Общероссийский математический портал

А. Б. Сухов, О преобразованиях аналитических CR-структур, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 2, 101–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:49:18

УДК 517.55

А. Б. Сухов

О преобразованиях аналитических CR-структур

Установлена связь между CR-геометрией вещественно-аналитических подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и геометрией дифференциальных уравнений. Подход основан на рассмотрении биголоморфизмов невырожденного по Леви вещественно-аналитического CR-многообразия $\mathcal{M}$ как точечных симметрий Ли для голоморфной системы дифференциальных уравнений второго порядка, определяющей семейство Сегре многообразия $\mathcal{M}$. Это позволяет изучать группу биголоморфизмов многообразия $\mathcal{M}$ средствами геометрической теории дифференциальных уравнений. Приведены несколько примеров и приложений к CR-геометрии: результаты о конечномерности группы биголоморфизмов и точные оценки ее размерности, а также явная параметризация алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов.

Библиография: 37 наименований.

§ 1. Введение

Цель настоящей статьи – установить связь между CR-геометрией вещественно-аналитических порождающих подмногообразий в $\mathbb{C}^{n+m}$ и геометрической теорией дифференциальных уравнений. Изучим инфинитезимальные симметрии голоморфной вполне переопределенной инволютивной системы дифференциальных уравнений второго порядка с соотношениями первого порядка. Для любой такой системы предлагаемый метод позволяет определить, конечна ли размерность алгебры Ли ее инфинитезимальных симметрий, и дать точную оценку сверху для этой размерности и явную параметризацию группы симметрий.

С точки зрения комплексного анализа, наш интерес к этим вопросам объясняется тем, что семейство Сегре вещественно-аналитического порождающего невырожденного по Леви подмногообразия $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^{n+m}$ состоит из (графиков) решений некоторой вполне переопределенной инволютивной системы дифференциальных уравнений с t зависимыми и n независимыми переменными. (Если $\mathcal{M}$ имеет вещественную коразмерность больше 1, т.е. не является гиперповерхностью, то в систему добавляются еще некоторые уравнения первого порядка.) Биголоморфная инвариантность семейства Сегре означает, что всякий биголоморфный автоморфизм $\mathcal{M}$ есть симметрия Ли системы дифференциальных уравнений, определяющей семейство Сегре, т.е. переводит график каждого решения также в график решения. Покажем, как применить технику симметрий для изучения комплексной геометрии вещественно-аналитических подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и получить для их групп автоморфизмов точную верхнюю оценку размерности, а также явную параметризацию. Системы, описывающие семейства Сегре вещественно-аналитических подмногообразий, образуют подкласс в классе голоморфных

вполне переопределенных инволютивных систем с соотношениями первого порядка. Таким образом, мы рассматриваем значительно более общую ситуацию и обобщаем некоторые известные результаты об автоморфизмах CR-многообразий. Частные случаи результатов настоящей работы рассматривались в предыдущих работах автора [30]–[33].

Для простоты изложения будем использовать в настоящей работе локальные координаты. Однако наш подход является инвариантным и может быть изложен на бескоординатном языке пространств струй над голоморфными расслоениями и их морфизмов.

Автор благодарен Е. М. Чирке за полезные обсуждения, послужившие одной из причин появления этой работы.

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе напомним основные моменты метода Ли изучения инфинитезимальных симметрий дифференциальных уравнений. Они хорошо известны в геометрической теории дифференциальных уравнений и в дифференциальной геометрии, но для удобства читателя мы вкратце изложим их здесь. Дальнейшую информацию и доказательства всех утверждений этого параграфа можно найти в [6], [20], [21], [23].

2.1. Локальные группы преобразований и группы симметрий. Изучим частный, но геометрически важный класс голоморфных вполне переопределенных инволютивных систем дифференциальных уравнений второго порядка с соотношениями первого порядка, а именно системы вида

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}): u_{x_i x_j}^1 &= F_{ij}(x, u, u_x^1), \quad i, j = 1, \dots, n, \\ u_x^k &= H^k(x, u, u_x^1), \quad k = 2, \dots, m, \end{aligned}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – независимые переменные в пространстве $\mathbb{C}^n$, $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ – неизвестные голоморфные функции (зависимые переменные в $\mathbb{C}^m$), $u_x^j = (u_{x_1}^j, \dots, u_{x_n}^j)$, а F_{ij} , H^k – голоморфные функции (конечно, всегда предполагается, что $F_{ij} = F_{ji}$). Поскольку такие системы сильно переопределены, естественно предполагать, что выполняются условия совместности (условия интегрируемости типа Фробениуса). Этот класс систем естественно возникает в различных областях геометрии и теории дифференциальных уравнений.

Решениями такой системы являются голоморфные вектор-функции $u = u(x)$; обозначим график решения u через Γ_u . Напомним, что *группой симметрий* $\text{Sym}(\mathcal{S})$ системы $(\mathcal{S})$ называется любая локальная группа комплексных преобразований некоторой области в пространстве $\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_u^m$ независимых и зависимых переменных такая, что для всякого $g \in G$ и всякого решения $u(x)$ системы $(\mathcal{S})$ образ $g(\Gamma_u)$, если он определен, тоже является графиком некоторого решения $(\mathcal{S})$. Такое отображение g называется *точечной симметрией Ли* системы $(\mathcal{S})$. Частно наиболее интересна группа *всех* таких симметрий. Для настоящей работы это не очень важно, так как наши методы позволяют описать *любую* группу симметрий этой системы. Будем всюду далее понимать под группой симметрий именно эту наибольшую группу. Напомним также, что всякая локальная группа Ли G

полностью определяется векторными полями $\{X_1, \dots, X_d\}$, образующими базис ее алгебры Ли, и что она явно параметризуется экспоненциальным отображением $e^{\sum t_j X_j} = \text{Pe}^{t_j X_j}$; параметры $t_1, \dots, t_d$ – локальные координаты на G .

2.2. Расслоения струй и продолжения групповых действий. Пусть M, N – комплексные многообразия и отображение $f: M \rightarrow N$ голоморфно в окрестности точки $p \in M$; обозначим его r -струю в точке p через $j_p^r(f)$. Как обычно, через $J^r(M, N)$ обозначается пространство r -струй отображений из M в N , являющееся голоморфным расслоением над $M \times N$; естественная проекция $\pi_{M \times N}: J^r(M, N) \rightarrow M \times N$ задается формулой $\pi_{M \times N}(j_p^r(f)) = (p, f(p))$. Иногда используются еще две естественные проекции $\pi_M: J^r(M, N) \rightarrow M$ и $\pi_N: J^r(M, N) \rightarrow N$, заданные следующим образом: $\pi_M(j_p^r(f)) = p$ и $\pi_N(j_p^r(f)) = f(p)$.

Фиксируя локальные координаты $x = (x_1, \dots, x_n)$ на M и $u = (u^1, \dots, u^m)$ на N , введем следующую систему локальных координат h на $J^r(M, N)$. Положим

$$u^{(1)} = (u_1^1, \dots, u_n^1, \dots, u_1^m, \dots, u_n^m), \quad \dots, \quad u^{(s)} = (u_\alpha^j),$$

где $j = 1, \dots, m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_s$. Здесь и далее используются обозначения $\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_r}}$ для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_r$ и $|\alpha| := r$. Карта h задается равенствами

$$\begin{aligned} h: j_p^r(f) &\mapsto (x_j, u^k, u^{(1)}, \dots, u^{(r)}), \\ x_j &= x_j(p), \quad u^k = u^k(f(p)), \\ u_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^j &= \partial^\alpha (u^j \circ f \circ x^{-1})(x(p)), \quad 1 \leq s \leq r. \end{aligned}$$

Эти координаты называются *естественными координатами* на $J^r(M, N)$.

Пусть G – локальная группа биголоморфных преобразований, действующая на $M \times N$. Фиксируем точку $(p, q) \in M \times N$ и функцию f_0 , голоморфную в окрестности p и удовлетворяющую равенству $q = f_0(p)$. Всякий *достаточно близкий к тождественному* биголоморфизм $g \in G$, $g: (x, u) \mapsto (x^*, u^*)$, канонически поднимается до послойного локального биголоморфизма $g^{(r)}$ окрестности U струи $j_p^r(f_0)$ в пространстве $J^r(M, N)$, определяемого следующим образом. Пусть функция $u = f(x)$ голоморфна в точке p , $j_p^r(f) \in U$, $q = f(p)$ и функция $u^* = f^*(x^*)$ есть образ u при g (т.е. график f^* является образом при g графика f вблизи точки $(p^*, q^*) = g(p, q)$). Тогда струя $j_{p^*}^r(f^*)$ по определению является образом струи $j_p^r(f)$ при $g^{(r)}$. Отображение $g^{(r)}$ называется *r -продолжением* отображения g . Это понятие определено для любого биголоморфного в окрестности точки $p \in \mathbb{C}^n$ отображения g со следующим свойством: g переводит график $u = f(x)$ всякой функции f , голоморфной в точке p , в график $u^* = f^*(x^*)$. Такие преобразования называются *точечными преобразованиями Ли*. В частности, всякая однопараметрическая группа Ли G таких преобразований канонически поднимается до однопараметрической группы Ли $G^{(r)}$ преобразований многообразия $J^r(M, N)$, которая называется *r -продолжением* группы G . Инфинитезимальная образующая $X^{(r)}$ группы $G^{(r)}$ называется *r -продолжением* инфинитезимальной образующей X группы G .

Поскольку наши рассуждения чисто локальны, будем предполагать M, N открытыми подмножествами в $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ соответственно. В этом случае будем записывать $J^r(n, m)$ вместо $J^r(M, N)$.

Рассмотрим векторное поле

$$X(x, u) = \sum_{j=1}^n \theta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \eta^k(x, u) \frac{\partial}{\partial u^k},$$

записанное в локальных координатах. Его r -продолжение в естественных координатах на пространстве струй $J^r(n, m)$ имеет вид

$$X^{(r)} = X + \sum_{j, \mu} \eta_j^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_r, \mu} \eta_{i_1 i_2 \dots i_r}^\mu \frac{\partial^r}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_r}^\mu}.$$

Чтобы вычислить коэффициенты этого продолжения, определим оператор *полной производной*:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_k u_i^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{\mu, j} u_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + \dots.$$

Следующая рекуррентная формула для коэффициентов продолжения является основным вычислительным средством теории Ли (см., например, [6]):

$$\eta_i^\mu = D_i \eta^\mu - \sum_j (D_i \theta^j) u_j^\mu, \quad \eta_{i_1 \dots i_{r-1} i_r}^\mu = D_{i_r} \eta_{i_1 \dots i_{r-1}}^\mu - \sum_j (D_{i_r} \theta^j) u_{i_1 \dots i_{r-1} j}^\mu.$$

В частности, второе продолжение $X^{(2)}$ задается формулой

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{\mu, i_1, i_2} \eta_{i_1 i_2}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\mu},$$

где $X^{(1)} = X + \sum_{\mu, i} \eta_i^\mu \frac{\partial}{\partial u_i^\mu}$. Следующее утверждение очевидно вытекает из приведенной выше рекуррентной формулы.

ЛЕММА 2.1. *Коэффициенты 1-продолжения и 2-продолжения допускают следующие представления:*

а) *каждое $\eta_{i_1 i_2}^\mu$ имеет вид*

$$\sum_{|\alpha| \leq 3} P_{i_1 i_2 \alpha}^\mu (u^{(1)})^\alpha + \sum_{|\beta|=1} Q_{i_1 i_2 \beta}^\mu (u^{(2)})^\beta,$$

где каждое $P_{i_1 i_2 \alpha}^\mu$ есть целочисленная линейная комбинация частных производных второго порядка от θ^i и η^j , а каждое $Q_{i_1 i_2 \beta}^\mu$ есть целочисленная линейная комбинация частных производных первого порядка от θ^i и η^j ;

б) каждый коэффициент η_i^μ есть полином степени 2 от компонент вектора $u^{(1)}$, а коэффициенты этого полинома суть целочисленные линейные комбинации частных производных первого порядка от θ^i и η^j .

