text{при} \quad v \in \mathbb{V}_r, \quad (3.31)$$

т.е. $\mathbb{H}(v): \mathbb{V}_r \rightarrow \mathbb{V}_r$ при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $r > 0$.

Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}$ на $\mathbb{V}_r$. Действительно, в силу неравенств (3.11), (3.18) и (3.24) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} | \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\| | &\leq T^2 | \|\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v_1 - \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v_2\| | + T^2 | \|N_f(\mathbb{A}^{-1}v_1) - N_f(\mathbb{A}^{-1}v_2)\| | \\ &\leq T^2 [\omega_0^2 + \bar{\mu}(R^*)] \text{ess.sup}_{t \in [0, T]} \|\mathbb{A}^{-1}v_1 - \mathbb{A}^{-1}v_2\| \leq T^2 [\omega_0^2 + \bar{\mu}(R^*)] \|v_1 - v_2\|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где

$$R^* = \text{ess.sup}_{t \in [0, T]} \max\{\|\mathbb{A}^{-1}v_1\|, \|\mathbb{A}^{-1}v_2\|\} \leq \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$$

в силу линейности $\mathbb{A}^{-1}$ и неравенства (3.11). Таким образом, при условии малости $T > 0$,

$$T \leq \frac{1}{(2\omega_0^2 + 2\bar{\mu}(r))^{1/2}}, \quad (3.33)$$

получим, что

$$| \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\| | \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\| \quad (3.34)$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_r$.

Следовательно, при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $r > 0$ оператор $\mathbb{H}(v)$, определенный формулой (3.26), действует из $\mathbb{V}_r$ в $\mathbb{V}_r$ и является сжимающим на $\mathbb{V}_r$. Отсюда и из теоремы о неподвижной точке мы приходим к выводу, что уравнение (3.26) имеет единственное решение v класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$.

Теперь докажем, используя так называемый “бутстеп”-метод, что на самом деле единственное согласно доказанному решению уравнения (3.15) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно, прежде всего из условия $v \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, определения (3.26) оператора $\mathbb{H}(v)$ и из неравенств (3.27) и (3.28) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(v)(t_1) - \mathbb{H}(v)(t_2)\|_* &\leq \|v_0\|_* |t_1 - t_2| + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^s \|\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v\|_*(\sigma) d\sigma ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^s \|N_f(\mathbb{A}^{-1}v)\|_*(\sigma) d\sigma ds \\ &\leq \|v_0\|_* |t_1 - t_2| + \frac{1}{2} |t_1 - t_2|^2 [\omega_0^2 + c_7 + c_8 \|v\|^q] \|v\| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T], \end{aligned}$$

из которой вытекает, что $\mathbb{H}(v)(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда из операторного уравнения (3.26) получим, что $v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Для дальнейшего нам надо доказать, что отсюда вытекает

$$\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad N_f(\mathbb{A}^{-1}v)(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)). \quad (3.35)$$

Действительно, в силу неравенств (3.11) и (3.18) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}^{-1}v(t_1) - \mathbb{A}^{-1}v(t_2)\|_* &\leq \omega_0^2 \|\mathbb{A}^{-1}v(t_1) - \mathbb{A}^{-1}v(t_2)\| \\ &\leq \omega_0^2 \|v(t_1) - v(t_2)\|_* \rightarrow 0, \quad t_1 \rightarrow t_2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$. Наконец, из неравенств (3.11) и (3.22) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|N_f(\mathbb{A}^{-1}v(t_1)) - N_f(\mathbb{A}^{-1}v(t_2))\|_* &\leq \bar{\mu}(R^*) \|\mathbb{A}^{-1}v(t_1) - \mathbb{A}^{-1}v(t_2)\| \\ &\leq \bar{\mu}(R^*) \|v(t_1) - v(t_2)\|_* \rightarrow 0, \quad t_1 \rightarrow t_2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $R^* = \max\{\|v(t_1)\|_*, \|v(t_2)\|_*\}$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$. Таким образом, включения (3.35) доказаны. Следовательно, из (3.26) вытекает, что

$$\mathbb{H}(t) = v_1 t + v_0 + \int_0^t \int_0^s w(\sigma) d\sigma ds, \quad w(\sigma) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Таким образом, $\mathbb{H}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, а из уравнения (3.26) приходим к выводу, что

$$v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Поскольку в классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ задача (3.13), (3.14) и интегральное уравнение (3.15) эквивалентны, мы приходим к выводу, что задача (3.13), (3.14) имеет единственное решение $v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$.

