Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 177–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:17:43

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II

Доказано, что стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для всех гладких комплексных проективных трехмерных многообразий размерности Кодайры $\kappa < 3$.

Библиография: 41 наименование.

Ключевые слова: комплексное трехмерное многообразие неосновного типа, стандартная гипотеза типа Лефшеца, гипотеза Фридландера–Мазура.

Введение

Мы доказываем, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца [1] об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для всех гладких комплексных проективных трехмерных многообразий X размерности Кодайры $\kappa < 3$ (другими словами, для всех гладких комплексных проективных трехмерных многообразий неосновного типа). Следовательно, численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов совпадают на $X \times X$ согласно [2, следствие 4.4], компоненты Кюннета класса когомологий диагонали алгебраические в силу [3, лемма 2.4], гипотеза Фридландера–Мазура [4] о совпадении фильтрации соответствий и геометрической фильтрации на гомологиях верна для X (см. теорему из п. 5.2); если X определено над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и X имеет хорошую редукцию в неархимедовой точке $\wp$ поля k , то гипотеза $B(X_\wp)$ верна для специального слоя $X_\wp$ над (конечным) полем вычетов, потому что стандартная гипотеза типа Лефшеца стабильна при специализации с возможным изменением характеристики [3, с. 359].

Автор благодарен рецензенту, предложившему существенные улучшения первоначального текста.

§ 1. Алгебраичность инвариантных циклов и стандартная гипотеза типа Лефшеца для расслоенных трехмерных многообразий

1.1. ЛЕММА. Пусть X, Y – гладкие комплексные проективные многообразия размерностей ≤ 4 и $f: X \rightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение. Тогда $B(X) \Rightarrow B(Y)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00132).

Поскольку стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для гладких комплексных проективных многообразий размерности ≤ 2 (см. [3], [5]) и гипотеза $B(X)$ совместима с моноидальными преобразованиями вдоль замкнутых гладких подмногообразий [6, теорема 4.3], можно считать, что f – морфизм в силу результатов Хиронаки о разрешении неопределенностей рациональных отображений (см. [7], [8]). Поэтому $B(X) \Rightarrow B(Y)$ согласно [9, теорема 1.6].

1.2. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, и пусть $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C (с сечением), $C' \hookrightarrow C$ – такая непустая открытая подсхема в C , что

$$\pi' = \pi|_{\pi^{-1}(C')}: \pi^{-1}(C') \stackrel{\text{def}}{=} X' \rightarrow C'$$

– гладкий морфизм, $\Delta = C \setminus C'$. Всюду далее мы считаем, что любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

Пусть X_s – гладкий геометрический слой с поляризацией

$$\Psi_s: H^1(X_s, \mathbb{Q}) \times H^1(X_s, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}(-1),$$

индуцированной обильным дивизором H на X . Мы будем предполагать, что выполнено $H^1(X_s, \mathbb{Q}) \neq 0$. Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет невырожденное кососимметрическое спаривание

$$\begin{aligned} \Phi_s: H^1(X_s, \mathbb{Q}) \times H^1(X_s, \mathbb{Q}) &\rightarrow \mathbb{Q}, \\ x \times y &\mapsto \Phi_s(x, y) = \langle x \cup \text{cl}_{X_s}(H_s) \cup y \rangle, \end{aligned}$$

где $\text{cl}_{X_s}(H_s)$ – ограничение обильного класса $\text{cl}_X(H)$ и $\langle \cdot \rangle: H^4(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$ – изоморфизм ориентации. Обозначим через $\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ группу автоморфизмов пространства $H^1(X_s, \mathbb{Q})$, сохраняющих форму Φ_s . По определению класс Пуанкаре $\wp(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ является образующей 1-мерного пространства

$$[H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)}$$

инвариантов диагонального действия симплектической группы $\text{Sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}), \Phi_s)$ на тензорном произведении $H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$. Это цикл Ходжа (другими словами, он принадлежит $H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X_s \times X_s, \mathbb{C})$ [10, п. 1.4] и, следовательно, является алгебраическим по теореме Лефшеца). В частности, он представлен алгебраическим *циклом Пуанкаре* $[\Lambda_s]_{1,1}$ с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$.

В терминах теории схем пусть $\bar{\eta} \rightarrow \eta$ – общая геометрическая точка кривой C . Тогда алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое канонического структурного морфизма $\tau': X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ определен над некоторым конечным алгебраическим расширением поля $\kappa(\eta)$ рациональных функций кривой C .

Используя (если необходимо) подходящее конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$, мы можем считать, что $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ определен над полем $\kappa(\eta)$ рациональных

функций кривой C . В этом случае специализации [11] алгебраического цикла Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ позволяют построить семейство циклов Пуанкаре

$$([\Lambda_s]_{1,1} \in H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q}))_{s \in (C')^{\text{an}}},$$

которое, в свою очередь, определяет элемент типа Ходжа $(1, 1)$:

$$\Lambda'_{1,1} \in H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q}).$$

Обозначим через $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ канонический структурный морфизм расслоенного произведения. Пусть $Y \xrightarrow{\sigma} X \times_C X \xhookrightarrow{\iota} X \times X$ – композиция разрешения особенностей $X \times_C X$ и канонического вложения. Можно считать, что σ индуцирует изоморфизм над C' . В частности, Y можно рассматривать как гладкую проективную компактификацию $X' \times_{C'} X'$. Более того, в силу результатов Хиронаки можно считать, что $(\tau\sigma)^{-1}(\Delta)$ является объединением гладких дивизоров с некоторыми положительными кратностями и нормальными пересечениями.

Известно, что $\Lambda'_{1,1}$ поднимается до класса когомологий $\mathcal{D} \in H^2(Y, \mathbb{Q})$ дивизора на Y (с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$), причем алгебраический класс $(\iota\sigma)_*\mathcal{D} \in H^4(X \times X, \mathbb{Q})$ играет важную роль в доказательстве гипотезы $B(X)$ при выполнении следующих дополнительных эквивалентных условий:

- (i) $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$;
- (ii) $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ и

$$\text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]]$$

являются $\mathbb{Q}$ -структурами Ходжа типа $(1, 1)$ [10, теорема 2.3].

1.3. Мы будем исследовать условие (ii).

Пусть $j: C' \hookrightarrow C$ – каноническое вложение. Можно считать, что $\Delta \neq \emptyset$ и, следовательно, $H^2(C', \mathbb{Q}) = 0$. Известно, что имеется канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ [12, следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [12, диаграмма (15.1) в случае $m = 1$]:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \simeq \downarrow \gamma & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^1(C, j_*R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X', \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \end{array} \quad (1.1)$$

где $\gamma \circ \alpha$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β – морфизм смешанных структур Ходжа [12, теоремы (15.3), (15.4), замечание (15.2)].