С помощью прямого вычисления получим следующую формулу для коэффициентов $X^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \eta_{i_1}^\mu &= \eta_{x_{i_1}}^\mu + \sum_k u_{i_1}^k \eta_{u^k}^\mu - \sum_j \left(\theta_{x_{i_1}}^j + \sum_k u_{i_1}^k \theta_{u^k}^j \right) u_j^\mu, \\ \eta_{i_1 i_2}^\mu &= \eta_{x_{i_2} x_{i_1}}^\mu + u_{i_1}^\mu [\eta_{x_{i_2} u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2} x_{i_1}}^{i_1}] + u_{i_2}^\mu [\eta_{x_{i_1} u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2} x_{i_1}}^{i_2}] + \sum_{k \neq \mu} u_{i_1}^k \eta_{x_{i_2} u^k}^\mu \\ &\quad + \sum_{k \neq \mu} u_{i_2}^k \eta_{x_{i_1} u^k}^\mu - \sum_{k \neq i_1, k \neq i_2} u_k^\mu \theta_{x_{i_2} x_{i_1}}^k - \sum_{k; j \neq i_2} u_{i_1}^k u_j^\mu \theta_{x_{i_2} u^k}^j \\ &\quad - \sum_{i; s \neq i_1} u_{i_2}^i u_s^\mu \theta_{x_{i_1} u^i}^s + \sum_{r \neq \mu, p \neq \mu} u_{i_2}^r u_{i_1}^p \eta_{u^r u^p}^\mu \\ &\quad + \sum_{t \neq \mu} u_{i_1}^t u_{i_2}^\mu [-\theta_{x_{i_2} u^t}^{i_2} + \eta_{u^\mu u^t}^\mu] + \sum_{q \neq \mu} u_{i_2}^q u_{i_1}^\mu [-\theta_{u^q x_{i_1}}^{i_1} + \eta_{u^q u^\mu}^\mu] \\ &\quad + [\eta_{u^\mu u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2} u^\mu}^{i_2} - \theta_{x_{i_1} u^\mu}^{i_1}] u_{i_1}^\mu u_{i_2}^\mu - \sum_{a, b, s} u_{i_2}^a u_{i_1}^b u_s^\mu \theta_{u^a u^b}^s + \Lambda_{i_1 i_2}^\mu \end{aligned}$$

при $i_1 \neq i_2$ и

$$\begin{aligned} \eta_{ii}^\mu &= \eta_{x_i x_i}^\mu + u_i^\mu [2\eta_{x_i u^\mu}^\mu - \theta_{x_i x_i}^i] + 2 \sum_{k \neq \mu} u_i^k \eta_{x_i u^k}^\mu - \sum_{k \neq i} u_k^\mu \theta_{x_i x_i}^k - 2 \sum_{k; j \neq i} u_i^k u_j^\mu \theta_{x_i u^k}^j \\ &\quad + \sum_{r \neq \mu, p \neq \mu} u_i^r u_{i_1}^p \eta_{u^r u^p}^\mu + 2 \sum_{t \neq \mu} u_i^t u_i^\mu [-\theta_{x_i u^t}^i + \eta_{u^\mu u^t}^\mu] + [\eta_{u^\mu u^\mu}^\mu - 2\theta_{x_i u^\mu}^i] (u_i^\mu)^2 \\ &\quad - \sum_{a, b, s} u_i^a u_i^b u_s^\mu \theta_{u^a u^b}^s + \Lambda_{ii}^\mu, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{i_1 i_2}^\mu &= \sum_s u_{i_2 i_1}^s \eta_{u^s}^\mu - \sum_p u_{i_2 p}^\mu \theta_{x_{i_1}}^p - \sum_j u_{i_1 j}^\mu \theta_{x_{i_2}}^j \\ &\quad - \sum_{p, q} u_{i_2 i_1}^q u_p^\mu \theta_{u^q}^p - \sum_{p, q} u_{i_2 p}^\mu u_{i_1}^q \theta_{u^q}^p - \sum_{s, j} u_{i_1 j}^\mu u_{i_2}^s \theta_{u^s}^j. \end{aligned}$$

Для точечного преобразования Ли можно явно вычислить продолжения всех порядков с помощью индукции (см., например, [6]). Рассмотрим преобразование $f: (x, u) \mapsto (x^*, u^*) = (X, U)$ вида $x^* = X(x, u) = (X^1, \dots, X^n)$ и $u^* = U(x, u) = (U^1, \dots, U^m)$. Имеем

$$\begin{pmatrix} U_1^\mu \\ \dots \\ U_n^\mu \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 U^\mu \\ \dots \\ D_n U^\mu \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{pmatrix} U_{i_1 \dots i_{k-1} 1}^\mu \\ \dots \\ U_{i_1 \dots i_{k-1} n}^\mu \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 U_{i_1 \dots i_{k-1}}^\mu \\ \dots \\ D_n U_{i_1 \dots i_{k-1}}^\mu \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $A = (D_i X^j)_{i, j=1, \dots, n}$ (i – номер строки). Для простоты обозначений следуем в этих формулах соглашению, что $U_{i_k i_s} = U_{i_s i_k}$ и $u_{i_k i_s} = u_{i_s i_k}$ для любых индексов.

2.3. Симметрии дифференциальных уравнений. Голomorphicное векторное поле, порождающее однопараметрическую группу симметрий системы $(\mathcal{S})$, называется *инфинитезимальной симметрией* этой системы. Такие поля образуют алгебру Ли $\text{Lie}(\mathcal{S})$ относительно скобок Ли. Точечное преобразование f называется *точечным преобразованием Ли между $(\mathcal{S})$ и $(\widehat{\mathcal{S}})$* , если оно переводит график любого решения $(\mathcal{S})$ в график некоторого решения $(\widehat{\mathcal{S}})$.

Пусть $(\mathcal{S})$ – голоморфная система дифференциальных уравнений порядка r . Рассмотрим ее решения на M со значениями в N . Эта система задает комплексное аналитическое подмножество $(\mathcal{S}_r)$ в пространстве струй $J^{(r)}(M, N)$, полученное заменой входящих в $(\mathcal{S})$ производных от зависимых переменных на соответствующие естественные координаты пространства струй.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $(\mathcal{S})$ – голоморфное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка: $u_{xx} = F(x, u, u_x)$, $(x, u) \in \mathbb{C}^2$. Пусть (x, u, u_1, u_{11}) – естественные координаты на пространстве струй $J^2(1, 1)$. Тогда $(\mathcal{S}_2)$ – комплексное 3-мерное подмногообразие в $J^2(1, 1)$, заданное уравнением $u_{11} = F(x, u, u_1)$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $(\mathcal{S})$ – голоморфная вполне переопределенная система второго порядка: $u_{x_i x_j}^k = F_{ij}^k(x, u, u_x)$, $k = 1, \dots, m$, $i, j = 1, \dots, n$, $(x, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$. Тогда $(\mathcal{S}_2)$ – комплексное подмногообразие в $J^2(n, m)$, заданное уравнениями $u_{ij}^k = F_{ij}^k(x, u, u^{(1)})$ в естественных координатах на $J^2(n, m)$.

Поскольку $\pi_M: J^r(M \times N) \rightarrow M$ также является расслоением над M , каждое голоморфное отображение $u: M \rightarrow N$ задает сечение этого расслоения по формуле $p \rightarrow j_p^r(u)$. Таким образом, u – голоморфное решение системы $(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда график сечения $p \mapsto j_p^r(u)$ содержится в аналитическом подмножестве $(\mathcal{S}_r)$.

Если $(\mathcal{S}_r)$ – подмногообразие в $J^r(M, N)$, то говорят, что система $(\mathcal{S})$ имеет *максимальный ранг*. Таким образом, каждая система $(\mathcal{S})$ максимального ранга отождествляется с комплексным подмногообразием в голоморфном расслоении $\pi_{M \times N}: J^r(M \times N) \rightarrow M \times N$, а ее решения – с сечениями голоморфного расслоения $\pi_M: J^r(M \times N) \rightarrow M$. Как видно из предыдущих примеров, вполне переопределенные системы всегда имеют максимальный ранг. Система $(\mathcal{S})$ называется *локально регулярной*, если для любой точки $P \in (\mathcal{S}_r)$ с естественной проекцией $\pi_{M \times N}(P) = (p, q) \in M \times N$ существует решение $u(x)$ системы $(\mathcal{S})$, голоморфное вблизи p и такое, что $j_p^r(u) = P$.

Будем говорить, что подмножество $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+m}$ инвариантно относительно голоморфного векторного поля X , если X порождает (локальную) комплексную однопараметрическую группу биголморфизмов Ω . Если Ω – комплексное подмногообразие, то Ω инвариантно относительно X тогда и только тогда, когда X касательно к Ω .

Важность этих понятий поясним следующим простым, но фундаментальным утверждением (см., например, [20], [23]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Векторное поле X является инфинитезимальной симметрией локально регулярной системы $(\mathcal{S})$ порядка r и максимального ранга тогда и только тогда, когда многообразие $(\mathcal{S}_r)$ инвариантно относительно r -продолжения $X^{(r)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – локальный биголоморфизм базы $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, переводящий график любого решения $(\mathcal{S})$ в график другого решения. Поскольку система локально регулярна, из определения r -продолжения следует, что $f^{(r)}$ – локальный биголоморфизм $(\mathcal{S}_r)$. Обратно, пусть $f^{(r)}$ – локальный биголоморфизм $(\mathcal{S}_r)$. Каждая точка множества $(\mathcal{S}_r)$ есть r -струя некоторого решения. Рассмотрим сечение $x \mapsto j_x^r(u)$, определенное решением u . Поскольку $f^{(r)}$ переводит его в сечение $x^* \mapsto j_{x^*}^r(u^*)$, заданное другим решением, видно, что f переводит график u в график u^* . Таким образом, отображение f есть симметрия Ли системы $(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда его r -продолжение есть биголоморфизм многообразия $(\mathcal{S}_r)$. Применяя это к однопараметрической группе, порожденной векторным полем X , получаем требуемое утверждение.

Из теоремы Коши следует, что всякая система обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенная относительно производных старшего порядка, является локально регулярной. В случае нескольких независимых переменных теорема Фробениуса налагает дополнительные условия интегрируемости.

ПРИМЕР 2.3. Системы из примера 2.2 имеют максимальный ранг, но не всегда являются локально регулярными. Поэтому рассмотрим следующее условие интегрируемости: распределение на касательном расслоении пространства струй $J^1(n, m)$, заданное дифференциальными формами

$$\omega_i^k = du_i^k - \sum_j F_{ij}^k(x, u, u^{(1)}) dx_j, \quad \phi^k = du^k - \sum_i u_i^k dx_i,$$

является вполне интегрируемым. Назовем такие системы *вполне интегрируемыми* или *инволютивными*. По теореме Фробениуса всякая инволютивная система локально регулярна. В частности, к инволютивным системам применимо предложение 2.1.

§ 3. Многообразия Сегре, голоморфные отображения и симметрии

3.1. Вещественно-аналитические многообразия. Обозначим через $Z = (z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ стандартные координаты в $\mathbb{C}^{n+m}$. Поскольку наши рассуждения локальны, считаем (обычно без явного упоминания), что все окрестности и области настолько малы, насколько это нужно. Под *вещественно-аналитическим многообразием* $\mathcal{M}$ коразмерности m в $\mathbb{C}^{n+m}$ понимаем множество нулей $\mathcal{M} = \{Z: r(Z, \bar{Z}) = 0\}$ вещественно-аналитического $\mathbb{R}^m$ -значного отображения $r = (r^1, \dots, r^m)$ максимального ранга. Такое многообразие называется *порождающим*, если $\partial r_1 \wedge \dots \wedge \partial r_m \neq 0$. В настоящей статье рассматриваются только порождающие многообразия. *Голоморфное касательное пространство* $H_p(\mathcal{M})$ в точке $p \in \mathcal{M}$ есть максимальное комплексное подпространство касательного пространства к $\mathcal{M}$ в точке p . Многообразие $\mathcal{M}$ называется *невыврожденным по Леви в точке p* , если выполняются следующие два условия:

- (i) некоторая линейная комбинация форм Леви $\mathcal{L}_p^s(u, v) = \sum_{j,k} r_{z_j \bar{z}_k}^s(p) u_j \bar{v}_k$, $u, v \in H_p(\mathcal{M})$, является невырожденной эрмитовой формой на $H_p(\mathcal{M})$;
- (ii) эрмитовы формы $\mathcal{L}_p^s(u, v)$ линейно независимы.

Будем говорить, что многообразие $\mathcal{M}$ невырождено по Леви, если оно невырождено по Леви в каждой точке. Некоторые авторы называют $\mathcal{M}$ невырожденным по Леви, если вместо (i) выполнено следующее более слабое условие: форма Леви $\mathcal{M}$ (рассматриваемая как векторнозначная эрмитова форма) имеет тривиальное ядро. Наши методы легко переносятся на этот случай (и даже на более общую ситуацию), но в настоящей работе для простоты обозначений ограничимся классом многообразий, указанным выше. Не теряя общности, будем считать, что все рассматриваемые многообразия $\mathcal{M}$ содержат начало координат.

Отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, определенное и биголоморфное в окрестности начала координат, называется *биголоморфизмом* или (*биголоморфным*) *автоморфизмом* многообразия $\mathcal{M}$. Такие отображения образуют группу относительно композиции, называемую *группой автоморфизмов* $\mathcal{M}$ и обозначаемую $\text{Aut}(\mathcal{M})$. В настоящей работе $\text{Aut}(\mathcal{M})$ всегда рассматривается как *локальная группа*, т.е. все преобразования из $\text{Aut}(\mathcal{M})$ считаются близкими к тождественному. В частности, группа $\text{Aut}(\mathcal{M})$ однозначно восстанавливается по своей алгебре Ли $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M})$ с помощью экспоненциального отображения. Элементами этой алгебры Ли являются векторные поля, голоморфные в окрестности начала координат и порождающие вещественные однопараметрические группы автоморфизмов из $\text{Aut}(\mathcal{M})$; назовем их *инфинитезимальными автоморфизмами* многообразия $\mathcal{M}$.

3.2. Семейства Сегре. Для точек $\zeta \in \mathbb{C}^{n+m}$, достаточно близких к $\mathcal{M}$, рассмотрим комплексные подмногообразия $Q(\zeta) = \{Z: r(Z, \bar{\zeta}) = 0\}$. Они называются *многообразиями Сегре* (их впервые изучал Б. Сегре [24]) и были введены в современную теорию Ш.П. Чженем [10] и С. Вебстером [37]. Основное свойство многообразий Сегре – их биголоморфная инвариантность: для любого автоморфизма $f \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ и каждой точки ζ , достаточно близкой к началу координат, имеем $f(Q(\zeta)) = Q(f(\zeta))$. Для применения нашего подхода неудобно то, что в определение поверхностей Сегре входит комплексное сопряжение. Поэтому рассмотрим комплексное многообразие $Q^*(\zeta) = Q(\bar{\zeta})$. Тогда для всех $f \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ имеем $f(Q^*(\zeta)) = Q^*(f(\zeta))$, т.е. f переводит каждый элемент семейства $\{Q^*(\zeta)\}_{\zeta}$ также в элемент этого семейства. Далее называем именно $Q^*(\zeta)$ многообразиями Сегре и опускаем звездочку.