Заметим, что решение задачи (3.1), (3.2), понимаемой в сильном обобщенном смысле определения 2.2, связано с решением задачи (3.13), (3.14) уравнением

$$\mathbb{A}u = v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)). \quad (3.38)$$

В силу обратимости оператора $\mathbb{A}$ приходим к выводу, что

$$u(t) = \mathbb{A}^{-1}v(t).$$

Тогда в силу липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\| &\leq \|v(t_1) - v(t_2)\|_*, \quad \|u'(t_1) - u'(t_2)\| \leq \|v'(t_1) - v'(t_2)\|_*, \\ \|u''(t_1) - u''(t_2)\| &\leq \|v''(t_1) - v''(t_2)\|_* \end{aligned}$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$. Значит, $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Докажем теперь, что решение $v(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ интегрального уравнения (3.15) может быть продолжено на такой максимальный интервал $[0, T_0)$, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|v\|_*(t) = +\infty.$$

Действительно, рассмотрим норму

$$\psi(T) \equiv \operatorname{ess.\,sup}_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_*(t).$$

Как функция от T функция $\psi(T)$ является монотонно неубывающей. Стало быть, при $T \uparrow T_0$ функция $\psi(T)$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что $\psi(T)$ имеет конечный предел при $T \uparrow T_0$. Пусть $T' \in (0, T_0)$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$v(T') = v_0 + \int_0^{T'} G(v)(s) ds, \quad (3.39)$$

где

$$\begin{aligned} G(v)(s) &\equiv v_1 + \int_0^s [-\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}v(\sigma) + N_f(\mathbb{A}^{-1}v)(\sigma)] d\sigma, \\ v(T' + t) &= v(T') + \int_{T'}^{T'+t} G(v)(s) ds, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Введем функцию $w(t) = v(T' + t)$ и сделаем замену переменных $\sigma = s - T'$ в последнем интеграле. Тогда получим уравнение

$$w(t) = v(T') + \int_0^t G(w)(\sigma) d\sigma, \quad t > 0. \quad (3.41)$$

Заметим, что

$$\|v\|_*(T') \leq C < +\infty, \quad T' \in (0, T_0). \quad (3.42)$$

Уравнение (3.41) имеет вид (3.15). Поэтому найдется такой момент времени $T^* = T^*(T')$, что существует решение уравнения (3.41) на интервале $t \in (0, T^*)$. В силу (3.42) функция $T^* = T^*(T')$ имеет минимум, больший нуля, который мы снова обозначим через T^* . Теперь в качестве T' возьмем величину $T' = T_0 - T^*/2$. Таким образом, получаем, что существует решение задачи (3.41) на интервале $(0, T^*)$. Теперь подставим выражение для $v(T')$ из уравнения (3.39) в уравнение (3.40); тогда получим

$$v(t_0) = v_0 + \int_0^{t_0} G(v)(s) ds, \quad t_0 = T' + t, \quad t \in (0, T^*). \quad (3.43)$$

Стало быть, в силу доказанной локальной разрешимости существует единственное решение задачи (3.43) при $t_0 \in (0, T' + T^*)$. В силу выбора $T' = T_0 - T^*/2$ имеем $t_0 \in (0, T_0 + T^*/2)$. Таким образом, используя указанный алгоритм продолжения во времени, мы приходим к выводу, что $T_0 = +\infty$. Полученное противоречие с условием, что $T_0 < +\infty$, доказывает следующее предельное равенство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \psi(T) = +\infty.$$

Отсюда сразу же получаем, что $\limsup_{t \uparrow T_0} \|v\|_*(t) = +\infty$.