Рассмотрим локальную систему $V = R^1\pi'_*\mathbb{C}$. Пусть U_δ – маленький открытый диск с центром $\delta \in \Delta$, U_δ^* – проколотый диск, γ – локальное преобразование

монодромии с $(\gamma^\nu - 1)^2 = 0$ [13, с. 726]. Тогда V_s , $s \in U_\delta^*$, и, следовательно, V расщепляются в обобщенные собственные подпространства [12, § 6]:

$$V = \bigoplus_{a=0}^{\nu-1} V_{a/\nu}^{(\delta)},$$

где по определению

$$[V_{a/\nu}^{(\delta)}]_s = \{v \in V_s \mid (\gamma - e^{2\pi ia/\nu})^2 v = 0\}.$$

Записывая $\gamma|_{V_{a/\nu}^{(\delta)}} = e^{2\pi ia/\nu} \gamma_a$ с унитарным γ_a и полагая $N_a^{(\delta)} = \log \gamma_a$, мы имеем точную последовательность смешанных структур Ходжа [12, замечание (14.5)]:

$$0 \rightarrow H^1(C, j_* R^1 \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C', R^1 \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)} \rightarrow H^2(C, j_* R^1 \pi'_* \mathbb{C}). \quad (1.2)$$

По теореме о локально инвариантных циклах каноническое отображение

$$R^1 \pi_* \mathbb{C} \rightarrow j_* R^1 \pi'_* \mathbb{C}$$

сюръективно с ядром, сконцентрированным на Δ (см. [12, предложение (15.12)]; более ранняя версия этого результата содержится в [14, комментарий к п. (3.7)]). Следовательно, имеются канонические изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^1(C, R^1 \pi_* \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H^1(C, j_* R^1 \pi'_* \mathbb{C}), \\ H^2(C, R^1 \pi_* \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H^2(C, j_* R^1 \pi'_* \mathbb{C}), \end{aligned}$$

поэтому (1.2) принимает вид

$$0 \rightarrow H^1(C, R^1 \pi_* \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C', R^1 \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)} \rightarrow H^2(C, R^1 \pi_* \mathbb{C}). \quad (1.3)$$

1.4. ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие, $\pi: X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую C (с сечением), любой геометрический слой X_s является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое морфизма $\tau': X' \times_C X' \rightarrow C'$ определен над полем $\kappa(\eta)$ рациональных функций кривой C . Предположим, что для любой точки $\delta \in \Delta$ локальное преобразование монодромии γ пространства $H^1(X_s, \mathbb{Q})$, $s \in C'$, унитарно. Если $H^0(C', R^2 \pi'_* \mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$, то стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, $(\gamma - 1)^2 = 0$ по теореме о монодромии [15, теорема (6.1)].

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} N &\stackrel{\text{def}}{=} N_0^{(\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} \log \gamma = \gamma - 1 - \frac{(\gamma - 1)^2}{2} + \dots = \gamma - 1, \\ N^2 &= 0, \\ V_0^{(\delta)} &= H^1(X_s, \mathbb{C}), \quad s \in C'. \end{aligned}$$

Семейство $X \rightarrow C$ индуцирует предельную смешанную структуру Ходжа на $H_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} H^1(X_s, \mathbb{Q})$ (точка $s \in U_{\delta}^* \subset C'$ произвольная, но фиксированная). Ее весовая фильтрация

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 = H^1(X_s, \mathbb{Q}) \quad (1.4)$$

характеризуется следующими условиями [15, лемма (6.4)]:

$$N: W_k \rightarrow W_{k-2}, \quad N^k: W_{k+1}/W_k \xrightarrow{\sim} W_{-k+1}/W_{-k}; \quad (1.5)$$

в частности, мы имеем [15, с. 249, формула (b)]

$$W_0 = \text{Im}(N). \quad (1.6)$$

С другой стороны, согласно результатам Шмида [15, с. 254, 255], фильтрации Ходжа когомологий гладких слоев X_t , $t \in U_{\delta}^*$, определяют предельную фильтрацию F^* на $H_{\mathbb{C}}$, причем тройка $(H_{\mathbb{Q}}, W_*, F^*)$ дает поляризованную смешанную структуру Ходжа, относительно которой N является морфизмом типа $(-1, -1)$ (см. [15, теорема (6.16)], [13, с. 726], [16, гл. IV]). Хорошо известно, что W_n является смешанной подструктурой Ходжа в $(H_{\mathbb{Q}}, W_*, F^*)$ и W_n/W_{n-1} – чистая структура Ходжа веса n [17, п. 2.3.6, 2.3.2]. Поскольку W_0 – чистая структура Ходжа типа $(0, 0)$, то из (1.4), (1.5) следует, что W_2/W_1 – чистая структура Ходжа типа $(1, 1)$, так как $N: W_2/W_1 \rightarrow W_0$ – изоморфизм типа $(-1, -1)$. С другой стороны, W_1/W_0 – чистая структура Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1)$. Поэтому W_2 – смешанная структура Ходжа типа $(0, 0) + (1, 0) + (0, 1) + (1, 1)$, и в силу (1.6) мы имеем, что

$$V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)} = [W_2/W_0] \otimes \mathbb{C}$$

– смешанная структура Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1) + (1, 1)$.

По определению морфизм типа (r, r) смешанных структур Ходжа $(H_{\mathbb{Q}}, W_*, F^*)$ и $(H'_{\mathbb{Q}}, W'_*, (F')^*)$ задается линейным отображением $L: H_{\mathbb{Q}} \rightarrow H'_{\mathbb{Q}}$, удовлетворяющим условиям

$$L(W_m) \subset W'_{m+2r}, \quad L(F^p) \subset (F')^{p+r}.$$

Любой такой морфизм *строгий* в том смысле, что $L(F^p) = (F')^{p+r} \cap \text{Im } L$, и аналогично для весовой фильтрации. В силу строгости ядра и коядра морфизмов наследуют смешанные структуры Ходжа [13, с. 725]. Кроме того, категория смешанных структур Ходжа с морфизмами типа $(0, 0)$ абелева [17,

теорема 2.3.5]. Применяя это к канонической точной последовательности (1.3) смешанных структур Ходжа, мы видим, что канонический морфизм

$$H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)}$$

смешанных структур Ходжа индуцирует морфизм смешанных структур Ходжа

$$\varphi: H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{C}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{C})] \rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)}.$$

Поскольку $H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{C}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{C})]$ – чистая структура Ходжа типа $(2, 0) + (1, 1) + (0, 2)$ и $\bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)}$ – смешанная структура Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1) + (1, 1)$, образ $[(2, 0) + (0, 2)]$ -компоненты относительно φ тривиален и

$$\text{Coker}[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})]]$$

– чистая $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа типа $(1, 1)$. Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна согласно [10, теорема 2.3].