Б. Сегре [24] заметил, что для невырожденной по Леви вещественно-аналитической гиперповерхности $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^2$ множеством многообразий Сегре (называемое *семейством Сегре* многообразия $\mathcal{M}$) является регулярное двухпараметрическое семейство голоморфных кривых, и потому оно представляет собой семейство траекторий решений голоморфного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Инвариантность семейства Сегре относительно $\text{Aut}(\mathcal{M})$ означает, что каждый биголоморфизм $\mathcal{M}$ задает симметрию этого дифференциального уравнения. Важность наблюдения Сегре состоит в том, что оно связывает CR-геометрию с геометрией дифференциальных уравнений.

Изучение симметрий голоморфных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка было проведено (и в некотором смысле завершено) в работе [34] (см. также [12], [21]). В частности, такая группа всегда является комплексной группой Ли размерности не более 8. Этот важный факт позволил Сегре заключить, что $\text{Aut}(\mathcal{M})$ есть вещественная группа Ли.

Идея Сегре естественно обобщается на случай высших размерностей.

3.3. Семейства Сегре для многообразий большей коразмерности.

Введем класс систем, играющих основную роль в настоящей работе.

Пусть $(\mathcal{S})$ – голоморфная система второго порядка, дополненная соотношениями первого порядка вида $u_{x_i x_j}^1 = F_{ij}(x, u, u_x^1)$, $i, j = 1, \dots, n$, $u_{x_j}^k = G^k(x, u, u_x^1)$, $k = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Для простоты обозначений введем зависимые переменные $w := u^1$ и $v = (u^2, \dots, u^m)$ таким образом, что $u = (w, v)$. Эти обозначения индуцируют разложение $u^{(1)} = (w^{(1)}, v^{(1)})$ естественных координат пространства $J^1(n, m)$. Тогда рассматриваемую систему можно переписать в виде $w_{x_i x_j} = F_{ij}(x, w, v, w_x)$, $v_x^k = G^k(x, w, v, w_x)$, где $w_x = (w_{x_1}, \dots, w_{x_n})$, $v_x^k = (v_{x_1}^k, \dots, v_{x_n}^k)$, $G^k = (G_1^k, \dots, G_n^k)$. Обозначим также $v_x = (u_x^2, \dots, u_x^m)$, $G = (G^2, \dots, G^m)$.

Рассмотрим комплексное подмногообразие Γ пространства струй $J^1(n, m)$, заданное как $(x, u, u^{(1)})$: $v^{(1)} = G(x, u, w^{(1)})$ в естественных координатах. Тогда $(x, u, w^{(1)})$ – голоморфные локальные координаты на Γ , и можно определить на Γ следующие 1-формы:

$$\begin{aligned} \omega_i &= dw_i - \sum_j F_{ij}(x, u, w^{(1)}) dx_j, & \phi^1 &= dw - \sum_j w_j dx_j, \\ \phi^k &= dv^k - \sum_j G_j^k(x, u, w^{(1)}) dx_j, & k &> 1. \end{aligned}$$

Скажем, что система $(\mathcal{S})$ *вполне интегрируема* или *инволютивна*, если распределение, заданное этими формами на касательном расслоении к Γ , вполне интегрируемо, т. е. удовлетворяет условию Фробениуса. По теореме Фробениуса всякая инволютивная система $(\mathcal{S})$ локально регулярна, т. е. для каждой точки комплексного подмногообразия $(\mathcal{S}_2)$: $w_{ij} = F_{ij}(x, u, w^{(1)})$, $v^{(1)} = G(x, u, w^{(1)})$, пространства $J^2(n, m)$ существует решение системы $(\mathcal{S})$, 2-струя которого совпадает с этой точкой. По критерию Фробениуса графики решений системы $(\mathcal{S})$ образуют голоморфное слоение многообразия Γ на n -мерные слои, зависящие от $n + m$ параметров тогда и только тогда, когда $(\mathcal{S})$ инволютивна.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ – невырожденная по Леви квадратика в $\mathbb{C}^{n+m}$, заданная уравнениями $w_k + \bar{w}_k = \langle L^k(z), \bar{z} \rangle$, $k = 1, \dots, m$, где L^k – эрмитовы операторы на $\mathbb{C}^n$, а $\langle z, \zeta \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \zeta_j$. Можно считать эрмитову форму $\langle L^1(z), \bar{z} \rangle$ невырожденной. Точке $(\zeta, \omega) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ отвечает многообразие Сегре $Q(\zeta, \omega) = \{(z, w) : w_k + \omega_k = \langle L^k(z), \zeta \rangle\}$. Если рассматривать $x := z$ как независимые переменные, а $u := w$ как зависимые, то $Q(\zeta, \omega)$ – это график u : $Q(\zeta, \omega) = \{(x, u) : u^k + \omega_k = \langle L^k(x), \zeta \rangle\}$.

Построим систему, общее решение которой задается указанным семейством. Прежде всего, для всех k, i, j имеем уравнения $u_{x_i x_j}^k = 0$. Но этого, вообще говоря, недостаточно, так как наше семейство решений зависит только от $n + m$ параметров. Следовательно, необходимы дополнительные соотношения. Рассматривая первые частные производные, получаем систему линейных алгебраических уравнений на ζ : $u_{x_i}^1 = \langle L^1(x)_{x_i}, \zeta \rangle$. Поскольку ранг этой системы равен n , имеем $\zeta = Nu_x^1$ для некоторой $(n \times n)$ -матрицы N . Получаем, что $u_x^k = A^k u_x^1$,

$k = 2, \dots, m$, где A^k – некоторые матрицы. Тем самым, множество решений системы $u_{x_i x_j}^1 = 0$, $u_x^k = A^k u_x^1$, $k = 2, \dots, m$, совпадает с семейством Сегре квадррики $\mathcal{M}$. Назовем такие системы *плоскими*.

Эта конструкция немедленно обобщается на любые невырожденные по Леви вещественно-аналитические подмногообразия $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^{n+m}$, проходящие через начало координат. Действительно, в окрестности начала координат квадррика $\mathcal{M}$ записывается в виде

$$w_k + \bar{w}_k = \langle L^k(z), \bar{z} \rangle + o(|Z|^2), \quad k = 1, \dots, m.$$

Точке $(\zeta, \omega) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ отвечает многообразие Сегре

$$Q(\zeta, \omega) = \{(z, w) : w_k + \omega_k = \langle L^k(z), \zeta \rangle + R^k(z, \zeta, \omega)\}$$

(после применения теоремы о неявной функции, если необходимо), где R^k не содержит членов порядка не больше 2. Рассмотрим $x := z$ как независимые переменные, а $u := w$ как зависимые. Тогда $Q(\zeta, \omega)$ – график u , т.е. имеем

$$Q(\zeta, \omega) = \{(x, u) : u^k + \omega_k = \langle L^k(x), \zeta \rangle + R^k(x, \zeta, \omega)\}. \quad (3.1)$$

Рассматривая первые частные производные, получаем систему

$$u_{x_i}^k = \langle L^k(x)_{x_i}, \zeta \rangle + R_{x_i}^k(x, \zeta, \omega). \quad (3.2)$$

Применяя к (3.1), (3.2) теорему о неявной функции, видим, что $(\zeta, \omega) = \varphi(x, u, w_x)$, где φ – голоморфная функция. Теорема о неявной функции позволяет явно вычислить по индукции члены любого порядка в разложении φ , так что наш метод вполне конструктивен. Исключая с помощью φ параметры ζ, ω из тех уравнений (3.1), которые еще не использовались, получаем голоморфные уравнения вида $u_x^k = A^k u_x^1 + \psi(x, u, u_x^1)$, $k = 2, \dots, m$, где ψ – голоморфная функция без членов порядка не больше 1.

Рассмотрим теперь частные производные второго порядка $u_{x_i x_j}^1 = R_{x_i x_j}^1(x, \zeta, \omega)$ и заменим ζ, ω на φ . Получим голоморфные уравнения $w_{x_i x_j} = F_{ij}(x, u, w_x)$. Таким образом, $u(x)$ удовлетворяет голоморфной системе дифференциальных уравнений $(\mathcal{S}\mathcal{M})$: $w_{x_i x_j} = F_{ij}(x, u, w_x)$, $i \leq j$, $v_x^k = A^k w_x + G^k(x, u, w_x)$. Поскольку решения этой системы, приведенные в (3.1), зависят от $n + m$ параметров, то из теоремы Фробениуса следует, что эта система инволютивна (и, в частности, (3.1) представляет все решения этой системы).

Если $\mathcal{M}$ – гиперповерхность, то система $(\mathcal{S}\mathcal{M})$ имеет вид $u_{x_i x_j}^k = F_{ij}^k(x, u, u_x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, и не содержит соотношений первого порядка. Важность этого класса систем дифференциальных уравнений была замечена Чженем [10], решившим задачу эквивалентности для систем такого класса с одним зависимым переменным (см. также работу [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При выборе другой системы локальных определяющих функций для $\mathcal{M}$ построенная выше система $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ тоже изменится, но эта новая система имеет то же множество решений (семейство Сегре многообразия $\mathcal{M}$). Поэтому группа симметрий системы $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ не зависит от выбора локальных определяющих функций для $\mathcal{M}$. Биголоморфная инвариантность семейства Сегре многообразия $\mathcal{M}$ означает, что каждый биголоморфизм $\mathcal{M}$ есть симметрия построенной системы. Если $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ – локальный биголоморфизм вещественно-аналитических многообразий, то f является точечным преобразованием Ли между системами $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{S}_{\mathcal{M}'}$, определяющими их семейства Сегре. В этом смысле определение системы $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ не зависит от локальных координат и определяющих функций многообразия $\mathcal{M}$, и соответствие между многообразием $\mathcal{M}$ и системой $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ является *каноническим*.

Поскольку всякий биголоморфизм $\mathcal{M}$ есть симметрия $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$, то в случае, когда $\text{Sym}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ – конечномерная группа Ли, множество $\text{Aut}(\mathcal{M})$ есть ее конечномерная вещественная подгруппа Ли (так как она, очевидно, замкнута). В частности, если голоморфное векторное поле X порождает вещественную однопараметрическую подгруппу в $\text{Aut}(\mathcal{M})$ (т. е. экспоненциальное отображение поля X с вещественным временем t порождает вещественную однопараметрическую группу автоморфизмов $\mathcal{M}$), то X – инфинитезимальная симметрия системы $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ (т. е. экспоненциальное отображение поля X с комплексным временем t порождает комплексную однопараметрическую группу симметрий системы $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$).

Чтобы получить точную оценку размерности $\text{Aut}(\mathcal{M})$, напомним полезное наблюдение Э. Картана [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\text{Sym}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ – конечномерная комплексная группа Ли. Тогда $\text{Aut}(\mathcal{M})$ – ее вещественная подгруппа Ли, вложенная в $\text{Sym}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ как вполне вещественное подмногообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – голоморфное векторное поле из $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M})$. Поскольку многообразие $\mathcal{M}$ порождающее, X нигде не обращается в нуль на некотором открытом всюду плотном подмножестве $U \subset \mathcal{M}$. После локальной биголоморфной замены координат поле X в окрестности точки $p \in U$ можно представить в виде $X = \partial/\partial Z_1$. В этих координатах вещественная однопараметрическая группа биголоморфизмов $\mathcal{M}$, порожденная полем X , состоит из сдвигов $Z_1 \mapsto Z_1 + t$, $Z_j \mapsto Z_j$, $j = 2, \dots, n + m$, $t \in \mathbb{R}$. Если поле iX тоже принадлежит $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M})$, то многообразие $\mathcal{M}$ инвариантно относительно комплексной группы сдвигов $Z_1 \mapsto Z_1 + t$, $Z_j \mapsto Z_j$, $j = 2, \dots, n + m$, $t \in \mathbb{C}$. Это означает, что многообразие $\mathcal{M}$ в окрестности точки p биголоморфно декартову произведению $\mathbb{C} \times M'$, где M' – некоторое вещественное подмногообразие в комплексном аффинном пространстве меньшей размерности. Но это противоречит невырожденности по Леви $\mathcal{M}$. Следовательно, $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M})$ есть вполне вещественное подпространство в $\text{Lie}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$.

Подчеркнем, что системы, определяющие семейства Сегре, образуют очень узкий подкласс в классе всех голоморфных инволютивных систем второго порядка с соотношениями первого порядка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Семейство Сегре вещественно-аналитического невырожденного по Леви подмногообразия $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^{n+m}$ есть общее решение некоторой голоморфной вполне переопределенной инволютивной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с n независимыми и одним зависимым переменными и с соотношениями первого порядка. Эта система канонически (в смысле предыдущего замечания) связана с $\mathcal{M}$ и обозначается $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$. Всякий биголоморфизм $\mathcal{M}$ есть точечная симметрия Ли этой системы.

