Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 91–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:00:21

УДК 512.75

Д. В. Осипов, А. Н. Паршин

Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. II

Развивается гармонический анализ в некоторых категориях фильтрованных абелевых групп и векторных пространств. Эти категории содержат в качестве объектов локальные поля и пространства аделей, возникающие из арифметических поверхностей. Доказаны структурные теоремы для факторов групп аделей алгебраических и арифметических поверхностей.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: арифметические поверхности, высшие адели, гармонический анализ, преобразование Фурье, формулы суммирования Пуассона.

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Цель этой работы двояка.

Во-первых, мы определяем и исследуем категорию C_n^{fin} фильтрованных абелевых групп, которая строится индуктивно из категории C_0^{fin} конечных абелевых групп, а не из категории C_0 конечномерных векторных пространств над полем k , использованную в [2] для индуктивного построения категории C_n фильтрованных векторных пространств над k . Далее мы рассматриваем некоторые категории фильтрованных векторных пространств над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и определяем смешанные категории C_0^{ar} , C_1^{ar} и C_2^{ar} , которые содержат некоторые из предыдущих категорий как полные подкатегории. Для них мы развиваем гармонический анализ. Эта часть нашей теории необходима для исследования арифметических поверхностей. Получающийся формализм параллелен конструкциям теории из [1]. Краткое описание этого формализма приведено во введении работы [1], где также изложено происхождение и история всей теории¹.

¹ Отметим еще раз работу М. Капранова [3] (2001 г.), в которой был введен важный трюк с пространством виртуальных мер (он был подсказан конструкцией полубесконечных мономов в теории грассманиана Сато; см. ее краткое описание, например, в приложении 2 к электронной версии [4]). Капранов изучал как раз случай архимедовых локальных полей, таких как $\mathbb{R}((t))$ или $\mathbb{C}((t))$. Как указал нам Д. А. Каждан, он предложил другой подход к построению гармонического анализа на двумерных локальных полях, таких как $\mathbb{Q}_p((t))$ в [5] (2006 г.). В последней работе он ввел пространства функций и преобразование Фурье сначала элементарным способом, выбрав систему координат, а затем переопределил их не как пространство (и отображение), а как жерб.

Работа авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00145-а), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ-4713.2010.1), INTAS (грант № 05-1000008-8118); кроме того, работа первого автора поддержана Программой Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых” (грант № МК-864.2008.1).

Во-вторых, мы описываем несколько примеров адельных пространств и показываем, как к ним применяются общие категорные понятия. Заметим, что работа [1] не содержала ни одного конкретного примера. Здесь мы тщательно изучаем случай адельных групп для схем размерности 1 (см. пример 4 из п. 3.2 и пример 8 из п. 4.2) и размерности 2 (см. § 14 и пример 11 из § 5). В частности, мы доказываем теорему о компактности адельных факторгрупп $\mathbb{A}_X/(\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02})$ в случае проективной алгебраической поверхности X , определенной над конечным полем (см. пп. 14.1, 14.2). Эта теорема является обобщением классической теоремы компактности для адельной факторгруппы $\mathbb{A}_C/\mathbb{A}_{C,0}$ в случае проективной алгебраической кривой C , определенной над конечным полем.

При построении гармонического анализа на таких группах, как $\mathbb{A}_X^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{A}_X)$, или на мультипликативной группе локального поля на X следует учитывать, что эти группы являются расширениями дискретных групп с помощью некоторых не локально компактных групп; уже на дискретной части гармонический анализ весьма нетривиален (см. [6]).

Мы пользуемся имеющейся возможностью, чтобы исправить следствия 1, 2 в [1, п. 5.9]. Мы должны рассматривать в них более узкий класс автоморфизмов. Именно, нужно ограничиться² рассмотрением только таких элементов группы автоморфизмов (или ее центрального расширения), которые переставляют элементы первой фильтрации объекта категории C_2 . Новое условие выполняется во многих конкретных ситуациях. Например, можно рассматривать стандартные действия мультипликативной группы K^* на локальном поле K или действие $\mathbb{A}_X^*$ на $\mathbb{A}_X$.

§ 2. Обозначения и соглашения

Для любых двух абелевых групп A, B обозначим через $\mathrm{Hom}(A, B)$ абелеву группу всех гомоморфизмов из группы A в группу B .

Под топологической группой мы всегда понимаем топологическую группу, наделенную хаусдорфовой топологией.

Для любой локально компактной абелевой группы G обозначим через $\widehat{G}$ двойственную по Понтрягину группу, т. е. $\widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{T})$, где группа $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ является одномерным тором.

Для каждого топологического векторного пространства V над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ обозначим через V' непрерывно двойственное к нему $\mathbb{C}$ -векторное пространство, т. е. пространство $V' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}, \mathrm{cont}}(V, \mathbb{C})$ всех непрерывных $\mathbb{C}$ -линейных функционалов.

§ 3. Категории C_n^{ar}

3.1. Категории C_n^{fin} . Напомним, что категории C_n , $n \in \mathbb{N}$, были определены в [2] (о дополнительных свойствах категорий C_0 , C_1 и C_2 см. также [1, пп. 4.1, 5.1]).

²Заметим, что это место исправлено в последней электронной версии нашей работы: <http://arxiv.org/abs/0707.1766>.

Чтобы построить категории C_n , мы используем индукцию по n , начиная с категории C_0 конечномерных векторных пространств над фиксированным полем k . Как отмечено во введении в [2], можно построить аналогичным образом категории C_n^{fin} , начиная с категории C_0^{fin} конечных абелевых групп. Если k – конечное поле, то для всех $n \in \mathbb{N}$ категория C_n будет полной подкатегорией категории C_n^{fin} .

Дадим теперь определение категории C_n^{fin} с помощью индукции по $n \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что (I, F, V) – *фильтрованная абелева группа*, если:

- 1) V – абелева группа;
- 2) I – такое частично упорядоченное множество, что для всех $i, j \in I$ существуют такие $k, l \in I$, что $k \leq i \leq l$ и $k \leq j \leq l$;
- 3) F – такая функция на I со значениями из множества подгрупп в V , что если $i \leq j$ – любые элементы из I , то $F(i) \subset F(j)$;
- 4) $\bigcap_{i \in I} F(i) = 0$ и $\bigcup_{i \in I} F(i) = V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что фильтрованная абелева группа (I_1, F_1, V) *доминирует* другую фильтрованную абелеву группу (I_2, F_2, V) , если имеется такая сохраняющая порядок функция $\phi: I_2 \rightarrow I_1$, что:

- 1) для любого $i \in I_2$ имеем $F_1(\phi(i)) = F_2(i)$;
- 2) для любого $j \in I_1$ существуют такие $i_1, i_2 \in I_2$, что $\phi(i_1) \leq j \leq \phi(i_2)$.

Теперь мы можем дать индуктивное определение объектов категории C_n^{fin} и морфизмов между ними.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. 1) Категория C_0^{fin} есть категория конечных абелевых групп с гомоморфизмами групп в качестве морфизмов.

2) Тройка из C_0^{fin}

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

допустима, если она является точной тройкой абелевых групп.

Определим теперь по индукции объекты категории C_n^{fin} . Предположим, что уже определены объекты категории C_{n-1}^{fin} и введено понятие допустимой тройки в ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. 1) *Объекты категории C_n^{fin}* , т.е. $\text{Ob}(C_n^{\text{fin}})$, – это фильтрованные абелевы группы (I, F, V) со следующими дополнительными структурами:

- а) для любых $i \leq j \in I$ на абелевой группе $F(j)/F(i)$ задана структура $E_{i,j} \in \text{Ob}(C_{n-1}^{\text{fin}})$;
- б) для всех $i \leq j \leq k \in I$

$$0 \longrightarrow E_{i,j} \longrightarrow E_{i,k} \longrightarrow E_{j,k} \longrightarrow 0$$

является допустимой тройкой из C_{n-1}^{fin} .

2) Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ и $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ принадлежат $\text{Ob}(C_n^{\text{fin}})$. Тогда скажем, что

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

– *допустимая тройка из C_n^{fin}* , если выполнены следующие условия:

- а) $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$ является точной тройкой абелевых групп;
- б) фильтрация (I_1, F_1, V_1) доминирует фильтрацию (I_2, F'_1, V_1) , где $F'_1(i) = F_2(i) \cap V_1$ для всех $i \in I_2$;
- с) фильтрация (I_3, F_3, V_3) доминирует фильтрацию (I_2, F'_3, V_3) , где $F'_3(i) = F_2(i)/F_2(i) \cap V_1$;
- д) для всех $i \leq j \in I_2$

$$0 \longrightarrow \frac{F'_1(j)}{F'_1(i)} \longrightarrow \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \longrightarrow \frac{F'_3(j)}{F'_3(i)} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

является допустимой тройкой из C_{n-1}^{fin} (по определению категории $\text{Ob}(C_n^{\text{fin}})$ на каждой абелевой группе из тройки (1) задана структура объекта из $\text{Ob}(C_{n-1}^{\text{fin}})$).

Определим теперь по индукции морфизмы в категории C_n^{fin} . Предположим, что уже определены морфизмы в категории C_{n-1}^{fin} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ и $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ принадлежат $\text{Ob}(C_n^{\text{fin}})$. Тогда множество морфизмов $\text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E_1, E_2)$ состоит из таких элементов $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$, что выполняются следующие условия:

- 1) для каждого $i \in I_1$ существует такой $j \in I_2$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;
- 2) для каждого $j \in I_2$ существует такой $i \in I_1$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;
- 3) для всех таких $i_1 \leq i_2 \in I_1$ и $j_1 \leq j_2 \in I_2$, что $A(F_1(i_1)) \subset F_2(j_1)$ и $A(F_1(i_2)) \subset F_2(j_2)$, индуцированное отображение абелевых групп

$$\bar{A}: \frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)} \longrightarrow \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}$$

принадлежит $\text{Mor}_{C_{n-1}^{\text{fin}}} \left(\frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)}, \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)} \right)$.

Корректность определения морфизмов в категориях C_n^{fin} и другие их свойства вытекают из следующего предложения, которое является аналогом предложения 2.1 из [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$, E'_1, E'_2 принадлежат $\text{Ob}(C_n^{\text{fin}})$ и A является отображением из $\text{Hom}(V_1, V_2)$.

- 1) Если фильтрованная абелева группа E_1 доминирует фильтрованную абелеву группу E'_1 и фильтрованная абелева группа E_2 доминирует фильтрованную абелеву группу E'_2 , то $A \in \text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E_1, E_2)$ тогда и только тогда, когда $A \in \text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E'_1, E'_2)$.
- 2) Множество $\text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E_1, E_2)$ является абелевой подгруппой в $\text{Hom}(V_1, V_2)$.
- 3) Если E_3 – объект в C_n^{fin} , то

$$\text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E_2, E_3) \circ \text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E_1, E_2) \subset \text{Mor}_{C_n^{\text{fin}}}(E_1, E_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 2.1 из [2].

ПРИМЕР 1. Пусть X – n -мерная схема конечного типа над $\mathbb{Z}$ и $P(X)$ – множество точек схемы X . Рассмотрим $\eta, \nu \in P(X)$ и определим $\eta \geq \nu$ как $\nu \in \{\bar{\eta}\}$. Отношение $\geq$ является частичным порядком на $P(X)$. Пусть $S(X)$ – симплициальное множество, связанное с $(P(X), \geq)$, т. е.

$$S(X)_m = \{(\nu_0, \dots, \nu_m) \mid \nu_i \in P(X); \nu_i \geq \nu_{i+1}\}$$

есть множество m -симплексов из $S(X)$ с i -м граничным отображением, состоящим в устранении i -й точки, и i -м отображением вырождения, состоящим в удвоении i -й точки. Обозначим через $S(X)_m^{\text{red}}$ множество всех невырожденных симплексов из $S(X)_m$, т. е.

$$S(X)_m^{\text{red}} = \{(\nu_0, \dots, \nu_m) \mid \nu_i \in P(X); \nu_i < \nu_{i+1}\}.$$

В [7], [8] для каждого подмножества $K \subset S(X)_m$ и для каждого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X было построено адельное пространство $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ такое, что

$$\mathbb{A}(K, \mathcal{F}) \subset \prod_{\delta \in K} \mathbb{A}(\delta, \mathcal{F}).$$

Способом, аналогичным доказательству теоремы 1 из [2], можно показать, что для любого подмножества $K \subset S(X)_n^{\text{red}}$ адельное пространство $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ является объектом категории C_n^{fin} .

В частности, мы получаем, что если $K = S(X)_n^{\text{red}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, то всё адельное пространство $\mathbb{A}_X = \mathbb{A}(S(X)_n^{\text{red}}, \mathcal{O}_X)$ будет объектом категории C_n^{fin} .

Если $\delta = (\eta_0 > \dots > \eta_n) \in S(X)_n^{\text{red}}$ таково, что точка η_n регулярна на каждой подсхеме $\bar{\eta}_i$, являющейся замыканием точки η_i , то $K_\delta = \mathbb{A}(\delta, \mathcal{O}_V)$ будет n -мерным локальным полем с конечным последним полем вычетов [9], [10]. Мы получаем, что $K_\delta \in \text{Ob}(C_n^{\text{fin}})$.

В частности, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q((t_n)) \dots ((t_1)) &\in \text{Ob}(C_n^{\text{fin}}), \\ E((t)) &\in \text{Ob}(C_2^{\text{fin}}), \quad E\{\{t\}\} \in \text{Ob}(C_2^{\text{fin}}), \end{aligned}$$

где $E \supset \mathbb{Q}_p$ – конечное расширение.

3.2. Категории C_0^{ar} и C_1^{ar} . Определим категорию C_0^{ar} следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Категория C_0^{ar} является полной подкатегорией категории коммутативных конечномерных гладких вещественных групп Ли таких, что $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$, если и только если $\pi_0(G)$ конечно порождена, где абелева группа $\pi_0(G)$ является группой связных компонент группы G .

Отметим следующее хорошо известное свойство.

ЛЕММА 1. Группа G принадлежит $\text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$, если и только если существует следующий изоморфизм:

$$G \simeq A \times \mathbb{Z}^r \times \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q, \quad (2)$$

где p, q, r – неотрицательные целые числа, A – конечная абелева группа, $\mathbb{T} = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – одномерный тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G удовлетворяет разложению (2), то очевидно, что $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. Пусть теперь $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ и $G^0 \subset G$ – связная компонента единицы $e \in G$. Поскольку G – абелева группа и G^0 связна, мы получаем, что экспоненциальное отображение является сюръективным гомоморфизмом из касательного пространства в $e \in G$ (которое является группой Ли,

изоморфной вещественному векторному пространству) в группу G^0 . Следовательно, получаем, что $G^0 \simeq \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$ для каких-то целых p, q . Опишем теперь дискретную группу

$$G/G^0 \simeq \mathbb{Z}^r \times \prod_{1 \leq i \leq l} \mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}$$

для целых n_i , $1 \leq i \leq l$, и r . Выберем какое-то $1 \leq i \leq l$, и пусть $e_i \in G$ – прообраз образующей группы $\mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}$. Тогда имеем $s_i = e_i^{n_i} \in G^0$ и $G^0 \simeq \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$. Следовательно, существует такой элемент $t_i \in G^0$, что $t_i^{n_i} = s_i$. Тогда для $e'_i = e_i t_i^{-1}$ имеем $(e'_i)^{n_i} = 1$. Поэтому подгруппа в G , порожденная элементом e'_i , изоморфна группе $\mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}$. Мы получили подъем группы $\mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}$ в группу G для любого $1 \leq i \leq l$. Поднимая теперь образующие группы $\mathbb{Z}^r$ в их прообразы в группе G , мы отображаем группу $\mathbb{Z}^r$ изоморфно в группу G . Лемма доказана.

Разложение (2) не единственно, но всегда имеется следующая каноническая фильтрация группы G ее подгруппами Ли:

$$G \supset G_{\text{tor}} \supset G^0 \supset K, \quad (3)$$

где G^0 – связная компонента группы G , содержащая единичный элемент e , группа K – максимальная компактная подгруппа группы G^0 , группа G_{tor}/G^0 – максимальная подгруппа кручения дискретной группы G/G^0 . Группа G/G^0 является конечно порожденной абелевой группой. Тогда имеем следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} K &\simeq \mathbb{T}^p, & G^0/K &\simeq \mathbb{R}^q, \\ G_{\text{tor}}/G^0 &\simeq A, & G/G_{\text{tor}} &\simeq \mathbb{Z}^r. \end{aligned}$$

Следовательно, неотрицательные целые числа p, q, r из разложения (2) определены группой G однозначно, конечная группа A из разложения (2) также определяется группой G однозначно с точностью до изоморфизма. Кроме того, имеем

$$\pi_0(G) = G/G^0, \quad \text{rank}(\pi_1(G)) = p, \quad \dim G = p + q.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Скажем, что тройка из C_0^{ar}

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\phi} G_3 \longrightarrow 0 \quad (4)$$

является *допустимой тройкой* в C_0^{ar} , если $G_1 = \text{Ker}(\phi)$ и ϕ – эпиморфизм групп Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение 7 можно переформулировать следующим образом: тройка (4) будет допустимой, если и только если она изоморфна тройке вида

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_2/G_1 \longrightarrow 0,$$

где G_1 – замкнутая подгруппа Ли группы Ли G_2 . Согласно теореме Картана это эквивалентно тому, что G_1 – замкнутая подгруппа группы Ли G_2 .

ПРИМЕР 2. Категория C_0^{fin} является полной подкатегорией категории C_0^{ar} , так что тройка в C_0^{fin} допустима в C_0^{fin} , если и только если она допустима в C_0^{ar} .

Для произвольного поля k обозначим через $C_n(k)$ категорию C_n , определенную над полем k (см. [2]). Получаем, что категория $C_0(\mathbb{R})$ является полной подкатегорией категории C_0^{ar} такой, что тройка в $C_0(\mathbb{R})$ допустима в $C_0(\mathbb{R})$, если и только если она допустима в C_0^{ar} .

Определим теперь категорию C_1^{ar} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Объектами категории C_1^{ar} , т.е. $\text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, будут фильтрованные абелевы группы $E = (I, F, V)$ (см. определение 1) со следующими дополнительными структурами и условиями:*

1) для всех $i \leq j \in I$ на абелевой группе $F(j)/F(i)$ задана структура $E_{i,j} \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$;

2) для всех $i \leq j \leq k \in I$

$$0 \longrightarrow E_{i,j} \longrightarrow E_{i,k} \longrightarrow E_{j,k} \longrightarrow 0$$

является допустимой тройкой в C_0^{ar} ;

3) существуют такие $i_E \leq j_E \in I$, что для всех $k \leq i_E$ группа $F(i_E)/F(k)$ является конечной абелевой группой и для всех $l \geq j_E$ группа $F(l)/F(j_E)$ также конечна и абелева.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие 3) определения 8 эквивалентно следующему условию: существует такое $d_E \in \mathbb{N}$, что для каждого $i \leq j \in I$ группа $F(j)/F(i)$ как объект категории C_0^{ar} имеет следующие свойства:

$$\dim F(j)/F(i) \leq d_E, \quad \text{rank } \pi_0(F(j)/F(i)) \leq d_E.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ и $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ принадлежат $\text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Тогда множество морфизмов $\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$ состоит из таких элементов $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$, что выполняются следующие условия:

1) для каждого $i \in I_1$ существует такой $j \in I_2$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;

2) для каждого $j \in I_2$ существует такой $i \in I_1$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;

3) для любых $i_1 \leq i_2 \in I_1$ и $j_1 \leq j_2 \in I_2$ таких, что $A(F_1(i_1)) \subset F_2(j_1)$ и $A(F_1(i_2)) \subset F_2(j_2)$, индуцированное отображение абелевых групп

$$\bar{A}: \frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)} \longrightarrow \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}$$

принадлежит $\text{Mor}_{C_0^{\text{ar}}}(\frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)}, \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)})$.

Очевидно, имеется полный аналог предложения 1 для категории C_1^{ar} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$, E'_1, E'_2 принадлежат $\text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ и A – отображение из $\text{Hom}(V_1, V_2)$.

1) Если фильтрованная абелева группа E_1 доминирует фильтрованную абелеву группу E'_1 , а фильтрованная абелева группа E_2 доминирует фильтрованную абелеву группу E'_2 , то $A \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$ тогда и только тогда, когда $A \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E'_1, E'_2)$.

2) Множество $\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$ является абелевой подгруппой в $\text{Hom}(V_1, V_2)$.

3) Если E_3 – объект в C_1^{ar} , то

$$\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_2, E_3) \circ \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_2) \subset \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 2.1 из [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ и $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ принадлежат $\text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Скажем тогда, что

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

есть *допустимая тройка* в C_1^{ar} , если выполнены следующие условия:

- а) $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$ есть точная тройка абелевых групп;
- б) фильтрация (I_1, F_1, V_1) доминирует фильтрацию (I_2, F'_1, V_1) , где $F'_1(i) = F_2(i) \cap V_1$ для всех $i \in I_2$;
- с) фильтрация (I_3, F_3, V_3) доминирует фильтрацию (I_2, F'_3, V_3) , где $F'_3(i) = F_2(i)/F_2(i) \cap V_1$;
- д) для всех $i \leq j \in I_2$

$$0 \longrightarrow \frac{F'_1(j)}{F'_1(i)} \longrightarrow \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \longrightarrow \frac{F'_3(j)}{F'_3(i)} \longrightarrow 0 \quad (5)$$

есть допустимая тройка в C_0^{ar} (по определению множества $\text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ на каждой абелевой группе из тройки (5) задана структура из $\text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$).

ПРИМЕР 3. Категория C_1^{fin} является такой полной подкатегорией категории C_1^{ar} , что тройка из C_1^{fin} будет допустимой тройкой в C_1^{fin} , если и только если она является допустимой тройкой в C_1^{ar} .

Категория C_0^{ar} является полной подкатегорией категории C_1^{ar} по отношению к функтору I : для каждого $G \in C_0^{\text{ar}}$ положим $I(G) = (\{(0), (1)\}, F, G)$, где $(0) < (1)$, $F((0)) = e$, $F((1)) = G$, e – тривиальная подгруппа в G и I действует на морфизмах из C_0^{ar} как тождественное отображение.

Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. Тогда G – локально компактная абелева группа. Следовательно, группа $\widehat{G}$, двойственная к ней по Понтрягину, также является локально компактной группой. Более того, по формуле (2) имеем $\widehat{G} \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$, так как для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}, \quad \widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}.$$

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Определим двойственный объект $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V}) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ следующим образом. Абелева группа $\check{V} \subset \text{Hom}(V, \mathbb{T})$ определяется следующим образом:

$$\check{V} \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{j \in N} \varprojlim_{i \geq j} \widehat{F(i)/F(j)}. \quad (6)$$

Множество I^0 является частично упорядоченным и как множество совпадает с I , но имеет обратный порядок по сравнению с I . Для $j \in I^0$ определим подгруппу

$$F^0(j) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{i \leq j \in I^0} \widehat{F(i)/F(j)} \subset \check{V}. \quad (7)$$

Если $E_1, E_2 \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$, то по определению существует канонический элемент $\check{\theta} \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(\check{E}_2, \check{E}_1)$. Если

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_1^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, то имеем следующую каноническую допустимую тройку в C_1^{ar} :

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Скажем, что объект $(I, F, V) \in C_1^{\text{ar}}$ является *полным объектом*, если выполнено следующее условие:

$$V = \varinjlim_{i \in I} \varprojlim_{j \leq i} F(i)/F(j). \quad (8)$$

Для любой локально компактной группы G имеем $\widehat{\widehat{G}} = G$. Поэтому из определений вытекает, что $E \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ является полным объектом тогда и только тогда, когда $\check{\check{E}} = E$.

Имеется очевидный функтор пополнения $\Psi: C_1^{\text{ar}} \longrightarrow C_1^{\text{ar}}$; для $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ положим

$$\Psi(E) \stackrel{\text{def}}{=} \left(I, F', \varinjlim_{i \in I} \varprojlim_{j \leq i} F(i)/F(j) \right)$$

и для каждого $j \in I$ положим

$$F'(j) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{j \leq i} F(i)/F(j).$$

Отображение Ψ распространяется до множества морфизмов $\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$, $E_1, E_2 \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, при помощи известных отображений, определенных на $\text{Mor}_{C_0^{\text{ar}}}$.

Ясно, что из определения функтора Ψ следует, что для любого $E \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ объект $\Psi(E)$ полон и $\Psi^2 = \Psi$. Более того, $\Psi(E) = \check{\check{E}}$.

Через $C_{1, \text{compl}}^{\text{ar}}$ обозначим полную подкатегорию категории C_1^{ar} , состоящую из полных объектов категории C_1^{ar} .

Пусть Loc – категория локально компактных абелевых групп. Для любой группы $G \in \text{Ob}(\text{Loc})$ найдется пара подгрупп $V \subset U$ в G со следующими свойствами (см. [11, гл. II, § 2.2]):

(*) U – открытая подгруппа в G , и U порождается компактной окрестностью единицы e (окрестность e – это множество, содержащее открытую окрестность e);

(**) V – компактная подгруппа в G ;

(***) $U/V \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$.

Более того, группа G является индуктивным пределом подгрупп U , и каждая подгруппа U будет проективным пределом групп U/V , где U и V удовлетворяют свойствам (*)–(***) . На G мы рассматриваем топологию индуктивных и проективных пределов, начиная с топологических групп U/V (см. [11, гл. II, § 2.2]).

Через Loc^{ar} обозначим следующую полную подкатегорию категории Loc . Пусть $G \in \text{Ob}(\text{Loc})$. Тогда $G \in \text{Ob}(\text{Loc}^{\text{ar}})$, если выполнено следующее условие: существует такое $d \in \mathbb{N}$, что для всех пар подгрупп $V \subset U$ в G , удовлетворяющих условиям (*)–(***) , имеем

$$\dim(U/V) < d, \quad \text{rank } \pi_0(U/V) < d \quad (9)$$

(ср. это условие с замечанием 2).