1.5. СЛЕДСТВИЕ. *Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов Λ и $*$ верна для гладкого комплексного проективного трехмерного многообразия X при условии, что общий геометрический слой некоторого 1-параметрического голоморфного семейства $\pi: X \rightarrow C$ является гладкой поверхностью размерности Кодaira $\kappa \leq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что общий геометрический слой бирационально эквивалентен линейчатой поверхности, поверхности Энриквеса или КЗ-поверхности. Тогда гипотеза $B(X)$ верна согласно [10, теорема 3.1].

В силу леммы из п. 1.1 можно считать, что общий геометрический слой морфизма π является минимальной поверхностью.

По теореме Мамфорда о полустабильной редукции [18, с. 53, 54] и в силу леммы из п. 1.1 можно считать, что все неприводимые компоненты любого геометрического слоя X_s морфизма $\pi: X \rightarrow C$ являются гладкими поверхностями кратности 1 с нормальными пересечениями, алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\bar{\eta}}]_{1,1}$ определен над полем рациональных функций кривой C , π имеет сечение и все локальные преобразования монодромии пространства $H^1(X_s, \mathbb{Q})$, $s \in C'$, унипотентны.

Если геометрический слой X_s , $s \in C'$, является минимальной эллиптической поверхностью размерности Кодaira 0 с каноническим классом $K_{X_s} \neq 0$, то $mK_{X_s} = 0$ для некоторого целого числа $m \in \{2, 3, 4, 6\}$ [19, таблица типов алгебраических поверхностей]. С другой стороны, имеется такой канонический этальный морфизм $f_s: \bar{X}_s \rightarrow X_s$ степени m , что K_{X_s} индуцирует на $\bar{X}_s$ тривиальный $K_{\bar{X}_s}$ (конструкция f_s восходит к работе [20, теорема 33]). Эти морфизмы определяют глобальный этальный C' -морфизм $f': \bar{X}' \rightarrow X'$ степени m , поэтому вопрос сводится к доказательству стандартной гипотезы для компактификаций гладких семейств КЗ-поверхностей или абелевых поверхностей.

Можно считать, что $\pi': X' \rightarrow C'$ – непостоянная абелева схема относительной размерности 2. Если она содержит нетривиальную постоянную абелеву подсхему, то по теореме Пуанкаре о полной приводимости для абелевых многообразий [21, § 19, теорема 1] существует такое конечное разветвленное накрытие $\widetilde{C}' \rightarrow C'$, что абелева схема $X' \times_{C'} \widetilde{C}' \rightarrow \widetilde{C}'$ изогенна $E \times S'$, где E – эллиптическая кривая и $S' \rightarrow \widetilde{C}'$ – абелева схема относительной размерности 1 над $\widetilde{C}'$. Следовательно, X рационально доминируется произведением кривой и поверхности. Поскольку стандартная гипотеза типа Лефшеца стабильна относительно произведений [3, следствие 2.5], мы видим, что $B(X)$ верна.

Поэтому можно считать, что абелева схема $\pi': X' \rightarrow C'$ не содержит нетривиальной постоянной абелевой подсхемы. Тогда

$$\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(R^1\pi'_*\mathbb{Q})$$

в силу [17, следствие 4.4.13] и $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$ (это доказано в [10, конец § 3] для случая $C = C'$; доказательство дословно переносится на рассматриваемый случай). Остается применить теорему из п. 1.4.

§ 2. Доказательство стандартной гипотезы типа Лефшеца для эллиптических трехмерных многообразий

2.1. ТЕОРЕМА. Пусть $\tau: X \rightarrow S$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия X на гладкую проективную поверхность S , что обций геометрический слой τ является эллиптической кривой. Тогда стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы из п. 1.1 можно считать, что $\tau: X \rightarrow S$ индуцирует абелеву схему $\tau': X' \rightarrow S'$ с якобиевой структурой уровня $N \geq 3$ над открытой непустой подсхемой $S' \hookrightarrow S$. Пусть $\mathcal{A}_{1,N} \rightarrow \mathcal{M}_{1,N}$ – универсальное семейство эллиптических кривых с якобиевой структурой уровня N . Тогда существует такой единственный морфизм $\varphi': S' \rightarrow \mathcal{M}_{1,N}$, что $\tau': X' \rightarrow S'$ совпадает с канонической проекцией $\mathcal{A}_{1,N} \times_{\mathcal{M}_{1,N}} S' \rightarrow S'$.

Если $\varphi'(S')$ – точка, то $X' \xrightarrow{\sim} S' \times E$ для подходящей эллиптической кривой E и, следовательно, X бирационально эквивалентно произведению $S \times E$. Поскольку гипотезы $B(S)$ и $B(E)$ верны и $B(S) \& B(E) \Rightarrow B(S \times E)$ в силу [3, следствие 2.5], остается применить лемму из п. 1.1.

Далее мы считаем, что $\varphi': S' \rightarrow \mathcal{M}_{1,N}$ – доминантный морфизм.

Пусть $\overline{\mathcal{M}}_{1,N}$ – гладкая компактификация аффинной кривой $\mathcal{M}_{1,N}$. Тогда существует единственная неособая полная относительно минимальная модель $\overline{\mathcal{A}}_{1,N} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{1,N}$ поверхности $\mathcal{A}_{1,N}$ (см. [22], [23]), слои которой над точками $\delta \in \overline{\mathcal{M}}_{1,N} \setminus \mathcal{M}_{1,N}$ являются n -угольниками гладких рациональных кривых с нормальными пересечениями.

Доминантный морфизм φ' определяет рациональное доминантное отображение $\varphi: S \dashrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{1,N}$. В силу результатов Хиронаки и леммы из п. 1.1 можно считать, что φ – сюръективный морфизм. Очевидно, что X бирационально эквивалентно $\overline{\mathcal{A}}_{1,N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{1,N}} S$.

Пусть $\mathbb{C}(\overline{\mathcal{M}_{1,N}})$ и $\mathbb{C}(S)$ – поля рациональных функций на $\overline{\mathcal{M}_{1,N}}$ и S соответственно. Морфизм φ определяет вложение полей $\mathbb{C}(\overline{\mathcal{M}_{1,N}}) \hookrightarrow \mathbb{C}(S)$. Пусть C – полная неособая модель алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{C}(\mathcal{M}_{1,N})}$ в $\mathbb{C}(S)$. Можно считать, что имеется факторизация Штейна (см. [24, гл. III, § 11, следствие 11.5], [19, гл. I, § 3])

$$\begin{array}{ccc} S & & \\ \downarrow & \searrow \varphi & \\ C & \rightarrow & \overline{\mathcal{M}_{1,N}} \end{array}$$

В частности, все геометрические слои морфизма $S \rightarrow C$ связные, и общий схемный слой является неособой кривой.