Если $\text{Sym}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ – конечномерная комплексная группа Ли, то $\text{Aut}(\mathcal{M})$ – ее вещественная подгруппа Ли, вложенная в $\text{Sym}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$ как вполне вещественное подмногообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Э. Картан [8] доказал, что если M – невырожденная по Леви гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$, то вещественная размерность $\text{Aut}(\mathcal{M})$ совпадает с комплексной размерностью $\text{Sym}(\mathcal{S}_{\mathcal{M}})$. Его доказательство легко переносится на общую ситуацию.

В заключение параграфа приведем несколько примеров.

ПРИМЕР 3.1. Легко показать (см. [17]), что всякая 6-мерная квадрика в $\mathbb{C}^4$ линейно эквивалентна одной из следующих квадрик:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^1: w_1 + \bar{w} &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2, & w_2 + \bar{w}_2 &= z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2, \\ \mathcal{M}^2: w_1 + \bar{w}_1 &= z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2, & w_2 + \bar{w}_2 &= z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1, \\ \mathcal{M}^3: w_1 + \bar{w}_1 &= z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1, & w_2 + \bar{w}_2 &= z_1 \bar{z}_1.\end{aligned}$$

Рассматривая независимые переменные $x = z$ и зависимые переменные $u = w$, получаем системы, определяющие соответствующие семейства Сегре:

$$\begin{aligned}(\mathcal{S})^1: u_{x_i x_j}^1 &= 0, \quad i, j = 1, 2, \quad u_{x_1}^2 = u_{x_1}^1, \quad u_{x_2}^2 = -u_{x_2}^1, \\ (\mathcal{S})^2: u_{x_i x_j}^1 &= 0, \quad i, j = 1, 2, \quad u_{x_1}^2 = -u_{x_2}^1, \quad u_{x_2}^2 = u_{x_1}^1, \\ (\mathcal{S})^3: u_{x_i x_j}^1 &= 0, \quad i, j = 1, 2, \quad u_{x_1}^2 = u_{x_2}^1, \quad u_{x_2}^2 = 0.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.2. Пусть $\mathcal{M}$ – порождающее вещественно-аналитическое невырожденное по Леви подмногообразие в $\mathbb{C}^{n+m}$, содержащее начало координат. После биголоморфной замены координат можно записать $\mathcal{M}$ в виде $w + \bar{w} = \langle L(z), \bar{z} \rangle + o(|Z|^2)$. Обозначим через $\mathcal{M}_{\text{flat}}$ соответствующую квадрику $w + \bar{w} = \langle L(z), \bar{z} \rangle$. Для вещественных ε , достаточно близких к началу координат, рассмотрим замену переменных $z = \varepsilon z'$, $w = \varepsilon^2 w'$.

В этих новых координатах (опуская штрихи) мы имеем многообразие

$$\mathcal{M}^\varepsilon: w + \bar{w} = \langle L(z), \bar{z} \rangle + (1/\varepsilon^2)R(\varepsilon z, \varepsilon \bar{z}, \varepsilon^2 w, \varepsilon^2 \bar{w}),$$

которое биголоморфно $\mathcal{M}$ для каждого $\varepsilon > 0$. Функция $(1/\varepsilon^2)R(\varepsilon z, \varepsilon \bar{z}, \varepsilon^2 w, \varepsilon^2 \bar{w})$ продолжается в окрестность начала координат до вещественно-аналитической функции от ε , равной нулю в начале координат. Поэтому система $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}^\varepsilon})$, определяющая семейство Сегре для $\mathcal{M}^\varepsilon$, есть голоморфная инволютивная деформация плоской системы, определяющей семейство Сегре для $\mathcal{M}_{\text{flat}}$ (параметр ε , входящий в уравнения системы $(\mathcal{S}_{\mathcal{M}^\varepsilon})$, можно считать комплексным).

Этот важный пример будет использован в § 5, 6.

ПРИМЕР 3.3. Зададим многообразие $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^3$ уравнениями $w_1 + \bar{w}_1 = z\bar{z}$, $w_2 + \bar{w}_2 = z^2\bar{z} + z\bar{z}^2$. Семейство Сегре задается уравнениями $u^1 + \omega_1 = z\zeta$, $u^2 + \omega_2 = Z^2\zeta + z\zeta^2$ и является общим решением системы $u_{xx}^1 = 0$, $u_x^2 = 2xu_x^1 + (u_x^1)^2$.

ПРИМЕР 3.4. Предыдущий пример естественно обобщается на случай, когда $\mathcal{M}$ – подмногообразие в $\mathbb{C}^{n+m}$, заданное уравнениями $w_1 + \bar{w}_1 = \sum_j \lambda_j z_j \bar{z}_j$, $w_k + \bar{w}_k = P_k(z, \bar{z})$, $k = 2, \dots, m$, где $\lambda_j \in \{-1, 1\}$, а P_k – вещественные полиномы. Семейство Сегре для $\mathcal{M}$ есть общее решение вполне интегрируемой системы вида $u_{x_i x_j}^1 = 0$, $u_x^k = F_k(x, u, u_x^1)$, где F_k – полиномы, $k = 2, \dots, m$.

§ 4. Преобразования Ли алгебраических систем

В этом параграфе рассматриваются плоские системы $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ вида $u_{x_i x_j}^1 = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $u_x^k = A^k u_x^1$, $k = 2, \dots, m$, с n независимыми и m зависимыми переменными. Применим геометрический метод, чтобы описать симметрии такой системы без вычислений. Основная идея восходит к С. Ли и Г. Шефферсу [16]; связанные с этим результаты получены также Б. Шиффманом [25]. Доказательство представляет собой прямое обобщение рассуждения автора [29] о рациональности голоморфных отображений квадрик в $\mathbb{C}^n$, которое, в свою очередь, является модификацией принципа симметрии Леви–Пинчука [15], [22]. С другой стороны, в данной ситуации можно рассматривать это доказательство как вариацию классического метода характеристик.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть матрицы $A^1 := \text{Id}_n$ (единичная $(n \times n)$ -матрица), $A^2, \dots, A^m$ линейно независимы над $\mathbb{C}$. Тогда алгебра $\text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ конечномерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем инфинитезимальную симметрию $X \in \text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ и рассмотрим поток $\{f(t, x, u)\} = \{f^t(x, u)\} = e^{tX}$, порожденный полем X , где $t \in \mathbb{C}$ достаточно близко к началу координат.

Множество $\text{Sol}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ решений системы $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ есть $(n + m)$ -параметрическое семейство аффинных подпространств в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ вида $Q(\zeta, \omega) = \{(x, u) : u = \omega + \langle x, A\zeta \rangle\}$, где $\omega + \langle x, A\zeta \rangle = (\omega^1 + \langle x, A^1 \zeta \rangle, \dots, \omega^m + \langle x, A^m \zeta \rangle)$. Параметры $(\zeta, \omega) \in \mathbb{C}^{n+m}$ задают естественную систему голоморфных координат на пространстве $\text{Sol}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$, являющемся $(n + m)$ -мерным комплексным многообразием.

То, что f^t переводит решения в решения, означает, что для каждой точки (ζ, ω) существует (и, очевидно, единственна) точка $(\hat{\zeta}^t, \hat{\omega}^t)$ такая, что $f^t(Q(\zeta, \omega)) = Q(\hat{\zeta}^t, \hat{\omega}^t)$, т. е.

$$h^t(x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle) = \hat{\omega}^t + \langle g^t(x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle), A\hat{\zeta}^t \rangle, \quad (4.1)$$

где $f^t = (g^t, h^t)$. Таким образом, f^t индуцирует отображение $\hat{f}^t: \text{Sol}(\mathcal{S})_{\text{flat}} \rightarrow \text{Sol}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ по формуле $\hat{f}^t: (\zeta, \omega) \mapsto (\hat{\zeta}^t, \hat{\omega}^t)$ для каждого t .

ЛЕММА 4.1. Отображения $\{f^t\}$ образуют семейство биголоморфизмов, голоморфно зависящих от параметра t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ $f^t(Q(\zeta, \omega))$ есть $\{(x^*, u^*): (x^*, u^*) = (g(t, x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle), h(t, x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle)), x \in \mathbb{C}^n\}$. Поскольку $f^0(x, u) = (x, u)$, к уравнению $x^* = g(t, x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle)$ для достаточно малых t применима теорема о неявной функции. Поэтому его решение $x = x(t, x^*, \zeta, \omega)$ есть голоморфная функция. Подставляя ее в $u^* = h(t, x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle)$, получим $u^* = \varphi(t, x^*, \zeta, \omega)$ для некоторой голоморфной функции φ . С другой стороны, $f^t(Q(\zeta, \omega)) = Q(\hat{\zeta}^t, \hat{\omega}^t)$, так что $\varphi(t, x^*, \zeta, \omega) = \hat{\omega}^t + \langle x^*, A\hat{\zeta}^t \rangle$. В частности, $\varphi_1(t, x^*, \zeta, \omega) = \hat{\omega}_1^t + x_1^* \hat{\zeta}_1^t + \dots + x_n^* \hat{\zeta}_n^t$, так что каждая функция $\hat{\zeta}_j^t = \hat{\zeta}_j(t, \zeta, \omega)$ голоморфна и, очевидно, $\hat{\omega}^t = \hat{\omega}(t, \zeta, \omega)$ тоже голоморфна.

Рассмотрим векторные поля $\mathcal{L}^\nu = \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} - \sum_{k=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{j\nu}^k x_j) \frac{\partial}{\partial \omega^k}$, где $A^k = (a_{ij}^k)$.

Применяя их к (4.1), получаем

$$\mathcal{L}^\nu(\hat{\omega}_j^t) + \langle g_t(x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle), \mathcal{L}^\nu A^j \hat{\zeta}^t \rangle = 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим (4.1), (4.2) как линейную систему относительно компонент f^t . Поскольку $(\hat{\zeta}^0, \hat{\omega}^0) \equiv (\zeta, \omega)$, эта система содержит $((n+m) \times (n+m))$ -подсистему, определитель которой не обращается в нуль для достаточно малых t . По правилу Крамера получаем, что при каждом фиксированном наборе (t, ζ, ω) отображение $f^t(x, \omega + \langle x, A\zeta \rangle)$ рационально по x . Кроме того, степень всякого такого отображения равномерно ограничена числом n .

В качестве последнего шага доказательства покажем, что пространство решений системы $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ “достаточно велико”.

Положим $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ (1 на k -м месте) и рассмотрим векторы $v_k(\zeta) = (e_k, \langle e_k, A^1 \zeta \rangle, \dots, \langle e_k, A^m \zeta \rangle)$, так что $v_k(\zeta) \in Q(\zeta, 0)$.

ЛЕММА 4.2. *Линейная оболочка множества $\{v_k(\zeta), \zeta \in \mathbb{C}^n\}$ совпадает с $\mathbb{C}^{n+m}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если это не так, то существует вектор $\lambda \in \mathbb{C}^{n+m} \setminus \{0\}$ такой, что $\langle \lambda, v_k(\zeta) \rangle = 0$ для всех k, ζ , т. е.

$$\lambda_k + \lambda_{n+1} \langle e_k, A^1 \zeta \rangle + \dots + \lambda_{n+m} \langle e_k, A^m \zeta \rangle = 0$$

для всех ζ, k . Тогда $\lambda_k = 0$ при каждом $k = 1, \dots, n$, так что $\langle e_k, (\lambda_{n+1} A^1 + \dots + \lambda_{n+m} A^m) \zeta \rangle = 0$ для всех k, ζ . Тем самым, $\lambda_{n+1} A^1 + \dots + \lambda_{n+m} A^m = 0$. Это противоречие доказывает лемму.

Фиксируем теперь $n+m$ линейно независимых комплексных прямых $l^1, \dots, l^{n+m}$, проходящих через начало координат, причем каждая l^j лежит в некотором $Q(\zeta^j, 0)$. Каждая прямая порождает семейство параллельных прямых, и всякая прямая этого семейства лежит в $Q(\zeta^j, \omega)$ для некоторого ω . После линейной замены переменных в $\mathbb{C}^{n+m}$ эти семейства становятся координатными, и в силу классической теоремы о сепаратной рациональности [7] получим, что f^t – рациональное отображение степени не больше n для всех достаточно малых t , т. е.

$$f^t(x, u) = \sum_{|I|=0}^n a_I(t)(x, u)^I \Big/ \sum_{|J|=0}^n b_J(t)(x, u)^J.$$

Следовательно, $X = \frac{df_t}{dt} \mid \{t = 0\}$ есть векторное поле с рациональными коэффициентами степени не больше n^2 . Каждый из этих коэффициентов однозначно определяется конечным числом $d = d(n)$ членов своего тейлоровского разложения в начале координат. Следовательно, размерность пространства $\text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ конечна. Этим доказательство теоремы закончено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Назовем плоскую систему $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ *невыврожденной*, если она удовлетворяет условиям теоремы 4.1, т.е. матрицы $A^1 = \text{Id}_n, A^2, \dots, A^n$ линейно независимы.