Определим теперь функтор $\Phi: C_1^{\text{ar}} \rightarrow \text{Loc}^{\text{ar}}$ следующим образом. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Положим

$$\Phi(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{i \in I} \varprojlim_{j \leq i} F(i)/F(j)$$

и рассмотрим на группе $\Phi(E)$ топологию индуктивного и проективного пределов, начиная с топологических групп $F(i)/F(j) \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. (Кроме того, условие из замечания 2 переходит в условие (9).) Функтор Φ определен также на морфизмах, так как можно склеить совместимую систему морфизмов из C_0^{ar} , которая задана определением 9. Имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) *Функтор $\Phi|_{C_{1,\text{compl}}^{\text{ar}}}$ есть эквивалентность категорий $C_{1,\text{compl}}^{\text{ar}}$ и Loc^{ar} .*

2) *Для любого $E \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ имеем $\Phi(\check{E}) = \widehat{\Phi(E)}$.*

3) *Функтор Φ отображает множество допустимых троек из C_1^{ar} на следующее множество точных троек локально компактных абелевых групп из Loc^{ar} :*

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 0,$$

где H – замкнутая подгруппа в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) предложения построим функтор

$$\Lambda: \text{Loc}^{\text{ar}} \longrightarrow C_{1,\text{compl}}^{\text{ar}}$$

следующим способом. Пусть $G \in \text{Loc}^{\text{ar}}$. Определим $\Lambda(G) = (I, F, G)$. Здесь I – множество подгрупп группы G , так что $K \in I$, если и только если подгруппа K совпадает или с подгруппой U , или с подгруппой V , которые удовлетворяют свойствам $(*)$ – $(***)$. Множество I частично упорядочено посредством включения подгрупп. Функция F отображает $K \in I$ в соответствующую подгруппу $K \subset G$. Из рассуждений, приведенных перед предложением, ясно, что $(I, F, G) \in \text{Ob}(C_{1,\text{compl}}^{\text{ar}})$.

Теперь пусть $\phi \in \text{Mor}_{\text{Loc}^{\text{ar}}}(G_1, G_2)$. Покажем, что $\Lambda(\phi) = \phi$ корректно определен как элемент из $\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(\Lambda(G_1), \Lambda(G_2))$, т. е. ϕ удовлетворяет условиям 1)–3) определения 9. Пусть $U_1 \supset V_1$ – подгруппы группы G_1 , которые удовлетворяют свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы G_1 . Пусть $U_2 \supset V_2$ – подгруппы группы G_2 , удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы G_2 . Согласно условию (9) без ограничения общности можем предположить, что G_2/U_2 – дискретная группа кручения. Имеем, что $\phi(V_1)$ – компактная группа и, таким образом, $\frac{\phi(V_1)+U_2}{U_2}$ – конечная группа. Кроме того, $\frac{\phi(U_1)+U_2}{\phi(V_1)+U_2}$ – конечная группа по формуле (2), поэтому $\frac{\phi(U_1)+U_2}{U_2}$ – также конечная группа. Отсюда имеем, что группа $\phi(U_1) + U_2$ принадлежит множеству I . Таким образом, отображение ϕ удовлетворяет условию 1) определения 9. Для того чтобы показать, что отображение ϕ удовлетворяет условию 2) определения 9, достаточно проверить условие 1) определения 9 для двойственного отображения $\hat{\phi}: \widehat{G_2} \rightarrow \widehat{G_1}$. В самом деле, если $U \supset V$ – подгруппы группы $G \in \text{Ob}(\text{Loc})$, удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы G , то $V^\perp \supset U^\perp$ – подгруппы группы $\widehat{G}$,

удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы $\widehat{G}$. Здесь для любой подгруппы $H \subset G$ мы определили подгруппу $H^\perp \subset \widehat{G}$:

$$H^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \widehat{G} : g|_H \equiv 1\}.$$

Однако условие 1) определения 9 мы только что проверили для любого отображения. Условие 3) определения 9 выполняется для отображения ϕ , так как любой непрерывный гомоморфизм между группами Ли является гладким гомоморфизмом между этими группами.

Теперь легко видеть, что функтор $\Phi \circ \Lambda$ изоморфен тождественному функтору $\text{Id}_{\text{Loc}^{\text{ar}}}$ и функтор $\Lambda \circ \Phi$ изоморфен тождественному функтору $\text{Id}_{C_{1,\text{compl}}^{\text{ar}}}$. Поэтому мы доказали утверждение 1).

Утверждение 2) вытекает из следующего наблюдения. Если $U \supset V$ – подгруппы группы $G \in \text{Ob}(\text{Loc})$, удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы G , то $V^\perp \supset U^\perp$ – подгруппы группы $\widehat{G}$, удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы $\widehat{G}$. Согласно условию (9) без ограничения общности мы можем предположить, что V – проконечная группа. Кроме того,

$$\widehat{V} = \widehat{G}/V^\perp, \quad \widehat{U/V} = V^\perp/U^\perp, \quad \widehat{G/U} = U^\perp.$$

Утверждение 3) вытекает из следующего наблюдения. Пусть

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G/H \longrightarrow 0$$

– точная последовательность локально компактных абелевых групп, где H – замкнутая подгруппа в G . Если $U \supset V$ – подгруппы группы G , удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы G , то $(U \cap H) \supset (V \cap H)$ – подгруппы группы H , удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы H , и $\psi(U) \supset \psi(V)$ – подгруппы группы G/H , удовлетворяющие свойствам $(*)$ – $(***)$ для группы G/H .

Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Тогда скажем, что:

1) E – *компактный объект*, если и только если существует элемент $i_0 \in I$ такой, что $F(i_0) = V$ и $F(i_0)/F(i)$ – компактная группа Ли для любого $i \leq i_0 \in I$;

2) E – *дискретный объект*, если и только если существует элемент $i_0 \in I$ такой, что $F(i_0) = \{0\}$ и $F(i)/F(i_0)$ – дискретная группа Ли для любого $i \geq i_0 \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно формуле (2) имеем, что:

1) $F(i_0)/F(i)$ – компактная группа Ли, если и только если она изоморфна $\mathbb{T}^k \times A$ для некоторого неотрицательного целого k и конечной абелевой группы A ;

2) $F(i)/F(i_0)$ – дискретная группа Ли, если и только если она изоморфна группе $\mathbb{Z}^l \times B$ для некоторого неотрицательного целого числа l и конечной абелевой группы B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Тогда выполнено следующее:

- 1) E – компактный объект, если и только если $\Phi(E)$ – компактная группа;
- 2) E – дискретный объект, если и только если $\Phi(E)$ – дискретная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\Phi(E)$ является компактной группой, если и только если она есть проективный предел компактных групп. Группа $\Phi(E)$ – дискретная группа, если и только если она есть индуктивный предел дискретных групп. Предложение доказано.

ПРИМЕР 4. Заметим, что для $E_1 = (I_1, F_1, V_1) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ и $E_2 = (I_2, F_2, V_2) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ мы имеем канонические конструкции

$$E_1 \times E_2 \stackrel{\text{def}}{=} (I_1 \times I_2, F_1 \times F_2, V_1 \times V_2) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}}), \quad (10)$$

где $(i_1, i_2) \leq (j_1, j_2) \in I_1 \times I_2$, если и только если $i_1 \leq j_1$ и $i_2 \leq j_2$, и для любого $(k_1, k_2) \in I_1 \times I_2$ определим

$$(F_1 \times F_2)((k_1, k_2)) = F_1(k_1) \times F_2(k_2).$$

Теперь рассмотрим числовое поле K такое, что $[K: \mathbb{Q}] = n$. Пусть $E \subset K$ – кольцо целых в K . Тогда имеется изоморфизм абелевых групп $E \simeq \mathbb{Z}^n$.

Пусть $p_1, \dots, p_l$ – все классы эквивалентностей архимедовых нормирований поля K . Для любого $1 \leq i \leq l$ обозначим через K_{p_i} поле, которое является пополнением поля K по абсолютному нормированию p_i . Тогда или $K_{p_i} \simeq \mathbb{C}$, или $K_{p_i} \simeq \mathbb{R}$. Имеем следующий изоморфизм групп Ли:

$$\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \simeq \mathbb{R}^n.$$

Согласно примеру 3 мы рассмотрим

$$\left(\{(0), (1)\}, F, \prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \right) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}}), \quad (11)$$

где $(0) < (1)$, $F((0)) = e$, $F((1)) = \prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}$, e – тривиальная подгруппа группы $\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}$.

Из диагонального вложения поля K получаем вложение $E \subset \prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}$, так что тройка

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \longrightarrow \mathbb{T}^n \longrightarrow 0 \quad (12)$$

является допустимой тройкой из C_0^{ar} .

Пусть $\mathbb{A}_K^{\text{fin}}$ – “конечное” кольцо аделей поля K , т.е. оно является ограниченным произведением пополнений поля K по всем классам эквивалентности неархимедовых нормирований по отношению к кольцам нормирований. (В обозначениях примера 1 имеем $\mathbb{A}_K^{\text{fin}} = \mathbb{A}_{\text{Spec } E}$.) Теперь рассмотрим

$$(D, H, \mathbb{A}_K^{\text{fin}}) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}}), \quad (13)$$

где D – множество дивизоров схемы $\mathrm{Spec} E$, и для $d \in D$ определим

$$H(d) = d \prod_p \mathcal{O}_{K_p} \subset \mathbb{A}_K^{\mathrm{fin}};$$

здесь произведение берется по всем классам эквивалентности неархимедовых нормирований и $\mathcal{O}_{K_p}$ – соответствующее кольцо нормирования. (Ясно, что $(D, H, \mathbb{A}_K^{\mathrm{fin}}) \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{fin}})$.)

Пусть $\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_K^{\mathrm{fin}} \times \prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}$ – “полное” кольцо аделей поля K . По формулам (10)–(13) имеем

$$Q = (D_0 \cup D_1, H \times F, \mathbb{A}_K) \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{ar}}),$$

где $D_0 = D \times (0)$, $D_1 = D \times (1)$. Ясно, что Q – полный объект из C_1^{ar} .

Диагональное вложение поля K индуцирует следующую точную тройку абелевых групп:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{A}_K \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}_K/K \longrightarrow 0. \quad (14)$$

Для любого $i \in D_0$ имеем $(H \times F)(i) \cap K = 0$. По сильной аппроксимационной теореме (см. [12, гл. II, § 15]) для любого $j \in D_1$ имеем, что $\phi((H \times F)(j)) = \mathbb{A}/K$.

Пусть $P = (X, Y, K) \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{ar}})$, где X – множество подгрупп в K , заданных как $(H \times F)(i) \cap K$ для всех $i \in D_0 \cup D_1$. Множество X частично упорядочено включениями подгрупп, и функция Y отображает элемент из X в соответствующую подгруппу. Тогда тривиальная подгруппа $e \subset K$ принадлежит множеству X . В силу конструкции для любого $j \in X$ имеем $Y(j)/e \simeq Y(j) \simeq \mathbb{Z}^n$. Для любых $j \geq i > e \in X$ имеем, что $Y(j)/Y(i)$ – конечная абелева группа. Поэтому P – дискретный объект из C_1^{ar} . Ясно, что P – полный объект из C_1^{ar} .

Пусть $R = (Z, W, \mathbb{A}_K/K) \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{ar}})$, где Z – множество подгрупп в $\mathbb{A}_K/K$, заданных как $\phi((H \times F)(i))$ для всех $i \in D_0 \cup D_1$. Множество Z частично упорядочено включениями подгрупп, и функция W отображает элемент из Z в соответствующую подгруппу. Тогда вся группа $g = \mathbb{A}_K/K$ принадлежит множеству Z . В силу конструкции для любого $j \in Z$ имеем $g/W(j) \simeq \mathbb{T}^n$. Для любых $g > j \geq i \in Z$ имеем, что $Y(j)/Y(i)$ – конечная абелева группа. Поэтому R – компактный объект из C_1^{ar} . Ясно также, что R – полный объект из C_1^{ar} .

По конструкции получаем, что тройка

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad (15)$$

является допустимой тройкой из C_1^{ar} , которая индуцирует точную тройку (14) абелевых групп.

Кроме того, нетрудно видеть из конструкций, что $\check{Q} \simeq Q$, $\check{P} \simeq R$, $\check{R} \simeq P$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. По формуле (11) мы ввели самую грубую фильтрацию на $\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \simeq \mathbb{R}^n$, если $l > 1$. Если мы введем любую другую фильтрацию пространства $\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}$ при помощи $\mathbb{R}$ -векторных подпространств $\prod_{i \in I} K_{p_i}$ (где I – подмножество конечного множества $\{1, \dots, l\}$, для $I = \emptyset$ берем нулевое подпространство), которая доминирует предыдущую фильтрацию и вовлекает другие $\mathbb{R}$ -векторные подпространства, кроме нулевого подпространства и $\mathbb{R}^n$, то тройка (15) не будет допустимой тройкой из C_1^{ar} . В самом деле, имеем, что $E \cap (\prod_{i \in I} K_{p_i}) = 0$ для любого $I \neq \{1, \dots, l\}$, где пересечение берется внутри

$\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}$. Отсюда образ пространства $\prod_{i \in I} K_{p_i}$, где $I \neq \emptyset$, $I \neq \{1, \dots, l\}$, в $\mathbb{T}^n$ не замкнут (см. последовательность (12)). Таким образом, мы получаем плотную обмотку тора.

Далее нам понадобится следующая техническая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_1^{ar} .

1) Пусть $D \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ и $\gamma \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(D, E_3)$. Тогда имеются допустимая тройка из C_1^{ar}

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma\alpha} E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\gamma\beta} D \longrightarrow 0 \quad (16)$$

и морфизм $\beta_\gamma \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_2 \times_{E_3} D, E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\gamma\alpha} & E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma\beta} & D \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (17)$$

коммутативна.

2) Пусть $A \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_1, A)$. Тогда имеются допустимая тройка из C_1^{ar}

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta\alpha} A \coprod_{E_1} E_2 \xrightarrow{\theta\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (18)$$

и морфизм $\alpha_\theta \in \text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(E_2, A \coprod_{E_1} E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\ & & \theta \downarrow & & \downarrow \alpha_\theta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\theta\alpha} & A \coprod_{E_1} E_2 & \xrightarrow{\theta\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (19)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1) леммы. Пусть $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, и $D = (K, H, T)$.

Построим $E_2 \times_{E_3} D = (J, G, W) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ следующим способом. Определим абелеву группу

$$W = V_2 \times_{V_3} T \stackrel{\text{def}}{=} \{(e, d) \in V_2 \times T : \beta(e) = \gamma(d)\},$$

а также определим частично упорядоченное множество

$$J = \{(i, j) \in I_2 \times K : \gamma(H(j)) \subset \beta(F_2(i))\},$$

где $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$, если и только если $i_1 \leq i_2$ и $j_1 \leq j_2$. Определим функцию G из множества J во множество подгрупп группы W следующим образом:

$$G((i, j)) = (F_2(i) \times H(j)) \cap W,$$

где пересечение берется внутри $V_2 \times T$.

Пусть $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in J$ и $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму морфизмов между абелевыми группами Ли:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2) \cap V_1}{F_2(i_1) \cap V_1} & \longrightarrow & \frac{G((i_2, j_2))}{G((i_1, j_1))} & \longrightarrow & \frac{H(j_2)}{H(j_1)} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2) \cap V_1}{F_2(i_1) \cap V_1} & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2)}{F_2(i_1)} & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2)/(F_2(i_2) \cap V_1)}{F_2(i_1)/(F_2(i_1) \cap V_1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

где

$$\frac{G((i_2, j_2))}{G((i_1, j_1))} = \frac{F_2(i_2)}{F_2(i_1)} \times_{\frac{F_2(i_2)/(F_2(i_2) \cap V_1)}{F_2(i_1)/(F_2(i_1) \cap V_1)}} \frac{H(j_2)}{H(j_1)}$$

и горизонтальные тройки являются допустимыми тройками из C_0^{ar} . Отсюда $E_2 \times_{E_3} D$ корректно определен как объект из C_1^{ar} , а отображения β_γ и γ_β являются проекциями. Кроме того, из последней коммутативной диаграммы получаем, что тройка (16) является допустимой тройкой из C_1^{ar} и диаграмма (17) является коммутативной. Утверждение 1) леммы доказано.

Докажем утверждение 2), которое является двойственным утверждением к утверждению 1). Пусть $A = (K', H', T')$.

Построим $A \coprod_{E_1} E_2 = (J', G', W') \in \text{Ob}(C_1)$ следующим способом. Отметим, что $T' \coprod V_2 = T' \times V_2$. Определим абелеву группу

$$W' = T' \coprod_{V_1} V_2 \stackrel{\text{def}}{=} (T' \times V_2)/E, \quad E = (\theta \times \alpha)V_1,$$

а также определим частично упорядоченное множество

$$J' = \{(i, j) \in K' \times I_2 : \theta(F_2(j) \cap V_1) \subset H'(i)\},$$

где $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$, если и только если $i_1 \leq i_2$ и $j_1 \leq j_2$. Определим функцию G' из множества J' во множество подгрупп группы W' следующим образом:

$$G'((i, j)) = ((H'(i) \times F_2(j)) + E)/E \subset W'.$$

Пусть $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in J'$ и $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму морфизмов между абелевыми группами Ли:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2) \cap V_1}{F_2(j_1) \cap V_1} & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)} & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2)/(F_2(j_2) \cap V_1)}{F_2(j_1)/(F_2(j_1) \cap V_1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \frac{H'(i_2)}{H'(i_1)} & \longrightarrow & \frac{G'((i_2, j_2))}{G'((i_1, j_1))} & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2)/(F_2(j_2) \cap V_1)}{F_2(j_1)/(F_2(j_1) \cap V_1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

где

$$\frac{G'((i_2, j_2))}{G'((i_1, j_1))} = \frac{H'(i_2)}{H'(i_1)} \prod_{\frac{F_2(j_2) \cap V_1}{F_2(j_1) \cap V_1}} \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}$$

и горизонтальные тройки являются допустимыми тройками из C_0^{ar} . Отсюда $A \coprod_{E_1} E_2$ корректно определен как объект из категории C_1^{ar} . Кроме того, из последней коммутативной диаграммы получаем, что тройка (18) есть допустимая тройка из C_1^{ar} и диаграмма (19) является коммутативной. Утверждение 2) доказано. Лемма доказана.

§ 4. Функции и распределения на объектах C_0^{ar} и C_1^{ar}

4.1. Функции и распределения на объектах C_0^{ar} . В этом пункте мы введем пространства функций и распределений на объектах категории C_0^{ar} .

4.1.1. Определения основных пространств. Для любого $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ определим пространство Шварца $\mathcal{S}(G)$ быстро убывающих функций на G следующим способом (см. [13, с. 138] и [14, гл. VII]).

Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ таков, что

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{R}^q. \quad (20)$$

Скажем, что функция $p: G \rightarrow \mathbb{C}$ является *многочленом*, если и только если она есть многочлен от координатных функций в разложении (20). Нетрудно видеть, что это определение не зависит от выбора изоморфизма (20). Теперь пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ – любой объект. Тогда имеем каноническую фильтрацию (3) на G . Подгруппа K является элементом этой фильтрации. Обозначим через $(G/K)_t$ подгруппу в группе G/K , которая состоит из элементов кручения в этой группе. Тогда $(G/K)/(G/K)_t \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{R}^q$ (см. разложение (2)). Пусть $u: G \rightarrow (G/K)/(G/K)_t$ – естественное отображение. Тогда множество P многочленов на G определяется следующим образом:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{p: p = u^*(p')\},$$

где p' пробегает по множеству всех многочленов на $(G/K)/(G/K)_t$, которое было определено выше.

Через D обозначим множество всех инвариантных дифференциальных операторов на объекте $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$, который является коммутативной группой Ли. Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. Определим пространство

$$\mathcal{S}(G) = \left\{ \text{все } \mathbb{C}\text{-значные гладкие функции } f \text{ на } G: \right. \\ \left. \sup_{x \in G} |p(x)df(x)| < \infty \quad \forall p \in P, \quad \forall d \in D \right\}.$$

Топология на пространстве $\mathcal{S}(G)$ определяется следующей системой полунорм $\{s_{p,d}\}_{p \in P, d \in D}$:

$$s_{p,d}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in G} |p(x)df(x)|, \quad p \in P, \quad d \in D, \quad f \in \mathcal{S}(G).$$

Это значит, что базой данной топологии является множество открытых шаров этих полунорм

$$\overset{\circ}{B}_{s_{p,d}}(x, r) = \{y \in G: s_{p,d}(x - y) < r\}, \quad x \in G, \quad r > 0, \quad p \in P, \quad d \in D,$$

и конечных пересечений таких шаров. Поэтому $\mathcal{S}(G)$ – локально выпуклое топологическое векторное пространство.

Если мы возьмем только мономы от координатных функций (после фиксации разложения (2)) вместо всех многочленов в определении множества полунорм и возьмем только мономы от частных производных по координатам (после

фиксации разложения (2)) вместо всех инвариантных дифференциальных операторов, то мы получим новую систему полунорм $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, которая будет счетна и эквивалентна предыдущей системе полунорм $\{s_{p,d}\}_{p \in P, d \in D}$. (Это значит, что данная система полунорм порождает ту же самую топологию на $\mathcal{S}(G)$, что и система полунорм $\{s_{p,d}\}_{p \in P, d \in D}$.) Поэтому $\mathcal{S}(G)$ – метризуемое векторное пространство, где инвариантная относительно сдвигов метрика $d(\cdot, \cdot)$ может быть определена следующим способом:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{s_i(x - y)}{1 + s_i(x - y)}, \quad x, y \in \mathcal{S}(G).$$

(Здесь без потери общности, после изменения на эквивалентную систему полунорм, мы предположили, что $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m \leq \dots$.)

Можно также доказать, что $\mathcal{S}(G)$ – полное векторное пространство. Поэтому $\mathcal{S}(G)$ – пространство Фреше.

Для локально выпуклого топологического $\mathbb{C}$ -векторного пространства V мы можем рассмотреть много топологий на его непрерывно двойственном $\mathbb{C}$ -векторном пространстве V' (см. [15]). Мы будем всегда рассматривать $*$ -слабую топологию на V' . Эта топология порождается системой полунорм $\{s_v\}_{v \in V}$, где для $v \in V$ полунорма s_v определяется формулой $s_v(f) = |f(v)|$ для любого $f \in V'$. Таким образом определенная топология на V' является локально выпуклой топологией. Кроме того, естественное отображение $V \rightarrow (V')'$ – это всегда изоморфизм $\mathbb{C}$ -векторных пространств (но они не изоморфны как топологические векторные пространства).

Для любого $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ определим пространство Шварца $\mathcal{S}'(G)$ распределений медленного роста на G формулой $\mathcal{S}'(G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(G)'$. Поскольку топологическое векторное пространство $\mathcal{S}(G)$ является полным и метризуемым пространством, то $\mathbb{C}$ -векторное топологическое пространство $\mathcal{S}'(G)$ является секвенциально полным.

Теперь рассмотрим некоторые примеры пространств Шварца для различных типов объектов $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$.

ПРИМЕР 5. Пусть $G \simeq \mathbb{R}^n$. Тогда пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех гладких $\mathbb{C}$ -значных функций f на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$s_{\alpha, \beta}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} \partial^{\beta} f(x)| < \infty,$$

где мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ состоят из неотрицательных целых чисел, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^{\beta} = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$. Система норм $s_{\alpha, \beta}$ (для всех мультииндексов α и β) на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна системе полунорм $\{s_{p,d}\}_{p \in P, d \in D}$, которая была определена выше для любого $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. Отметим также, что система норм

$$s'_{\alpha, \beta}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |x^{\alpha} \partial^{\beta} f(x)| dx$$

(для всех мультииндексов α и β) также эквивалентна предыдущей системе полунорм на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

ПРИМЕР 6. Пусть $G \simeq \mathbb{T}$. Тогда пространство $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ состоит из всех гладких $\mathbb{C}$ -значных функций на $\mathbb{T}$. Топология на $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ задается следующей системой полунорм $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$:

$$s_\alpha(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in \mathbb{T}} |\partial^\alpha f(t)| < \infty,$$

где $\alpha \in \mathbb{N}$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$. Система полунорм $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ эквивалентна системе полунорм $\{s_{p,d}\}_{p \in P, d \in D}$, которая была определена выше для любого $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. Отметим, что система полунорм

$$s'_\alpha(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} |\partial^\alpha f(t)| dt,$$

где $\alpha \in \mathbb{N}$, также эквивалентна предыдущей системе полунорм на $\mathcal{S}(\mathbb{T})$.

Те же рассуждения могут быть проведены аналогично для $G \simeq \mathbb{T}^n$, $n > 1$.

ПРИМЕР 7. Пусть $G \simeq \mathbb{Z}$. Тогда $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ – пространство двусторонних последовательностей с некоторым условием:

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{C}: |a_n| = O(|n^{-k}|) \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Топология в $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ задается следующей системой норм $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$s_k(\{a_n\}) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |n^k a_n|.$$

(Эта система норм эквивалентна системе полунорм $\{s_{p,d}\}_{p \in P, d \in D}$ на $\mathcal{S}(G)$, которая была введена выше.) Ясно, что $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$.

Пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ определяется как пространство следующих последовательностей:

$$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}) = \{b_n \mid n \in \mathbb{Z}, b_n \in \mathbb{C}: \exists k \in \mathbb{N} \ |b_n| = O(|n^k|)\}.$$

Ясно, что $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}) \supset l^2(\mathbb{Z})$. Теперь если $a = \{a_n\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $b = \{b_n\} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, то $b(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n a_n$ – абсолютно сходящийся ряд. Более того, по определению линейный функционал b непрерывен по отношению к некоторой норме s_k на $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Тогда имеем $|b_n| = O(|n^k|)$. Обратно, если $|b_n| = O(|n^k|)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $b = \{b_n\}$ – непрерывный линейный функционал по отношению к норме s_{k+2} на $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Те же рассуждения могут быть проведены аналогично для $G \simeq \mathbb{Z}^n$, $n > 1$.