Пусть $Y \rightarrow C$ – относительно минимальная неособая проективная модель эллиптической поверхности $\overline{\mathcal{A}_{1,N}} \times_{\overline{\mathcal{M}_{1,N}}} C \rightarrow C$.

В силу теоремы Мамфорда о полустабильной редукции [18, с. 53, 54] и хорошо известной классификации слоев относительно минимальных эллиптических поверхностей [22], [23] имеется такое конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$, что выполняются следующие условия:

1) для некоторой неособой проективной модели $\tilde{Y}$ расслоенного произведения $Y \times_C \tilde{C}$ любой геометрический слой канонического морфизма $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{C}$ является гладкой эллиптической кривой или n -угольником гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями, существует хотя бы один особый слой, все локальные преобразования монодромии пространства $H^1(\tilde{Y}_s, \mathbb{Q})$, $s \in \tilde{C}'$, унипотентны, морфизм $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{C}$ имеет сечение;

2) для некоторой неособой проективной модели $\tilde{S}$ расслоенного произведения $S \times_C \tilde{C}$ любой геометрический слой канонического морфизма $\tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ является объединением гладких кривых кратности 1 с нормальными пересечениями, все локальные преобразования монодромии пространства $H^1(\tilde{S}_s, \mathbb{Q})$, $s \in \tilde{C}'$, унипотентны, морфизм $\tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$ имеет сечение;

3) алгебраический цикл Пуанкаре $[\Lambda_{\tilde{\eta}}]_{1,1}$ на общем геометрическом слое канонического структурного морфизма $X' \times_{C'} X' \rightarrow C'$ определен над полем рациональных функций кривой $\tilde{C}$.

Следовательно, можно считать, что все локальные преобразования монодромии пространства

$$H^1([\tilde{Y} \times_{\tilde{C}} \tilde{S}]_s, \mathbb{Q}) = H^1(\tilde{Y}_s, \mathbb{Q}) \oplus H^1(\tilde{S}_s, \mathbb{Q})$$

унипотентны для $s \in \tilde{C}'$. Поскольку X рационально доминируется многообразием $\tilde{Y} \times_{\tilde{C}} \tilde{S}$, можно считать в силу леммы из п. 1.1, что $\tilde{C} = C$.

По теореме из п. 1.4 достаточно построить такое разрешение $\sigma: X \rightarrow Y \times_C S$ особенностей $Y \times_C S$, что любой геометрический слой композиции $\pi: X \xrightarrow{\sigma} Y \times_C S \rightarrow C$ является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) - \mathbb{Q}$ -структура Ходжа типа $(1, 1)$.

Если t – локальная голоморфная координата в окрестности точки $\delta \in C$ (так что δ определена уравнением $t = 0$), то можно считать, что $Y \rightarrow C$ локально задается формулой $t = z_1$ или $t = z_1 z_2$, где z_1, z_2 – локальные голоморфные координаты на Y . С другой стороны, можно считать, что $S \rightarrow C$ локально

задается формулой $t = z_3$ или $t = z_3 z_4$, где z_3, z_4 – локальные голоморфные координаты на S . Тогда $z_1, \dots, z_4$ – локальные голоморфные координаты на $Y \times S$ и можно считать, что подмногообразие $Y \times_C S \hookrightarrow Y \times S$ локально задается одним из следующих уравнений:

$$z_1 z_2 = z_3 z_4, \quad z_1 = z_3 z_4, \quad z_1 = z_3.$$

Пусть $D \hookrightarrow \mathbb{C}^4$ – полидиск с координатами $z_1, \dots, z_4$, $W = [Y \times_C S] \cap D$ – открытое подмножество в $[Y \times_C S]^{\text{an}}$. Очевидно, что

$$\text{Sing}(W) = \begin{cases} \{z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0\}, & \text{если } W = \{z_1 z_2 = z_3 z_4\}, \\ \emptyset & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

С другой стороны, любая неприводимая компонента E_i слоя $[Y \times_C S]_\delta$ является произведением гладкой рациональной или эллиптической кривой, лежащей на слое Y_δ , и гладкой кривой, лежащей на S_δ . В частности, E_i является линейчатой поверхностью, если Y_δ – особый слой.

Можно считать, что E_i локально определяется как $\{z_1 = z_3 = 0\}$. Если W не имеет особых точек, то очевидно, что слой $[Y \times_C S]_\delta \cap W$ является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями в W (например, если W имеет локальное уравнение $z_1 = z_3 z_4$, то в локальных координатах z_2, z_3, z_4 на W уравнение слоя $[Y \times_C S]_\delta \cap W$ имеет вид $z_3 z_4 = 0$).

Далее мы считаем, что W задается уравнением $z_1 z_2 = z_3 z_4$ в окрестности изолированной особой точки 0. В этом случае E_i является линейчатой поверхностью.

Хорошо известно, что моноидальное преобразование

$$f: D' \rightarrow D$$

полидиска D с координатами $z_1, \dots, z_4$ вдоль поверхности $\{z_1 = z_3 = 0\}$ является канонической проекцией подмножества

$$D' = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \times (w_0 : w_1) \mid z_1 w_1 = z_3 w_0\} \hookrightarrow D \times \mathbb{P}^1$$

на D . Пусть $D_+(w_i) = \{(w_0 : w_1) \in \mathbb{P}^1 \mid w_i \neq 0\}$, $u_1 = w_1/w_0$ – локальная координата на $D_+(w_0)$, $u_2 = w_0/w_1$ – локальная координата на $D_+(w_1)$.

Поскольку D' задается в открытом подмножестве $U_0 = D \times D_+(w_0)$ как $D' \cap U_0 = \{z_3 = z_1 u_1\}$ и W задается в D уравнением $z_1 z_2 - z_3 z_4 = 0$, то дивизор $f^{-1}(W)$ задается в $D' \cap U_0$ уравнением

$$z_1 z_2 - z_1 u_1 z_4 = 0$$

и состоит из двух компонент: исключительного дивизора на $D' \cap U_0$ (локально определенного уравнением $z_1 = 0$) и точного образа W_{strict} (strict transform в терминологии Хиронаки [7, гл. 0, конец § 2]; в русскоязычной литературе его называют также строгим (или собственным) прообразом [24, гл. II, § 7, следствие 7.15]) многообразия W , которое задается в локальных координатах z_1 ,

z_2, z_4, u_1 на $D' \cap U_0$ уравнением $z_2 - u_1 z_4 = 0$. Очевидно, что W_{strict} не имеет особых точек в $D' \cap U_0$. С другой стороны, $t = z_1 z_2$, поэтому слой канонического морфизма $W_{\text{strict}} \cap D' \cap U_0 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $z_1 u_1 z_4 = 0$ в локальных координатах z_1, z_4, u_1 на W_{strict} ; в частности, этот слой является полустабильным (другими словами, объединением поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями).