Доказательство теоремы можно обобщить. Рассмотрим алгебраическое $(n + m)$ -параметрическое семейство n -мерных подмногообразий в $\mathbb{C}^{n+m}$. Локально такое семейство задается уравнениями $\{Z \in \mathbb{C}^{n+m} : r(Z, \zeta, \omega) = 0\}$, где $r : \mathbb{C}^{n+m} \times \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^m$ – голоморфная функция с полиномиальными компонентами. Допустим, что это семейство представляет собой общее решение системы $(\mathcal{S})$ первого порядка на $J^1(n, m)$, заданной следующим распределением:

$$\begin{aligned} \omega_i &= dw_i - \sum_j F_{ij}(x, u, w^{(1)}) dx_j, & \phi^1 &= dw - \sum_j w_j dx_j, \\ \phi^k &= dv^k - \sum_j G_j^k(x, u, w^{(1)}) dx_j, & k &> 1. \end{aligned}$$

Назовем такие системы *алгебраическими* (очевидно, в нашем случае все коэффициенты дифференциальных форм – алгебраические функции и распределение вполне интегрируемо). Допустим, что наше слоение удовлетворяет *условию трансверсальности*: линейная оболочка объединения касательных пространств к слоям в начале координат есть все $\mathbb{C}^{n+m}$, и *условию невыврожденности*: $\sup$ -нормы функций F_{ij} достаточно малы (так что система дифференциальных уравнений второго порядка, отвечающая нашему распределению, есть малая деформация системы $u_{x_i x_j}^1 = 0, u_x^k = \psi(x, u, u_x^1), k = 2, \dots, m$).

ТЕОРЕМА 4.2. При этих условиях любая локальная однопараметрическая группа $\{f^t\}$ симметрий системы $(\mathcal{S})$ состоит из алгебраических отображений, степень которых ограничена сверху константой d , зависящей только от степени полиномиальной функции $r(Z, \zeta)$. В частности, алгебра $\text{Lie}(\mathcal{S})$ конечномерна.

Эта теорема обобщает ряд известных результатов об алгебраичности CR-отображений. Отметим, что условия теоремы выполняются для системы примера 3.4, если ее решения удовлетворяют условию трансверсальности. Ясно, что множество точек, где выполняется условие трансверсальности, открыто по Зарискому (если оно не пусто). Аналогичное условие было введено в [11] (трансверсальность по Сегре) для слоений, определенных семействами Сегре алгебраических CR-многообразий. Как показано в [11], семейство Сегре порождающего алгебраического CR-многообразия становится трансверсальным по Сегре после сколь угодно малого шевеления.

Доказательство является прямым обобщением предыдущего рассуждения на случай “малого алгебраического шевеления”.

По теореме о неявной функции наше слоение имеет вид $w = \phi(z, \zeta, \omega)$. Рассмотрим линейные дифференциальные операторы

$$\mathcal{L}^j = \sum_{\mu=1}^n \partial_{\zeta_j} + \sum_{\nu=1}^m b_{\nu}^j \partial_{\omega_{\nu}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Их коэффициенты определены следующим образом:

$$b_k^j = - \sum_{t=1}^m a_{kt} \frac{\partial \phi_t}{\partial \zeta_j},$$

где a_{kt} — элементы матрицы M^{-1} , обратной к якобиевой матрице $(\frac{\partial \phi_p}{\partial \omega_q})$. Коэффициенты выбираются так, что $\mathcal{L}^j f(z, \phi(z, \zeta, \omega)) = 0$ для всех j .

Пусть симметрия $f^t = (g^t, h^t)$ принадлежит нашей группе (так что f достаточно близко к тождественному). Тогда f^t переводит слой $Q(\zeta, \omega) = \{(z, w) : w = \phi(z, \zeta, \omega)\}$ в слой $Q(\hat{\zeta}^t, \hat{\omega}^t)$. Доказательство леммы 4.1 (с очевидными модификациями) показывает, что отображение $(t, \zeta, \omega) \mapsto (\hat{\zeta}^t, \hat{\omega}^t)$ голоморфно. Таким образом, получаем первое основное уравнение

$$h_k^t(z, \phi(z, \zeta, \omega)) = \phi_k(g^t(z, \phi(z, \zeta, \omega)), \hat{\zeta}, \hat{\omega}), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Применяя здесь операторы $\mathcal{L}^j$, получаем дополнительные уравнения

$$\mathcal{L}^j \phi_k(g^t(z, \phi(z, \zeta, \omega)), \hat{\zeta}, \hat{\omega}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

ЛЕММА 4.3. *Якобиан полученной системы (4.3), (4.4) относительно f^t отличен от нуля в начале координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемое распределение есть малая деформация системы $u_{x_i x_j}^1 = 0$, $u_x^k = \psi(x, u, u_x^1)$, $k = 2, \dots, m$. Поэтому первая компонента определяющей функции слоения имеет вид $r_1 = w_1 + \omega_1 + \sum_j z_j \zeta_j + O(3)$ (члены третьего порядка). Имеем

$$\mathcal{L}^j \phi_k(g^t(z, \phi(z, \zeta, \omega)), \hat{\zeta}, \hat{\omega}) = (\partial \phi_k / \partial \zeta_j)(g, \zeta, \omega) + \sum_{\nu} b_{\nu}^j (\partial \phi_k / \partial \omega_{\nu})(g, \zeta, \omega).$$

Полагая $k = 1$, видим, что последнее уравнение можно разрешить относительно g вблизи начала координат (поскольку f^t близко к тождественному отображению). По теореме о неявной функции получаем, что $f^t(z, \phi(z, \zeta, \omega)) = H(t, z, \zeta, \omega)$, где голоморфная функция H алгебраична относительно z . Это означает, что сужение f^t на каждый слой есть алгебраическая функция равномерно ограниченной степени. Теперь наше утверждение следует из теоремы о сепаратной алгебраичности [26]. (Оценка степени не входит в оригинальную версию этой теоремы, но легко получается небольшой модификацией доказательства.)

Эту теорему легко обобщить на точечные преобразования Ли (не обязательно близкие к тождественному) между указанными выше классами алгебраических систем. Условие невырожденности также может быть существенно ослаблено.

§ 5. Интегрируемые голоморфные деформации алгебраических систем, инфинитезимальные и конечные уравнения Ли

5.1. Инфинитезимальные уравнения Ли: определение и примеры.

Рассмотрим голоморфную вполне интегрируемую систему второго порядка $(\mathcal{S})$: $w_{x_{i_1}x_{i_2}} = F_{i_1i_2}(x, u, w_x)$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, m$, $v_{x_j}^k = G_j^k(x, u, w_x)$, $k = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, с n независимыми переменными x и m зависимыми переменными $u = (w, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m-1}$. Удобно записать эту систему по-другому. Возьмем все первые частные производные от уравнений $v_x = G(x, u, w_x)$ и исключим вторые производные от w и производные от v из правых частей полученных уравнений, подставив туда выражения для $w_{x_{i_1}x_{i_2}}$ и $v^{(1)}$ из системы $(\mathcal{S})$. Добавив полученные уравнения к исходной системе, получим новую систему $(\mathcal{S}')$: $u_{x_{i_1}x_{i_2}}^k = F_{i_1i_2}^k(x, u, w_x)$, $k = 1, \dots, m$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $v_x = G(x, u, w_x)$, имеющую то же пространство решений (а значит, и ту же группу симметрий), что и исходная система. Будем изучать эту новую систему.

Соответствующее комплексное аналитическое подмножество $(\mathcal{S}_2)$ пространства струй $J^2(n, m)$ задается уравнениями

$$u_{i_1i_2}^\mu = F_{i_1i_2}^\mu(x, u, w^{(1)}), \quad v^{(1)} = G(x, u, w^{(1)}).$$

В силу условия интегрируемости эта система локально регулярна. Следовательно, голоморфное векторное поле $X = \sum \theta^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$ принадлежит $\text{Lie}(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда его 2-продолжение $X^{(2)}$ касательно к $(\mathcal{S}_2)$. Это эквивалентно уравнениям

$$X^{(2)}u_{i_1i_2}^\mu = X^{(2)}(F_{i_1i_2}^\mu(x, u, w^{(1)})), \quad X^{(2)}(v^{(1)} - G(x, u, w^{(1)})) = 0 \quad (5.1)$$

для всех $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in (\mathcal{S}_2)$. Это – линейная система дифференциальных уравнений второго порядка относительно коэффициентов θ , η поля X . Она называется системой *инфинитезимальных уравнений Ли*, ассоциированных с системой $(\mathcal{S})$. Покажем, как построить инфинитезимальные уравнения Ли в явном виде. Сначала рассмотрим пример.

ПРИМЕР 5.1 (инфинитезимальные уравнения Ли для плоских систем с соотношениями первого порядка). Построим уравнения Ли для системы $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ вида $u_{x_ix_j}^k = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, $v_x^k = M^k w_x$, $k = 2, \dots, m$. Такая система называется *плоской системой с соотношениями первого порядка*, очевидно, она инволютивна.

Система $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ порождает многообразие $(\mathcal{S}_2)_{\text{flat}}$ с уравнениями $u_{ij}^k = 0$, $k = 1, \dots, m$, $i, j = 1, \dots, n$, $v^{(1)} = Mw^{(1)}$, где матрица M образована матрицами M^k как вертикальными блоками. Пусть векторное поле $X = \sum_{j=1}^n \theta^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\mu=1}^m \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$ принадлежит $\text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$.

Инфинитезимальные уравнения Ли имеют вид

$$\begin{aligned} X^{(2)}u_{i_1i_2}^\mu &= 0, \quad i_1, i_2 = 1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, m, \\ X^{(2)}(v^{(1)} - Mw^{(1)}) &= X^{(1)}(v^{(1)} - Mw^{(1)}) = 0, \\ u_{i_1i_2}^\mu &= 0, \quad v^{(1)} = Mw^{(1)}. \end{aligned}$$

Положим $L_2 = \{(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}): u_{i_1 i_2}^\mu = 0\}$ и $L_1 = \{(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}): v^{(1)} = Mw^{(1)}\}$, так что $(\mathcal{S}_2)_{\text{flat}} = L_1 \cap L_2$.

Из уравнений первой строки следует, что

$$\eta_{i_1 i_2}^\mu = 0, \quad (x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in (\mathcal{S}_2)_{\text{flat}} \quad (5.2)$$

для любого μ и всех $i_1 \leq i_2$. Воспользуемся представлением из п. а) леммы 2.1; уравнения $u_{i_1 i_2}^\mu = 0$ влекут, что $Q_{i_1 i_2}^\mu = 0$, поэтому

$$\eta_{i_1 i_2}^\mu \mid L_2 = \sum_{|\alpha| \leq 3} A_{i_1 i_2 \alpha}^\mu [u^{(1)}]^\alpha, \quad (5.3)$$

где коэффициенты $A_{i_1 i_2 \alpha}^\mu$ – это целочисленные линейные комбинации частных производных второго порядка от θ, η .

Теперь надо сузить полиномы (5.3) на L_1 . Заменяя $v^{(1)}$ на $Mw^{(1)}$ в (5.3), получаем

$$\eta_{i_1 i_2}^\mu \mid (\mathcal{S}_2)_{\text{flat}} = \sum_{|\beta| \leq 3} B_{i_1 i_2 \beta}^\mu (w^{(1)})^\beta,$$

где $B_{i_1 i_2 \beta}^\mu = \sum_\alpha b_{i_1 i_2 \beta}^{\mu\alpha} A_{i_1 i_2 \alpha}^\mu$ и коэффициенты $b_{i_1 i_2 \beta}^{\mu\alpha}$ суть полиномы степени не больше 3 от элементов матрицы M . Поэтому каждое $B_{i_1 i_2 \beta}^\mu$ есть линейная комбинация частных производных второго порядка от θ, η :

$$B_{i_1 i_2 \beta}^\mu = \sum_{j, |\gamma|=2} c_{A\gamma}^j \partial^\gamma \theta_j + \sum_{k, |\delta|=2} d_{A\delta}^k \partial^\delta \eta^k,$$

где для упрощения обозначений пишем $A = (\mu, i_1, i_2, \beta)$.

Таким образом, уравнения (5.2) эквивалентны тому, что $B_{i_1 i_2 \beta}^\mu = 0$ для всех μ, β, i_1, i_2 .

Теперь, пользуясь п. б) леммы 2.1, проведем аналогичные рассуждения для уравнений $X^{(1)}(v^{(1)} - Mw^{(1)}) = 0$; они эквивалентны условиям

$$\eta_i^\mu \Big| L_1 - \sum_j m_{ij}^\mu \eta_j^1 \Big| L_1 = 0, \quad \mu = 2, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n,$$

где мы положили $M^\mu = (m_{ij}^\mu)$. Можно записать

$$\eta_i^\mu \Big| L_1 - \sum_j m_{ij}^\mu \eta_j^1 \Big| L_1 = \sum_{|\gamma| \leq 2} C_{i\gamma}^\mu (w^{(1)})^\gamma,$$

где имеем следующие выражения:

$$C_{i\gamma}^\mu \mid L_1 = \sum_{j, |\alpha|=1} e_{i\alpha\gamma}^{\mu j} \partial^\alpha \theta_j + \sum_{k, |\beta|=1} f_{i\beta\gamma}^{\mu j} \partial^\beta \eta^k.$$

Коэффициенты $e_{i\alpha\gamma}^{\mu j}, f_{i\beta\gamma}^{\mu j}$ – полиномы степени не больше 2 от элементов матрицы M . Рассмотрим теперь следующую систему второго порядка $(\mathcal{R}_2)$ на неизвестную вектор-функцию $\tau := (\theta, \eta)$:

$$B_{i_1 i_2 \beta}^\mu = 0, \quad C_{i\gamma}^\mu = 0 \quad (5.4)$$

для всех $\mu, i_1 \leq i_2, i, \beta$. Это – линейная система второго порядка с постоянными коэффициентами, представляющая уравнения Ли для $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$. Подчеркнем важное свойство этой системы: *каждое ее уравнение второго (первого) порядка содержит частные производные только второго (первого) порядка.*

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим систему вида $w_{x_{i_1}x_{i_2}} = F_{i_1i_2}(x, u, w_x)$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, m$, $v_{x_j}^k = G_j^k(x, u, w_x)$, $k = 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, с полиномиальными правыми частями. Тогда прямое обобщение предыдущего рассуждения позволяет вывести аналог формулы (5.4) для инфинитезимальных уравнений Ли. Ясно, что коэффициенты полученной линейной системы уравнений с частными производными будут полиномами от (x, u) .