4.1.2. Преобразование Фурье. Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$. Для любых $a \in G$ и $f \in \mathcal{S}(G)$ определим функцию $T_a(f) \in \mathcal{S}(G)$ следующим образом:

$$T_a(f)(b) \stackrel{\text{def}}{=} f(b+a), \quad b \in G.$$

Для любых $a \in G$ и $H \in \mathcal{S}'(G)$ определим $T_a(H) \in \mathcal{S}'(G)$:

$$T_a(H)(f) \stackrel{\text{def}}{=} H(T_{-a}(f)), \quad f \in G.$$

Определим следующее $\mathbb{C}$ -векторное пространство:

$$\mathcal{S}'(G)^G \stackrel{\text{def}}{=} \{H \in \mathcal{S}'(G): T_a(H) = H \ \forall a \in G\}.$$

Любое $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ является локально компактной абелевой группой. Поэтому существует мера Хаара ν на G , которая определяется с точностью до умножения на положительное вещественное число. Определим следующий элемент $\mathbf{1}_\nu \in \mathcal{S}'(G)$:

$$\mathbf{1}_\nu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G f(x) d\nu(x), \quad f \in \mathcal{S}(G).$$

Кроме того, имеем корректно определенное отображение $\mathbf{I}_\nu: \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}'(G)$, заданное по правилу

$$\mathbf{I}_\nu(f)(g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_\nu(fg), \quad f, g \in \mathcal{S}(G).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ и ν – мера Хаара на G . Тогда выполнены следующие свойства:

- 1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}'(G)^G = 1$;
- 2) $\mathcal{S}'(G)^G = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_\nu$ внутри пространства $\mathcal{S}'(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно предположить, что G – связная группа Ли. По определению меры Хаара имеем $\mathbf{1}_\nu \in \mathcal{S}'(G)^G$.

Теперь пусть $v \in T_{G,e} = \text{Lie } G$, $v \neq 0$; тогда вектор v определяет инвариантное векторное поле X_v на G , т. е. дифференциальный оператор $X_v: \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(G)$ первого порядка. Поскольку оператор X_v непрерывен, он может быть расширен до оператора $X_v: \mathcal{S}'(G) \rightarrow \mathcal{S}'(G)$ по следующему правилу:

$$X_v(H)(f) \stackrel{\text{def}}{=} -H(X_v(f)).$$

С другой стороны, вектор v определяет однопараметрическую подгруппу

$$g_v(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(tv) \subset G, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В силу теоремы о среднем и формулы Тейлора имеем для любого $f \in \mathcal{S}(G)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_{g_v(t)}(f) = f, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{g_v(t)}(f) - f}{t} = X_v(f)$$

в пространстве $\mathcal{S}(G)$ для любой полунормы $s_{p,d}$, $p \in P$, $d \in D$, на этом пространстве. Отсюда если $H \in \mathcal{S}'(G)^G$, то $X(H) = 0$ для любого инвариантного векторного поля X на G . Тогда индукцией по $\dim G$, используя стандартные аргументы теории обобщенных функций, получаем, что $H = c \cdot \mathbf{1}_\nu$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$ (см. [16, гл. 1, § 2.6] для случая $G = \mathbb{R}$). Предложение доказано.

Для любого $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ определим одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mu(G)$ следующим образом:

$$\mu(G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}'(G)^G.$$

Заметим, что из свойств меры Хаара и предложения 5 имеем, что если

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_0^{ar} , то имеется естественный изоморфизм

$$\mu(G_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(G_3) \simeq \mu(G_2). \quad (21)$$

Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ и $\widehat{G} \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ – двойственная по Понтрягину для G группа. Пусть $\mu \in \mu(G)$. Тогда преобразование Фурье $\mathbf{F}_\mu: \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}(\widehat{G})$ определяется по формуле

$$\mathbf{F}_\mu(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(f\bar{\chi}), \quad \chi \in \widehat{G}. \quad (22)$$

Отображение $\mathbf{F}_\mu$ зависит линейно от $\mu \in \mu(G)$. Поэтому корректно определено отображение $\mathbf{F}: \mathcal{S}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(G) \rightarrow \mathcal{S}(\widehat{G})$ по правилу

$$\mathbf{F}(f \otimes \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_\mu(f).$$

Как сопряженное отображение к непрерывному отображению $\mathbf{F}$ определим преобразование Фурье на распределениях, т. е.

$$\mathbf{F}: \mathcal{S}'(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{G}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\widehat{G}),$$

так что $\mathbf{F}_\nu(H) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(H \otimes \nu)$, $\nu \in \mu(\widehat{G})$, $H \in \mathcal{S}'(G)$.

Из свойств преобразования Фурье следует, что для любого $\mu \in \mu(G)$ и любого $\nu \in \mu(\widehat{G})$ имеем

$$\mathbf{F}_\nu(\mu) = c\delta,$$

где $c \in \mathbb{C}$ – некоторая константа (которая линейно зависит от μ и ν) и $\delta \in \mathcal{S}'(\widehat{G})$ – дельта-функция Дирака: $\delta(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$ для $f \in \mathcal{S}(\widehat{G})$. Отсюда получаем корректно определенный изоморфизм

$$\mu(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{G}) \simeq \mathbb{C}. \quad (23)$$

Пусть $\mu \in \mu(G)$, $\mu \neq 0$. Тогда корректно определен элемент $\mu^{-1} \in \mu(\widehat{G})$ такой, что $\mu \otimes \mu^{-1} = 1$ по отношению к изоморфизму (23).

Пусть $f \in \mathcal{S}(G)$. Тогда определим $\check{f} \in \mathcal{S}(G)$:

$$\check{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(-x), \quad x \in G. \quad (24)$$

Пусть $H \in \mathcal{S}'(G)$. Тогда определим $\check{H} \in \mathcal{S}'(G)$ следующим образом:

$$\check{H}(f) \stackrel{\text{def}}{=} H(\check{f}), \quad f \in \mathcal{S}(G). \quad (25)$$

Соберем другие хорошо известные свойства преобразования Фурье в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $G \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$, $\mu \in \mu(G)$, $\mu \neq 0$. Выполнены следующие свойства:

- 1) отображение $\mathbf{F}_\mu$ – изоморфизм топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{S}(G)$ и $\mathcal{S}(\widehat{G})$;
- 2) отображение $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}$ – изоморфизм топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{S}'(G)$ и $\mathcal{S}'(\widehat{G})$;
- 3) $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}\mathbf{F}_\mu(f) = \check{f}$ для любого $f \in \mathcal{S}(G)$;
- 4) $\mathbf{F}_\mu\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(H) = \check{H}$ для любого $H \in \mathcal{S}'(G)$.

4.1.3. *Прямые и обратные образы.* Рассмотрим следующую допустимую тройку из C_0^{ar} :

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha} G_2 \xrightarrow{\beta} G_3 \longrightarrow 0. \quad (26)$$

Имеется отображение $\beta_*: \mathcal{S}(G_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(G_1) \rightarrow \mathcal{S}(G_3)$, которое определяется по формуле

$$\beta_*(f \otimes \mu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(f_y),$$

где $f \in \mathcal{S}(G_2)$, $\mu \in \mu(G_1)$, $x \in G_3$, $y \in f^{-1}(x)$ и функция $f_y \in \mathcal{S}(G_1)$ определяется следующим образом: $f_y(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z + y)$ для $z \in G_1$. Функция $\beta_*(f \otimes \mu)$ не зависит от выбора $y \in f^{-1}(x)$, так как $\mu \in \mathcal{S}'(G_1)$ – инвариантный элемент.

Нетрудно видеть, что отображение β_* непрерывно, поэтому имеется непрерывное отображение $\beta^*: \mathcal{S}'(G_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(G_1) \rightarrow \mathcal{S}'(G_2)$, которое определяется как сопряженное отображение к отображению β_* .

Имеется отображение $\alpha^*: \mathcal{S}(G_2) \rightarrow \mathcal{S}(G_1)$, определяемое следующим образом:

$$\alpha^*(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha(x)), \quad f \in \mathcal{S}(G_2), \quad x \in G_1.$$

Отображение α^* непрерывно, поэтому имеется непрерывное отображение $\alpha_*: \mathcal{S}'(G_1) \rightarrow \mathcal{S}'(G_2)$, определяемое как сопряженное отображение к отображению α^* .

Если G_1 – компактная группа Ли и G_3 – любой объект в последовательности (26), то имеется отображение $\beta^*: \mathcal{S}(G_3) \rightarrow \mathcal{S}(G_2)$, определяемое по формуле

$$\beta^*(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\beta(x)), \quad f \in \mathcal{S}(G_3), \quad x \in G_2.$$

Отображение β^* непрерывно, поэтому имеется непрерывное отображение $\beta_*: \mathcal{S}'(G_2) \rightarrow \mathcal{S}'(G_3)$, определяемое как сопряженное отображение к отображению β^* .

Если G_3 – дискретная группа Ли и G_1 – любой объект в последовательности (26), то имеется отображение $\alpha_*: \mathcal{S}(G_1) \rightarrow \mathcal{S}(G_2)$, определяемое следующим образом:

$$\alpha_*(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin f(G_1), \\ f(y), & \text{если } x = f(y), \end{cases} \quad f \in \mathcal{S}(G_1), \quad x \in G_2.$$

Отображение α_* непрерывно, поэтому имеется непрерывное отображение $\alpha^*: \mathcal{S}'(G_2) \rightarrow \mathcal{S}'(G_1)$, определяемое как сопряженное отображение к отображению α_* .

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_0^{ar} , и пусть

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\gamma} E_3 \xrightarrow{\delta} B \longrightarrow 0$$

– другая допустимая тройка из C_0^{ar} . Имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma_\beta} & D \\ \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \end{array}$$

где γ_β – допустимый эпиморфизм (т. е. являющийся эпиморфной частью некоторой допустимой тройки из C_0^{ar}) и β_γ – допустимый мономорфизм (т. е. являющийся мономорфной частью некоторой допустимой тройки из C_0^{ar}).

Заметим, что $E_3 \simeq E_2 \amalg_G D$, где $G = E_2 \times_{E_3} D$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Выполнены следующие утверждения:*

1) для любых $f \in \mathcal{S}(E_2)$, $H \in \mathcal{S}'(D)$, $\mu \in \mu(E_1)$ имеем

$$\gamma^* \beta_*(f \otimes \mu) = (\gamma_\beta)_*(\beta_\gamma^*(f) \otimes \mu), \quad (27)$$

$$\beta^*(\gamma_*(H) \otimes \mu) = (\beta_\gamma)_*\gamma_\beta^*(H \otimes \mu); \quad (28)$$

2) если E_1 – компактная группа Ли, то для любых $f \in \mathcal{S}(E_3)$, $H \in \mathcal{S}'(G)$ имеем

$$\gamma_\beta^* \gamma^*(f) = \beta_\gamma^* \beta^*(f), \quad (29)$$

$$\beta_*(\beta_\gamma)_*(H) = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(H); \quad (30)$$

3) если B – дискретная группа Ли, то для любых $f \in \mathcal{S}(G)$, $H \in \mathcal{S}'(E_3)$, $\mu \in \mu(E_1)$ имеем

$$\beta_*((\beta_\gamma)_*(f) \otimes \mu) = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(f \otimes \mu), \quad (31)$$

$$\gamma_\beta^*(\gamma^*(H) \otimes \mu) = \beta_\gamma^* \beta^*(H \otimes \mu); \quad (32)$$

4) если E_1 – компактная группа Ли и B – дискретная группа Ли, то для любого $f \in \mathcal{S}(D)$ и любого $H \in \mathcal{S}'(E_2)$ имеем

$$\beta^* \gamma_*(f) = (\beta_\gamma)_* \gamma_\beta^*(f), \quad (33)$$

$$\gamma^* \beta_*(H) = (\gamma_\beta)_* \beta_\gamma^*(H). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для функций следует из соответствующих определений. Доказательство для распределений следует из сопряженных формул к формулам для функций. Предложение доказано.

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_0^{ar} , и пусть

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha'} H \xrightarrow{\beta'} E_2 \longrightarrow 0$$

– другая допустимая тройка из C_0^{ar} . Тогда имеем следующую допустимую тройку из C_0^{ar} :

$$0 \longrightarrow H \times_{E_2} E_1 \xrightarrow{\beta'_\alpha} H \xrightarrow{\beta\beta'} E_3 \longrightarrow 0.$$

Обозначим $E = H \times_{E_2} E_1 \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Выполнены следующие утверждения:*

1) для любых $f \in \mathcal{S}(H)$, $G \in \mathcal{S}'(E_3)$, $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$ имеем

$$(\beta\beta')_*(f \otimes (\nu \otimes \mu)) = \beta_*(\beta'(f \otimes \nu) \otimes \mu), \quad (35)$$

$$(\beta\beta')^*(G \otimes (\nu \otimes \mu)) = (\beta')^*(\beta^*(G \otimes \mu) \otimes \nu); \quad (36)$$

2) если E_1 и L – компактные группы Ли, то E – также компактная группа Ли и для любых $f \in \mathcal{S}(E_3)$, $G \in \mathcal{S}'(H)$ выполнены формулы

$$(\beta\beta')^*(f) = (\beta')^*\beta^*(f), \quad (37)$$

$$(\beta\beta')_*(G) = \beta_*(\beta')_*(G). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем следующую допустимую тройку из C_0^{ar} :

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha'} E \xrightarrow{\alpha\beta'} E_1 \longrightarrow 0. \quad (39)$$

Поэтому по формуле (21) для $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$ имеем канонически, что $\nu \otimes \mu \in \mu(E)$. Теперь формула (35) следует из теоремы Фубини, а (36) является сопряженной формулой к формуле (35).

Из тройки (39) получаем, что если E_1 и L – компактные группы Ли, то E – также компактная группа Ли. Теперь формула (37) следует из определений. Формула (38) – сопряженная формула к формуле (37). Предложение доказано.

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_0^{ar} , и пусть

$$0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\alpha'} H' \xrightarrow{\beta'} L' \longrightarrow 0$$

– другая допустимая тройка из C_0^{ar} . Тогда имеем следующую допустимую тройку из C_0^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha'\alpha} H' \xrightarrow{\alpha'\beta} E_3 \coprod_{E_2} H' \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Выполнены следующие утверждения:*

1) для любых $f \in \mathcal{S}(H')$, $G \in \mathcal{S}'(E_1)$ имеем

$$(\alpha'\alpha)^*(f) = \alpha^*(\alpha')^*(f), \quad (40)$$

$$(\alpha'\alpha)_*(G) = (\alpha')_*\alpha_*(G); \quad (41)$$

2) если E_3 и L' – дискретные группы Ли, то $E_3 \coprod_{E_2} H'$ – дискретная группа Ли и для любых $f \in \mathcal{S}(E_1)$, $G \in \mathcal{S}'(H')$ выполнены формулы

$$(\alpha'\alpha)_*(f) = (\alpha')_*\alpha_*(f), \quad (42)$$

$$(\alpha'\alpha)^*(G) = \alpha^*(\alpha')^*(G). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (40) следует из определений соответствующих отображений. Формула (41) – сопряженная формула к формуле (40).

Из допустимой тройки

$$0 \longrightarrow E_3 \xrightarrow{\beta_{\alpha'}} E_3 \coprod_{E_2} H' \xrightarrow{\beta_{\beta'}} L' \longrightarrow 0$$

из C_0^{ar} получаем, что если E_3 и L' – дискретные группы Ли, то $E_3 \coprod_{E_2} H'$ – также дискретная группа Ли. Теперь формула (42) следует из определения. Формула (43) – сопряженная формула к формуле (42). Предложение доказано.

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (44)$$

– допустимая тройка из C_0^{ar} . Тогда имеем следующую допустимую тройку из C_0^{ar} , которая состоит из групп, двойственных по Понтрягину:

$$0 \longrightarrow \widehat{E_3} \xrightarrow{\widehat{\beta}} \widehat{E_2} \xrightarrow{\widehat{\alpha}} \widehat{E_1} \longrightarrow 0. \quad (45)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Имеются следующие коммутативные диаграммы:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2) & \xrightarrow{\beta_* \otimes \text{Id}_{\mu(E_2)}} & \mathcal{S}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}(\widehat{E_2}) & \xrightarrow{\widehat{\beta}_*} & \mathcal{S}(\widehat{E_3}) \end{array} \quad (46)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E_2) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{S}(E_1) \\ \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(\widehat{E_2})} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(\widehat{E_1})} \\ \mathcal{S}(\widehat{E_2}) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_2}) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}_* \otimes \text{Id}_{\mu(\widehat{E_1})}} & \mathcal{S}(\widehat{E_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_1}) \end{array} \quad (47)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_3}) & \xrightarrow{\beta_* \otimes \text{Id}_{\mu(\widehat{E_2})}} & \mathcal{S}'(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_2}) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}'(\widehat{E_3}) & \xrightarrow{\widehat{\beta}_*} & \mathcal{S}'(\widehat{E_2}) \end{array} \quad (48)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'(E_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{S}'(E_2) \\ \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(E_1)} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(E_2)} \\ \mathcal{S}'(\widehat{E_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}_* \otimes \text{Id}_{\mu(E_2)}} & \mathcal{S}'(\widehat{E_2}) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2) \end{array} \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем естественные изоморфизмы (21) и (23) для допустимых троек (44), (45) и пар объектов E_i , $\widehat{E_i}$, $1 \leq i \leq 3$. Теперь имеем

$$\mu_3(\beta_*(f \otimes \mu_1)\overline{\chi}) = \mu_3(\beta_*(f\beta^*(\overline{\chi}) \otimes \mu_1)) = \mu_2(f\overline{\beta^*(\chi)}), \quad (50)$$

где $\mu_i \in \mu(E_i)$, $1 \leq i \leq 3$, $\mu_3 = \mu_1 \otimes \mu_2$, $\chi \in \widehat{E_3}$. Первое равенство в формуле (50) следует из определения отображения β_* , второе – из теоремы Фубини. Формула (50) эквивалентна диаграмме (46). Теперь диаграмма (47) следует из диаграммы (46) при помощи утверждения 3) предложения 6. Диаграмма (48) – сопряженная диаграмма к диаграмме (46). Диаграмма (49) – сопряженная диаграмма к диаграмме (47). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1 (формула Пуассона). Пусть $\mu_1 \in \mu(E_1)$, $\mu_1 \neq 0$, и $\mu_3 \in \mu(\widehat{E_3})$. Пусть $\delta_{E_1, \mu_1} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_*(\mu_1) \in \mathcal{S}'(E_2)$ и, аналогично, $\delta_{\widehat{E_3}, \mu_3} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\beta}_*(\mu_3) \in \mathcal{S}'(\widehat{E_2})$. Тогда $\mathbf{F}_{\mu_1^{-1} \otimes \mu_3}(\delta_{E_1, \mu_1}) = \delta_{\widehat{E_3}, \mu_3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя изоморфизмы (21) и (23), получаем $\mu_1^{-1} \otimes \mu_3 \in \mu(\widehat{E_2})$. Из определений имеем $\delta_{E_1, \mu_1} = \beta^*(\delta_{E_3} \otimes \mu_1)$, где для любого $E \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ определим $\delta_E \in \mathcal{S}'(E)$ по формуле $\delta_E(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$ для любого $f \in \mathcal{S}(E)$. Аналогично, из определений имеем $\delta_{\widehat{E_3}, \mu_3} = \widehat{\alpha}^*(\delta_{\widehat{E_1}} \otimes \mu_3)$. Кроме того, для любых $E \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$, $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$, имеем $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(\mu) = \delta_{\widehat{E}}$, $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(\delta_E) = \mu^{-1}$. Теперь формула Пуассона следует из диаграммы (48).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. 1) Если E_1 – компактная группа Ли, то следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) & \xrightarrow{\beta^* \otimes \text{Id}_{\mu(E_3)} \otimes \mathbf{1}_{E_1}} & \mathcal{S}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}(\widehat{E_3}) & \xrightarrow{\widehat{\beta}_*} & \mathcal{S}(\widehat{E_2}) \end{array} \quad (51)$$

где $\mathbf{1}_{E_1} \in \mu(E_1)$, и для $1 \in \mathcal{S}(E_1)$ по определению $\mathbf{1}_{E_1}(1) = 1 \in \mathbb{C}$;

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_2}) & \xrightarrow{\beta_* \otimes \text{Id}_{\mu(\widehat{E_3})} \otimes \mathbf{1}_{E_1}(\cdot)} & \mathcal{S}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_3}) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}'(\widehat{E_2}) & \xrightarrow{\widehat{\beta}^*} & \mathcal{S}'(\widehat{E_3}) \end{array} \quad (52)$$

где отображение $\mathbf{1}_{E_1}(\cdot): \mu(\widehat{E_1}) \rightarrow \mathbb{C}$ задается элементом $\mathbf{1}_{E_1} \in \mu(E_1) \simeq \mu(\widehat{E_1})^*$.

2) Если E_3 – дискретная группа Ли, то следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) & \xrightarrow{\alpha_* \otimes \text{Id}_{\mu(E_1)} \otimes \Sigma_{E_3}} & \mathcal{S}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}(\widehat{E_1}) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}^*} & \mathcal{S}(\widehat{E_2}) \end{array} \quad (53)$$

где $\Sigma_{E_3} \in \mu(E_3)$, и для $f \in \mathcal{S}(E_3)$ по определению $\Sigma_{E_3}(f) = \sum_{x \in E_3} f(x)$;

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}'(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_2}) & \xrightarrow{\alpha^* \otimes \text{Id}_{\mu(\widehat{E_1})} \otimes \Sigma_{E_3}(\cdot)} & \mathcal{S}'(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{E_1}) \\
\mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\
\mathcal{S}'(\widehat{E_2}) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}_*} & \mathcal{S}'(\widehat{E_1})
\end{array} \quad (54)$$

где отображение $\Sigma_{E_3}(\cdot): \mu(\widehat{E_3}) \rightarrow \mathbb{C}$ задается элементом $\Sigma_{E_3} \in \mu(E_3) \simeq \mu(\widehat{E_3})^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E \in \text{Ob}(C_0^{\text{ar}})$ – компактная группа Ли, то $\widehat{E}$ – дискретная группа Ли и $\mathbf{1}_E \otimes \Sigma_{\widehat{E}} = 1$ по отношению к изоморфизму (23). Мы используем также изоморфизм (21). Диаграмма (51) следует из теоремы Фубини и формулы $\mathbf{F}_{1_{E_1}}(c) = c\delta$, где $c \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathcal{S}(\widehat{E_1})$ и $\delta(0) = 1$, $\delta(x) = 0$, если $x \in \widehat{E_1}$, $x \neq 0$. Диаграмма (52) – сопряженная диаграмма к диаграмме (51). Диаграмма (53) следует из диаграммы (51) и утверждения 3) предложения 6, а (54) – сопряженная диаграмма к диаграмме (53). Предложение доказано.

4.2. Функции и распределения на объектах C_1^{ar} . Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. По определению для любых $i, j, k \in I$ таких, что $i \leq j \leq k$, имеем допустимую тройку

$$0 \longrightarrow F(j)/F(i) \xrightarrow{\alpha_{ijk}} F(k)/F(i) \xrightarrow{\beta_{ijk}} F(k)/F(j) \longrightarrow 0 \quad (55)$$

из C_0^{ar} . Отсюда для любых $i, j, k, l \in I$, $i \leq j \leq k \leq l$, имеем

$$\begin{aligned}
F(k)/F(i) &\simeq (F(l)/F(i)) \times_{F(l)/F(j)} (F(k)/F(j)), \\
F(l)/F(j) &\simeq (F(l)/F(i)) \prod_{F(k)/F(i)} (F(k)/F(j))
\end{aligned}$$

как объекты C_0^{ar} . Кроме того, из определения 8 существуют $i_E \leq j_E \in I$ такие, что для любого $k \leq i_E$ группа $F(i_E)/F(k)$ является конечной абелевой группой и для любого $l \geq j_E$ группа $F(l)/F(j_E)$ также является конечной абелевой группой. Поэтому, используя конструкцию и предложения из пп. 4.1.3, имеем следующие корректно определенные $\mathbb{C}$ -векторные пространства:

$$\mathcal{S}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{m \geq j_E} \varprojlim_{n \leq i_E} \mathcal{S}(F(m)/F(n)) = \varinjlim_{n \leq i_E} \varprojlim_{m \geq j_E} \mathcal{S}(F(m)/F(n)), \quad (56)$$

где пределы взяты по отношению к отображениям β_{ijk}^* и $(\alpha_{ijk})_*$, и

$$\mathcal{S}'(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{m \geq j_E} \varinjlim_{n \leq i_E} \mathcal{S}'(F(m)/F(n)) = \varprojlim_{n \leq i_E} \varinjlim_{m \geq j_E} \mathcal{S}'(F(m)/F(n)), \quad (57)$$

где пределы взяты по отношению к отображениям $(\beta_{ijk})_*$ и α_{ijk}^* .

Из последнего определения имеем, что пространство $\mathcal{S}(E)$ – это $\mathbb{C}$ -подалгебра $\mathbb{C}$ -алгебры $\mathcal{F}(V)$ всех $\mathbb{C}$ -значных функций на V .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Подобную конструкцию использовал Ф. Брюа для определения соответствующих пространств функций и распределений на локально компактных абелевых группах (см. [17]).

ЛЕММА 3. В обозначениях формулы (55) имеем, что для любых тех $i \leq j \leq k \in I$, при которых определены отображения

$$(\alpha_{ijk})_*: \mathcal{S}(F(j)/F(i)) \rightarrow \mathcal{S}(F(k)/F(i)), \quad \beta_{ijk}^*: \mathcal{S}(F(k)/F(j)) \rightarrow \mathcal{S}(F(k)/F(i)),$$

последние являются инъективными отображениями и для них соответственно определены отображения

$$\begin{aligned} \alpha_{ijk}^*: \mathcal{S}'(F(k)/F(i)) &\rightarrow \mathcal{S}'(F(j)/F(i)), \\ (\beta_{ijk})_*: \mathcal{S}'(F(k)/F(i)) &\rightarrow \mathcal{S}'(F(k)/F(j)), \end{aligned}$$

которые являются сюръективными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность соответствующих отображений следует из определений. Кроме того, имеем отображение $\alpha_{ijk}^*: \mathcal{S}(F(k)/F(i)) \rightarrow \mathcal{S}(F(j)/F(i))$ такое, что $\alpha_{ijk}^* \cdot (\alpha_{ijk})_* = \text{Id}_{\mathcal{S}(F(j)/F(i))}$. Поэтому как сопряженное равенство имеем $\alpha_{ijk}^* \cdot (\alpha_{ijk})_* = \text{Id}_{\mathcal{S}'(F(j)/F(i))}$. Отсюда $\alpha_{ijk}^*: \mathcal{S}'(F(k)/F(i)) \rightarrow \mathcal{S}'(F(j)/F(i))$ – сюръективное отображение. Аналогично, имеем отображение

$$(\beta_{ijk})_{*, \mathbf{1}_{F(j)/F(i)}}: \mathcal{S}(F(k)/F(i)) \rightarrow \mathcal{S}(F(k)/F(j)),$$

которое определяется по формуле

$$(\beta_{ijk})_{*, \mathbf{1}_{F(j)/F(i)}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{ijk})_*(f \otimes \mathbf{1}_{F(j)/F(i)}),$$

где $f \in \mathcal{S}(F(k)/F(i))$, $\mathbf{1}_{F(j)/F(i)} \in \mu(F(j)/F(i))$, $\mathbf{1}_{F(j)/F(i)}(1) = 1$, так как $F(j)/F(i)$ – компактная группа Ли. Имеем $(\beta_{ijk})_{*, \mathbf{1}_{F(j)/F(i)}} \cdot \beta_{ijk}^* = \text{Id}_{\mathcal{S}(F(k)/F(j))}$. Взяв сопряженное отображение и сопряженное равенство к последнему равенству, получаем, что $(\beta_{ijk})_*: \mathcal{S}'(F(k)/F(i)) \rightarrow \mathcal{S}'(F(k)/F(j))$ – сюръективное отображение. Лемма доказана.