Аналогично, D' задается в открытом подмножестве $U_1 = D \times D_+(w_1)$ как $D' \cap U_1 = \{z_1 = z_3 u_2\}$, строгий (собственный) прообраз W_{strict} многообразия W определяется в локальных координатах z_2, z_3, z_4, u_2 на $D' \cap U_1$ уравнением $u_2 z_2 = z_4$. Следовательно, W_{strict} не имеет особых точек в $D' \cap U_1$, слой канонического морфизма $W_{\text{strict}} \cap D' \cap U_1 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $z_3 u_2 z_2 = 0$ в локальных координатах z_2, z_3, u_2 на W_{strict} ; ясно, что этот слой является полустабильным.

Заметим, что канонический морфизм $g: W_{\text{strict}} \rightarrow W$ является моноидальным преобразованием с центром в $W \cap E_i$ [7, гл. 0, конец § 2], причем дивизор $W \cap E_i \hookrightarrow W$ является дивизором Картэ (локально главным дивизором) на дополнении к точке $\{z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0\}$. Мы проверим прямыми вычислениями, что неприводимые компоненты слоя морфизма $W_{\text{strict}} \rightarrow C$ являются гладкими.

Действительно, компонентами слоя $W \rightarrow C$ в окрестности особой точки $\{z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0\}$ являются поверхности $\{z_1 = z_3 = 0\}$, $\{z_1 = z_4 = 0\}$, $\{z_2 = z_3 = 0\}$, $\{z_2 = z_4 = 0\}$. Рассмотрим прообразы этих поверхностей относительно моноидального преобразования $g: W_{\text{strict}} \rightarrow W$.

Рассмотрим сначала прообраз поверхности $\{z_1 = z_3 = 0\}$. Композиция

$$W_{\text{strict}} \xrightarrow{g} W \hookrightarrow D$$

задается в терминах локальных координат z_1, z_4, u_1 на $W_{\text{strict}} \cap U_0$ и локальных координат z_1, z_2, z_3, z_4 на D формулой

$$(z_1, u_1 z_4, u_1 z_1, z_4) \times u_1 \mapsto (z_1, u_1 z_4, u_1 z_1, z_4). \quad (2.1)$$

Прообраз точки $z \in \{z_1 = z_3 = 0\}$ состоит из точек вида $(0, u_1 z_4, 0, z_4) \times u_1$. Поэтому этот прообраз – одна точка, если $z \neq (0, 0, 0, 0)$, и он изоморфен аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \{(0, 0, 0, 0) \times u_1\}$ в противоположном случае.

С другой стороны, композиция $W_{\text{strict}} \xrightarrow{g} W \hookrightarrow D$ задается в терминах локальных координат z_2, z_3, u_2 на $W_{\text{strict}} \cap U_1$ и локальных координат z_1, z_2, z_3, z_4 на D формулой

$$(u_2 z_3, z_2, z_3, u_2 z_2) \times u_2 \mapsto (u_2 z_3, z_2, z_3, u_2 z_2). \quad (2.2)$$

Прообраз точки $z \in \{z_1 = z_3 = 0\}$ состоит из точек вида $(0, z_2, 0, u_2 z_2) \times u_2$. Поэтому этот прообраз – одна точка, если $z \neq (0, 0, 0, 0)$, и он изоморфен аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \{(0, 0, 0, 0) \times u_2\}$ в противоположном случае.

Хорошо известно, что моноидальное преобразование

$$\{z_1 = z_3 = 0\}' \rightarrow \{z_1 = z_3 = 0\}$$

поверхности $\{z_1 = z_3 = 0\}$ с центром $(0, 0, 0, 0)$ задается в терминах локальных координат z_2, z_4 на $\{z_1 = z_3 = 0\}$ и однородных координат w_0, w_1 на $\mathbb{P}^1$ как проекция подмножества

$$\{z_1 = z_3 = 0\}' = \{(0, z_2, 0, z_4) \times (w_0 : w_1) \mid z_2 w_0 = z_4 w_1\} \hookrightarrow \{(0, z_2, 0, z_4)\} \times \mathbb{P}^1$$

на $\{(0, z_2, 0, z_4)\}$. Поскольку $\{z_1 = z_3 = 0\}'$ задается в открытом подмножестве $U_0 = \{(0, z_2, 0, z_4)\} \times D_+(w_0)$ уравнением $z_2 = u_1 z_4$ и задается в открытом подмножестве $U_1 = \{(0, z_2, 0, z_4)\} \times D_+(w_1)$ уравнением $z_4 = u_2 z_2$, то из (2.1), (2.2) следует, что прообраз поверхности $\{z_1 = z_3 = 0\}$ относительно моноидального преобразования $g: W_{\text{strict}} \rightarrow W$ получается из $\{z_1 = z_3 = 0\}$ раздутием точки $(0, 0, 0, 0)$ и, следовательно, является *гладкой* поверхностью.

Проверим отсутствие особых точек на строгом (собственном) прообразе $\{z_1 = z_4 = 0\}_{\text{strict}}$ поверхности $\{z_1 = z_4 = 0\}$. Согласно общей теории моноидальных преобразований каноническое отображение

$$\{z_1 = z_4 = 0\}_{\text{strict}} \xrightarrow{g} \{z_1 = z_4 = 0\}$$

является моноидальным преобразованием поверхности $\{z_1 = z_4 = 0\}$ вдоль гладкой кривой

$$\{z_1 = z_3 = z_4 = 0\} = \{z_1 = z_3 = 0\} \cap \{z_1 = z_4 = 0\}$$

(см. [7, гл. 0, конец § 2]), и поэтому $\{z_1 = z_4 = 0\}_{\text{strict}}$ не имеет особенностей. По той же причине каноническое отображение

$$\{z_2 = z_3 = 0\}_{\text{strict}} \xrightarrow{g} \{z_2 = z_3 = 0\}$$

является моноидальным преобразованием поверхности $\{z_2 = z_3 = 0\}$ вдоль гладкой кривой

$$\{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} = \{z_1 = z_3 = 0\} \cap \{z_2 = z_3 = 0\}$$

и, следовательно, $\{z_2 = z_3 = 0\}_{\text{strict}}$ не имеет особых точек. Наконец, каноническое отображение

$$\{z_2 = z_4 = 0\}_{\text{strict}} \xrightarrow{g} \{z_2 = z_4 = 0\}$$

является моноидальным преобразованием поверхности $\{z_2 = z_4 = 0\}$ с центром в точке

$$\{z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0\} = \{z_1 = z_3 = 0\} \cap \{z_2 = z_4 = 0\},$$

и $\{z_2 = z_4 = 0\}_{\text{strict}}$ не имеет особенностей.