ПРИМЕР 5.3 (инфинитезимальные уравнения Ли для плоских систем). Рассмотрим систему $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ вида $u_{x_i x_j}^k = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Такие системы называются *плоскими системами без соотношений первого порядка*. Многообразие $(\mathcal{S}_2)_{\text{flat}}$, определенное системой $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$, задается уравнениями $u_{ij}^k = 0$, $k = 1, \dots, m$, $i, j = 1, \dots, n$.

Инфинитезимальные уравнения Ли имеют вид $X^{(2)}u_{i_1 i_2}^\mu = 0$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, m$, $u_{i_1 i_2}^\mu = 0$. Это эквивалентно тому, что (для всех возможных значений индексов) мы имеем $\eta_{i_1 i_2}^\mu = 0$, $u_{kl}^\nu = 0$ в $J^2(n, m)$. Пользуясь явным выражением для коэффициентов поля $X^{(2)}$, получаем следующую систему (в ней выписаны только линейно независимые уравнения):

$$\begin{aligned} \eta_{x_{i_2}x_{i_1}}^\mu &= 0; & \eta_{x_{i_2}u^\mu}^\mu - \theta_{x_{i_2}x_{i_1}}^{i_1} &= 0, & i_1 \neq i_2; & & \eta_{x_i u^k}^\mu &= 0, & k \neq \mu; \\ \theta_{x_{i_2}x_{i_1}}^k &= 0, & k \neq i_1, & k \neq i_2; & & \theta_{x_i u^k}^j &= 0, & \theta_{u^a u^b}^s &= 0, & j \neq i; \\ \eta_{u^r u^p}^\mu &= 0, & r \neq \mu, & p \neq \mu; & & -\theta_{x_i u^t}^i + \eta_{u^\mu u^t}^\mu &= 0, & t \neq \mu; \\ 2\eta_{x_i u^\mu}^\mu - \theta_{x_i x_i}^i &= 0, & & & & \eta_{u^\mu u^\mu}^\mu - 2\theta_{x_i u^\mu}^i &= 0. \end{aligned}$$

5.2. Общая конструкция инфинитезимальных уравнений Ли. Теперь применим этот подход в общей ситуации. Под вполне интегрируемой голоморфной деформацией системы $(\mathcal{S}^0)$ будем понимать голоморфную систему дифференциальных уравнений вида $(\mathcal{S}^\varepsilon)$: $u_{x_{i_1}x_{i_2}}^k = F_{i_1i_2}^k(\varepsilon, x, u, w_x)$, $k = 1, \dots, m$, $i_1, i_2 = 1, \dots, n$, $v_x = G(\varepsilon, x, u, w_x)$, которая вполне интегрируема для каждого ε и совпадает с $(\mathcal{S}^0)$ при $\varepsilon = 0$. Эта система определяет комплексное подмногообразие $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ в пространстве струй $J^2(n, m)$, заданное уравнениями $u_{i_1 i_2}^\mu = F_{i_1 i_2}^\mu(\varepsilon, x, u, w^{(1)})$, $v^{(1)} = G(\varepsilon, x, u, w^{(1)})$. В силу условия интегрируемости, эта система локально регулярна. Поэтому инфинитезимальные уравнения Ли (5.1) имеют вид

$$\eta_{i_1 i_2}^\mu = X^{(1)}F_{i_1 i_2}^\mu(\varepsilon, x, u, w^{(1)}), \quad \eta_i^\mu = X^{(1)}G_i^\mu(\varepsilon, x, u, w^{(1)}) \quad (5.5)$$

для $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in (\mathcal{S}_2^\varepsilon)$. Рассмотрим вектор-функцию $F(\varepsilon, x, u, w^{(1)})$ с компонентами $F_{i_1 i_2}^\mu$. Пользуясь естественной локальной параметризацией

$$\begin{aligned} (x, u, w^{(1)}) &\mapsto (x, u, w^{(1)}, v^{(1)}, u^{(2)}) \\ &= (x, u, w^{(1)}, G(\varepsilon, x, u, w^{(1)}), F(\varepsilon, x, u, w^{(1)})) \end{aligned} \quad (5.6)$$

многообразия $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$, сузим коэффициенты полей $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ из уравнений (5.5) на $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$. Разлагая полученные уравнения в степенные ряды по $w^{(1)}$ и приравнявая коэффициенты, получим (в силу леммы 2.1) линейную систему $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ уравнений с

частными производными второго порядка. Можно рассматривать $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ как систему аналитических уравнений на декартовом произведении $J^2(n+m, n+m) \times \mathbb{C}$ (множитель $\mathbb{C}$ отвечает параметру ε). Из нётеровости кольца ростков функций, голоморфных в точке конечномерного комплексного многообразия, следует, что число независимых уравнений системы $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ конечно. Поэтому можно считать, что эта система состоит из конечного числа уравнений. Если $(\mathcal{S}^0)$ – плоская система из примеров 5.1 или 5.3, то полученная система при $\varepsilon = 0$ совпадает с (5.4). Если $(\mathcal{S}^0)$ – алгебраическая система из примера 5.2, то $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ также является малым возмущением соответствующих уравнений Ли.

5.3. Конечные уравнения Ли. Наш подход позволяет также изучать точечные преобразования Ли и биголоморфизмы между разными многообразиями. Это приводит к изучению конечных уравнений Ли.

Пусть $(\mathcal{S})$ и $(\hat{\mathcal{S}})$ – две голоморфные вполне интегрируемые системы второго порядка с соотношениями первого порядка или без них. Пусть f – точечное преобразование между $(\mathcal{S})$ и $(\hat{\mathcal{S}})$. При этом пусть $f: (x, u) \mapsto (x^*, u^*)$ задается посредством $x^* = X(x, u)$, $u^* = U(x, u)$.

Условие интегрируемости влечет, что $f^{(2)}$ переводит $(\mathcal{S}_2)$ в $(\hat{\mathcal{S}}_2)$, т.е. удовлетворяет соотношению

$$(f^{(2)})^{-1}((\hat{\mathcal{S}}_2)) = (\mathcal{S}_2). \quad (5.7)$$

Назовем это соотношение *конечными уравнениями Ли*, ассоциированными с $(\mathcal{S})$ и $(\hat{\mathcal{S}})$. Легко переписать конечные уравнения Ли как голоморфную *нелинейную* систему уравнений с частными производными второго порядка (с некоторыми уравнениями первого порядка) на компоненты отображения f . Действительно, рекуррентные формулы (2.1), (2.2) показывают, что компоненты $f^{(2)}$ – рациональные функции от $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$ и частных производных порядка не выше двух от компонент f . Пользуясь параметризацией (5.6) и разлагая уравнения (5.7) в ряды по степеням $w^{(1)}$, получим приравниванием коэффициентов эквивалентную нелинейную систему второго порядка на f .

ПРИМЕР 5.4. Рассмотрим два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка, заданных соответствующими многообразиями в пространстве струй $J^2(1, 1)$, $(\mathcal{S}_2): u_{11} = F(x, u, u_1)$ и $(\hat{\mathcal{S}}_2): u_{11} = \hat{F}(x, u, u_1)$. Пусть $f: (x, u) \mapsto (x^*, u^*) = (X(x, u), U(x, u))$ – точечное преобразование Ли между ними, так что его 2-продолжение $f^{(2)}: (x, u, u_1, u_{11}) \mapsto (x^*, u^*, u_1^*, u_{11}^*)$ переводит $(\mathcal{S}_2)$ в $(\hat{\mathcal{S}}_2)$. Имеем

$$u_1^* = U_1 = (U_x + u_1 U_u) / (X_x + u_1 X_u)$$

и

$$u_{11}^* = U_{11} = (U_{1x} + u_1 U_{1u} + u_{11} U_{1u_1}) / (X_x + u_1 X_u).$$

Пользуясь выражением для U_{11} , получаем, что уравнение (5.7) эквивалентно уравнению $U_{1x} + u_1 U_{1u} = (X_x + u_1 X_u) \hat{F}(X, U, U_1) - U_{1u_1} F(x, u, u_1)$, которое после подстановки U_1 записывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 A_0(u_1)^j &= (X_x + u_1 X_u)^3 \hat{F}(X(x, u), U(x, u), U_1(x, u, u_1)) \\ &\quad - (X_x + u_1 X_u)^2 U_{1u_1} F(x, u, u_1), \end{aligned}$$

где $A_0 = U_{xx}X_x - U_xX_{xx}$, $A_1 = U_{xx}X_u - U_uX_{xx} + 2(U_{xu}X_x - U_xX_{xu})$, $A_2 = U_{uu}X_x - U_xX_{uu} + 2(U_{xu}X_u - U_uX_{xu})$ и $A_3 = U_{uu}X_u - U_uX_{uu}$. Разложим правую часть в степенной ряд $\sum_j \phi_j u_1^j$ по u_1 и приравняем коэффициенты. Получим голоморфную систему $(\mathcal{R}_2)$ вида $A_j = \phi_j(x, u, X, U, X_x, X_u, U_x, U_u)$, $j = 0, \dots, 3$, и $\phi_j(x, u, X, U, X_x, X_u, U_x, U_u) = 0$, $j \geq 4$, которая представляет конечные уравнения Ли в нашем случае. Как указано выше, в этой системе только конечное число независимых уравнений.

ПРИМЕР 5.5 (конечные уравнения Ли для систем без соотношений первого порядка). Пусть $(\mathcal{S})$: $u_{x_i x_j} = F_{ij}(x, u, u_x)$ и $(\widehat{\mathcal{S}})$: $u_{x_i x_j} = \widehat{F}_{ij}(x, u, u_x)$, $i, j = 1, \dots, n$, – две системы с одним зависимым переменным. Их левая часть задается как $U_{ij} = \widehat{F}(X, U, U^{(1)})$, где используется обозначение $U^{(1)} = (U_1, \dots, U_n)$. Подставляя рекуррентные выражения (2.2) для U_{ij} и умножая на матрицу A , получим

$$D_i U_j = \Phi_{ij}(x, u, u^{(1)}, X, U, D^{(1)}X, U^{(1)}). \quad (5.8)$$

Применяя оператор полного дифференцирования к (2.1), имеем

$$\begin{pmatrix} D_i U_1 \\ \dots \\ D_i U_n \end{pmatrix} = (D_i A^{-1}) \leq \begin{pmatrix} D_1 U \\ \dots \\ D_n U \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} D_i D_1 U \\ \dots \\ D_i D_n U \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Отсюда легко вытекает следующее описание $D_i U_j$. Каждое $D_i U_j$ – рациональная функция вида $P_{ij}/Q = (u^{(1)}, u^{(2)}, X, U, D^{(1)}X, D^{(1)}U, D^{(2)}X, D^{(2)}U)$. Знаменатель Q равен $(\det A)^2$. Каждый числитель P_{ij} является полиномом от $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ и имеет вид $P_{ij} = \sum_{|\alpha| \leq N} A_{ij}^\alpha [u^{(1)}]^\alpha + B_{ij}$, где B_{ij} – члены ненулевой степени в $u^{(2)}$, а N – универсальная целочисленная константа ($N = \max\{n, 3\}$). Коэффициенты A_{ij}^α суть дифференциальные выражения вида

$$\sum_{k,l} a_{ijkl}^\alpha(x, u) U_{x_k u^l} + \sum_{k,l,s} b_{ijkl}^\alpha(x, u) X_{x_k u^l}^s + C, \quad (5.10)$$

где C означает члены с частными производными f порядка не выше 1. Коэффициенты $a_{ijkl}^\alpha(x, u)$, $b_{ijkl}^\alpha(x, u)$ – полиномы от $(D^{(1)}X)(x, u)$, $(D^{(1)}U)(x, u)$.

Подставим полученное представление $D_i U_j = P_{ij}/Q$ в (5.8) и умножим обе части на Q . Затем заменим u_{ij} на $F_{ij}(x, u, u^{(1)})$ в каждом члене выражения B_{ij} и перенесем эти члены в правую часть. Получим уравнения

$$\sum_{\alpha} A_{ij}^\alpha [u^{(1)}]^\alpha = \Psi_{ij}(x, u, u^{(1)}, X, U, D^{(1)}X, D^{(1)}U).$$

Разлагая правую часть в степенной ряд по $u^{(1)}$ и приравнявая коэффициенты, получим уравнения $A_{ij}^\alpha = \psi_{ij}^\alpha(x, u, X, U, D^{(1)}X, D^{(1)}U)$ для $|\alpha| \leq N$ и $\psi_{ij}^\alpha(x, u, X, U, D^{(1)}X, D^{(1)}U) = 0$ для $|\alpha| > N$. В силу свойства нётеровости последнее соотношение налагает лишь конечное число условий.