Для любых $i \leq j \in I$ имеем естественное невырожденное $\mathbb{C}$ -билинейное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{i,j}: \mathcal{S}(F(j)/F(i)) \times \mathcal{S}'(F(j)/F(i)) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Используя лемму 3 и свойства сопряженности отображений прямых и обратных образов на пространствах Шварца объектов из C_0^{ar} , получаем, что имеется невырожденное $\mathbb{C}$ -билинейное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}'(E) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (58)$$

ПРИМЕР 8. Мы рассмотрим такую же ситуацию, как в примере 4. Имеем числовое поле K такое, что $[K: \mathbb{Q}] = n$, и рассмотрим “полное” кольцо аделей поля K :

$$\mathbb{A}_K = \mathbb{A}_K^{\text{fin}} \times \prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i},$$

где $\mathbb{A}_K^{\text{fin}}$ – “конечное” кольцо аделей поля K , а $p_1, \dots, p_l$ – все классы эквивалентности архимедовых нормирований поля K . Имеем $\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \simeq \mathbb{R}^n$. Мы

построили в примере 4 объект $Q = (D_0 \cup D_1, H \times F, \mathbb{A}_K)$ в категории C_1^{ar} . Тогда по определению имеем, что

$$\mathcal{S}(Q) = \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^{\text{fin}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}\left(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}\right),$$

где $\mathcal{S}(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (см. пример 5) и $\mathcal{S}(\mathbb{A}_K^{\text{fin}}) = \mathcal{D}(\mathbb{A}_K^{\text{fin}})$ – пространство всех локально постоянных функций с компактным носителем на $\mathbb{A}_K^{\text{fin}}$ (см. [1, п. 4.2] об аналогичной ситуации категории $C_1(\mathbb{F}_q)$). Кроме того, любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^{\text{fin}})$ является конечной линейной комбинацией функций $\bigotimes_p f_p$, где произведение берется по всем классам эквивалентности неархимедовых нормирований поля K , $f_p \in \mathcal{S}(K_p) = \mathcal{D}(K_p)$ (другими словами, f_p из пространства всех локально постоянных функций с компактным носителем на K_p) и $f_p = \delta_{\mathcal{O}_{K_p}}$ для почти всех p , где $\delta_{\mathcal{O}_{K_p}}(x) = 1$, если $x \in \mathcal{O}_{K_p}$, и $\delta_{\mathcal{O}_{K_p}}(x) = 0$, если $x \notin \mathcal{O}_{K_p}$.

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Для любых элементов $i \leq j \in I$ мы определили в пп. 4.1.2 пространство $\mu(F(i)/F(j)) \in \mathcal{S}'(F(i)/F(j))$ такое, что $\dim_{\mathbb{C}} \mu(F(i)/F(j)) = 1$.

Для любых $i \leq j \leq k \in I$ имеем, что отображение $(\beta_{ijk})_*$ определяет изоморфизм между пространствами $\mu(F(k)/F(i))$ и $\mu(F(k)/F(j))$, если $j \leq i_E$. В самом деле, если $\mu \in \mu(F(k)/F(j))$, то по формуле (21) имеем включение $\mathbf{1}_{F(j)/F(i)} \otimes \mu \in \mu(F(k)/F(i))$ (см. обозначение $\mathbf{1}_{F(j)/F(i)}$ в предложении 11) и равенство $(\beta_{ijk})_*(\mathbf{1}_{F(j)/F(i)} \otimes \mu) = \mu$.

Аналогично, для любых $i \leq j \leq k \in I$ имеем, что отображение α_{ijk}^* определяет изоморфизм между пространствами $\mu(F(k)/F(i))$ и $\mu(F(j)/F(i))$, если $j \geq j_E$. В самом деле, если $\mu \in \mu(F(j)/F(i))$, то по формуле (21) имеем включение $\mu \otimes \Sigma_{F(k)/F(j)} \in \mu(F(k)/F(i))$ (см. обозначение $\Sigma_{F(k)/F(j)}$ в предложении 11) и равенство $\alpha_{ijk}^*(\mu \otimes \Sigma_{F(k)/F(j)}) = \mu$.

Из приведенных рассуждений следует, что корректно определено пространство

$$\mu(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{m \geq j_E} \varprojlim_{n \leq i_E} \mu(F(m)/F(n)) = \varprojlim_{n \leq i_E} \varprojlim_{m \geq j_E} \mu(F(m)/F(n)), \quad (59)$$

где пределы взяты по отношению к отображениям $(\beta_{ijk})_*$ и α_{ijk}^* . Имеем

$$\dim_{\mathbb{C}} \mu(E) = 1. \quad (60)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Используя (56), (57), можно определить операторы T_a , $a \in V$, на пространствах $\mathcal{S}(E)$ и $\mathcal{S}'(E)$, начиная с соответствующих операторов на $\mathcal{S}(F(j)/F(i))$ и $\mathcal{S}'(F(j)/F(i))$, где $i \leq j \in I$ (см. начало пп. 4.1.2). Тогда легко видеть, что $\mu(E) = \mathcal{S}'(E)^V$.

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Тогда для любых $i \leq j \in I$ имеем естественный изоморфизм $\mu(F(j)/F(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{\mu(F(j)/F(i))} \simeq \mathbb{C}$ (см. (23)). Кроме того, если $j \leq i_E$, то $\mathbf{1}_{F(j)/F(i)} \otimes \Sigma_{F(j)/F(i)} = 1$ при этом изоморфизме. Теперь из формул (6), (7) и формул (59), (60) следует, что имеется естественный изоморфизм

$$\mu(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}) \longrightarrow \mathbb{C}. \quad (61)$$

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_1^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Тогда из (21) для любых $i \leq j \in I_2$ имеем естественный изоморфизм

$$\mu\left(\frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1}\right) \otimes_{\mathbb{C}} \mu\left(\frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))}\right) \rightarrow \mu\left(\frac{F_2(j)}{F_2(i)}\right). \quad (62)$$

Кроме того, если $j \leq i_E$, то

$$\mathbf{1}_{\frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1}} \otimes \mathbf{1}_{\frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))}} = \mathbf{1}_{\frac{F_2(j)}{F_2(i)}},$$

и если $i \geq j_E$, то

$$\Sigma_{\frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1}} \otimes \Sigma_{\frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))}} = \Sigma_{\frac{F_2(j)}{F_2(i)}}$$

при изоморфизме (62).

Поэтому из формул (59), (60) следует, что имеется естественный изоморфизм

$$\mu(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) \rightarrow \mu(E_2). \quad (63)$$

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Для любых $i \leq j \in I$ имеем преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i,j} : \mathcal{S}(F(j)/F(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j)/F(i)) &\rightarrow \mathcal{S}(\widehat{F(j)/F(i)}), \\ \mathbf{F}_{i,j} : \mathcal{S}'(F(j)/F(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\widehat{F(j)/F(i)}) &\rightarrow \mathcal{S}'(\widehat{F(j)/F(i)}). \end{aligned}$$

Поэтому после взятия соответствующих пределов, используя формулы (56), (57), (59), (60) и предложение 11, получаем корректно определенные преобразования Фурье (*одномерные преобразования Фурье*), построенные из отображений $\mathbf{F}_{i,j}$:

$$\mathbf{F} : \mathcal{S}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E) \rightarrow \mathcal{S}(\check{E}), \quad \mathbf{F} : \mathcal{S}'(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}) \rightarrow \mathcal{S}'(\check{E}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко видеть, что определение преобразования Фурье $\mathbf{F} : \mathcal{S}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E) \rightarrow \mathcal{S}(\check{E})$ совпадает с аналогом формулы (22):

$$\mathbf{F}(f \otimes \mu) = \mathbf{F}_{\mu}(f), \quad \mathbf{F}_{\mu}(f)(b) = \mu(f\bar{b}),$$

где $f \in \mathcal{S}(E)$, $\mu \in \mu(E)$, $b \in \check{V} \subset \text{Hom}(V, \mathbb{T})$, и мы рассматриваем $\mathcal{S}(\check{E})$ как $\mathbb{C}$ -подпространство всех $\mathbb{C}$ -значных функций на $\check{V}$.

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, и пусть $f \in \mathcal{S}(E)$, $H \in \mathcal{S}'(E)$. Используя формулы (24), (25) и взяв соответствующие пределы в формулах (56), (57), определим $\check{f} \in \mathcal{S}(E)$, $\check{H} \in \mathcal{S}'(E)$ так, что $\check{f} = f$ и $\check{H} = H$. Для любых $i \leq j \in I$ пространства $\mathcal{S}(F(j)/F(i))$ и $\mathcal{S}'(F(j)/F(i))$ являются топологическими $\mathbb{C}$ -векторными пространствами. Поэтому $\mathcal{S}(E)$ и $\mathcal{S}'(E)$ – также топологические $\mathbb{C}$ -векторные пространства, которые снабжены топологиями индуктивных и проективных пределов соответственно. Теперь из предложения 6, взяв соответствующие пределы в формулах (56), (57), получаем обобщение предложения 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $E \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$. Выполнены следующие свойства:

- 1) отображение $\mathbf{F}_\mu$ – изоморфизм топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{S}(E)$ и $\mathcal{S}(\check{E})$;
- 2) отображение $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}$ – изоморфизм топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{S}'(E)$ и $\mathcal{S}'(\check{E})$;
- 3) для любых $f \in \mathcal{S}(E)$ и $G \in \mathcal{S}'(\check{E})$ имеем $\langle \mathbf{F}(f), G \rangle = \langle f, \mathbf{F}(G) \rangle$.
Если E , кроме того, является полным объектом, то:
- 4) $\mathbf{F}_{\mu^{-1}} \mathbf{F}_\mu(f) = \check{f}$ для любого $f \in \mathcal{S}(E)$;
- 5) $\mathbf{F}_\mu \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(H) = \check{H}$ для любого $H \in \mathcal{S}'(E)$.

Рассмотрим следующую допустимую тройку из C_1^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0,$$

где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. В пп. 4.1.3 мы построили отображения прямых и обратных образов на функциях и распределениях объектов из C_0^{ar} . Используя эти определения, формулы (56), (57) и формулы (59), (60) и взяв соответствующие индуктивные или проективные пределы, получаем следующие корректно определенные отображения:

- 1) $\beta_*: \mathcal{S}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{S}(E_3)$;
- 2) $\beta^*: \mathcal{S}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{S}'(E_2)$;
- 3) $\alpha^*: \mathcal{S}(E_2) \rightarrow \mathcal{S}(E_1)$;
- 4) $\alpha_*: \mathcal{S}'(E_1) \rightarrow \mathcal{S}'(E_2)$;
- 5) $\beta^*: \mathcal{S}(E_3) \rightarrow \mathcal{S}(E_2)$, если E_1 – компактный объект;
- 6) $\beta_*: \mathcal{S}'(E_2) \rightarrow \mathcal{S}'(E_3)$, если E_1 – компактный объект;
- 7) $\alpha_*: \mathcal{S}(E_1) \rightarrow \mathcal{S}(E_2)$, если E_3 – дискретный объект;
- 8) $\alpha^*: \mathcal{S}'(E_2) \rightarrow \mathcal{S}'(E_1)$, если E_3 – дискретный объект.

Отметим, что по конструкции отображения 1) и 2), 3) и 4), 5) и 6), 7) и 8) являются сопряженными отображениями по отношению к спариванию (58).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Непосредственно из приведенных выше конструкций отображений прямых и обратных образов на функциях и распределениях объектов категории C_1^{ar} и из предложений 7–11 получаем, что аналогичные предложения и аналог формулы Пуассона верны для объектов категории C_1^{ar} . Мы должны сохранить формулировки этих предложений, но изменить в них объекты из категории C_0^{ar} на объекты из C_1^{ar} , компактные группы Ли на компактные объекты из C_1^{ar} и дискретные группы Ли на дискретные объекты из C_1^{ar} .

Кроме того, если $E = (I, F, V)$ – компактный объект из C_1^{ar} , то имеется естественный элемент $\mathbf{1}_E \in \mu(E)$, который является проективным пределом элементов $\mathbf{1}_{F(j)/F(i)} \in \mu(F(j)/F(i))$, $i \leq j \in I$. Если $E = (I, F, V)$ – дискретный объект из C_1^{ar} , то имеется естественный элемент $\Sigma_E \in \mu(E)$, который есть проективный предел элементов $\Sigma_{F(j)/F(i)} \in \mu(F(j)/F(i))$, $i \leq j \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть $E_2 = (I_2, F_2, V_2) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Рассмотрим другой объект $E_1 = (I_1, F_1, V_1) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, который будет доминировать объект E_2 как фильтрованную абелеву группу, и такой, что для любых $i \leq j \in I_2$ имеется одна и та же структура объекта из C_0^{ar} на $F_2(j)/F_2(i)$ и на $F_1(\phi(j))/F_1(\phi(i))$

(см. определение 2). В этом случае мы будем говорить, что объект E_1 *доминирует* объект E_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $(I, F, V), (J, G, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$. Скажем, что имеется *эквивалентность* $(I, F, V) \sim (J, G, V)$, если и только если имеется набор объектов $(I_l, F_l, V) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, $1 \leq l \leq n$, такой, что:

- (i) $I_1 = I, F_1 = F, I_n = J, F_n = G$;
- (ii) для любого $1 \leq l \leq n - 1$ или объект (I_l, F_l, V) доминирует объект (I_{l+1}, F_{l+1}, V) , или объект (I_{l+1}, F_{l+1}, V) доминирует объект (I_l, F_l, V) .

Из определений получаем, что если $E_1 \sim E_2$, то $\mathcal{S}(E_1) = \mathcal{S}(E_2)$, $\mathcal{S}'(E_1) = \mathcal{S}'(E_2)$, $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Эти изоморфизмы корректно определены по отношению к изоморфизмам (21) и (23), конструкциям прямых и обратных образов и преобразованию Фурье. (Более точно, можно изобразить соответствующие коммутативные диаграммы.)

§ 5. Категории C_2^{ar}

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Объекты категории C_2^{ar} , т.е. $\text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, – это фильтрованные абелевы группы (I, F, V) (см. определение 1) со следующими дополнительными структурами:

- (i) для любых $i \leq j \in I$ на абелевых группах $F(j)/F(i)$ задана структура $E_{i,j} \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$;
- (ii) для любых $i \leq j \leq k \in I$

$$0 \longrightarrow E_{i,j} \longrightarrow E_{i,k} \longrightarrow E_{j,k} \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_1^{ar} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ и $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ принадлежат $\text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Тогда *множество морфизмов* $\text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$ состоит из таких элементов $A \in \text{Hom}_k(V_1, V_2)$, что выполнены следующие условия:

- (i) для любого $i \in I_1$ существует $j \in I_2$ такой, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;
- (ii) для любого $j \in I_2$ существует $i \in I_1$ такой, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;
- (iii) для любых $i_1 \leq i_2 \in I_1$ и $j_1 \leq j_2 \in I_2$ таких, что $A(F_1(i_1)) \subset F_2(j_1)$ и $A(F_1(i_2)) \subset F_2(j_2)$, индуцированное k -линейное отображение

$$\bar{A}: \frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)} \rightarrow \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}$$

является элементом из $\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}(\frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)}, \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)})$.

Из следующего предложения вытекает, что понятие морфизмов в C_2^{ar} корректно определено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$, $E'_1, E'_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, и A – отображение из $\text{Hom}(V_1, V_2)$. Тогда:

- 1) если фильтрованная абелева группа E_1 доминирует фильтрованную абелеву группу E'_1 и фильтрованная абелева группа E_2 доминирует фильтрованную абелеву группу E'_2 , то $A \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$, если и только если $A \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E'_1, E'_2)$;

- 2) $\text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$ – абелева подгруппа в $\text{Hom}(V_1, V_2)$;
 3) если E_3 – объект из C_2^{ar} , то

$$\text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2, E_3) \circ \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_2) \subset \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 2.1 из [2] и может быть проведено по индукции (см. предложение 2). Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ и $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ принадлежат $\text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Тогда скажем, что

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (64)$$

– допустимая тройка из C_2^{ar} , если выполнены следующие условия:

- (i) $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \longrightarrow 0$ является точной тройкой абелевых групп;
- (ii) фильтрация (I_1, F_1, V_1) доминирует фильтрацию (I_2, F'_1, V_1) , где $F'_1(i) = F_2(i) \cap V_1$ для любого $i \in I_2$;
- (iii) фильтрация (I_3, F_3, V_3) доминирует фильтрацию (I_2, F'_3, V_3) , где $F'_3(i) = F_2(i)/F_2(i) \cap V_1$ для любого $i \in I_2$;
- (iv) для любых $i \leq j \in I_2$

$$0 \longrightarrow \frac{F'_1(j)}{F'_1(i)} \longrightarrow \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \longrightarrow \frac{F'_3(j)}{F'_3(i)} \longrightarrow 0 \quad (65)$$

является допустимой тройкой из C_1^{ar} (по определению $\text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ на каждой абелевой группе из тройки (65) задана структура элемента из $\text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$).

Будем говорить, что α из допустимой тройки (64) является *допустимым мономорфизмом* и β из допустимой тройки (64) является *допустимым эпиморфизмом*.

ПРИМЕР 9. Категория C_2^{fin} является полной подкатегорией категории C_2^{ar} , так что тройка из C_2^{fin} есть допустимая тройка из C_2^{ar} , если и только если она является допустимой тройкой в C_2^{ar} .

Категория C_1^{ar} – полная подкатегория категории C_2^{ar} по отношению к следующему функтору I : для любого $G \in C_1^{\text{ar}}$ положим $I(G) = (\{(0), (1)\}, F, G)$, где $(0) < (1)$, $F((0)) = e$, $F((1)) = G$, e – тривиальная подгруппа группы G и I действует как тождественное отображение на морфизмах из C_1^{ar} .

Скажем, что объект $E_1 = (I_1, F_1, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ доминирует другой объект $E_2 = (I_2, F_2, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, если выполнены следующие условия:

- (i) фильтрация (I_1, F_1, V) доминирует фильтрацию (I_2, F_2, V) ;
- (ii) для любых $i \leq j \in I_2$ объект $(E_1)_{i,j} = F_2(j)/F_2(i) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ с фильтрацией, индуцированной C_2^{ar} -структурой на E_1 , доминирует объект $(E_2)_{i,j} = F_2(j)/F_2(i) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ с фильтрацией, индуцированной C_2^{ar} -структурой на E_2 (см. замечание 9).

Рассмотрим группу $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E, E)^*$ (т.е. обратимые элементы в кольце $\text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E, E)$) для любого $E \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. По предложению 13 если объект $E_1 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ доминирует объект $E_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, то канонически выполнено

$$\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1) = \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2).$$

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Определим двойственный объект $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V}) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ следующим способом. Абелева группа $\check{V} \subset \text{Hom}(V, \mathbb{T})$ определяется по формуле

$$\check{V} \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{j \in I} \varprojlim_{i \geq j} \check{E}_{j,i}, \quad (66)$$

где объект $\check{E}_{j,i} \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ строится из объекта $E_{j,i} = F(i)/F(j) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ (см. п. 3.2). Множество I^0 является частично упорядоченным и таким, которое как множество совпадает с I , но с обратным порядком по сравнению с I . Для $j \in I^0$ определим подгруппу

$$F^0(j) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{i \leq j \in I^0} \check{E}_{j,i} \subset \check{V}. \quad (67)$$

Если $E_1, E_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$, то канонически строится элемент $\check{\theta} \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(\check{E}_2, \check{E}_1)$. Если

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_2^{ar} , то канонически строится следующая допустимая тройка из C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

ЛЕММА 4. Пусть $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$ – допустимая тройка из C_2^{ar} . Тогда:

1) если $D \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ и $\gamma \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(D, E_3)$, то имеются допустимая тройка

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma\alpha} E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\gamma\beta} D \longrightarrow 0 \quad (68)$$

из C_2^{ar} и $\beta_\gamma \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2 \times_{E_3} D, E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\gamma\alpha} & E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma\beta} & D \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (69)$$

коммутативна;

2) если $A \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, A)$, то имеются допустимая тройка

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta\alpha} A \coprod_{E_1} E_2 \xrightarrow{\theta\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (70)$$

из C_2^{ar} и $\alpha_\theta \in \text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2, A \coprod_{E_1} E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\ & & \theta \downarrow & & \downarrow \alpha_\theta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\theta\alpha} & A \coprod_{E_1} E_2 & \xrightarrow{\theta\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (71)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится с помощью рассуждений, использованных в доказательстве леммы 2, если в этом доказательстве расслоенное произведение (или амальгамированная сумма) факторов фильтрации понимается как расслоенное произведение (или амальгамированная сумма) объектов из C_1^{ar} , построенное в лемме 2. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Скажем, что $(I_1, F_1, V_1) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *c-объект*, если и только если имеется $i \in I_1$ такое, что $F_1(i) = V_1$. Скажем, что $(I_2, F_2, V_2) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *d-объект*, если и только если имеется $j \in I_2$ такое, что $F_2(j) = \{0\}$.

Из определения 17 следует, что если $E_1 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *c-объект*, то $\check{E}_1 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ является *d-объектом*. Если $E_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *d-объект*, то $\check{E}_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ является *c-объектом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Скажем, что $(I_1, F_1, V_1) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *cf-объект*, если для любых $i_1 \geq j_1 \in I_1$ объект $F(i_1)/F(j_1) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ является компактным объектом. Скажем, что $(I_2, F_2, V_2) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *df-объект*, если для любых $i_2 \geq j_2 \in I_2$ объект $F(i_2)/F(j_2) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ является дискретным объектом.

Из определения 18 следует, что если $E_1 \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ – *cf-объект*, то $\check{E}_1 \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ является *df-объектом*. Если $E_2 \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ – *df-объект*, то $\check{E}_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ является *cf-объектом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Скажем, что $(I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *полный объект*, если выполнены следующие два условия:

- 1) для любых $i \geq j \in I$ объект $E_{j,i} = F(i)/F(j) \in C_1^{\text{ar}}$ является полным объектом;
- 2) $V = \varinjlim_{i \in I} \varprojlim_{j \leq i} F(i)/F(j)$.

Из определения двойственного объекта и определения 19 следует, что $E \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – *полный объект*, если и только если $\check{E} = E$.

Пусть $\Omega: C_2^{\text{ar}} \rightarrow C_2^{\text{ar}}$ – очевидный функтор пополнения; для $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ положим

$$\Omega(E) \stackrel{\text{def}}{=} \left(I, F', \varinjlim_{i \in I} \varprojlim_{j \leq i} \Psi(F(i)/F(j)) \right),$$

где для любого $j \in I$ мы определим

$$F'(j) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{j \leq i} \Psi(F(i)/F(j))$$

и Ψ – функтор пополнения на C_1^{ar} (см. п. 3.2). Функтор Ω легко определяется также на множестве морфизмов $\text{Mor}_{C_2^{\text{ar}}}(E_1, E_2)$, $E_1, E_2 \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, при помощи известных отображений, определенных на $\text{Mor}_{C_1^{\text{ar}}}$.

Из определения функтора Ω ясно, что для любого $E \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ объект $\Omega(E)$ является полным объектом и $\Omega^2 = \Omega$. Более того, $\Omega(E) = \check{E}$.

ПРИМЕР 10. Рассмотрим поле $K = \mathbb{R}((t))$ (или поле $K = \mathbb{C}((t))$). Поскольку любое конечномерное $\mathbb{R}$ -векторное (или $\mathbb{C}$ -векторное) пространство есть объект категории C_0^{ar} , который является объектом категории C_1^{ar} по примеру 3, то K имеет естественную структуру объекта из категории C_2^{ar} с фильтрацией, заданной дробными идеалами в поле дискретного нормирования K .

ПРИМЕР 11. Пусть X – целая схема конечного типа над $\mathbb{Z}$ и $\dim X = 2$. Предположим, что имеется проективный сюръективный морфизм $X \rightarrow \operatorname{Spec} E$, где E – кольцо целых в числовом поле K , $[K: \mathbb{Q}] = n$. Это значит, что X является “арифметической поверхностью”.

Теперь согласно примерам 1, 9 имеем вложение $\mathbb{A}_X \in \operatorname{Ob}(C_2^{\text{fin}}) \subset \operatorname{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ (ср. также с примером 2.9 из [10]).

Пусть $p_1, \dots, p_l$ – все классы эквивалентностей архимедовых нормирований поля K . Тогда для каждого $1 \leq i \leq l$ пополненное поле K_{p_i} изоморфно или полю $\mathbb{C}$, или полю $\mathbb{R}$. Рассмотрим кривую

$$X_K \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_{\operatorname{Spec} E} \operatorname{Spec} K,$$

которая есть общий слой морфизма X в $\operatorname{Spec} E$. Определим кольцо

$$\mathbb{A}_{X, \infty} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}_{X_K} \widehat{\otimes}_K \left(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \right) = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2 \leq D_1} \left(\frac{\mathbb{A}_{X_K}(D_1)}{\mathbb{A}_{X_K}(D_2)} \otimes_K \left(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \right) \right), \quad (72)$$

где $\mathbb{A}_{X_K}$ – кольцо аделей кривой X_K , $D_2 \leq D_1$ пробегают по всем парам соответствующих дивизоров Картье на кривой X_K , и для дивизора Картье D на X_K определено K -векторное пространство:

$$\mathbb{A}_{X_K}(D) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{q \in X_K} \widehat{\mathcal{O}}_q \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \mathcal{O}(D).$$

Здесь произведение берется по всем замкнутым точкам кривой X_K , кольцо $\widehat{\mathcal{O}}_q$ – пополнение локального кольца точки $q \in X_K$ по отношению к максимальному идеалу, обратимый пучок $\mathcal{O}(D)$ на X_K соответствует дивизору Картье D на X_K .