Из приведенных выше вычислений следует, что множество особых точек расслоенного произведения $Y \times_C S$ конечно и каждая особая точка лежит на некоторой линейчатой поверхности (являющейся неприводимой компонентой

особого слоя канонического морфизма $Y \times_C S \rightarrow C$). Последовательные раздутия этих линейчатых поверхностей на $Y \times_C S$ (без использования объемлющего многообразия $Y \times S$) дают разрешение особенностей $X \xrightarrow{\sigma} Y \times_C S$ с желаемыми свойствами. В частности, все геометрические слои композиции $\pi: X \xrightarrow{\sigma} Y \times_C S \rightarrow C$ являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, хотя бы один особый слой X_δ является объединением бирационально линейчатых поверхностей E_i , $i = 1, \dots, n$. Поскольку $H^2(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$ для всех i , то $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$ -структурой Ходжа типа $(1, 1)$ согласно [10, теорема 2.4]. Теорема доказана.

§ 3. Доказательство стандартной гипотезы типа Лефшеца для трехмерного многообразия размерности Кодайры $\kappa \notin \{0, 3\}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие размерности Кодайры $\kappa \notin \{0, 3\}$. Тогда стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\kappa(X) = -\infty$. В силу хорошо известной теоремы Мияоки гладкое проективное трехмерное многообразие X является унилинейчатым, если и только если $\kappa(X) = -\infty$ [25]. Следовательно, X рационально доминируется произведением $\mathbb{P}^1 \times S$ для подходящей гладкой проективной поверхности S ; поскольку $B(\mathbb{P}^1)$ и $B(S)$ верны и $B(\mathbb{P}^1) \& B(S) \Rightarrow B(\mathbb{P}^1 \times S)$ в силу [3, следствие 2.5], гипотеза $B(X)$ верна в силу леммы из п. 1.1.

Если $\kappa(X) \in \{1, 2\}$, то в силу [26, теоремы 3.38, 3.39] многообразие X бирационально эквивалентно гладкому проективному трехмерному многообразию с эллиптическим расслоением над некоторой поверхностью (и в этом случае $B(X)$ верна по теореме из п. 2.1 и лемме из п. 1.1) или с расслоением над кривой, общий слой которого F имеет размерность Кодайры $\kappa(F) \leq 1$. В случае $\kappa(F) \leq 0$ гипотеза $B(X)$ верна по лемме из п. 1.1 и следствию из п. 1.5. В случае $\kappa(F) = 1$ многообразие X рационально доминируется таким гладким проективным трехмерным многообразием Y , что общий слой Y_η некоторого морфизма $Y \rightarrow C$ на гладкую проективную кривую является эллиптической поверхностью $Y_\eta \rightarrow S_\eta$ размерности Кодайры 1 над гладкой проективной кривой S_η , определенной над полем $\mathbb{C}(\eta) = \mathbb{C}(C)$. Пусть S – гладкая проективная модель S_η над $\mathbb{C}$. Можно считать, что Y доминируется некоторым эллиптическим расслоением над поверхностью S . Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна по теореме из п. 2.1 и лемме из п. 1.1.

§ 4. Доказательство стандартной гипотезы типа Лефшеца для трехмерного многообразия размерности Кодайры $\kappa = 0$

4.1. Пусть X – гладкое проективное трехмерное многообразие над полем комплексных чисел. Если $\kappa(X) \geq 0$, то существует минимальная модель Y многообразия X со следующими свойствами: Y – нормальное $\mathbb{Q}$ -факториальное

многообразие с терминальными особенностями, причем канонический дивизор K_Y численно эффективен (nef) [27].

М. Рид доказал, что трехмерное многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальную минимальную модель (с терминальными особенностями), если оно имеет проективную модель Y с каноническими особенностями и K_Y численно эффективен [28].

Пусть Y – проективное многообразие с каноническими особенностями и K_Y – численно эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор. Говорят, что Y – *хорошая минимальная модель*, если Y – минимальная модель и K_Y избыточен (abundant) в смысле определения, данного в [29, раздел (9.7)] (другими словами, наибольшее целое число ν , для которого K_Y^ν численно нетривиален как $(3 - \nu)$ -цикл, совпадает с размерностью Кодaira $\kappa(Y)$). По теореме Каваматы любая минимальная модель Y является хорошей [30]. В частности,

$$[\kappa(Y) = 0] \Rightarrow [K_Y \text{ численно тривиален}]. \quad (4.1)$$

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие размерности Кодaira $\kappa = 0$ и $q = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$. Тогда стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, морфизм Альбанезе $X \rightarrow \text{Alb}(X)$ сюръективен [31, теорема 5.1, замечание 5.4]. Следовательно, $q \leq 3$.

Если $q = 3$, то X бирационально эквивалентно абелеву многообразию [31, теорема 5.2, замечания 5.3, 5.4]. По теореме Либермана стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для всех абелевых многообразий (см. [5, теорема 3], [3, теорема 2A11], [9, следствие 1.8]). Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна по лемме из п. 1.1.

Если $q = 2$, то X имеет гладкую (хорошую) минимальную модель, которая является расслоением над $\text{Alb}(X)$ в этальной топологии, причем слои – эллиптические кривые [29, (10.4.1)]. Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна по лемме из п. 1.1 и теореме из п. 2.1.

Если $q = 1$, то X имеет гладкую (хорошую) минимальную модель, которая является расслоением над $\text{Alb}(X)$ в этальной топологии, причем слои – абелевы поверхности, гиперэллиптические поверхности (с $\kappa = 0$), КЗ-поверхности или поверхности Энриквеса [29, (10.4.2)]. Следовательно, гипотеза $B(X)$ верна по лемме из п. 1.1 и следствию из п. 1.5. Предложение доказано.

4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – гладкое комплексное проективное трехмерное многообразие размерности Кодaira $\kappa = 0$ и $q = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Тогда стандартная гипотеза типа Лефшеца верна для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – минимальная модель многообразия X . Тогда Y имеет терминальные особенности [32]. С другой стороны, канонические особенности рациональны [33], поэтому $h^i(\mathcal{O}_X) = h^i(\mathcal{O}_Y)$, так как Y нормально и для любого разрешения особенностей $\varphi: Y^{\text{smooth}} \rightarrow Y$ имеем $R^i \varphi_* \mathcal{O}_{Y^{\text{smooth}}} = 0$ для всех $i > 0$.

Для минимального трехмерного многообразия Y с $\kappa(Y) = 0$ класс K_Y численно тривиален в силу (4.1); следовательно, имеется такое положительное

целое число m_0 , что $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m_0 K_Y)) \neq 0$ [34, теорема 3.2]. В частности, $m_0 K_Y \sim 0$ [34, доказательство теоремы 3.1].