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любых начальных условий $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ найдется такой максимальный момент времени $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное сильное обобщенное решение $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ задачи (1.1), (1.2), понимаемое в смысле определения 2.2, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае выполнено предельное равенство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\mathbb{A}u\|_*(t) = +\infty, \quad \mathbb{A} \equiv -\Delta_3 + \gamma^2(x_3)I. \quad (3.44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Обсудим выражение (3.44). Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}u\|_*(t) &= \sup_{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|w\| \leq 1} |\langle \mathbb{A}u, w \rangle| \\ &\leq \sup_{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|w\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla w) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u w dx \right| \\ &\leq 2 \sup_{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|w\| \leq 1} \Phi^{1/2}[u](t) \Phi^{1/2}[w] \leq c_9 \Phi^{1/2}[u](t), \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $\Phi^{1/2}[u](t)$ определено формулой (2.7). Теперь заметим, что справедлива следующая оценка снизу:

$$\|\mathbb{A}u\|_*(t) \|u\|(t) \geq \langle \mathbb{A}u(t), u(t) \rangle = 2\Phi(t). \quad (3.46)$$

С другой стороны,

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx,$$

поэтому в силу определения (2.7) вытекает оценка сверху

$$\|u\|^2(t) \leq 2\Phi(t).$$

Отсюда и из (3.46) получим неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t) \|\mathbb{A}u\|_*(t) \geq 2\Phi(t) \implies \|\mathbb{A}u\|_*(t) \geq \sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t). \quad (3.47)$$

Тем самым, из неравенств (3.45) и (3.47) получим двустороннее неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t) \leq \|\mathbb{A}u\|_*(t) \leq c_9 \Phi^{1/2}[u](t).$$

Значит, выражение (3.44) эквивалентно выражению

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi[u](t) = +\infty,$$

где функционал $\Phi[u](t)$ определен формулой (2.7).

Таким образом, из теоремы 3.1 и результатов, полученных в § 2, вытекает следующая основная теорема настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть функция $f(x, u)$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) и для начальных данных задачи $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \omega^2(x_3) |\nabla_2 u_0|^2 dx \\ \leq 2 \int_{\Omega} \int_0^{u_0(x)} f(x, s) ds dx, \\ \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u_1 u_0 dx > 0. \end{aligned}$$

Тогда для фигурирующего в теореме 3.1 момента времени T_0 разрушения решения выполнено включение

$$T_0 \in (0, T_1], \quad T_1 = \frac{4}{\vartheta - 2} [\Phi'(0) \Phi^{\vartheta/2}(0)]^{-1} \quad \text{при некотором } \vartheta > 2,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) |u_0|^2 dx, \\ \Phi'(0) &= \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} \gamma^2(x_3) u_1 u_0 dx. \end{aligned}$$

Список литературы

1. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, *Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах*, Наука, М., 2005.
2. С. А. Габов, А. Г. Свешников, *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн*, Наука, М., 1990.
3. Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998; англ. пер.: G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii, *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **256**, Marcel Dekker, New York, 2003.
4. Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике*, Наука, М., 1989.
5. Ю. Д. Плетнер, “Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи”, *ЖВМ и МФ*, **32**:12 (1992), 1885–1899; англ. пер.: Yu. D. Pletner, “Fundamental solutions of Sobolev-type operators and some initial boundary-value problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **32**:12 (1992), 1715–1728.
6. В. А. Боровиков, “Асимптотическое разложение функции Грина внутреннего волнового уравнения для $t \rightarrow \infty$ ”, *Прикл. мех. тех. физ.*, **37**:4 (1996), 173–182; англ. пер.: V. A. Borovikov, “Asymptotic expansion of the Green function of an internal-wave equation for $t \rightarrow \infty$ ”, *J. Applied and Technical Physics*, **37**:4 (1996), 606–614.
7. Л. В. Овсянников, В. Н. Монахов, *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*, Наука, Новосибирск, 1985.
8. K. R. Helfrich, W. K. Melville, “Long nonlinear internal waves”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **38** (2006), 395–425.
9. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, *Тр. МИАН*, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
10. H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
11. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.

12. В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Записки науч. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
13. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
14. В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *ЖВМ и МФ*, **48**:10 (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1784–1810.
15. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
16. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных*, Научный Мир, М., 2008.
17. М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1956; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
18. L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Ser. Math. Anal. Appl., **9**, Chapman and Hall, Boca Raton, FL, 2006.
19. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

М. О. Корпусов (М. О. KORPUKOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило в редакцию
16.12.2009