Заметим, что

$$\mathbb{A}_{X_K} = \varinjlim_{D_1} \varprojlim_{D_2 \leq D_1} \frac{\mathbb{A}_{X_K}(D_1)}{\mathbb{A}_{X_K}(D_2)}$$

и пространство $\frac{\mathbb{A}_{X_K}(D_1)}{\mathbb{A}_{X_K}(D_2)}$ является конечномерным векторным пространством над полем K . Используя изоморфизм $\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \simeq \mathbb{R}^n$, получаем, что $\mathbb{A}_{X, \infty} \in \operatorname{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, так как мы можем взять фильтрацию пространства $\mathbb{A}_{X, \infty}$ дивизорами Картье на кривой X_K (см. формулу (72)), а факторы этой фильтрации являются конечномерными векторными пространствами над $\mathbb{R}$ и принадлежат множеству $\operatorname{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ согласно примерам 3, 9.

Теперь определим арифметическое кольцо аделей схемы X :

$$\mathbb{A}_X^{\text{ar}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}_X \times \mathbb{A}_{X, \infty}.$$

Имеем включение $\mathbb{A}_X^{\text{ar}} \in \operatorname{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, так как мы берем фильтрацию произведения на $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$, которая индуцирована фильтрациями на $\mathbb{A}_X$ и $\mathbb{A}_{X, \infty}$.

Отметим, что

$$\mathbb{A}_X \subset \prod_{x \in C} K_{x, C},$$

где произведение берется по всем парам, состоящим из целых одномерных подсхем C в X и замкнутых точек p на C . Кольцо $K_{x, C}$ – конечное произведение

двумерных локальных полей. Если x – регулярная точка на C и X , то $K_{x,C}$ является двумерным локальным полем (см., например, [10, теорема 2.10, предложение 3.4]).

Отметим, что замкнутые точки кривой X_K находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми “горизонтальными” кривыми на X , т. е. с целыми одномерными подсхемами схемы X , которые сюръективно отображаются на $\text{Sres } E$. (Такая неприводимая “горизонтальная” кривая является замыканием точки из общего слоя.)

С этой точки зрения рассмотрим определение кольца $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ как добавление локальных полей $\mathbb{R}((t))$ или $\mathbb{C}((t))$ к кольцу $\mathbb{A}_X$, так что эти поля соответствуют парам, состоящим из неприводимых “горизонтальных” кривых на X и бесконечных точек (или классов эквивалентности архимедовых нормирований) на этих кривых. Это вытекает из следующей хорошо известной формулы:

$$L \otimes_K K_p = \prod_q L_q,$$

где поле L – конечное расширение поля K , p – класс эквивалентности архимедовых нормирований поля K и произведение берется по всем классам эквивалентности архимедовых нормирований q поля L , которые лежат над p .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Способом, который подобен определению категорий C_n^{fin} (см. определения 4, 5), мы могли бы определить категории C_n^{ar} , начиная по индукции с категорий C_1^{ar} . Далее мы будем применять категории C_0^{ar} , C_1^{ar} и C_2^{ar} , поэтому мы не даем здесь определение категорий C_n^{ar} для любого $n \in \mathbb{N}$.

§ 6. Виртуальные меры

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Для любых $i, j \in I$ определим одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство виртуальных мер

$$\mu(F(i) | F(j)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{l \in I \\ l \leq i, l \leq j}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l)), \mu(F(j)/F(l))), \quad (73)$$

где для того, чтобы взять индуктивный предел, нам необходимы тождества, которые следуют из формулы (63): для $l' \leq l \in I$

$$\begin{aligned} \mu(F(i)/F(l')) &= \mu(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l)/F(l')), \\ \mu(F(j)/F(l')) &= \mu(F(j)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l)/F(l')), \end{aligned}$$

и отображения в этом пределе задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} f &\in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l)), \mu(F(j)/F(l))) \\ &\mapsto f' \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l')), \mu(F(j)/F(l'))); \end{aligned}$$

здесь $f'(a \otimes c) \stackrel{\text{def}}{=} f(a) \otimes c$, a – любой элемент из $\mu(F(i)/F(l))$, c – любой элемент из $\mu(F(l)/F(l'))$. Последние отображения являются изоморфизмами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Для любых $i, j, l \in I$ имеется канонический изоморфизм

$$\gamma: \mu(F(i) | F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(l)) \rightarrow \mu(F(i) | F(l))$$

такой, что диаграмма ассоциативности

$$\begin{array}{ccc} \mu(F(i) | F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(n)) & \longrightarrow & \mu(F(i) | F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu(F(i) | F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(n)) & \longrightarrow & \mu(F(i) | F(n)) \end{array}$$

построенная при помощи отображений γ , коммутативна для любых элементов $i, j, l, n \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем каноническое отображение

$$\begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l')), \mu(F(j)/F(l'))) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(j)/F(l')), \mu(F(l)/F(l'))) \\ \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l')), \mu(F(l)/F(l'))) \end{array} \quad (74)$$

которое удовлетворяет диаграмме ассоциативности. Это отображение коммутирует с индуктивным пределом из формулы (73). Теперь отображение γ получается после взятия индуктивного предела в (74). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Имеются следующие канонические изоморфизмы. Для любых элементов $i, j \in I$ выполнено

$$\mu(F(i) | F(i)) = \mathbb{C}, \quad \mu(F(i) | F(j)) = \mu(F(j) | F(i))^*.$$

Пусть $i \leq j \in I$. Тогда верно

$$\mu(F(i) | F(j)) = \mu(F(j)/F(i)), \quad \mu(F(j) | F(i)) = \mu(F(j)/F(i))^*.$$

§ 7. Основные пространства

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Пусть $i \geq j \geq l \geq n \in I$. Тогда верно $F(i) \supset F(j) \supset F(l) \supset F(n)$ и из определения объектов в категории C_2^{ar} получаем следующие эквивалентности объектов категории C_1^{ar} :

$$\begin{aligned} F(j)/F(n) &\sim (F(i)/F(n)) \times_{F(i)/F(l)} (F(j)/F(l)), \\ F(i)/F(l) &\sim (F(i)/F(n)) \prod_{F(j)/F(n)} (F(j)/F(l)). \end{aligned}$$

Для любых элементов $i \geq j \geq l \in I$ имеем следующие допустимые тройки из категории C_1^{ar} :

$$0 \longrightarrow F(j)/F(l) \xrightarrow{\alpha_{lj}} F(i)/F(l) \xrightarrow{\beta_{lj}} F(i)/F(j) \longrightarrow 0.$$

Зафиксируем некоторый элемент $o \in I$. Из пп. 4.1.3 вытекает, что следующие пространства над полем $\mathbb{C}$ определены корректно:

1) пространство

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{F(o)}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \in I} \lim_{q \leq p} \mathcal{S}(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(q) | F(o)) \\ &= \lim_{q \in I} \lim_{p \geq q} \mathcal{S}(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(q) | F(o))\end{aligned}\quad (75)$$

по отношению к отображениям

$$\begin{aligned}(\beta_{lji})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F(j) | F(o))} : \\ \mathcal{S}(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)) \rightarrow \mathcal{S}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o))\end{aligned}$$

и отображениям

$$\begin{aligned}\alpha_{lji}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F(l) | F(o))} : \\ \mathcal{S}(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)) \rightarrow \mathcal{S}(F(j)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o));\end{aligned}$$

2) пространство

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_{F(o)}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \in I} \lim_{q \leq p} \mathcal{S}'(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(q)) \\ &= \lim_{q \in I} \lim_{p \geq q} \mathcal{S}'(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(q))\end{aligned}\quad (76)$$

по отношению к отображениям

$$\begin{aligned}\beta_{lji}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F(o) | F(l))} : \\ \mathcal{S}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)) \rightarrow \mathcal{S}'(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l))\end{aligned}$$

и отображениям

$$\begin{aligned}(\alpha_{lji})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F(o) | F(l))} : \\ \mathcal{S}'(F(j)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)) \rightarrow \mathcal{S}'(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)).\end{aligned}$$

Из последних определений пространств получаем следующий канонический изоморфизм для любого элемента $o_1 \in I$:

$$\mathcal{S}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(o_1)) \rightarrow \mathcal{S}_{F(o_1)}(E),$$

так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{S}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(o_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o_1) | F(o_2)) & \longrightarrow & \mathcal{S}_{F(o_1)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o_1) | F(o_2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(o_2)) & \longrightarrow & \mathcal{S}_{F(o_2)}(E)\end{array}$$

коммутативна для любого элемента $o_2 \in I$.

Двойственно, имеем следующий канонический изоморфизм для любого элемента $o_1 \in I$:

$$\mu(F(o_1) | F(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}'_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{S}'_{F(o_1)}(E),$$

так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mu(F(o_2) | F(o_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o_1) | F(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}'_{F(o)}(E) & \longrightarrow & \mu(F(o_2) | F(o_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}'_{F(o_1)}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu(F(o_2) | F(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}'_{F(o)}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}'_{F(o_2)}(E) \end{array}$$

коммутативна для любого элемента $o_2 \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пусть $\{B_l\}$, $l \in J$, – проективная система векторных пространств над полем k с сюръективными отображениями перехода $\phi_{l_1, l_2} : B_{l_1} \rightarrow B_{l_2}$ для любых элементов $l_1 \geq l_2 \in J$. Пусть J^0 – частично упорядоченное множество с тем же самым множеством, как и J , но с обратным порядком. Пусть $\{A_l\}$, $l \in J^0$, – индуктивная система k -векторных пространств с инъективными отображениями перехода $\psi_{l_2, l_1} : A_{l_2} \rightarrow A_{l_1}$. Предположим, что для любого элемента $l \in J$ имеется невырожденное k -линейное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_l : B_l \times A_l \rightarrow k$$

такое, что для любых элементов $l_1 \geq l_2 \in I$, $x \in B_{l_1}$, $y \in A_{l_2}$ выполнено

$$\langle \phi_{l_1, l_2}(x), y \rangle_{l_2} = \langle x, \psi_{l_2, l_1}(y) \rangle_{l_1}.$$

Тогда канонически получается невырожденное k -линейное спаривание между k -векторными пространствами $\varprojlim_{l \in J} B_l$ и $\varinjlim_{l \in J^0} A_l$, которое индуцировано спариваниями $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$, $l \in J$.

Для $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ и любых элементов $i \geq j \in I$ имеются невырожденные $\mathbb{C}$ -линейные спаривания между пространствами $\mathcal{S}(F(i)/F(j))$ и $\mathcal{S}'(F(i)/F(j))$ (см. формулу (58)). Кроме того, нетрудно видеть из определений и соответствующих фактов о прямых и обратных образах в категории C_0^{ar} , что отображения перехода в проективной системе (75) сюръективны и отображения перехода в индуктивной системе (76) инъективны.

Поэтому, используя дважды замечание 12 для формул (75), (76), получаем, что имеется невырожденное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F(o)}(E)} : \mathcal{S}_{F(o)}(E) \times \mathcal{S}'_{F(o)}(E) \rightarrow \mathbb{C}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – cf -объект. Тогда согласно замечанию 8 для любых элементов $i \geq j \in I$ имеется канонический элемент

$$1_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{F(i)/F(j)} \in \mu(F(i)/F(j))$$

(его можно также определить при помощи невырожденного спаривания (58): $\langle 1, 1_{ij} \rangle = 1$). Поэтому для любых элементов $k, l \in I$ существует канонический элемент $1_{kl} \in \mu(F(k) | F(l))$ такой, что для любых $k, l, n \in I$, применив предложение 14, получим

$$\gamma(1_{kl} \otimes 1_{ln}) = 1_{kn}.$$

Учитывая существование элементов 1_{lo} и 1_{ol} для $l, o \in I$, можно не записывать 1-мерные $\mathbb{C}$ -пространства $\mu(F(l) | F(o))$ и $\mu(F(o) | F(l))$ в формулах (75) и (76),

которые определяют $\mathbb{C}$ -пространства $\mathcal{S}_{F(o)(E)}$ и $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$. Эти $\mathbb{C}$ -пространства не зависят от выбора элемента $o \in I$.

Аналогично, пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – df -объект. Тогда согласно замечанию 8 для любых элементов $i \geq j \in I$ имеется канонический элемент

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{F(i)/F(j)} \in \mu(F(i)/F(j))$$

(его можно также определить при помощи невырожденного спаривания (58): $\langle f, \delta_{ij} \rangle = \sum_{x \in V_{ij}} f(x)$, где $f \in \mathcal{S}(E)$, $F(i)/F(j) = (I_{ij}, F_{ij}, V_{ij}) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$). Поэтому для любых элементов $k, l \in I$ существует канонический элемент $\delta_{kl} \in \mu(F(k) | F(l))$ такой, что для любых $k, l, n \in I$, применив предложение 14, получим

$$\gamma(\delta_{kl} \otimes \delta_{ln}) = \delta_{kn}.$$

Учитывая существование элементов δ_{lo} и δ_{ol} для $l, o \in I$, можно не записывать 1-мерные $\mathbb{C}$ -пространства $\mu(F(l) | F(o))$ и $\mu(F(o) | F(l))$ в формулах (75), (76), которые определяют $\mathbb{C}$ -пространства $\mathcal{S}_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$. Эти $\mathbb{C}$ -пространства не зависят от выбора элемента $o \in I$.

§ 8. Преобразование Фурье

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – полный объект. Тогда верно $\check{E} = E$. Зафиксируем некоторый элемент $o \in I$.

8.1. Отображения $f \mapsto \check{f}$, $G \mapsto \check{G}$. Пусть $i \geq j \in I$ – любые элементы. Согласно изложенному в п. 4.2 существуют $\mathbb{C}$ -линейные отображения

$$\begin{aligned} f \otimes \mu &\in \mathcal{S}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)) \\ &\mapsto \check{f} \otimes \mu \in \mathcal{S}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)), \\ G \otimes \mu' &\in \mathcal{S}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)) \\ &\mapsto \check{G} \otimes \mu' \in \mathcal{S}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)). \end{aligned}$$

Эти отображения коммутируют с прямыми и обратными образами, если мы заменим элементы $i, j \in I$ на элементы $i', j' \in I$, $i' \geq i$, $j' \leq j$. Поэтому при помощи формул (75), (76) получаем, что $\mathbb{C}$ -линейные отображения

$$f \in \mathcal{S}_{F(o)}(E) \mapsto \check{f} \in \mathcal{S}_{F(o)}(E), \quad G \in \mathcal{S}'_{F(o)}(E) \mapsto \check{G} \in \mathcal{S}'_{F(o)}(E)$$

корректно определены. Квадрат любого из этих отображений – тождественное отображение. Из очевидных соответствующих формул для категории C_1^{ar} получаем теперь формулы

$$\langle \check{f}, G \rangle_{\mathcal{S}_{F(o)}(E)} = \langle f, \check{G} \rangle_{\mathcal{S}_{F(o)}(E)} \quad \forall f \in \mathcal{S}_{F(o)}(E), \quad \forall G \in \mathcal{S}'_{F(o)}(E).$$

8.2. Двумерные преобразования Фурье. Согласно изложенному в § 5 существует двойственный объект $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V}) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Для любых элементов $i \geq j \in I$, и объекта $E_{j,i} = F(i)/F(j) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ имеется объект $\check{E}_{j,i} = F^0(j)/F^0(i) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$.

Для любых элементов $l, n \in I$ выполнено

$$\mu(F(l) | F(n)) = \mu(F^0(l) | F^0(n)). \quad (77)$$

В самом деле, пусть элемент $k \in I$ такой, что верно $k \leq l$, $k \leq n$. Тогда из предложения 14, замечания 11 и формулы (61) имеем

$$\begin{aligned} \mu(F(l) | F(n)) &= \mu(F(l) | F(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(k) | F(n)) \\ &= \mu(F(l)/F(k))^* \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(n)/F(k)) = \mu(F^0(k)/F^0(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(k)/F^0(n))^* \\ &= \mu(F^0(l) | F^0(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(k) | F^0(n)) = \mu(F^0(l) | F^0(n)). \end{aligned}$$

Поэтому имеются следующие отображения для любых элементов $i \geq j \in I$ (преобразования Фурье):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \otimes \mu(F(i) | F(o)) : \\ \mathcal{S}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)) \rightarrow \mathcal{S}(F^0(j)/F^0(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(i) | F^0(o)), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \otimes \mu(F(o) | F(i)) : \\ \mathcal{S}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)) \rightarrow \mathcal{S}'(F^0(j)/F^0(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(o) | F^0(i)). \end{aligned} \quad (79)$$

Теперь будем использовать замечание 8, или, более точно, аналог предложения 10 для категории C_1^{ar} . Это замечание связывает преобразование Фурье с прямыми и обратными образами. Применим эти соображения в случае, когда элементы $i, j \in I$ заменяются на элементы $i', j' \in I$, $i' \geq i$, $j' \leq j$, и возьмем пределы согласно формулам (75), (76). Получим, что соответствующие $\mathbb{C}$ -линейные отображения (*двумерные преобразования Фурье*) определены корректно:

$$\mathbf{F} : \mathcal{S}_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{S}_{F^0(o)}(\check{E}), \quad (80)$$

$$\mathbf{F} : \mathcal{S}'_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{S}'_{F^0(o)}(\check{E}). \quad (81)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Поскольку для любых элементов $i \geq j \in I$ пространства $\mathcal{S}(F(i)/F(j))$ и $\mathcal{S}'(F(i)/F(j))$ являются топологическими $\mathbb{C}$ -векторными пространствами и $\dim_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)) = 1$, получаем, что $\mathcal{S}(E)$ и $\mathcal{S}'(E)$ – также топологические $\mathbb{C}$ -векторные пространства, которые снабжены топологиями проективных и индуктивных пределов согласно формулам (75), (76) соответственно (см. [15]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Выполнены следующие утверждения:*

1) *отображения $\mathbf{F}$, заданные формулами (80), (81), являются изоморфизмами топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств;*

2) *для любых элементов $f \in \mathcal{S}_{F(o)}(E)$ и $G \in \mathcal{S}'_{F^0(o)}(E)$ верно*

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}(f) = \check{f}, \quad \mathbf{F} \circ \mathbf{F}(G) = \check{G};$$

3) *для любых элементов $f \in \mathcal{S}_{F(o)}(E)$ и $G \in \mathcal{S}'_{F^0(o)}(\check{E})$ верно*

$$\langle \mathbf{F}(f), G \rangle_{\mathcal{S}_{F^0(o)}(\check{E})} = \langle f, \mathbf{F}(G) \rangle_{\mathcal{S}_{F(o)}(E)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конструкции двумерного преобразования Фурье, описанной в настоящем параграфе, а также из свойств преобразования Фурье для категории C_1^{ar} (см. п. 4.2 и предложение 12), примененного к функциям и распределениям на объектах $F(i)/F(j) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$ для любых элементов $i \geq j \in I$. Предложение доказано.

§ 9. Центральное расширение и его представления

В этом параграфе мы построим центральное расширение некоторой подгруппы группы автоморфизмов объекта категории C_2^{ar} и рассмотрим представления данной группы в пространстве функций и распределений заданного объекта.

9.1. Канонические изоморфизмы. Пусть объект $E_1 = (I_1, F_1, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ доминирует объект $E_2 = (I_2, F_2, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ (см. § 5). Зафиксируем некоторый элемент $o \in I_2$. Тогда получаем канонические изоморфизмы

$$\mathcal{S}_{F(o)}(E_1) = \mathcal{S}_{F(o)}(E_2), \quad \mathcal{S}'_{F(o)}(E_1) = \mathcal{S}'_{F(o)}(E_2).$$

В самом деле, из формул (75), (76) следует, что индуктивные и проективные пределы, которые использовались в определениях этих пространств, будут одними и теми же на множествах индексов, зависящих от I_1 или I_2 . Более того, по тем же причинам двумерное преобразование Фурье совпадает для пространств, зависящих от E_1 или E_2 (ср. это с замечанием 9 и рассуждениями, приведенными после определения 13).

9.2. Некоторая подгруппа группы автоморфизмов. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Определим следующую подгруппу группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Множество $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ состоит из таких элементов $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$, что:

- 1) для любого $i \in I$ существует элемент $j \in I$ такой, что $gF(i) = F(j)$;
- 2) для любых $i \geq j \in I$ если $g(F(i)) = F(p)$, $g(F(j)) = F(q)$, то $p \geq q \in I$;
- 3) для элемента $g^{-1} \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$ выполнены условия, аналогичные условиям 1), 2).

Ясно, что множество $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ является подгруппой группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$.

Теперь построим объект $\tilde{E} \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, который будет доминировать объект $E \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$.

Сначала для любых фиксированных элементов $i \geq j \in I$ рассмотрим естественный объект $E_{j,i} = (I_{j,i}, F_{j,i}, F(i)/F(j)) \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, появляющийся из C_2^{ar} -структуры на E . Определим объект $\widetilde{E}_{j,i} \in \text{Ob}(C_1^{\text{ar}})$, который будет доминировать объект $E_{j,i}$, следующим способом. Рассмотрим фильтрованную абелеву группу $\widetilde{E}_{j,i} = (G, \text{Id}, F(i)/F(j))$, где G – множество подгрупп $gF_{l,k}(n)$ группы $F(i)/F(j)$ таких, что $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$, $k \geq l \in I$, $n \in I_{l,k}$, $g(F(k)) = F(i)$, $g(F(l)) = F(j)$, $F_{l,k}(n) \subset F(k)/F(l)$. Множество G частично упорядочено посредством включений подгрупп. Функция Id отображает элемент из множества G в соответствующую подгруппу группы $F(i)/F(j)$. Из определения 15 следует, что для любой такой подгруппы $gF_{l,k}(n)$ имеются элементы $p \geq q \in I_{j,i}$ такие, что

$$F_{j,i}(p) \supset gF_{l,k}(n) \supset F_{j,i}(q),$$

и $gF_{i,k}(n)$ – замкнутая подгруппа в группе Ли $F_{j,i}(p)/F_{j,i}(q)$. Поэтому согласно замечанию 1 получаем, что фильтрованная абелева группа $\widetilde{E_{j,i}}$ задает корректно определенный объект категории C_1^{ar} такой, что объект $\widetilde{E_{j,i}}$ доминирует объект $E_{j,i}$.

Теперь непосредственно из этих конструкций получаем, что новый объект $\tilde{E} = (I, F, V)$, для которого на группе $F(i)/F(j)$, $i \geq j \in I$, рассматривается C_1^{ar} -структура объекта $\widetilde{E_{j,i}}$, корректно определен как объект из категории C_2^{ar} . Кроме того, объект $\tilde{E}$ доминирует объект E в категории C_2^{ar} . Поэтому верно $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(\tilde{E}) = \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$. Из определения объекта $\tilde{E}$ получаем, что следующие группы совпадают:

$$\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(\tilde{E})' = \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)', \quad (82)$$

как подгруппы группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$.

9.3. Центральное расширение. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Тогда для любых элементов $i_1, i_2 \in I$ определено пространство виртуальных мер $\mu(F(i_1) | F(i_2))$. Для любого элемента $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ и любого элемента $i \in I$ из определения группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ имеем, что $gF(i) = F(p)$ для некоторого элемента $p \in I$. Поэтому для любых $g, h \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ и $i_1, i_2 \in I$ корректно определено одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mu(gF(i_1) | hF(i_2))$.

Используя изоморфизм (82) и изложенное в п. 9.1, для любого элемента $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ и любых элементов $p \geq q \in I$ получаем изоморфизм

$$r_g: \mathcal{S}(F(p)/F(q)) \rightarrow \mathcal{S}(gF(p)/gF(q)), \quad (83)$$

где $r_g(f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}v)$ для любых $v \in gF(p)/gF(q)$ и $f \in \mathcal{S}(F(p)/F(q))$. (Мы использовали то, что достаточно рассмотреть $\tilde{E}$ вместо E и $\mathcal{S}(F(i)/F(j))$ является $\mathbb{C}$ -подалгеброй пространства $\mathcal{F}(F(i)/F(j))$ всех $\mathbb{C}$ -значных функций на V , где $i \geq j \in I$ – любые элементы.)

Двойственно к формуле (83) получаем, что для любого $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ и любых $p \geq q \in I$ имеем изоморфизм

$$r'_g: \mathcal{S}'(F(p)/F(q)) \rightarrow \mathcal{S}'(gF(p)/gF(q)). \quad (84)$$

(Другими словами, отображение r'_g сопряжено к отображению $r_{g^{-1}}$ относительно спаривания (58).)

Используя замечание 6, получаем, что отображение r'_g индуцирует изоморфизм

$$n_g: \mu(F(p)/F(q)) \longrightarrow \mu(gF(p)/gF(q))$$

одномерных $\mathbb{C}$ -векторных пространств.

Для любого элемента $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ и любых элементов $p, q, s \in I$ таких, что $s \leq p$, $s \leq q$, имеем $\mathbb{C}$ -изоморфизм

$$\begin{aligned} m_g: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(p)/F(s)), \mu(F(q)/F(s))) \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(gF(p)/gF(s)), \mu(gF(q)/gF(s))), \end{aligned}$$

где для любого $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(p)/F(s)), \mu(F(q)/F(s)))$

$$m_g(f) \stackrel{\text{def}}{=} n_g \circ f \circ n_{g^{-1}}.$$

Теперь применим изоморфизм m_g к индуктивному пределу в (73) и получим $\mathbb{C}$ -линейный изоморфизм

$$l_g: \mu(F(p) | F(q)) \rightarrow \mu(gF(p) | gF(q))$$

для любых элементов $p, q \in I$.

Для любых элементов $g_1, g_2 \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ верно, что $l_{g_1 g_2} = l_{g_1} l_{g_2}$. Кроме того, для любых $a \in \mu(F(p) | F(q))$ и $b \in \mu(F(q) | F(s))$, а также для любых элементов $p, q, s \in I$ имеем

$$\gamma(l_g(a) \otimes l_g(b)) = l_g(\gamma(a \otimes b))$$

(см. предложение 14, где был введен изоморфизм γ).