Пусть m – минимальное положительное целое число, для которого $m K_Y \sim 0$. Мы хотим построить такой канонический этальный в коразмерности 1 морфизм $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ степени m , что K_Y индуцирует на $\tilde{Y}$ тривиальный класс $K_{\tilde{Y}}$ (для гладких многообразий конструкция f восходит к работе Кодаиры [20, теорема 33], в общем случае она является глобальным аналогом канонического накрытия, предложенного Ридом для локального изучения негоренштейновых особенностей нормальных многообразий).

Прежде всего, имеется каноническая структура $\mathcal{O}_Y$ -алгебры на пучке $\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_Y([-i K_Y])$, где $[-i K_Y]$ – целая часть $\mathbb{Q}$ -дивизора $-i K_Y$. Пусть

$$\tilde{Y} = \operatorname{Spec} \left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_Y([-i K_Y]) \right) \xrightarrow{f} Y$$

– каноническое отображение. Хорошо известно, что многообразие $\tilde{Y}$ неприводимо и $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ – циклическое μ_m -накрытие. Более того, f этально в коразмерности 1,

$$f^*(K_Y) = K_{\tilde{Y}} \sim 0, \quad (4.2)$$

и особенности $\tilde{Y}$ терминальны (см. [35, п. 2.4], [36, пп. 3.1, 3.2], [37, п. 1.1.10]).

Если $q(\tilde{Y}) \neq 0$, то для любой гладкой проективной модели $\tilde{Y}^{\text{smooth}}$ многообразия $\tilde{Y}$ имеем $q(\tilde{Y}^{\text{smooth}}) \neq 0$ и $\kappa(\tilde{Y}^{\text{smooth}}) = 0$, поэтому гипотеза $B(\tilde{Y}^{\text{smooth}})$ верна в силу предложения из п. 4.2, а гипотеза $B(X)$ верна в силу леммы из п. 1.1.

Поскольку особенности многообразия $\tilde{Y}$ рациональны, то $\tilde{Y}$ – многообразие Коэна–Маколея (см. [18, с. 50], [33, § 1, определение 1]), поэтому двойственность Серра для локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на $\tilde{Y}$ имеет вид $H^i(\tilde{Y}, \mathcal{F}) \simeq H^{3-i}(\tilde{Y}, \mathcal{F} \otimes \omega_{\tilde{Y}}^\vee)$, где $\omega_{\tilde{Y}} = \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(K_{\tilde{Y}})$ – дуализирующий пучок [24, гл. 3, § 7, следствие 7.7].

Если $q(\tilde{Y}) = 0$, то по двойственности Серра и (4.2) имеем

$$\dim H^2(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \dim H^1(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(K_{\tilde{Y}})) = \dim H^1(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 0. \quad (4.3)$$

Поскольку особенности $\tilde{Y}$ рациональны, то для любого разрешения особенностей $\varphi: \tilde{Y}^{\text{smooth}} \rightarrow \tilde{Y}$ справедливы равенства $R^i \varphi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}^{\text{smooth}}} = 0$ для всех $i > 0$. Поэтому из спектральной последовательности Лере и (4.3) получаем равенство

$$H^2(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}^{\text{smooth}}}) = 0.$$

Следовательно, по теореме Лефшеца $H^2(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами. Используя (если необходимо) раздутие точки на $\tilde{Y}^{\text{smooth}}$ и лемму из п. 1.1, считаем, что $\dim H^2(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathbb{Q}) \neq 2$. Тогда корректно определен алгебраический класс Пуанкаре $\wp(H^2(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathbb{Q}))$, который, в свою очередь, определяет алгебраический изоморфизм

$$H^4(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathbb{Q}) \simeq H^2(\tilde{Y}^{\text{smooth}}, \mathbb{Q})$$

согласно [10, лемма 1.5]. Поэтому гипотеза $B(\tilde{Y}^{\text{smooth}})$ верна в силу [10, конец доказательства теоремы 2.3], а гипотеза $B(X)$ верна в силу леммы из п. 1.1. Предложение доказано.

§ 5. Доказательство гипотезы Фридландера–Мазура для комплексных проективных трехмерных многообразий размерности Кодaira $\kappa < 3$

5.1. Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над полем комплексных чисел, $Y \hookrightarrow X$ – неприводимое подмногообразие коразмерности r , $\tilde{Y} \rightarrow Y$ – разрешение особенностей, $j: \tilde{Y} \rightarrow X$ – композиция $\tilde{Y} \rightarrow Y \hookrightarrow X$. Класс когомологий называется сосредоточенным на Y , если он лежит в образе гомоморфизма Гизина

$$j_*: H^{n-2r}(\tilde{Y}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Q}).$$

Арифметическая (или *коуровневая*) *фильтрация* F_{arith}^* на $H^n(X, \mathbb{Q})$ определяется так, что $F_{\text{arith}}^r H^n(X, \mathbb{Q})$ – множество классов когомологий, сосредоточенных на алгебраических подмногообразиях коразмерности не меньше r .

Рациональная фильтрация Ходжа $F_{\mathbb{Q}}^r H^n(X, \mathbb{Q})$ определяется как наибольшая $\mathbb{Q}$ -подструктура Ходжа в $F^r H^n(X, \mathbb{C}) \cap H^n(X, \mathbb{Q})$, где

$$F^r H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p \geq r}} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

– фильтрация Ходжа. *Общая гипотеза Ходжа* [38], уточненная Гротендиком [39], утверждает, что хорошо известное включение

$$F_{\text{arith}}^r H^n(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow F_{\mathbb{Q}}^r H^n(X, \mathbb{Q})$$

является равенством.

Геометрическая (или *уровневая*) *фильтрация* на гомологиях определяется так, что $F_{\text{geom}}^r H_n(X, \mathbb{Q})$ – подпространство в $H_n(X, \mathbb{Q})$, порожденное образами отображений

$$H_n(\tilde{Y}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Q}),$$

где Y пробегает все неприводимые подмногообразия X размерности $n - r$ [4, § 7.2, с. 67]. Изоморфизм двойственности Пуанкаре

$$H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H_{2d-n}(X, \mathbb{Q})$$

индуцирует изоморфизм

$$F_{\text{arith}}^r H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} F_{\text{geom}}^{r+d-n} H_{2d-n}(X, \mathbb{Q}).$$

В работе [4, § 7.3, 7.4, с. 68] представлены две фильтрации, называемые *топологической* и *фильтрацией соответствий*, на гомологиях X . Эти две фильтрации в действительности равны (согласно [4, теорема 7.3] для гладкого случая и согласно [40, теорема 4.3] для общего случая). Пусть X, Y – гладкие

проективные многообразия, $m = \dim Y$, $Z \hookrightarrow Y \times X$ – неприводимое подмногообразие размерности $m + r$, $r \geq 0$. Тогда класс гомологий Z принадлежит $H_{2m+2r}(Y \times X, \mathbb{Q})$. Используя формулу Кюннета и двойственность Пуанкаре, мы имеем

$$\begin{aligned} H_{2m+2r}(Y \times X, \mathbb{Q}) &\simeq \bigoplus_i H_{2m-i}(Y, \mathbb{Q}) \otimes H_{i+2r}(X, \mathbb{Q}) \\ &\simeq \bigoplus_i \operatorname{Hom}(H_i(Y, \mathbb{Q}), H_{i+2r}(X, \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

В итоге Z определяет гомоморфизм $\varphi_Z: H_i(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{i+2r}(X, \mathbb{Q})$.