Ввиду указанного выше представления для A_{ij}^α можно переписать последнюю систему в виде

$$MD^{(2)}f = \Phi(x, u, f, D^{(1)}f), \quad (5.11)$$

$$\Psi(x, u, f, D^{(1)}f) = 0, \quad (5.12)$$

где M – матрица, элементы которой суть полиномы от $D^{(1)}f$. Уравнения (5.11), (5.12) и образуют в нашем случае конечные уравнения Ли. Отметим, что они представляют собой систему второго порядка с $n+1$ независимыми переменными (x, u) и $n+1$ зависимыми переменными $f = (X, U)$.

Системы с соотношениями первого порядка изучаются вполне аналогично, и мы опускаем детали. Если $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ и $(\widehat{\mathcal{S}}_2^\delta)$ – голоморфные вполне интегрируемые деформации наших систем, то конечные уравнения Ли аналитически зависят от параметров ε и δ . Получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Конечные уравнения Ли, ассоциированные с двумя голоморфными вполне интегрируемыми системами второго порядка (с соотношениями первого порядка или без них) образуют голоморфную систему уравнений с частными производными второго порядка на компоненты точечного преобразования Ли. Если наши системы аналитически деформировать посредством параметра ε , то конечные уравнения Ли тоже аналитически зависят от ε .*

В §4 показано, что точечные преобразования невырожденных алгебраических систем являются алгебраическими равномерно ограниченной степени. Это означает, что пространство решений соответствующих конечных уравнений Ли имеет естественную структуру комплексного алгебраического многообразия и, в частности, зависит от конечного числа параметров. Конечно, методы §4 не позволяют точно описать геометрию пространства решений. Но это уже чисто вычислительная задача. В следующем параграфе мы развиваем общий подход к изучению конечных уравнений Ли в общем случае.

§6. Решение уравнений Ли

Здесь применим к нашему случаю общие методы формальной теории дифференциальных уравнений. Это позволит доказать наши основные результаты. Намного более общие методы и средства можно найти в [18], [23], [27].

6.1. Символы и продолжения. Как обычно, под голоморфной линейной системой порядка q с n независимыми переменными y и m зависимыми переменными τ понимается голоморфное векторное подрасслоение в $J^q(n, m)$. В локальных координатах такая система имеет вид

$$(\mathcal{R}_q): \sum_{j=1, \dots, m; |\alpha| \leq q} a_{j\alpha}^i(y) \partial^\alpha \tau^j = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

где $a_{j\alpha}^i$ – голоморфные функции. Соответствующее подмногообразие в пространстве струй $J^q(n, m)$ задается уравнениями $(\mathcal{R}_q): \sum_{j=1, \dots, m; |\alpha| \leq q} a_{j\alpha}^i(y) \tau_\alpha^j = 0$,

$i = 1, \dots, s$. Функция $\tau(y)$, голоморфная на области определения D коэффициентов системы, называется (*голоморфным*) *решением системы*, если $j_x^q(\tau) \in (\mathcal{R}_q)$ для всех $x \in D$. Обозначим через $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ векторное пространство всех решений $(\mathcal{R}_q)$. Символом $G_q(y^0)$ системы $(\mathcal{R}_q)$ в точке y^0 называется линейное подпространство комплексного аффинного пространства с координатами v_α^j , $j = 1, \dots, m$, $|\alpha| = q$, $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_q$, $\alpha_i \in \{1, \dots, n\}$, заданное уравнениями (G_q) : $\sum_{j=1, \dots, m; |\alpha|=q} a_{j\alpha}^i(y^0) v_\alpha^j = 0$, $i = 1, \dots, s$. Добавляя к системе $(\mathcal{R}_q)$ все уравнения, полученные взятием частных производных порядка не выше r от каждого уравнения из $(\mathcal{R}_q)$, получим линейную систему $(\mathcal{R}_{q+r})$, называемую r -*продолжением системы* $(\mathcal{R}_q)$. Таким образом,

$$(\mathcal{R}_{q+r}): \sum_{j=1, \dots, m; |\alpha| \leq q} \partial^\beta (a_{j\alpha}^i(y) \partial^\alpha \tau^j) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad |\beta| \leq r.$$

Ясно, что $(\mathcal{R}_{q+r})$ и $(\mathcal{R}_q)$ имеют одно и то же пространство решений. Символ системы $(\mathcal{R}_{q+r})$ в точке y^0 обозначается через $G_{q+r}(y^0)$.

Назовем $(\mathcal{R}_q)$ системой *конечного типа* в точке y^0 , если $G_{q+r}(y^0) = \{0\}$ для некоторого r . Если система имеет конечный тип в каждой точке, она называется просто *системой конечного типа*. Наименьшее r с этим свойством называется *типом системы* $(\mathcal{R}_q)$ и обозначается через $\text{type}(\mathcal{R}_q)$.

ЛЕММА 6.1. Пусть $(\mathcal{R}_q)$ – система конечного типа в точке y^0 . Тогда размерность пространства решений $(\mathcal{R}_q)$, голоморфных в окрестности y^0 , конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $G_{q+r}(y^0) = \{0\}$ для некоторого r , то система $(\mathcal{R}_{q+r})$ содержит подсистему, разрешимую относительно всех частных производных порядка $q + r$ и потому представимую в окрестности y^0 в виде

$$\partial^\alpha \tau^j = \sum_{k=1, \dots, m; |\beta| \leq q+r-1} b_{k\beta}^j(y) \partial^\beta \tau^k, \quad j = 1, \dots, m, \quad |\alpha| = q + r.$$

Отсюда с помощью рекуррентных соотношений и правила дифференцирования сложной функции получаем, что все производные от τ^j порядка не ниже $q + r$ в точке y^0 определяются производными порядка не выше $q + r - 1$. Это означает, что размерность пространства $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ конечна.

Это доказательство вполне конструктивно и позволяет получить явные рекуррентные формулы для тейлоровского разложения решений $(\mathcal{R}_0)$ в точке y^0 . Это значит также, что размерность $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ не превышает $\dim J^d(n, m)$, где $d = \text{type}(\mathcal{R}_q) - 1$. Конечно, эта оценка не точна, поскольку частные производные порядка не выше d от τ в точке y^0 удовлетворяют системе $(\mathcal{L})$ линейных алгебраических уравнений, возникающей из уравнений $(\mathcal{R}_{q+r})$ порядка меньше $q + r$. Решив эту систему, можно явно найти размерность пространства $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ для любой конкретной системы $(\mathcal{R}_q)$. А именно, применяя к $(\mathcal{L})$ правило Крамера, представим некоторые частные производные порядка не выше d от τ в точке y^0 (*главные производные*) как линейные комбинации остальных (*параметрических производных*). Число параметрических производных равно размерности пространства $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$, и они образуют естественный набор параметров для $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$.

Пусть $(\mathcal{R}_q^\varepsilon)$ – аналитическое семейство линейных систем, заданное уравнениями

$$(\mathcal{R}_q^\varepsilon) : \sum_{j=1, \dots, m; |\alpha| \leq q} a_{j\alpha}^i(\varepsilon, y) \partial^\alpha \tau^j = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

где функции $a_{j\alpha}^i$ голоморфны по y и вещественно-аналитичны по ε , причем ε принадлежит окрестности начала координат в $\mathbb{C}^k$. Очень полезным оказывается следующее очевидное наблюдение.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\mathcal{R}_q^0$ – система конечного типа. Тогда для каждого ε , достаточно близкого к началу координат, система $(\mathcal{R}_q^\varepsilon)$ имеет конечный тип и $\text{type}(\mathcal{R}_q^\varepsilon) \leq \text{type}(\mathcal{R}_q^0)$. Кроме того, $\dim \text{Sol}(\mathcal{R}_q^\varepsilon) \leq \dim \text{Sol}(\mathcal{R}_q^0)$.

Доказательство немедленно следует из того, что ранг линейной алгебраической системы, определяющей символ продолженной системы, не убывает при малых шевелениях коэффициентов, так что $\text{type}(\mathcal{R}_q^\varepsilon) \leq \text{type}(\mathcal{R}_q^0)$. Аналогично, если $(\mathcal{L}^\varepsilon)$ – линейная алгебраическая система относительно частных производных порядка меньше $\text{type}(\mathcal{R}_q)$, возникающая из уравнений низших порядков, то $\text{rank}(\mathcal{L}^\varepsilon) \geq \text{rank}(\mathcal{L}^0)$ и число параметрических производных уменьшается, следовательно, $\dim \text{Sol}(\mathcal{R}_q^\varepsilon) \leq \dim \text{Sol}(\mathcal{R}_q^0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Понятия продолжения, главного символа и конечного типа, а также аналоги предыдущих лемм имеют место и для нелинейных систем $(\mathcal{R}_q)$, поскольку продолженные системы всегда линейны относительно производных старшего порядка. Если k -продолжение нелинейной системы имеет тривиальный главный символ в некоторой точке, то применение правила Крамера к надлежащей подсистеме k -продолженной системы позволяет записать эту подсистему в виде $D^{(k+q)}\tau = h(y, \tau, \dots, D^{(k+q-1)}\tau)$, где h – аналитическая функция в окрестности точки $P \in J^{k+q-1}(n, m)$. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что в этом случае существует не более одного решения τ системы $(\mathcal{R}_q)$, голоморфного в окрестности точки p и удовлетворяющего $j_p^{k+q-1}(\tau) = P$.

В общем случае линейная система порядка q может содержать уравнения порядка меньше q . Но добавление к такой системе всех уравнений порядка не выше q , полученных из уравнений низших порядков применением операторов частного дифференцирования, дает систему с тем же пространством решений. Мы называем такую систему *полнением* системы $(\mathcal{R}_q)$, или *полненной* системой $(\mathcal{R}_q)$, и обозначаем $(\mathcal{R}_q)'$. Отметим также, что введение дополнительных зависимых переменных сводит любые линейные системы к системам первого порядка, так что достаточно работать лишь с последними.

Применяя эти результаты к пополнению уравнений Ли, выведенных в предыдущем параграфе для инволютивной алгебраической системы $(\mathcal{S}^0)$ из § 4 и ее голоморфной инволютивной деформации, получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть пополненные инфинитезимальные уравнения Ли для системы $(\mathcal{S}^0)$ образуют систему конечного типа d . Тогда $\dim \text{Lie}(\mathcal{S}^0)$ конечна и для каждого ε , достаточно близкого к началу координат, тип инфинитезимальных уравнений Ли для голоморфной вполне интегрируемой

деформации $(\mathcal{S}^\varepsilon)$ не превосходит d . Кроме того, имеем $\dim \operatorname{Lie}(\mathcal{S}^\varepsilon) \leq \dim \operatorname{Lie}(\mathcal{S}^0)$.

Конечно, аналогичное утверждение верно и для конечных уравнений Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Ввиду этого результата представляет несомненный интерес вопрос о том, как проверить, является ли данная система системой конечного типа. Один из способов – рассмотреть ее *характеристическое многообразие*. Пусть λ – вектор из $\mathbb{C}^n$. Введем обозначение $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$. Вектор λ называется *характеристическим* (ко)вектором в точке y , если линейное отображение $\sigma_\lambda(y): \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^s$, заданное матрицей $\sigma_\lambda(y): \sum_{|\alpha|=q} a_{j\alpha}^i(y) \lambda^\alpha$, не инъективно. Множество всех таких λ есть алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$. Оно называется *характеристическим многообразием* в точке y и обозначается $\operatorname{Char}_y(\mathcal{R}_q)$. Полезен следующий критерий (см. [23]): система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип тогда и только тогда, когда $\operatorname{Char}_y(\mathcal{R}_q)$ есть нуль для каждого y (в настоящей работе этот факт не используется).

Конечно, это утверждение ничего не говорит о том, чему равен тип $(\mathcal{R}_q)$. Но если известно, что система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип, то можно вычислить тип средствами элементарной линейной алгебры, изучая конечное число продолжений и их символов. Число этих продолжений можно оценить сверху средствами чистой линейной алгебры с помощью теории когомологий Спенсера [23].

ПРИМЕР 6.1. Рассмотрим инфинитезимальные уравнения Ли для плоской системы без соотношений первого порядка, выведенные в примере 5.3. Прямое вычисление показывает, что главный символ 1-продолжения тривиален. Поэтому решения этих уравнений – полиномы второго порядка, и легко видеть, что размерность пространства решений равна $(n+m+2)(n+m)$. Следовательно, всякая инфинитезимальная симметрия возмущенной системы однозначно определяется ее 2-струей в данной точке, и размерность группы симметрий возмущенной системы не превосходит $(n+m+2)(n+m)$. Как мы видели в §3, системы, определяющие семейства Сегре невырожденных по Леви гиперповерхностей в $\mathbb{C}^{n+1}$, образуют специальный подкласс малых интегрируемых деформаций систем из примера 5.3 (с $m = 1$). В частности, размерность группы автоморфизмов такой гиперповерхности не превосходит $n^2 + 4n + 3$.