Пусть $p, q \in I$. Тогда для любого $\mu \in \mu(F(p) | F(q))$, $\mu \neq 0$, определим канонически $\mu^{-1} \in \mu(F(q) | F(p))$ такой, что $\mu \otimes \mu^{-1} = 1$ по отношению к каноническому изоморфизму

$$\mu(F(p) | F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(q) | F(p)) = \mathbb{C}.$$

Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Зафиксируем некоторый элемент $o \in I$. Тогда имеется *центральное расширение групп*

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)} \xrightarrow{\Lambda} \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)' \longrightarrow 1, \quad (85)$$

где

$$\widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(g, \mu): g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)', \mu \in \mu(F(o) | gF(o)), \mu \neq 0\}.$$

Здесь $\Lambda((g, \mu)) = g$. Операции $(g_1, \mu_1) \cdot (g_2, \mu_2) = (g_1 g_2, \gamma(\mu_1 \otimes l_{g_1}(\mu_2)))$ и $(g, \mu)^{-1} = (g^{-1}, l_{g^{-1}}(\mu^{-1}))$ определяют структуру группы на множестве $\widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$. (Единичный элемент этой группы есть $(e, 1)$, где e – единичный элемент группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Для любого элемента $o_1 \in I$ имеется канонический изоморфизм

$$\alpha_{o, o_1}: \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)} \rightarrow \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o_1)}.$$

В самом деле, фиксируем любой $\nu \in \mu(F(o_1) | F(o))$, $\nu \neq 0$. Тогда

$$\alpha_{o, o_1}((g, \mu)) \stackrel{\text{def}}{=} (g, \gamma(\gamma(\nu \otimes \mu) \otimes l_g(\nu^{-1}))).$$

Отображение α_{o, o_1} не зависит от выбора $\nu \in \mu(F(o_1) | F(o))$, $\nu \neq 0$.

9.4. Представление центрального расширения. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. В п. 9.2 был построен объект $\tilde{E} \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, который доминирует объект E .

Для любого элемента $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ и любых элементов $p \geq q \in I$ имеем изоморфизм (83). Зафиксируем некоторый элемент $o \in I$. Используя формулу (83), построим отображение $R_{\tilde{g}}$ для любого $\tilde{g} = (g, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ и любых элементов $p \geq q \in I$, а именно

$$R_{\tilde{g}}: \mathcal{S}(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(q) | F(o)) \rightarrow \mathcal{S}(gF(p)/gF(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(gF(q) | F(o)), \quad (86)$$

как композицию отображения $r_g \otimes l_g$ с умножением на $\mu^{-1} \in \mu(gF(o) | F(o))$.

Применяя формулу (86) к формуле (75), для любого $\tilde{g} \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ получим отображение

$$R_{\tilde{g}}: \mathcal{S}_{F(o)}(\tilde{E}) \rightarrow \mathcal{S}_{F(o)}(\tilde{E})$$

такое, что $R_{\tilde{g}}R_{\tilde{h}} = R_{\tilde{g}\tilde{h}}$. Поэтому, используя рассуждения из п. 9.1, получаем представление группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ отображениями $R_{\tilde{g}}$ в $\mathbb{C}$ -пространстве $\mathcal{S}_{F(o)}(E)$.

Пусть $o \in I$. Двойственно к формуле (86), используя изоморфизмы r'_g , заданные формулой (84), для любого $\tilde{g} = (g, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ и любых элементов $p \geq q \in I$ построим отображение

$$R'_{\tilde{g}}: \mathcal{S}'(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(q)) \rightarrow \mathcal{S}'(gF(p)/gF(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | gF(q)) \quad (87)$$

как композицию отображения $r'_g \otimes l_g$ с умножением на $\mu \in \mu(F(o) | gF(o))$.

Применяя формулу (87) к формуле (76) и используя рассуждения из п. 9.1, получим представление группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ в $\mathbb{C}$ -пространстве $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$ отображениями $R'_{\tilde{g}}$.

Из конструкций отображений $R_{\tilde{g}}$ и $R'_{\tilde{g}}$ для любых $H \in \mathcal{S}'_{F(o)}(E)$, $f \in \mathcal{S}_{F(o)}(E)$ и $\tilde{g} \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ имеем формулу

$$\langle R'_{\tilde{g}}(H), R_{\tilde{g}}(f) \rangle_{\mathcal{S}'_{F(o)}(E)} = \langle H, f \rangle_{\mathcal{S}_{F(o)}(E)}. \quad (88)$$

9.5. Преобразование Фурье и представление центрального расширения. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – полный объект. Тогда имеется двойственный объект $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V})$ и выполнено $\check{\check{E}} = E$. Для любого элемента $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$ имеется канонический элемент $\check{g} \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(\check{E})$. Получаем следующий изоморфизм групп:

$$g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E) \longmapsto \check{g}^{-1} \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(\check{E}),$$

который индуцирует изоморфизм групп

$$\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)' \rightarrow \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(\check{E}).$$

Отсюда для любого элемента $o \in I$ имеем изоморфизм групп

$$(g, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)} \longmapsto (\check{g}^{-1}, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(\check{E})}'_{F^0(o)}, \quad (89)$$

где мы использовали изоморфизм (77), чтобы получить то, что для любого элемента $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$ канонически выполнено

$$\mu(F(o) | gF(o)) = \mu(F^0(o) | \check{g}^{-1}F^0(o)).$$

Используя изоморфизм (89), получаем представления группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ в $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{S}_{F^0(o)}(\check{E})$ и $\mathcal{S}'_{F^0(o)}(\check{E})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$ – полный объект. Тогда преобразование Фурье $\mathbf{F}$ задает изоморфизм между представлениями группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)}'_{F(o)}$ в $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{S}_{F(o)}(E)$, $\mathcal{S}_{F^0(o)}(\check{E})$ и $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$, $\mathcal{S}'_{F^0(o)}(\check{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение двумерного преобразования Фурье $\mathbf{F}$ из п. 8.2 и формулы (75), (76), сводим утверждения этого предложения к соответствующим утверждениям об изоморфизмах объектов категории C_1^{ar} и одномерном преобразовании Фурье между ними. Эти последние утверждения следуют из определения и свойств одномерного преобразования Фурье или могут быть снова сведены уже к случаю объектов из категории C_0^{ar} при помощи формул (56), (57) с использованием определения одномерного преобразования Фурье из п. 4.2. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Мы использовали в этом параграфе подгруппу $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ вместо всей группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$ для $E \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Во множестве важных примеров рассматриваемые группы являются подгруппами группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$, если имеется достаточно мелкая фильтрация на E . Например, E может быть построено по двумерному локальному полю K с конечным последним полем вычетов, или по $K \simeq \mathbb{R}((t))$, или по $E = K \simeq \mathbb{C}((t))$, и в этих случаях $K^* \subset \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ (см. примеры 1, 10). В другом примере E может быть кольцом арифметических аделей $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$, где X – “арифметическая поверхность”, и группа обратимых элементов (группа аделей) $(\mathbb{A}_X^{\text{ar}})^*$ содержится в группе $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ (см. пример 11).

§ 10. Прямые и обратные образы

В этом параграфе мы построим прямые и обратные образы пространств функций и распределений на объектах категории C_2^{ar} .

На протяжении всего параграфа используем следующие данные. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (90)$$

– допустимая тройка из категории C_2^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению имеются сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

10.1. Случай, когда E_1 – c -объект. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Предположим, что E_1 – c -объект из (90). Пусть $o \in I_2$. Тогда имеется морфизм прямого образа*

$$\beta_*: \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \rightarrow \mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых элементов $i, j \in I_2$ канонически выполнено

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (91)$$

Пусть элемент $k \in I_2$ такой, что $F_1(\varepsilon(k)) = V_1$. Пусть элементы $i \geq j \in I_2$ любые и такие, что $i \geq k \geq j$. Тогда имеем допустимую тройку из категории C_1 :

$$0 \longrightarrow V_1/F_1(\varepsilon(j)) \longrightarrow F_2(i)/F_2(j) \xrightarrow{\beta_{ij}} F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j)) \longrightarrow 0.$$

Имеется корректно определенное отображение

$$(\beta_{ij})_*: \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) \rightarrow \mathcal{S}(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j))),$$

где мы использовали, что $\mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) = \mu(V_1/F_1(\varepsilon(j)))$. Поэтому получаем корректно определенное отображение

$$\begin{aligned} & (\beta_{ij})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o)))} : \\ & \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) \\ & \rightarrow \mathcal{S}(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))). \end{aligned}$$

Из (91) имеем, что

$$\mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) = \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | F_1(\varepsilon(j))).$$

Поэтому верно

$$\mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) = \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1).$$

Таким образом, получаем корректно определенное отображение

$$\begin{aligned} & (\beta_{ij})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o)))} : \\ & \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \\ & \rightarrow \mathcal{S}(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))). \end{aligned}$$

Теперь возьмем проективные пределы, которые использовались для конструкции пространств $\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$ и $\mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$. Тогда получим корректно определенное отображение β_* , построенное из отображений $(\beta_{ij})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o)))}$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Двойственно к отображениям, описанным выше, получаем корректно определенное отображение

$$\beta^* : \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \rightarrow \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2)$$

такое, что β_* и β^* – сопряженные отображения по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)}$.

10.2. Случай, когда E_3 – d -объект. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Предположим, что E_3 – d -объект из тройки (90). Пусть $o \in I_2$. Тогда имеется морфизм обратного образа*

$$\alpha^* : \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \rightarrow \mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1),$$

где $\{0\}$ – нулевая подгруппа группы V_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых элементов $i, j \in I_2$ канонически выполнено

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (92)$$

Поскольку β – допустимый эпиморфизм и E_3 – d -объект, имеется элемент $k \in I_2$ такой, что $F_3(\gamma(k)) = \{0\}$. Пусть элементы $i \geq j \in I_2$ любые и такие, что $i \geq k \geq j$. Тогда имеем допустимую тройку из категории C_1^{ar} :

$$0 \longrightarrow F_1(\varepsilon(i))/F_1(\varepsilon(j)) \xrightarrow{\alpha_{ij}} F_2(i)/F_2(j) \longrightarrow F_3(\gamma(i)) \longrightarrow 0. \quad (93)$$

Имеется корректно определенное отображение

$$\alpha_{ij}^* : \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \rightarrow \mathcal{S}(F_1(\varepsilon(i))/F_1(\varepsilon(j))).$$

Поэтому получаем корректно определенное отображение

$$\begin{aligned} & \alpha_{ij}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o)))} : \\ & \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) \\ & \rightarrow \mathcal{S}(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))). \end{aligned}$$

Из (92) и (93) имеем, что

$$\mu(F_2(o) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(o)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}).$$

Отсюда

$$\mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) = \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}).$$

Таким образом, получаем корректно определенное отображение

$$\begin{aligned} & \alpha_{ij}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o)))} : \\ & \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j)/F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \\ & \rightarrow \mathcal{S}(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))). \end{aligned}$$

Теперь возьмем проективные пределы (по отношению к $i \geq k \geq j$), которые мы использовали для построения пространств $\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$ и $\mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$. Тогда получим корректно определенное отображение α^* , построенное из отображений $\alpha_{ij}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o)))}$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Двойственно к отображениям, описанным выше, получаем корректно определенное отображение

$$\alpha_* : \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \rightarrow \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2)$$

такое, что α^* и α_* – сопряженные отображения по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)}$.

10.3. Случай, когда E_1 – cf -объект. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Предположим, что E_1 – cf -объект из тройки (90). Пусть $o \in I_2$. Тогда имеется морфизм обратного образа*

$$\beta^* : \mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \rightarrow \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых элементов $i, j \in I_2$ канонически выполнено

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (94)$$

Поскольку E_1 – cf -объект, для любых элементов $i \geq j \in I_2$ имеется канонический элемент $1_{ij} \in \mu(F_1(\varepsilon(i))/F_1(\varepsilon(j)))$, построенный в замечании 13. Поэтому для любых элементов $i, j \in I_2$ получаем канонический элемент $1_{ij} \in$

$\mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j)))$ такой, что $1_{ij} \otimes 1_{jk} = 1_{ik}$ для любых элементов $i, j, k \in I_2$. Таким образом, канонически имеем изоморфизм $\mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) = \mathbb{C}$ для любых элементов $i, j \in I_2$ (см. также замечание 13).

Следовательно, из формулы (94) получаем, что для любых элементов $i, j \in I_2$ верно

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (95)$$

Для любых элементов $i \geq j \in I_2$ имеем допустимую тройку из категории C_1^{ar} :

$$0 \longrightarrow \frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))} \longrightarrow \frac{F_2(i)}{F_2(j)} \xrightarrow{\beta_{ij}} \frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))} \longrightarrow 0.$$

Получаем корректно определенное отображение

$$\beta_{ij}^*: \mathcal{S}(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j))) \longrightarrow \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)),$$

потому что $\frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))}$ – компактный объект из категории C_1^{ar} .

Из формулы (95) имеем

$$\mu(F_2(j) | F_2(o)) = \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))).$$

Поэтому получаем отображение

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F_2(j) | F_2(o))}: \\ \mathcal{S}(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) \\ \rightarrow \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) | F_2(o)). \end{aligned}$$

Для различных элементов $i \geq j \in I_2$ такие отображения совместимы, если мы возьмем проективные пределы согласно формулам, которые определяют $\mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$ и $\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$. Поэтому получаем отображение β^* из отображений $\beta_{ij}^* \otimes \text{Id}_{\mu(F_2(j) | F_2(o))}$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Двойственно к отображениям, описанным выше, получаем корректно определенное отображение

$$\beta_*: \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2) \rightarrow \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$$

такое, что β^* и β_* – сопряженные отображения по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)}$.

10.4. Случай, когда E_3 – df -объект. Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. *Предположим, что E_3 – df -объект из тройки (90). Пусть $o \in I_2$. Тогда имеется морфизм прямого образа*

$$\alpha_*: \mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \rightarrow \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых элементов $i, j \in I_2$ канонически выполнено

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (96)$$

Поскольку $E_3 - df$ -объект, для любых элементов $i \geq j \in I_2$ имеется канонический элемент $\delta_{ij} \in \mu(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j)))$, построенный в замечании 13. Поэтому получаем для любых элементов $i, j \in I_2$ канонический элемент $\delta_{ij} \in \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j)))$ такой, что выполнено $\delta_{ij} \otimes \delta_{jk} = \delta_{ik}$ для любых элементов $i, j, k \in I_2$. Отсюда канонически выполнено $\mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))) = \mathbb{C}$ для любых элементов $i, j \in I_2$ (см. также замечание 13).

Таким образом, из формулы (96) получаем, что для любых элементов $i, j \in I_2$ верно

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))). \quad (97)$$

Для любых элементов $i \geq j \in I_2$ имеется допустимая тройка из категории C_1^{ar} :

$$0 \longrightarrow \frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \frac{F_2(i)}{F_2(j)} \longrightarrow \frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))} \longrightarrow 0.$$

Получаем корректно определенное отображение

$$(\alpha_{ij})_* : \mathcal{S}(F_1(\varepsilon(i))/F_1(\varepsilon(j))) \rightarrow \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)),$$

так как $\frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))}$ – дискретный объект из категории C_1^{ar} . Из формулы (97) получаем, что верно

$$\mu(F_2(j) | F_2(o)) = \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))).$$

Поэтому имеем отображение

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F_2(j) | F_2(o))} : \\ \mathcal{S}(F_1(\varepsilon(i))/F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) \\ \rightarrow \mathcal{S}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) | F_2(o)). \end{aligned}$$

Для различных элементов $i \geq j \in I_2$ такие отображения совместимы, если мы возьмем проективные пределы согласно формулам, которые определяют пространства $\mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$ и $\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$. Поэтому получаем отображение α_* , построенное из отображений $(\alpha_{ij})_* \otimes \text{Id}_{\mu(F_2(j) | F_2(o))}$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Двойственно к отображениям, описанным выше, получаем корректно определенное отображение

$$\alpha^* : \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2) \rightarrow \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$$

такое, что α_* и α^* – сопряженные отображения по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)}$.

§ 11. Композиция отображений и правила замены базы

11.1. Правила замены базы. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из категории C_2^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Пусть

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\gamma} E_3 \xrightarrow{\delta} B \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из категории C_2^{ar} , где $D = (R, S, Y)$, $B = (T, U, W)$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму морфизмов из категории C_2^{ar} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma_\beta} & D \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \beta_\delta \downarrow & & \downarrow \delta \\
 & & & & B & \equiv & B \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (98)$$

Пусть $X' = E_2 \times_{E_3} D = (N, Q, X)$ как объект категории C_2^{ar} . В диаграмме (98) две горизонтальные тройки и две вертикальные тройки – допустимые тройки из категории C_2^{ar} .

Выберем любые элементы $i \leq j \in I_2$. Тогда диаграмма (98) индуцирует следующую коммутативную диаграмму морфизмов из категории C_1^{ar} (см. конструкцию расслоенного произведения из леммы 4):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1} & \xrightarrow{(\gamma_\alpha)_{ji}} & \frac{F_2(j) \cap X}{F_2(i) \cap X} & \xrightarrow{(\gamma_\beta)_{ji}} & \frac{\beta(F_2(j)) \cap Y}{\beta(F_2(i)) \cap Y} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & (\beta_\gamma)_{ji} \downarrow & & \downarrow \gamma_{ji} \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1} & \xrightarrow{\alpha_{ji}} & \frac{F_2(j)}{F_2(i)} & \xrightarrow{\beta_{ji}} & \frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))} \longrightarrow 0 \\
 & & & & (\beta_\delta)_{ji} \downarrow & & \downarrow \delta_{ji} \\
 & & & & \frac{\delta\beta(F_2(j))}{\delta\beta(F_2(i))} & \equiv & \frac{\delta\beta(F_2(j))}{\delta\beta(F_2(i))} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (99)$$

Здесь две горизонтальные и две вертикальные тройки – допустимые тройки из категории C_1^{ar} . При этом выполнено

$$\frac{F_2(j) \cap X}{F_2(i) \cap X} = \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \times_{\frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))}} \frac{\beta(F_2(j)) \cap Y}{\beta(F_2(i)) \cap Y}$$

для объектов из категории C_1^{ar} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. В обозначениях диаграммы (98) пусть E_1 – c -объект, B – d -объект. Пусть $o \in I_2$, $\mu \in \mu(F_2(o) \cap V_1 \mid V_1)$, $\nu \in \mu(\delta\beta(F_2(o)) \mid \{0\})$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$

$$\gamma^*(\beta_*(f \otimes \mu) \otimes \nu) = (\gamma_\beta)_*(\beta_\gamma^*(f \otimes \nu) \otimes \mu); \quad (100)$$

2) для любого $G \in \mathcal{S}'_{\beta(F_2(o)) \cap Y}(D)$

$$\beta^*(\gamma_*(G \otimes \nu) \otimes \mu) = (\beta_\gamma)_*(\gamma_\beta^*(G \otimes \mu) \otimes \nu). \quad (101)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Формулировка предложения 21 корректна (по отношению к определениям морфизмов прямого и обратного образа), так как $\alpha = \beta_\gamma \circ \gamma_\alpha$, $\beta_\delta = \delta \circ \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 21. Докажем сначала (100). Пусть элемент $j_0 \in I_2$ такой, что $F_2(j_0) \cap V_1 = V_1$ (этот элемент можно выбрать, так как E_1 – c -объект). Пусть элемент $i_0 \in I_2$ такой, что $\beta\delta(F_2(i_0)) = \{0\}$ (его можно выбрать, так как B – d -объект). Рассмотрим произвольные элементы $j \geq i \in I_2$ такие, что выполнено $j \geq j_0$, $i \leq i_0$. Тогда формула замены базы на объектах из категории C_1^{ar} выполнена для отображений β_{ji} , γ_{ji} , $(\gamma_\beta)_{ji}$, $(\beta_\gamma)_{ji}$ из декартова квадрата диаграммы (99). (Мы должны использовать аналог формулы (27) для объектов категории C_1^{ar} ; см. замечание 8.) Умножим полученную формулу на соответствующие пространства мер и затем возьмем проективный предел по всем элементам $j \geq i \in I_2$, $j \geq j_0$, $i \leq i_0$. Используя конструкции отображений β_* и γ^* (прямого и обратного образа) из предложений 17, 18, получим формулу замены базы (100).

Формула (101) двойственна к (100) и может быть получена аналогичными рассуждениями, использованными при доказательстве формулы (100), но при этом необходимо брать индуктивный предел по элементам $j, i \in I_2$ и использовать аналог формулы (28) вместо аналога формулы (27) (см. замечание 8). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. В обозначениях диаграммы (98) пусть E_1 – cf -объект, B – df -объект. Пусть $o \in I_2$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in \mathcal{S}_{\beta(F_2(o)) \cap Y}(D)$

$$\beta^*\gamma_*(f) = (\beta_\gamma)_*\gamma_\beta^*(f); \quad (102)$$

2) для любого $G \in \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2)$

$$\gamma^*\beta_*(G) = (\gamma_\beta)_*\beta_\gamma^*(G). \quad (103)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (102). Рассмотрим произвольные элементы $j \geq i \in I_2$. Тогда формула замены базы на объектах из категории C_1^{ar} выполнена для отображений β_{ji} , γ_{ji} , $(\gamma_\beta)_{ji}$, $(\beta_\gamma)_{ji}$ из декартова квадрата диаграммы (99). (Мы должны использовать аналог формулы (33) для объектов категории C_1^{ar} ; см. замечание 8.) Возьмем проективный предел по таким элементам $j \geq i \in I_2$. Используя конструкции отображений β^* и γ_* (обратного и прямого образа) из предложений 19, 20, получаем формулу замены базы (102).

Формула (103) может быть получена аналогичными рассуждениями, однако необходимо брать индуктивный предел по элементам $i, j \in I_2$ и использовать аналог формулы (34) вместо аналога формулы (33) (см. замечание 8). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. В обозначениях диаграммы (98) пусть E_1 – c -объект, B – df -объект. Пусть $o \in I_2$, $\mu \in \mu(F_2(o) \cap V_1 \mid V_1)$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любых $f \in \mathcal{S}_{F_2(o) \cap X}(X')$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\beta_*((\beta_\gamma)_*(f) \otimes \mu) = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(f \otimes \mu); \quad (104)$$

2) для любых $G \in \mathcal{S}'_{\beta(F_2(o))}(E_3)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\gamma_\beta^*(\gamma^*(G) \otimes \mu) = \beta_\gamma^* \beta^*(G \otimes \mu). \quad (105)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам предложений 21, 22 и может быть сведено к соответствующему аналогу формулы (31) для объектов категории C_1^{ar} (чтобы доказать формулу (104)) и к соответствующему аналогу формулы (32) для объектов категории C_1^{ar} (чтобы доказать формулу (105)); см. замечание 8. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. В обозначениях диаграммы (98) пусть E_1 – cf -объект, B – d -объект. Пусть $o \in I_2$, $\nu \in \mu(\delta\beta(F_2(o)) \mid \{0\})$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in \mathcal{S}_{\beta(F_2(o))}(E_3)$

$$\gamma_\beta^* \gamma^*(f \otimes \nu) = \beta_\gamma^*(\beta^*(f) \otimes \nu); \quad (106)$$

2) для любого $G \in \mathcal{S}'_{F_2(o) \cap X}(X')$

$$\beta_*((\beta_\gamma)_*(G \otimes \nu) = \gamma_*((\gamma_\beta)_*(G) \otimes \nu). \quad (107)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам предложений 21, 22 и сводится к соответствующему аналогу формулы (29) для объектов категории C_1^{ar} (чтобы доказать формулу (106)) и к соответствующему аналогу формулы (30) для объектов категории C_1^{ar} (чтобы доказать формулу (107)); см. замечание 8. Предложение доказано.

11.2. Правила композиции отображений. Рассмотрим снова диаграмму (98). Если E_1 и D – c -объекты, то $E_2 \times_{E_3} D$ – тоже c -объект. В самом деле, это следует из допустимой тройки в категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma_\alpha} E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\gamma_\beta} D \longrightarrow 0. \quad (108)$$

Пусть $o \in I_2$. Тогда из (108) получаем канонический изоморфизм

$$\mu(F_2(o) \cap X \mid X) = \mu(F_2(o) \cap V_1 \mid V_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\beta(F_2(o)) \cap Y \mid Y). \quad (109)$$

(Подпространства, которые появляются в формуле (109), являются элементами фильтрации соответствующих объектов из категории C_2^{ar} . Поэтому пространства виртуальных мер корректно определены; см. § 6.)

Получаем из диаграммы (98) следующую допустимую тройку из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\beta_\gamma} E_2 \xrightarrow{\delta\beta} B \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. В обозначениях диаграммы (98) пусть E_1 и D – c -объекты. Пусть $o \in I_2$, $\mu \in \mu(F_2(o) \cap V_1 | V_1)$, $\nu \in \mu(\beta(F_2(o)) \cap Y | Y)$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$

$$(\delta\beta)_*(f \otimes (\mu \otimes \nu)) = \delta_*(\beta_*(f \otimes \mu) \otimes \nu); \quad (110)$$

2) для любого $G \in \mathcal{S}'_{\delta\beta(F_2(o))}(B)$

$$(\delta\beta)^*(G \otimes (\mu \otimes \nu)) = \beta^*(\delta^*(G \otimes \nu) \otimes \mu). \quad (111)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Согласно (109) имеем $\mu \otimes \nu \in \mu(F_2(o) \cap X | X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 25. Пусть элемент $j_0 \in I_2$ такой, что $F_2(j_0) \cap V_1 = V_1$ и $\beta(F_2(j_0)) \cap Y = Y$. Мы рассмотрим произвольные элементы $j \geq i \in I_2$ такие, что $j \geq j_0$. Тогда аналог формулы (35) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8) выполнен для отображений β_{ji} , δ_{ji} и $(\beta_\delta)_{ji} = \delta_{ji}\beta_{ji}$ (см. диаграмму (99)). Умножим полученную формулу на соответствующие пространства мер и затем возьмем предел по элементам $j \geq i \in I_2$, $j \geq j_0$. Используя явную конструкцию морфизма прямого образа из предложения 17, получаем формулу (110).

Формула (111) может быть получена при аналогичных рассуждениях, однако необходимо использовать аналог формулы (36) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8). Предложение доказано.

В обозначениях диаграммы (98) предположим, что E_1 и D – cf -объекты. Тогда из допустимой тройки (108) в категории C_2^{ar} следует, что $E_2 \times_{E_3} D$ – также cf -объект.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. В обозначениях диаграммы (98) пусть E_1 и D – cf -объекты. Пусть $o \in I_2$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in \mathcal{S}_{\delta\beta(F_2(o))}(B)$

$$(\delta\beta)^*(f) = \beta^*\delta^*(f); \quad (112)$$

2) для любого $G \in \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2)$

$$(\delta\beta)_*(G) = \delta_*\beta_*(G). \quad (113)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольные элементы $j \geq i \in I_2$. Тогда аналог формулы (37) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8) выполнен для отображений β_{ji} , δ_{ji} и $(\beta_\delta)_{ji} = \delta_{ji}\beta_{ji}$ (см. диаграмму (99)). Умножим эту формулу на соответствующие пространства мер и затем возьмем предел по элементам $j \geq i \in I_2$. Используя явную конструкцию морфизма обратного образа из предложения 19, получим формулу (112).