Фильтрация соответствий на гомологиях определяется следующим образом: $F_{\text{сорт}}^r H_n(X, \mathbb{Q})$ – это подпространство в $H_n(X, \mathbb{Q})$, порожденное образами гомоморфизмов

$$\varphi_Z: H_{n-2r}(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Q}),$$

где Y пробегает все гладкие многообразия размерности $n - 2r$ и Z пробегает все неприводимые подмногообразия на $Y \times X$, равноразмерные над Y относительной размерности r .

Фридландер и Мазур показывают, что

$$F_{\text{сорт}}^r H_n(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow F_{\text{геом}}^r H_n(X, \mathbb{Q})$$

(см. [4, следствие 3, с. 71]), и высказывают гипотезу о том, что эти группы совпадают.

5.2. ТЕОРЕМА. *Гипотеза Фридландера–Мазура о совпадении фильтрации соответствий и геометрической фильтрации на гомологиях верна для гладкого комплексного проективного трехмерного многообразия X размерности Кодайры $\kappa < 3$.*

Действительно, стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца верна, и $B(\tilde{Y})$ верна для гладкой проективной модели $\tilde{Y}$ любого неприводимого подмногообразия $Y \hookrightarrow X$, потому что $B(\tilde{Y})$ верна для всех кривых и поверхностей. Поэтому гипотеза Фридландера–Мазура верна для X в силу [41, предложение 4.2].

Список литературы

1. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic geometry*, Internat. Colloq. (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
2. S. L. Kleiman, “The standard conjectures”, *Motives*, Part I (Seattle, WA, USA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 3–20.
3. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
4. E. M. Friedlander, B. Mazur, *Filtrations on the homology of algebraic varieties*, Mem. Amer. Math. Soc., **110**, no. 529, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
5. D. I. Lieberman, “Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds”, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.

6. С. Г. Танкеев, “Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, “Monoidal transformations and conjectures on algebraic cycles”, *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.
7. Н. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II”, *Ann. of Math. (2)*, **79** (1964), 109–326.
8. E. Bierstone, P. D. Milman, “Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant”, *Invent. Math.*, **128**:2 (1997), 207–302.
9. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 183–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex Abelian schemes over smooth projective curves”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 597–635.
10. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175–196; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds”, *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 175–196.
11. G. Shimura, “Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field”, *Amer. J. Math.*, **77**:1 (1955), 134–176.
12. S. Zucker, “Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric”, *Ann. of Math. (2)*, **109**:3 (1979), 415–476.
13. Ph. Griffiths, “Hodge Theory and Geometry”, *Bull. London Math. Soc.*, **36**:6 (2004), 721–757.
14. C. H. Clemens, “Degeneration of Kähler manifolds”, *Duke Math. J.*, **44**:2 (1977), 215–290.
15. W. Schmid, “Variation of Hodge structure: The singularities of the period mapping”, *Invent. Math.*, **22**:3–4 (1973), 211–319.
16. Ph. Griffiths, *Topics in transcendental algebraic geometry*, Ann. of Math. Stud., **106**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984.
17. П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с франц.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
18. G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
19. И. Р. Шафаревич, Б. Г. Авербух, Ю. Р. Вайнберг, А. Б. Жижченко, Ю. И. Манин, Б. Г. Мойшезон, Г. Н. Тюрин, А. Н. Тюрин, *Алгебраические поверхности*, Тр. МИАН, **75**, Наука, М., 1965.
20. K. Kodaira, “On the structure of compact complex analytic surfaces. II”, *Amer. J. Math.*, **88**:3 (1966), 682–721.
21. Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, London, 1970.
22. A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, *Smooth compactification of locally symmetric varieties. Lie Groups: History, Frontiers and Applications*, v. IV, Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1975.
23. K. Kodaira, “On compact analytic surfaces. II”, *Ann. of Math. (2)*, **77**:3 (1963), 563–626.
24. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
25. Y. Miyaoka, “On the Kodaira dimension of minimal threefolds”, *Math. Ann.*, **281**:2 (1988), 325–332.

26. F. Campana, “Orbifolds, special varieties and classification theory”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **54**:3 (2004), 499–630.
27. S. Mori, “Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 117–253.
28. M. Reid, “Minimal models of canonical 3-folds”, *Algebraic varieties and analytic varieties*, v. 1 (Tokyo, 1981), Adv. Stud. Pure Math., North-Holland, Amsterdam, 1981, 131–180.
29. S. Mori, “Classification of higher-dimensional varieties”, *Algebraic geometry* (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 269–331.
30. Y. Kawamata, “Abundance theorem for minimal threefolds”, *Invent. Math.*, **108**:2 (1992), 229–246.
31. J. Kollár, “Higher direct images of dualizing sheaves. I”, *Ann. of Math. (2)*, **123**:1 (1986), 11–42.
32. M. Reid, “Young person’s guide to canonical singularities”, *Algebraic geometry* (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 345–414.
33. R. Elkik, “Rationalité des singularités canoniques”, *Invent. Math.*, **64**:1 (1981), 1–6.
34. Y. Kawamata, “On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$ ”, *Math. Ann.*, **275**:4 (1986), 539–546.
35. В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log-flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 95–202.
36. В. А. Исковских, “Особенности на минимальных моделях алгебраических многообразий”, *Алгебраическая геометрия – 11, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **70**, ВИНТИ, М., 2001, 51–77; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Singularities on minimal models of algebraic varieties”, *J. Math. Sci. (New York)*, **106**:5 (2001), 3269–3285.
37. Ю. Г. Прохоров, *Индуктивные методы в теории минимальных моделей*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2001.
38. W. V. D. Hodge, “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proc. of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Cambridge, MA, 1950), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952, 182–192.
39. A. Grothendieck, “Hodge’s general conjecture is false for trivial reasons”, *Topology*, **8**:3 (1969), 299–303.
40. E. M. Friedlander, B. Mazur, “Correspondence homomorphisms for singular varieties”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **44**:3 (1994), 703–727.
41. E. M. Friedlander, “Filtrations on algebraic cycles and homology”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **28**:3 (1995), 317–343.

С. Г. ТАНКЕЕВ (S. G. TANKEEV)
 Владимирский государственный университет
 им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
 E-mail: tankeev@vpti.vladimir.ru

Поступило в редакцию
 28.12.2009
 20.04.2010