Формула (113) может быть получена при аналогичных рассуждениях, однако необходимо использовать аналог формулы (38) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8). Предложение доказано.

Видоизменяя (и переобозначая) диаграмму (98), получим следующую коммутативную диаграмму морфизмов между объектами из категории C_2^{ar} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta_{\alpha'} \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha' \alpha} & H' & \xrightarrow{\alpha'_{\beta}} & E_3 \coprod_{E_2} H' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \theta \downarrow & & \downarrow \theta' \\
 & & & & L' & \equiv & L' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (114)$$

В диаграмме (114) две горизонтальные и две вертикальные тройки являются допустимыми тройками из категории C_2^{ar} .

Пусть $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, $H' = (J', T', W')$ – объекты из категории C_2^{ar} . Из допустимой тройки

$$0 \longrightarrow E_3 \xrightarrow{\beta_{\alpha'}} E_3 \coprod_{E_2} H' \xrightarrow{\theta'} L' \longrightarrow 0 \quad (115)$$

в категории C_2^{ar} получаем, что если E_3 и L' – d -объекты, то $E_3 \coprod_{E_2} H'$ – также d -объект.

Пусть $o \in J'$ – любой элемент; тогда из (115) канонически имеем

$$\mu(\alpha'_{\beta}(T'(o)) | \{0\}) = \mu(\beta(T'(o) \cap V_2) | \{0\}) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\theta(T'(o)) | \{0\}). \quad (116)$$

(Подпространства, которые появляются в формуле (116), являются элементами фильтрации соответствующих объектов из категории C_2^{ar} , поэтому пространства виртуальных мер корректно определены; см. § 6.)

Из диаграммы (114) имеем допустимую тройку из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha' \alpha} H' \xrightarrow{\alpha'_{\beta}} E_3 \coprod_{E_2} H' \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. В обозначениях диаграммы (114) пусть E_3 и L' – d -объекты. Пусть $o \in J'$, $\mu \in \mu(\beta(T'(o) \cap V_2) | \{0\})$, $\nu \in \mu(\theta(T'(o)) | \{0\})$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in \mathcal{S}_{T'(o)}(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(f \otimes (\mu \otimes \nu)) = \alpha^*((\alpha')^*(f \otimes \nu) \otimes \mu); \quad (117)$$

2) для любого $G \in \mathcal{S}'_{T'(o) \cap V_1}(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(G \otimes (\mu \otimes \nu)) = (\alpha')_*(\alpha_*(G \otimes \mu) \otimes \nu). \quad (118)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Согласно (116) имеем, что $\mu \otimes \nu \in \mu(\alpha'_\beta(T'(o)) | \{0\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 27. Формула (117) может быть сведена к аналогу формулы (40) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8) после взятия проективного предела по элементам $j \geq i \in J'$ таким, что выполнено $i \leq i_0$, и элемент i_0 выбран так, что $\theta(T'(i_0)) = \{0\}$ и $\beta(T'(i_0) \cap V_2) = \{0\}$. При этом мы используем явную конструкцию морфизма обратного образа из предложения 18 (ср. с доказательством предложения 26).

Формула (118) может быть доказана аналогично, однако необходимо использовать аналог формулы (41) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8) и взять индуктивный предел. Предложение доказано.

В обозначениях диаграммы (114) предположим, что E_3 и L' – df -объекты. Тогда из допустимой тройки (115) из категории C_2^{ar} следует, что $E_3 \coprod_{E_2} H'$ – тоже df -объект.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. В обозначениях диаграммы (114) пусть E_3 и L' – df -объекты. Пусть $o \in J'$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1) для любого $f \in S_{T'(o) \cap V_1}(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(f) = (\alpha')_* \alpha_*(f); \quad (119)$$

2) для любого $G \in S'_{T'(o)}(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(G) = \alpha^*(\alpha')^*(G). \quad (120)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (119) может быть сведена к аналогу формулы (42) для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8) после выбора элементов $j \geq i \in J'$ и взятия проективного предела по элементам $j \geq i \in J'$. При этом мы используем явную конструкцию морфизма прямого образа из предложения 20.

Доказательство формулы (120) аналогично, однако необходимо брать индуктивный предел по элементам $j \geq i \in J'$ и использовать аналог формулы (43) вместо аналога формулы (42) (см. замечание 8). Предложение доказано.

§ 12. Преобразование Фурье и прямые и обратные образы

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка из категории C_2^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Предположим, что E_i , $1 \leq i \leq 3$, – полный объект из категории C_2^{ar} . Тогда верно $\check{E}_i = E_i$, $1 \leq i \leq 3$.

По определению имеются сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

Рассмотрим следующую допустимую тройку из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

Имеем $\check{E}_i = (I_i^0, F_i^0, \check{V}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Напомним, что частично упорядоченное множество I_i^0 , $1 \leq i \leq 3$, совпадает с I_i как множество, но имеет обратный частичный порядок по сравнению с I_i , $1 \leq i \leq 3$. Получаем, что для любого элемента $l \in I_2$

$$\check{\alpha}(F_2^0(l)) = F_1^0(\varepsilon(l)), \quad F_2^0(l) \cap \check{V}_3 = F_3^0(\gamma(l)). \quad (121)$$

Для любых элементов $i, j \in I_2$ имеем из формулы (77), что верно

$$\begin{aligned} \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) &= \mu(F_1^0(\varepsilon(i)) | F_1^0(\varepsilon(j))), \\ \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))) &= \mu(F_3^0(\gamma(i)) | F_3^0(\gamma(j))). \end{aligned} \quad (122)$$

Получаем следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. Пусть $o \in I_2$. Тогда:

1) если E_1 – c -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \\ \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1^0(\varepsilon(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{D}_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) \end{array}$$

коммутативна;

2) если E_3 – d -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \\ \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3^0(\gamma(o)) | \check{V}_3) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{S}_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) \end{array}$$

коммутативна;

3) если E_1 – c -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}'_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1^0(\varepsilon(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{S}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

коммутативна;

4) если E_3 – d -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \otimes \text{Id}_{\mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}'_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3^0(\gamma(o)) | \check{V}_3) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{S}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

коммутативна;

5) если E_1 – cf -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{F_3(\gamma(o))}(E_3) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{S}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

коммутативна;

6) если E_3 – df -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{S}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

коммутативна;

7) если E_1 – cf -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{S}'_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) \end{array}$$

коммутативна;

8) если E_3 – df -объект, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{S}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{S}'_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) \end{array}$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формул (121) и (122), конструкций двумерных прямых и обратных образов из § 10, конструкции двумерного преобразования Фурье из § 8 и соответствующих аналогов предложений 10, 11 для объектов категории C_1^{ar} (см. замечание 8), которые связывают морфизмы прямых и обратных образов с преобразованием Фурье на объектах категории C_1^{ar} . Предложение доказано.

§ 13. Двумерные формулы Пуассона

13.1. Формула Пуассона I. Пусть $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$ – допустимая тройка из категории C_2^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Предположим, что E_i , $1 \leq i \leq 3$, – полный объект из категории C_2^{ar} . По определению имеются сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

Пусть $o \in I_2$. Если мы предположим, что E_1 — c -объект, то из любого $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)$ канонически построим $\mathbf{1}_\mu \in \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$ следующим способом. По определению имеем

$$\mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) = \varinjlim_{k \in I_1} \mathcal{S}'(V_1/F_1(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | k) \quad (123)$$

и $\mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \subset \mathcal{S}'(V_1/F_1(\varepsilon(o)))$. Поэтому $\mu \in \mathcal{S}'(V_1/F_1(\varepsilon(o)))$. В формуле (123) положим $k = \varepsilon(o)$. Тогда $\mu(F_1(\varepsilon(o)) | k) = \mathbb{C}$, и мы возьмем $1 \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | \varepsilon(o))$. Поэтому μ задает $\mathbf{1}_\mu \in \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$ по формуле (123).

Пусть $o \in I_2$. Если мы предположим, что E_3 — d -объект, то из любого $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$ канонически построим $\delta_\nu \in \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$ следующим способом. По определению имеем

$$\mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) = \varinjlim_{k \in I_2} \mathcal{S}'(F_3(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}). \quad (124)$$

В формуле (124) положим $k = \gamma(o)$. Возьмем $\delta \in \mathcal{S}'(F_3(\gamma(o)))$ согласно формуле (124), где $\langle \delta, f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$, $f \in \mathcal{S}(F_3(\gamma(o)))$, по отношению к спариванию (58). (Элемент δ может быть также определен как проективный предел дельта-функций Дирака по формуле (57).) Положим также $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$ в формуле (124). Таким образом, мы построили $\delta_\nu \in \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$.

Заметим, что выполнены формулы

$$\mathbf{F}(\mathbf{1}_\mu) = \delta_\mu, \quad \mathbf{F}(\delta_\nu) = \mathbf{1}_\nu \quad (125)$$

при отображениях

$$\mathbf{F}: \mathcal{S}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \rightarrow \mathcal{S}'_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1), \quad \mathbf{F}: \mathcal{S}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \rightarrow \mathcal{S}'_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3).$$

Мы использовали то, что верны равенства

$$\mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) = \mu(F_1^0(\varepsilon(o)) | \{0\}), \quad \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) = \mu(F_3^0(\gamma(o)) | \check{V}_3).$$

Теперь предположим, что одновременно E_1 — c -объект и E_3 — d -объект. Пусть $o \in I_2$. Тогда по любым элементам $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)$, $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$ корректно определяется *характеристическая функция*

$$\delta_{E_1, \mu \otimes \nu} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_*(\mathbf{1}_\mu \otimes \nu) \in \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2). \quad (126)$$

Получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Выполнено равенство $\delta_{E_1, \mu \otimes \nu} = \beta^*(\delta_\nu \otimes \mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конструкций и соответствующих утверждений для допустимой тройки

$$0 \longrightarrow \frac{V_1}{F_1(\varepsilon(k_2))} \longrightarrow \frac{F_2(k_1)}{F_2(k_2)} \longrightarrow F_3(\gamma(k_1)) \longrightarrow 0$$

из категории C_1^{ar} , где $k_1 \geq o \geq k_2 \in I_2$ и $F_1(\varepsilon(k_1)) = V_1$, $F_3(\gamma(k_2)) = \{0\}$. Лемма доказана.

Теперь имеем следующую первую двумерную формулу Пуассона.

ТЕОРЕМА 1 (формула Пуассона I). Пусть E_1 – c -объект и E_3 – d -объект. Пусть $o \in I_2$. Тогда для любых $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)$, $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$ выполнено

$$\mathbf{F}(\delta_{E_1, \mu \otimes \nu}) = \delta_{\tilde{E}_3, \nu \otimes \mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 5, формул (125) и предложения 29 о связи морфизмов прямых и обратных образов с двумерным преобразованием Фурье. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $E = (I, F, V) \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$. Скажем, что элемент $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$ удовлетворяет условию (*), если и только если выполнены следующие два условия:

- 1) $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)'$ (см. определение 20);
- 2) если элементы $i \geq j \in I$ любые, $g(F(i)) = F(p)$, $g(F(j)) = F(q)$ для некоторых элементов $p \geq q \in I$ и $E_{j,i} = (I_{j,i}, F_{j,i}, F(i)/F(j))$, $E_{q,p} = (I_{q,p}, F_{q,p}, F(p)/F(q))$ – соответствующие объекты категории C_1^{ar} , построенные из E , то для любого $l \in I_{i,j}$ имеется $r_l \in I_{q,p}$ такое, что $gF_{j,i}(l) = F_{q,p}(r_l)$, и для $l_1 \leq l_2 \in I_{j,i}$ верно $r_{l_1} \leq r_{l_2} \in I_{q,p}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Нетрудно видеть, что подгруппы группы $\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E)$ для $E \in \text{Ob}(C_2^{\text{ar}})$, которые были рассмотрены в замечании 16, состоят из элементов, удовлетворяющих условию (*).

Рассмотрим любую допустимую тройку полных объектов из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0,$$

где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, и E_1 – c -объект, E_3 – d -объект. Пусть элемент $g \in \text{Aut}_{C_2}(E_2)$ удовлетворяет условию (*) (см. определение 21). Тогда имеем следующую допустимую тройку из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow gE_1 \xrightarrow{g(\alpha)} gE_2 \xrightarrow{g(\beta)} gE_3 \longrightarrow 0, \quad (127)$$

где $gE_2 = E_2$, $gE_3 = E_2/gE_1$.

Из (127) канонически имеем следующую формулу:

$$\mu(F_2(o) | gF_2(o)) = \mu(F_2(o) \cap gV_1 | gF_1(\varepsilon(o))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(g(\beta)(F_2(o)) | gF_3(\gamma(o))).$$

Тогда для любого $a \in \mu(F_2(0) | gF_2(0))$ рассмотрим $a = b \otimes c$, где

$$b \in \mu(F_2(o) \cap gV_1 | gF_1(\varepsilon(o))), \quad c \in \mu(g(\beta)(F_2(o)) | gF_3(\gamma(o))).$$

При условиях и обозначениях из теоремы 1 получаем

$$g\mu \in \mu(gF_1(\varepsilon(o)) | gV_1), \quad g\nu \in \mu(gF_3(\gamma(o)) | \{0\}).$$

Имеем $\tilde{g} = (g, a) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2)}'_{F_2(o)}$. Тогда верно

$$R'_{\tilde{g}}(\delta_{E_1, \mu \otimes \nu}) = \delta_{gE_1, (g\mu \otimes b) \otimes (g\nu \otimes c)} = \delta_{gE_1, g\mu \otimes g\nu \otimes a}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $(g, a) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2)}'_{F_2(o)}$, при этом элемент $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2)$ удовлетворяет условию $(*)$ из определения 21. Тогда выполнена формула

$$\mathbf{F}(\delta_{gE_1, g\mu \otimes g\nu \otimes a}) = \delta_{\check{g}^{-1}(\check{E}_3), \check{g}^{-1}(\nu) \otimes \check{g}^{-1}(\mu) \otimes a}.$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 в силу рассуждений из п. 9.5. Следствие доказано.

13.2. Формула Пуассона II. Пусть $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$ – допустимая тройка из категории C_2^{ar} , где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Предположим, что E_i , $1 \leq i \leq 3$, – полный объект из категории C_2^{ar} . По определению имеются сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \longrightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \longrightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

Если E_1 – cf -объект, то, используя замечание 13, получаем

$$\mathcal{S}(E_1) = \varprojlim_{i \geq j \in I_1} \mathcal{S}(F_1(i)/F_1(j)).$$

Имеем, что $F_1(i)/F_1(j)$ – компактный объект из категории C_1^{ar} (для любых элементов $i \geq j \in I_1$). Поэтому верно, что $1 \in \mathcal{S}(F_1(i)/F_1(j))$. Переходя к проективному пределу, получим, что в этом случае элемент

$$1 \in \mathcal{S}(E_1) \tag{128}$$

корректно определен.

Если E_3 – df -объект, то, используя замечание 13, получим

$$\mathcal{S}(E_3) = \varprojlim_{i \geq j \in I_3} \mathcal{S}(F_3(i)/F_3(j)).$$

Имеем, что $F_3(i)/F_3(j)$ – дискретный объект из категории C_1^{ar} (для любых элементов $i \geq j \in I_3$). Поэтому $\delta_0 \in \mathcal{S}(F_3(i)/F_3(j))$, где $\delta_0(0) = 1$ и $\delta_0(x) = 0$ для $x \neq 0$ (здесь x принадлежит подлежащей абелевой группе объекта $F_3(i)/F_3(j)$ из категории C_1^{ar}). Переходя к проективному пределу, получим в этом случае корректно определенный элемент

$$\delta_0 \in \mathcal{S}(E_3). \tag{129}$$

Заметим, что выполнены формулы

$$\mathbf{F}(1) = \delta_0, \quad \mathbf{F}(\delta_0) = 1 \tag{130}$$

при отображениях

$$\mathbf{F}: \mathcal{S}(E_1) \rightarrow \mathcal{S}(\check{E}_1), \quad \mathbf{F}: \mathcal{S}(E_3) \rightarrow \mathcal{S}(\check{E}_3).$$

Теперь предположим, что одновременно E_1 – cf -объект и E_3 – df -объект. Пусть $o \in I_2$. Тогда элемент

$$\delta_{E_1} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_*(1) \in \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2) \tag{131}$$

корректно определен.

Получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Выполнено равенство $\delta_{E_1} = \beta^*(\delta_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конструкций и соответствующих утверждений для допустимых троек

$$0 \longrightarrow \frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))} \longrightarrow \frac{F_2(i)}{F_2(j)} \longrightarrow \frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))} \longrightarrow 0$$

из категории C_1^{ar} (для любых элементов $i \geq j \in I_2$), где $\frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))}$ – компактный объект из категории C_1^{ar} и $\frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))}$ – дискретный объект из категории C_1^{ar} . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2 (формула Пуассона II). *Пусть E_1 – cf-объект и E_3 – df-объект. Пусть $o \in I_2$. Тогда выполнена следующая формула:*

$$\mathbf{F}(\delta_{E_1}) = \delta_{\check{E}_3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 6, формул (130) и предложения 29 о морфизмах прямых и обратных образов и двумерном преобразовании Фурье. Теорема доказана.

Рассмотрим любую допустимую тройку полных объектов из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0,$$

где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, и E_1 – cf-объект, E_3 – df-объект. Пусть элемент $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2)$ удовлетворяет условию $(*)$ из определения 21. Тогда получаем следующую допустимую тройку из категории C_2^{ar} :

$$0 \longrightarrow gE_1 \xrightarrow{g(\alpha)} gE_2 \xrightarrow{g(\beta)} gE_3 \longrightarrow 0, \quad (132)$$

где $gE_2 = E_2$, $gE_3 = E_2/gE_1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть элемент $g \in \text{Aut}_{C_2^{\text{ar}}}(E_2)$ удовлетворяет условию $(*)$ из определения 21. Тогда выполнена следующая формула:*

$$\mathbf{F}(\delta_{gE_1}) = \delta_{\check{g}^{-1}(\check{E}_3)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2 и рассуждений, использованных в п. 9.5. Следствие доказано.

§ 14. Пример

В этом параграфе мы вычислим некоторые факторгруппы групп аделей $\mathbb{A}_X$ двумерной схемы X .

14.1. Некоторые факторгруппы групп аделей алгебраической поверхности. Напомним, что в примере 4 мы вычислили группу $\mathbb{A}_K/K$ для числового поля K .

Пусть D – неприводимая проективная кривая над полем k . Пусть $p \in D$ – гладкая k -рациональная точка. Тогда при помощи аналогичных рассуждений, как в примере 4, получаем следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \prod_{q \in D, q \neq p} \hat{\mathcal{O}}_q \longrightarrow \mathbb{A}_D/k(D) \longrightarrow K_p/A_p \longrightarrow 0, \quad (133)$$

где $k(D)$ – поле рациональных функций на кривой D , $\hat{\mathcal{O}}_q$ – пополнение локального кольца $\mathcal{O}_q$ точки $q \in D$ по максимальному идеалу m_q , $K_p = k(D)_p$ – поле частных кольца $\hat{\mathcal{O}}_p$ в случае гладкой точки p (в общем случае K_p – локализация кольца $\hat{\mathcal{O}}_p$ вдоль мультипликативной системы $\mathcal{O}_p \setminus 0$), A_p – кольцо регулярных функций на аффинной кривой $D \setminus p$. Заметим, что $K_p \simeq k((t))$. Если k – конечное поле, то все члены последовательности (133) имеют структуру компактных объектов из категории C_1^{ar} , так что эта последовательность – допустимая тройка из категории C_1^{ar} .

Отметим, что кольцо аделей $\mathbb{A}_D$ и поле рациональных функций $k(D)$ – это группы, которые появляются в адельном комплексе кривой D . В самом деле, для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на кривой D существует следующий адельный комплекс (см. [10, § 3.1], [7]–[9]):

$$\mathbb{A}_{D,0}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{D,1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_{D,01}(\mathcal{F}),$$

группы когомологий которого совпадают с группами когомологий $H^*(D, \mathcal{F})$. Для пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_D$ имеем

$$\mathbb{A}_{D,0}(\mathcal{O}_D) = k(D), \quad \mathbb{A}_{D,1}(\mathcal{O}_D) = \prod_{q \in D} \hat{\mathcal{O}}_q, \quad \mathbb{A}_{D,01}(\mathcal{O}_D) = \mathbb{A}_D = \prod'_{q \in D} K_q,$$

где $\prod'$ обозначает ограниченное (адельное) произведение. Таким образом, мы получили, что верно

$$\mathbb{A}_D/k(D) = \mathbb{A}_{D,01}(\mathcal{O}_D)/\mathbb{A}_{D,0}(\mathcal{O}_D). \quad (134)$$

Теперь пусть X – двумерная схема. Для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует следующий адельный комплекс (см. [9], [10, § 3.3]):

$$\mathbb{A}_{X,0}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{X,2}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) \oplus \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{A}_{X,012}(\mathcal{F}), \quad (135)$$

группы когомологий которого совпадают с группами когомологий $H^*(X, \mathcal{F})$.

Пусть X – гладкая неприводимая поверхность над полем k и C – дивизор на X . Для пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(C)$ определим компоненты адельного комплекса (135) как подгруппы группы $\prod_{x \in D} K_{x,D}$, где произведение взято по всем парам, составленным из неприводимых кривых D на X и точек x на D . Для каждой такой пары x, D , $x \in D$, кольцо $K_{x,D}$ – это конечное произведение двумерных локальных полей, так что если x – гладкая точка кривой D , то кольцо $K_{x,D} = k(x)((u))((t))$ – двумерное локальное поле (см. [10, § 2.2, § 3.3]). Теперь определим

$$\mathbb{A}_{X,012}(\mathcal{O}_X(C)) = \mathbb{A}_X = \prod'_{x \in D} K_{x,D},$$

где адельное произведение $\prod' f_{x,D}$ задается внутри обычного произведения $\prod f_{x,D}$ при помощи следующих двух условий:

1) для фиксированной неприводимой кривой $D \subset X$ и локального уравнения $t_D = 0$ кривой D на некотором открытом аффинном подмножестве $U \subset X$ выполнено $\{f_{x,D}\} \in \mathbb{A}_D((t_D))$;

2) для всех, кроме конечного числа неприводимых кривых $D \subset X$, выполнено $\{f_{x,D}\} \in \mathbb{A}_D[[t_D]]$.

Пусть $\hat{\mathcal{O}}_D$ – пополнение локального кольца неприводимой кривой $D \subset X$, K_D – его поле частных, $\hat{\mathcal{O}}_x$ – пополнение локального кольца точки $x \in X$, $K_x = \hat{\mathcal{O}}_x \cdot k(X)$ внутри поля частных кольца $\hat{\mathcal{O}}_x$, $\hat{\mathcal{O}}_{x,D}$ – произведение колец дискретного нормирования двумерных локальных полей, которые принадлежат кольцу $K_{x,D}$.

Имеем следующие группы, которые диагонально вложены в группу $\mathbb{A}_X$:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{X,0}(\mathcal{O}_X(C)) &= k(X), & \mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{O}_X(C)) &= \prod_{D \subset X} \hat{\mathcal{O}}_D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(C), \\ \mathbb{A}_{X,2}(\mathcal{O}_X(C)) &= \prod_{x \in X} \hat{\mathcal{O}}_x \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(C), \\ \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{O}_X(C)) &= \prod'_{D \subset X} K_D := \left(\prod_{D \subset X} K_D \right) \cap \mathbb{A}_X, \\ \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{O}_X(C)) &= \prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(C) := \left(\prod_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(C) \right) \cap \mathbb{A}_X.\end{aligned}$$

Далее мы не будем указывать пучок в адельных обозначениях, если этот пучок является структурным пучком $\mathcal{O}_X$. В этом случае будем использовать простые обозначения: $\mathbb{A}_X = \mathbb{A}_{X,012}$, $\mathbb{A}_{X,0}$, $\mathbb{A}_{X,1}$, $\mathbb{A}_{X,2}$, $\mathbb{A}_{X,01}$, $\mathbb{A}_{X,02}$, $\mathbb{A}_{X,12}$.

Аналогом формулы (134) для случая проективной алгебраической поверхности X является выражение

$$\frac{\mathbb{A}_X}{\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}} = \frac{\mathbb{A}_{X,012}(\mathcal{O}_X)}{\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{O}_X) + \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{O}_X)}. \quad (136)$$

Мы получим для выражения (136) точную последовательность, которая будет аналогична точной последовательности (133), а также в некоторых случаях последовательностям из примера 4 для арифметических поверхностей.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – проективная гладкая неприводимая алгебраическая поверхность над полем k . Пусть C_i , $1 \leq i \leq k$, – неприводимые кривые на X . Предположим, что $C = \bigcup_{1 \leq i \leq k} C_i$ – обильный дивизор на X . Тогда существует точная последовательность

$$\begin{aligned}0 \rightarrow \frac{\prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}}{\prod_{D \subset X, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_D + \prod_{x \in X, x \notin C} \hat{\mathcal{O}}_x} &\rightarrow \frac{\mathbb{A}_X}{\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}} \\ &\rightarrow \frac{\prod_{1 \leq i \leq k} \prod'_{x \in C_i} K_{x,C_i}}{\prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i} + \prod'_{x \in C} B_x} \rightarrow 0,\end{aligned} \quad (137)$$

где B_x – подкольцо кольца K_x :

$$B_x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{D \subset X, D \not\subset C} (K_x \cap \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}).$$

(Пересечение $K_x \cap \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}$ взято в кольце $K_{x,D}$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Теорема 3 возникает из развития конструкций, введенных в [4], [18].

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Можно переписать первый член последовательности (137) следующим образом:

$$\frac{\prod'_{x \in D, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}}{\prod_{D \subset X, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{O}}_D + \prod_{x \in X, x \notin C} \widehat{\mathcal{O}}_x} = \frac{\prod_{D \subset X, D \not\subset C} \left(\frac{\prod'_{x \in D} \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}}{\widehat{\mathcal{O}}_D} \right)}{\prod_{x \in X, x \notin C} \widehat{\mathcal{O}}_x}. \quad (138)$$

Для фиксированной неприводимой кривой $D \subset X$ такой, что $D \not\subset C$, имеем

$$\prod'_{x \in D} \widehat{\mathcal{O}}_{x,D} = \mathbb{A}_D[[t_D]], \quad \widehat{\mathcal{O}}_D = k(D)[[t_D]].$$

Отсюда получаем

$$\frac{\prod'_{x \in D} \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}}{\widehat{\mathcal{O}}_D} = (\mathbb{A}_D/k(D))[[t]]. \quad (139)$$

Предположим, что k – конечное поле. Тогда из точной последовательности (133) получаем, что на группе $\mathbb{A}_D/k(D)$ имеется структура компактного объекта из категории C_1^{ar} . Более точно, этот объект есть объект из категории C_1^{fin} . Поэтому на группе $(\mathbb{A}_D/k(D))[[t]]$ имеется также структура компактного объекта из категории C_1^{fin} . (Мы должны использовать такую структуру объекта категории C_1^{fin} , которая подобна топологии Тихонова на бесконечном произведении компактных топологических пространств.) Для точки $x \in X$ группа $\widehat{\mathcal{O}}_x$ является проконечной группой, поэтому она также имеет структуру компактного объекта из категории C_1^{fin} . Отсюда мы получаем, что группа, задаваемая выражением (138), имеет также структуру компактного объекта из категории C_1^{fin} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Определим открытое подмножество $U = X \setminus C$. По условию теоремы дивизор C на поверхности X является обильным дивизором. Поэтому для квазикогерентного пучка $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(nC)$ получаем, что верно

$$H^1(X, \mathcal{F}) = 0, \quad H^2(X, \mathcal{F}) = 0,$$

так как $H^i(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H^i(X, \mathcal{O}_X(nC))$, и

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(nC)) = 0,$$

если $i > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ достаточно большое. По определению (см. [7]–[10]) группы аделей квазикогерентных пучков коммутируют с индуктивными пределами.

Отсюда имеем, что внутри группы $\mathbb{A}_{X,012}(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,012} = \mathbb{A}_X$ выполнены следующие свойства:

$$\mathbb{A}_{X,1}(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}), \quad \mathbb{A}_{X,2}(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}),$$

потому что по конструкции эти свойства выполнены для групп аделей пучков $\mathcal{O}_X(nC)$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ и адельного комплекса (135) получаем, что внутри группы $\mathbb{A}_X$ выполнено

$$\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}) = (\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{A}_{X,01}) + (\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap \mathbb{A}_{X,02}), \quad (140)$$

так как $\mathbb{A}_{X,01}(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,01}$ и $\mathbb{A}_{X,02}(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,02}$. По определению имеем

$$\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) = \prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \oplus \prod_{1 \leq i \leq k} \prod'_{x \in C_i} K_{x,C_i}, \quad (141)$$

$$\mathbb{A}_{X,01} = \prod'_{D \subset X, D \not\subset C} K_D \oplus \prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i}, \quad (142)$$

$$\mathbb{A}_{X,02} = \prod'_{x \in U} K_x \oplus \prod'_{x \in C} K_x. \quad (143)$$

Отсюда при помощи формулы (140) получаем

$$\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}) = \left(\prod_{D \subset X, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_D \oplus \prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i} \right) + \left(\prod_{x \in U} \hat{\mathcal{O}}_x \oplus \prod'_{x \in C} B_x \right). \quad (144)$$

Рассмотрим теперь естественное отображение

$$\phi: \prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \rightarrow \frac{\mathbb{A}_X}{\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}}. \quad (145)$$

По определению имеем

$$\text{Ker } \phi = \left(\prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \right) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}) \supset \prod_{D \subset X, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_D + \prod_{x \in U} \hat{\mathcal{O}}_x.$$

Из формулы (141) получаем, что $\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \supset \prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}$. Поэтому верно

$$\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}) \supset \text{Ker } \phi.$$

Отсюда по формуле (144) имеем

$$\text{Ker } \phi = \prod_{D \subset X, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_D + \prod_{x \in U} \hat{\mathcal{O}}_x, \quad (146)$$

так как $\prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \supset \text{Ker } \phi$ и элементы группы $\prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}$ имеют только нулевые проекции на любые подгруппы K_{x,C_i} , $x \in C_i$, $1 \leq i \leq k$, группы аделей $\mathbb{A}_X$, но любой ненулевой элемент из группы $\prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i}$ или группы $\prod'_{x \in C} B_x$ имеет ненулевую проекцию на некоторую подгруппу K_{x,C_i} , $x \in C_i$, $1 \leq i \leq k$, группы аделей $\mathbb{A}_X$.

Теперь из формул (145) и (146) следует точность в начале последовательности (137).

Из $H^2(X, \mathcal{F}) = 0$ и адельного комплекса (135) получаем

$$\mathbb{A}_X = \mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}. \quad (147)$$

Обозначим через $\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod'_{x \in D, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}$ подгруппу группы $\mathbb{A}_X$. Теперь формула (141) может быть переписана в следующем виде:

$$\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) = \mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) \oplus \prod_{1 \leq i \leq k} \prod'_{x \in C_i} K_{x,C_i}. \quad (148)$$

Из формулы (147) имеем очевидную точную последовательность

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02})}{\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F})} &\hookrightarrow \frac{\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F})}{\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F})} \\ &\twoheadrightarrow \frac{\mathbb{A}_X}{\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}}. \end{aligned} \quad (149)$$

Введем обозначение группы

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02})}{\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02})}$$

и рассмотрим отображение

$$\psi: G \rightarrow \frac{\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) + \mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02})}{\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F})}. \quad (150)$$

Ясно, что отображение ψ – изоморфизм.

Докажем следующий изоморфизм групп:

$$G \simeq \prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i} + \prod'_{x \in C} B_x. \quad (151)$$

По определению выполнено

$$\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F}) \cap (\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02}) \supset \prod_{D \subset X, D \not\subset C} \widehat{\mathcal{O}}_D + \prod_{x \in U} \widehat{\mathcal{O}}_x. \quad (152)$$

Из формулы (144) имеем естественное отображение

$$\xi: \prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i} + \prod'_{x \in C_i} B_x \longrightarrow G.$$

Из формул (144) и (152) получаем, что ξ – сюръективное отображение. Кроме того, ξ – инъективное отображение, так как образ отображения ξ не содержит подгруппу $\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F})$. Таким образом, отображение ξ – изоморфизм, и мы доказали формулу (151).

Из формулы (148) имеем

$$\frac{\mathbb{A}_{X,12}(\mathcal{F})}{\mathbb{A}_{X,12}^U(\mathcal{F})} \simeq \prod_{1 \leq i \leq k} \prod'_{x \in C_i} K_{x, C_i}.$$

Отсюда и из формул (149)–(151) получаем точность в середине и в конце последовательности (137). Теорема доказана.

14.2. Более точное вычисление. В этом пункте мы вычислим последний ненулевой член последовательности (137) более явно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – проективная гладкая неприводимая алгебраическая поверхность над полем k и C_i , $1 \leq i \leq k$, – неприводимые кривые на X . Пусть $C = \bigcup_{1 \leq i \leq k} C_i$ и $p = \bigcap_{1 \leq i \leq k} C_i$. Имеется следующий изоморфизм:

$$\frac{\prod_{1 \leq i \leq k} \prod'_{x \in C_i} K_{x, C_i}}{\prod_{1 \leq i \leq k} K_{C_i} + \prod'_{x \in C} B_x} \simeq \frac{\prod_{1 \leq i \leq k} K_{p, C_i}}{\prod_{1 \leq i \leq k} B_{C_i} + B_p},$$

где кольцо B_{C_i} , $1 \leq i \leq k$, – подкольцо поля K_{C_i} , определяемое формулой

$$B_{C_i} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{x \in C_i \setminus p} (K_{C_i} \cap B_x).$$

(Пересечение $K_{C_i} \cap B_x$ взято в кольце K_{x, C_i} .)

Перед доказательством теоремы 4 докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7. В условиях теоремы 4 для каждого $1 \leq i \leq k$ имеется следующий изоморфизм:

$$K_{C_i}/B_{C_i} \simeq \prod'_{x \in C_i \setminus p} K_{x, C_i}/B_x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $1 \leq i \leq k$. Имеем диагональное вложение $K_{C_i} \rightarrow \prod'_{x \in C_i \setminus p} K_{x, C_i}$, которое индуцирует отображение

$$\eta: K_{C_i}/B_{C_i} \rightarrow \prod'_{x \in C_i \setminus p} K_{x, C_i}/B_x.$$

Теперь инъективность отображения η следует из определения кольца B_{C_i} .

Докажем, что η – сюръективное отображение. Пусть J_{C_i} – пучок идеалов кривой C_i на поверхности X . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим схему

$$Y_n = (C_i \setminus p, \mathcal{O}_X/J_{C_i}^n|_{C_i \setminus p}),$$

которая есть некоторая инфинитезимальная окрестность аффинной кривой $C_i \setminus p$ в X . Для любых $l, m \in \mathbb{Z}$ таких, что $l < m$, рассмотрим когерентный пучок $J_{C_i}^l/J_{C_i}^m|_{C_i \setminus p}$ на схеме Y_{m-l} . Имеем $\dim Y_{m-l} = 1$ и $H^1(Y_{m-l}, J_{C_i}^l/J_{C_i}^m|_{C_i \setminus p}) = 0$ для любых $l < m \in \mathbb{Z}$, так как Y_{m-l} – аффинная схема. Поэтому адельный

комплекс (см. [7], [10]) задает следующую точную последовательность $\mathcal{K}_{l,m}$ для любых $l < m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Y_{m-l}, J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p}) &\rightarrow \mathbb{A}_{Y_{m-l},0}(J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p}) \oplus \mathbb{A}_{Y_{m-l},1}(J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p}) \\ &\rightarrow \mathbb{A}_{Y_{m-l},0,1}(J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для любого фиксированного $l \in \mathbb{Z}$ проективная система абелевых групп

$$(H^0(Y_{m-l}, J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p}), m > l)$$

удовлетворяет условию ML (условию Миттаг-Леффлера), потому что для любого $m > l$ отображение

$$H^0(Y_{m-l+1}, J_{C_i}^l / J_{C_i}^{m+1} |_{C_i \setminus p}) \rightarrow H^0(Y_{m-l}, J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p})$$

является сюръективным, что вытекает из следующей точной последовательности пучков на схеме Y_{m-l+1} :

$$0 \longrightarrow J_{C_i}^m / J_{C_i}^{m+1} |_{C_i \setminus p} \longrightarrow J_{C_i}^l / J_{C_i}^{m+1} |_{C_i \setminus p} \longrightarrow J_{C_i}^l / J_{C_i}^m |_{C_i \setminus p} \longrightarrow 0,$$

и $H^1(Y_{m-l+1}, J_{C_i}^m / J_{C_i}^{m+1} |_{C_i \setminus p}) = 0$, так как $J_{C_i}^m / J_{C_i}^{m+1}$ – когерентный пучок на аффинной схеме Y_{m-l+1} .

Теперь рассмотрим последовательность $\mathcal{K} := \varinjlim_{l \in \mathbb{Z}} \varprojlim_{m > l} \mathcal{K}_{l,m}$, которая является точной последовательностью, так как индуктивный предел сохраняет точность последовательностей, а проективный предел сохраняет точность благодаря условию ML, выполнимость которого мы доказали выше. Последовательность $\mathcal{K}$ имеет вид

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_{01} \longrightarrow 0, \quad (153)$$

где для подгрупп группы $\mathbb{A}_X$ выполнено

$$\mathbb{A}_0 = K_{C_i}, \quad \mathbb{A}_1 = \prod'_{x \in C_i \setminus p} B_x, \quad \mathbb{A}_{10} = \prod'_{x \in C_i \setminus p} K_{x, C_i}.$$

Теперь из точности последовательности (153) получаем, что η является сюръективным отображением. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $k = 1$, т. е. $C = C_1$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\prod'_{x \in C} K_{x,C}}{K_C + \prod'_{x \in C} B_x} &= \frac{\prod'_{x \in C \setminus p} K_{x,C} \oplus K_{p,C}}{K_C + \prod'_{x \in C \setminus p} B_x \oplus B_p} = \frac{\frac{\prod'_{x \in C \setminus p} K_{x,C}}{\prod'_{x \in C \setminus p} B_x} \oplus \frac{K_{p,C}}{B_p}}{K_C} \\ &= \frac{\frac{K_C}{B_C} \oplus \frac{K_{p,C}}{B_p}}{K_C} = \frac{\frac{K_C}{B_C} \oplus \frac{K_{p,C}}{B_p + B_C}}{\frac{K_C}{B_C}} = \frac{K_{p,C}}{B_C + B_p}, \end{aligned}$$

где третье равенство следует из леммы 7.

Если $k > 1$, то мы должны сделать аналогичное вычисление, применяя k раз лемму 7 для кривых C_i , $1 \leq i \leq k$. Например, сделаем это при $k = 2$. В данном случае получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\prod'_{x \in C_1} K_{x, C_1} \oplus \prod'_{x \in C_2} K_{x, C_2}}{K_{C_1} \oplus K_{C_2} + \prod'_{x \in C} B_x} \\ &= \frac{(\prod'_{x \in C_1 \setminus p} K_{x, C_1}) \oplus K_{p, C_1} \oplus (\prod'_{x \in C_2 \setminus p} K_{x, C_2}) \oplus K_{p, C_2}}{K_{C_1} \oplus K_{C_2} + (\prod'_{x \in C_1 \setminus p} B_x) \oplus B_p \oplus (\prod'_{x \in C_2 \setminus p} B_x)} = \frac{K_{p, C_1} \oplus K_{p, C_2}}{B_{C_1} \oplus B_{C_2} + B_p}, \end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено в силу леммы 7. Теорема доказана.

14.3. Случай арифметической поверхности. Пусть $X = C_1 \times_k C_2$ и $C = C_1 \cup C_2$, $p = C_1 \cap C_2$. Кривые C_1 и C_2 трансверсально пересекаются на X . Предположим, что C_1 и C_2 – проективные прямые над полем k с координатами t и u такими, что точка p задается локальными уравнениями $t = 0$, $u = 0$.

По определению имеются следующие кольца и поля:

$$\begin{aligned} k(C_1) &= k(t), & k(C_2) &= k(u), \\ K_{p, C_1} &= k((t))((u)), & K_{p, C_2} &= k((u))((t)), \\ B_{C_1} &= k[t^{-1}]((u)), & B_{C_2} &= k[u^{-1}]((t)), \\ B_p &= \varinjlim_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}} u^{-m} t^{-n} k[[u, t]]. \end{aligned}$$

Заметим, что факторгруппа (см. теорему 4)

$$F = \frac{K_{p, C_1} \oplus K_{p, C_2}}{B_{C_1} \oplus B_{C_2} + B_p},$$

где группа B_p диагонально вложена в группу $K_{p, C_1} \oplus K_{p, C_2}$, может быть вычислена при помощи редукции к одному двумерному локальному полю, скажем полю K_{p, C_2} . Именно, $0 \oplus K_{p, C_2} + B_{C_1} \oplus B_{C_2} + B_p = K_{p, C_1} \oplus K_{p, C_2}$. Поэтому

$$0 \longrightarrow K_{p, C_2} \cap (B_{C_1} \oplus B_{C_2} + B_p) \longrightarrow K_{p, C_2} \longrightarrow F \longrightarrow 0, \quad (154)$$

где пересечение берется внутри группы $K_{p, C_1} \oplus K_{p, C_2}$ и $K_{p, C_2} = 0 \oplus K_{p, C_2}$ рассматривается внутри этой группы. Первая ненулевая группа в последовательности (154) равна группе $B_{C_2} + K_{p, C_2} \cap (B_{C_1} + B_p)$, так как группа B_{C_2} принадлежит только группе K_{p, C_2} как подгруппа. Группа $K_{p, C_2} \cap (B_{C_1} + B_p)$ равна подгруппе $B_{C_1} \cap B_p$ группы $K_{p, C_1} \oplus 0$. Эта подгруппа вложена в группу $0 \oplus K_{p, C_2}$ посредством включения $B_p \subset K_{p, C_2}$.

Наконец, получаем

$$F = \frac{K_{p, C_2}}{B_{C_2} + (B_{C_1} \cap B_p)} = \frac{k((u))((t))}{k[u^{-1}]((t)) + k((u))[t^{-1}]} \simeq k[[u, t]]ut.$$

Имеет место следующая аналогия этого вычисления для арифметической поверхности. Рассмотрим поверхность X как расслоенную поверхность с проекцией на кривую C_2 . Мы хотим сравнить поверхность X , расслоенную над кривой C_2 , с простейшей арифметической поверхностью P^1 над $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Точка

$p \in C_2$ будет соответствовать точке ∞ , добавленной к $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Кривая C_1 соответствует несуществующему замкнутому слою над точкой ∞ . Существуют следующие аналогии:

$$\begin{aligned} k(C_2)_p &= k((u)) \sim \mathbb{R}, & K_{p,C_2} &\sim \mathbb{R}((t)), \\ B_{C_2} &= \{\text{регулярные функции на } C_2 \setminus p\}((t)) \sim \mathbb{Z}((t)), \\ B_{C_1} \cap B_p &= k((u))[t^{-1}] \sim \mathbb{R}[t^{-1}], \end{aligned}$$

основанные на классической аналогии между алгебраическими поверхностями и арифметическими поверхностями (см., например, [19])

Используя этот словарь, получаем следующий аналог группы F :

$$F \sim \frac{\mathbb{R}((t))}{\mathbb{Z}((t)) + \mathbb{R}[t^{-1}]} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})[[t]]t \simeq \mathbb{T}[[t]]t.$$

Очевидно, что на группе $\mathbb{T}[[t]]t$ имеем структуру объекта из категории C_2^{ar} , так что этот объект является c -объектом и cf -объектом.

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Интересно рассмотреть аналог первого ненулевого члена в последовательности (137) для случая арифметической поверхности. Напомним ситуацию, возникшую в примере 11. Рассмотрим регулярную двумерную схему X с проективным сюръективным морфизмом $X \rightarrow \text{Spec } E$, где E – кольцо целых в числовом поле K , $[K: \mathbb{Q}] = n$. Это значит, что X – арифметическая поверхность. Пусть X_K – общий слой этого морфизма. Пусть $C \subset X$ – “горизонтальная” неприводимая арифметическая кривая, т. е. целая одномерная подсхема C , которая сюръективно отображается на $\text{Spec } E$. Подсхема C соответствует некоторой замкнутой точке $p_C \in X_K$. Напомним, что $p_1, \dots, p_l$ – архимедовы точки поля K и K_{p_i} , $1 \leq i \leq l$, – соответствующие пополненные поля. Тогда согласно определению кольца аделей $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ (см. пример 11) группа Ψ есть аналог первого ненулевого члена в последовательности (137):

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\prod'_{x \in D, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}) \oplus (\prod_{q \in X_K, q \neq p_C} \hat{\mathcal{O}}_q \hat{\otimes}_K (\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}))}{\prod_{D \subset X, D \not\subset C} \hat{\mathcal{O}}_D + \prod_{x \in X, x \notin C} \hat{\mathcal{O}}_x}, \quad (155)$$

где $x \in D$ пробегает по всем парам, составленным из целых одномерных подсхем D в X и замкнутых точек x на D . Точка q – замкнутая точка кривой X_K , кольцо $\hat{\mathcal{O}}_q$ – пополнение локального кольца точки q на X_K по максимальному идеалу точки q . По определению имеем

$$\hat{\mathcal{O}}_q \hat{\otimes}_K \left(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \right) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\hat{\mathcal{O}}_q}{\hat{m}_q^n} \otimes_K \left(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \right) \right),$$

где $\hat{m}_q$ – максимальный идеал локального кольца $\hat{\mathcal{O}}_q$.

Теперь проясним, как подгруппы из (155) вложены одна в другую. Отметим, что для фиксированной “горизонтальной” арифметической неприводимой кривой $D \subset X$ имеется диагональное вложение

$$\hat{\mathcal{O}}_D \hookrightarrow \left(\prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D} \right) \oplus \left(\hat{\mathcal{O}}_{p_D} \hat{\otimes}_K \left(\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i} \right) \right),$$

где точка $p_D \in X_K$ соответствует неприводимой арифметической кривой $D \subset X$ и по конструкции $\hat{\mathcal{O}}_D = \hat{\mathcal{O}}_{p_D}$.

Для фиксированной “вертикальной” неприводимой кривой $D \subset X$ (т. е. D определено над некоторым конечным полем) имеем только диагональное вложение

$$\hat{\mathcal{O}}_D \hookrightarrow \prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}.$$

Для фиксированной замкнутой точки $x \in X$ также имеем только диагональное вложение

$$\hat{\mathcal{O}}_x \hookrightarrow \prod_{D \ni x} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}.$$

Теперь, подобно (138), можем переписать группу Ψ следующим образом:

$$\Psi = \frac{\Psi_1 \oplus \Psi_2}{\prod_{x \in X, x \notin C} \hat{\mathcal{O}}_x}, \quad (156)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \prod_{\substack{D \subset X, D \not\subset C \\ D \text{ “горизонт.”}}} \frac{(\prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}) \oplus (\hat{\mathcal{O}}_{p_D} \hat{\otimes}_K (\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}))}{\hat{\mathcal{O}}_D}, \\ \Psi_2 &= \prod_{\substack{D \subset X, D \not\subset C \\ D \text{ “верт.”}}} \frac{\prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}}{\hat{\mathcal{O}}_D}. \end{aligned}$$

Для фиксированной неприводимой “горизонтальной” арифметической кривой $D \subset X$ пусть $k(D)$ – поле рациональных функций на D и $t_D = 0$ – локальное уравнение D на некотором открытом подмножестве X . Имеем

$$\frac{(\prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}) \oplus (\hat{\mathcal{O}}_{p_D} \hat{\otimes}_K (\prod_{1 \leq i \leq l} K_{p_i}))}{\hat{\mathcal{O}}_D} = (\mathbb{A}_{k(D)}/k(D))[[t_D]].$$

Из примера 4 получаем, что $\mathbb{A}_{k(D)}/k(D)$ – компактный объект в категории C_1^{ar} . Поэтому $(\mathbb{A}_{k(D)}/k(D))[[t_D]]$ и, следовательно, Ψ_1 имеют структуру c -объекта и cf -объекта из категории C_2^{ar} (ср. с замечанием 26).

Для фиксированной неприводимой “вертикальной” кривой $D \subset X$ имеем

$$\frac{\prod'_{x \in D} \hat{\mathcal{O}}_{x,D}}{\hat{\mathcal{O}}_D} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_{D_n}/\mathbb{A}_{D_n,0},$$

где замкнутая подсхема $D_n \subset X$ задается как $D_n = (D, \mathcal{O}_X/J_D^n)$ и J_D – пучок идеалов кривой D на X . Отметим, что $D_1 = D$. Используя индукцию по n и рассуждения, приведенные в начале п. 14.1, получаем, что $\mathbb{A}_{D_n}/\mathbb{A}_{D_n,0}$ имеет структуру компактного объекта из категории C_1^{ar} . Отсюда Ψ_2 имеет структуру c -объекта и cf -объекта из категории C_2^{ar} .

Как в замечании 26, группа $\prod_{x \in X, x \notin C} \hat{\mathcal{O}}_x$ имеет структуру c -объекта и cf -объекта из категории C_2^{ar} . Отсюда и из (156) получаем, что группа Ψ имеет структуру c -объекта и cf -объекта из категории C_2^{ar} (ср. с замечанием 26).

Список литературы

1. Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, “Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 77–140; англ. пер.: D. V. Osipov, A. N. Parshin, “Harmonic analysis on local fields and adelic spaces. I”, *Izv. Math.*, **72**:5 (2008), 915–976.
2. D. Osipov, “Adeles on n -dimensional schemes and categories C_n ”, *Intern. J. Math.*, **18**:3 (2007), 269–279.
3. М. М. Капранов, *Semiinfinite symmetric powers*, arXiv: math/0107089.
4. A. N. Parshin, “Integrable systems and local fields”, *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 4157–4181.
5. D. Kazhdan, “Fourier transform over local fields”, *Milan J. Math.*, **74**:1 (2006), 213–225.
6. А. Н. Паршин, “О голоморфных представлениях дискретных групп Гейзенберга”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:2 (2010), 92–96; англ. пер.: A. N. Parshin, “On holomorphic representations of discrete Heisenberg groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:2 (2010), 156–159.
7. А. А. Бейлинсон, “Вычеты и адели”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 44–45; англ. пер.: A. A. Beilinson, “Residues and adeles”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 34–35.
8. A. Huber, “On the Parshin–Beilinson adeles for schemes”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61**:1 (1991), 249–273.
9. T. Fimmел, A. N. Parshin, *An introduction to the higher adelic theory*, Preprint, 1999.
10. D. V. Osipov, “ n -dimensional local fields and adeles on n -dimensional schemes”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 131–164.
11. Н. Бурбаки, *Элементы математики*, Вып. 32, *Спектральная теория*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXII: Théories spectrales*, Hermann, Paris, 1967.
12. *Алгебраическая теория чисел*, Сб. статей, Мир, М., 1969; пер. с англ.: *Algebraic number theory*, ed. J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, Academic Press, London, 1967.
13. F. Bruhat, “Sur les représentations induites des groupes de Lie”, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 97–205.
14. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, v. II, Hermann, Paris, 1959.
15. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: A. P. Robertson, W. J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Math., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
16. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции*, т. 1: *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматлит, М., 1959; англ. пер.: I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, v. I: *Properties and operations*, Academic Press, New York–London, 1964.
17. F. Bruhat, “Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p -адических”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 43–75.
18. А. Н. Паршин, “Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:1 (2001), 88–90; англ. пер.: A. N. Parshin, “The Krichever correspondence for algebraic surfaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:1 (2001), 74–76.

19. А. Н. Паршин, “Числа как функции: развитие одной идеи в Московской школе алгебраической геометрии”, *Математические события XX века*, ФАЗИС, М., 2003; англ. пер.: A. N. Parshin, “Numbers as functions: the development of an idea in the Moscow school of algebraic geometry”, *Mathematical events of the twentieth century*, Springer-Verlag, Berlin, 297–329.

Д. В. ОСИПОВ (D. V. OSIPOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: d_osipov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

22.12.2009

10.12.2010

А. Н. ПАРШИН (A. N. PARSHIN)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: parshin@mi.ras.ru