ПРИМЕР 6.2. Рассмотрим конечные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2)$ из примера 5.4. Как указано выше, продолжение $(\mathcal{R}_2)^{(1)}$ линейно относительно частных производных третьего порядка от X и U . Соответствующий определитель равен $\operatorname{const}(\operatorname{Jac}_f)^4$, где const – универсальная ненулевая константа, а Jac_f – якобиан отображения f . Поскольку f биголоморфно и, следовательно, его якобиан отличен от нуля, можно применить правило Крамера. Получаем, что $D^{(3)}f(x, u) = \Phi(x, u, f, D^{(1)}f, D^{(2)}f)$ с некоторой голоморфной вектор-функцией Φ (иными словами, $(\mathcal{R}_2)^{(1)}$ имеет тривиальный главный символ). По правилу дифференцирования сложной функции это однозначно определяет тейлоровское разложение f в фиксированной точке (x, u) . Получаем явную параметризацию точечных преобразований между двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка посредством их 2-струй. Продолжение $(\mathcal{R}_2)$ также является линейной системой относительно частных производных второго порядка от X и U . По правилу Крамера ее так-

же можно разрешить относительно $X_{xx}, X_{uu}, U_{xx}, U_{uu}$, поскольку соответствующий определитель равен $\text{const}(\text{Jac}_f)^2$. Получаем, что $(X_{xx}, X_{uu}, U_{xx}, U_{uu}) = \Psi(x, u, f, D^{(1)}f, X_{xu}, U_{xu})$ с аналитической функцией Ψ . Следовательно, $j_p^2(f)$ определяется струей $j_p^1(f)$ и двумя частными производными второго порядка в фиксированной точке p , т.е. восемью комплексными параметрами.

ПРИМЕР 6.3. Рассмотрим более сложный случай конечных уравнений Ли из примера 5.5. Мы рассматриваем только уравнения (5.11). Прежде всего, можно считать, что f определена в окрестности начала координат, $f(0) = 0$, и, кроме того, касательное отображение $f'(0)$ есть тождественное отображение. Действительно, этого всегда можно добиться сдвигом и линейной заменой координат в пространстве переменных (x, u) . Все наши рассуждения будут вестись в подходящей окрестности начала координат. Покажем, что 1-продолжение системы (5.11) имеет тривиальный главный символ в точке $P \in J^1(n+1, n+1)$ с каноническими координатами $x(P) = 0$, $u(P) = 0$, $u_i^j(P) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера).

Пусть M – матричнозначная функция на $J^1(n+1, n+1)$. Тогда $M(P)$ – матрица с *постоянными* элементами, полученными подстановкой $X_{x_j}^i = \delta_{ij}$, $U_{x_j} = 0$, $U_u = 1$ в соответствующие элементы M (которые являются полиномами от $D^{(1)}f$). Рассмотрим главный символ $M(P)D^{(2)}f = 0$ системы уравнений (5.11) в точке P . Ясно, что если его 1-продолжение тривиально в точке P , то 1-продолжение (5.11) тоже имеет тривиальный главный символ в точке P . Например, в частном случае $n = 1$ (рассмотренном в предыдущем примере) главный символ в точке P имеет вид

$$U_{xx} = 0, \quad 2U_{xu} - X_{xx} = 0, \quad -2X_{ux} + U_{uu} = 0, \quad X_{uu} = 0 \quad (6.1)$$

и его 1-продолжение тривиально. Если $n > 1$, то можно непосредственно вычислить $M(P)$ с помощью следующих правил:

- а) условия $X_{x_j}^i = \delta_{ij}$, $U_{x_j} = 0$, $U_u = 1$ используются всякий раз, когда мы вычисляем коэффициент при производной второго порядка от f ;
- б) члены, содержащие $u^{(2)}$, не вычисляются и не выписываются, так как они не влияют на главный символ;
- в) члены, содержащие частные производные от f порядка не выше 1 (т.е. члены, обозначенные в (5.10) через C) не вычисляются и не выписываются.

Действуя по правилам а), б), в) и используя (5.9), получаем, что главный символ $G_2(P)$ системы (5.11) в точке P задается следующей системой дифференциальных уравнений (которая обобщает (6.1)):

$$\begin{aligned} U_{x_j x_s} &= 0, \quad 1 \leq j \leq s \leq n, & X_{uu}^k &= 0, \\ X_{x_j x_s}^k &= 0, \quad 1 \leq j \leq s \leq n, \quad k \neq j, s, & X_{x_s u}^k &= 0, \quad k \neq s, \\ 2U_{x_s u} - X_{x_s x_s}^s &= 0, & U_{uu} - 2X_{x_s u}^s &= 0, & U_{x_j u} - X_{x_j x_s}^s &= 0, \quad j \neq s. \end{aligned}$$

Здесь выписаны только линейно независимые уравнения. Прямая проверка показывает, что главный символ 1-продолжения этой системы (очевидно, совпадающий с главным символом 1-продолжения (5.11) в точке P) тривиален. Таким образом, тейлоровское разложение f в начале координат определяется своими членами второго порядка. Система $G_2(P)$ содержит $(n^3 + 4n^2 + 3n)/2$ независимых

уравнений на $(n+1)^2(n+2)/2$ неизвестных (вторые производные отображения f). Но f удовлетворяет $f(0) = 0$ и $f'(0) = \text{id}$, так что f зависит не более чем от $n+1$ параметров. Для произвольного f мы должны добавить еще $(n+1) + (n+1)^2$ параметров, отвечающих $f(0)$ и $f'(0)$. Таким образом, в общем случае f однозначно определяется не более чем n^2+4n+3 комплексными параметрами. Ввиду результатов § 3 это обобщает классический результат Ю. Мозера [9], утверждающий, что росток биголоморфизма между двумя вещественно-аналитическими невырожденными по Леви гиперповерхностями определяется своей 2-струей, и дающий аналогичную верхнюю оценку для вещественной размерности группы автоморфизмов.

6.2. Системы с постоянными коэффициентами. Опишем геометрический метод, позволяющий доказать без вычислений, что уравнения Ли голоморфной инволютивной деформации невырожденной плоской системы с соотношениями первого порядка имеют конечномерное пространство решений. В § 4 было доказано это для плоских систем. Остается лишь проверить, что это свойство стабильно при малых аналитических возмущениях.

Начнем с частного случая линейных систем с постоянными коэффициентами. Основной пример таких систем – это уравнения Ли для плоской системы с соотношениями первого порядка, выведенные в предыдущем параграфе (пример 5.1).

Рассмотрим линейную систему с *постоянными* коэффициентами вида

$$(\mathcal{R}_q) : \sum_{i, |\alpha|=q_k} a_{i\alpha}^k \partial^\alpha \tau^i = 0, \quad k = 1, \dots, K,$$

где $q = \max_k q_k$. Подчеркнем, что в этой системе каждое уравнение порядка q_k содержит частные производные только того же порядка q_k . В частности, к этому классу принадлежат уравнения Ли для плоской системы, выведенные в примере 5.1.

Голоморфное в окрестности начала координат отображение $\tau = (\tau^1, \dots, \tau^m)$ является решением $(\mathcal{R}_q)$, если и только если

$$\partial^\beta \left(\sum a_{i\alpha}^k \partial^\alpha \tau^i \right) \Big|_{y=0} = \sum a_{i\alpha}^k \partial^{\beta+\alpha} \tau^i \Big|_{y=0} = 0, \quad k = 1, \dots, K,$$

для каждого β . Это эквивалентно тому, что

$$\sum_{\substack{i; |\alpha|=q_k \\ |\beta|=s-q_k}} a_{i\alpha}^k (\partial^{\beta+\alpha} \tau^i \Big|_{y=0}) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad s = q, q+1, \dots \quad (6.2)$$

В комплексном аффинном пространстве с координатами $(v_{i_1 \dots i_s}^i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $i_1 \leq \dots \leq i_s$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$, рассмотрим подпространство V_s , заданное линейной алгебраической системой $\sum_{i; |\alpha|=q_k, |\beta|=s-q_k} a_{i\alpha}^k v_{\beta+\alpha}^i = 0$, $k = 1, \dots, K$, для $s = q, q+1, \dots$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Размерность пространства $\text{Sol}(\mathcal{R}_q)$ конечна тогда и только тогда, когда $V_s = \{0\}$ для некоторого s . В этом случае пополнение системы $(\mathcal{R}_q)$ есть система конечного типа и каждое решение есть полином степени ниже s .*

ные точки P, P' в $(\mathcal{R}_{q+k+1})'$, представляющие струи с одинаковым источником в начале координат и такие, что $\pi_{q+k+1, q+k}(P) = \pi_{q+k+1, q+k}(P')$. Очевидно, любое продолжение формально интегрируемой системы тоже формально интегрируемо. По теореме Картана–Кэлера существуют голоморфные решения τ, τ' системы $(\mathcal{R}_{q+k+1})'$ (а значит, и системы $(\mathcal{R}_q)'$) такие, что $j_0^{k+q+1}(\tau) = P$ и $j_0^{k+q+1}(\tau') = P'$. Наличие таких решений противоречит сформулированному выше свойству единственности. Таким образом, символ G_{q+k+1} тривиален, что и дает другое доказательство предложения 6.2.

В виде следствия отсюда получаем один из наших основных результатов.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пополненные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2)'$ невырожденной плоской системы $(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ с соотношениями первого порядка образуют систему дифференциальных уравнений конечного типа и все инфинитезимальные симметрии $X \in \text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ имеют полиномиальные коэффициенты равномерно ограниченной степени. Если $(\mathcal{S}^\varepsilon)$ – вполне интегрируемая голоморфная деформация системы $(\mathcal{S}^0) = (\mathcal{S})_{\text{flat}}$, то $\dim \text{Lie}(\mathcal{S}^\varepsilon) \leq \dim \text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.1 следует, что алгебра $\text{Lie}(\mathcal{S})_{\text{flat}}$ конечномерна. Поскольку она совпадает с пространством решений пополненных уравнений Ли $(\mathcal{R}_2)'$, предложение 6.2 влечет, что $(\mathcal{R}_2)'$ – система конечного типа и всякое решение этой системы полиномиально. Теперь требуемое утверждение вытекает из предложения 6.1.

Этот результат является частным случаем следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ – голоморфная вполне интегрируемая деформация алгебраической системы $(\mathcal{S}_2^0)$, удовлетворяющей условиям теоремы 4.2. Допустим также, что инфинитезимальные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2^0)$ образуют достаточно регулярную систему. Тогда существует целое $k \geq 0$ такое, что для всех достаточно малых ε каждое голоморфное решение системы $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ однозначно определяется своей k -струей в фиксированной точке, а алгебра Ли $\text{Lie}(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ конечномерна и $\dim \text{Lie}(\mathcal{S}_2^\varepsilon) \leq \dim \text{Lie}(\mathcal{S}_2^0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем ту же идею. Поскольку наша система достаточно регулярна, после конечного числа продолжений и пополнений можно заменить $(\mathcal{R}_2)$ на формально интегрируемую систему $(\mathcal{R}_q)$ с тем же пространством решений (см. [23, теорема 5.7 гл. 2]). Это пространство решений конечномерно по теореме 4.2. Поэтому система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип в силу предыдущего рассуждения с теоремой Картана–Кэлера, и то же самое верно для малых возмущений.

6.3. Приложения к CR-многообразиям. Напомним, что через $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M})$ обозначается алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов многообразия $\mathcal{M}$ в начале координат (принадлежащем $\mathcal{M}$), т. е. алгебра Ли группы локальных бигломорфизмов $\text{Aut}(\mathcal{M})$. Из примера 3.2 и теоремы 6.1 вытекает такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – невырожденное по Леви вещественно-аналитическое многообразие в окрестности начала координат, а $\mathcal{M}_{\text{flat}}$ – квадррика,*

аппроксимирующая $\mathcal{M}$ в начале координат с точностью до членов третьего порядка. Тогда алгебра Ли $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M}_{\text{flat}})$ состоит из полиномиальных векторных полей равномерно ограниченной степени d . Всякий инфинитезимальный автоморфизм многообразия $\mathcal{M}$ однозначно определяется своей d -струей в начале координат, а алгебра Ли $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M})$ конечномерна и ее размерность не превосходит комплексной размерности плоской системы, определяющей семейство Сегре квадрики $\mathcal{M}_{\text{flat}}$.

Различные результаты такого типа были получены многими авторами (например, [1], [2], [4], [5], [28], [35], [36]) с помощью различных методов. Полиномиальность элементов $\text{Aut}_{\text{inf}}(\mathcal{M}_{\text{flat}})$ установил Н. Танака [35]. Важный шаг сделал В. К. Белошапка [4], доказав, что всякий биголоморфизм невырожденного по Леви многообразия определяется своей 2-струей. В работе [5] он получил аналогичный результат для инфинитезимальных автоморфизмов и впервые установил результат, весьма близкий к следствию 6.1. Отметим также, что А. В. Абросимов [1] предложил подход к изучению биголоморфизмов вещественных подмногообразий, основанный на идее продолжения соответствующего расслоения струй. В работах [2], [28] рассматриваются более общие классы многообразий. Подчеркнем, что наш метод также переносится на значительно более общие ситуации и позволяет получить много дополнительной информации о структуре группы автоморфизмов.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Мы ввели малый параметр ε по аналогии с хорошо известным методом растяжений (см., например, [3]). С другой стороны, в нашей ситуации это рассуждение можно считать приложением метода малого параметра, хорошо известного в теории дифференциальных уравнений.

6.4. Решение конечных уравнений Ли. Наш метод применим также к конечным уравнениям Ли. Система $(\mathcal{R}_q)$ (вообще говоря, нелинейная) называется *достаточно регулярной*, если при каждом r ее r -продолжение $(\mathcal{R}_{q+r})$ является подмногообразием в $J^{q+r}(n, m)$, а проекции $\pi_{q+i+r, q+i}: (\mathcal{R}_{q+i+r}) \rightarrow (\mathcal{R}_{q+i})$ имеют постоянный ранг для всех $i, r \geq 0$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$ – голоморфная вполне интегрируемая деформация алгебраической системы $(\mathcal{S}_2^0)$, удовлетворяющей условиям теоремы 4.2. Допустим также, что конечные уравнения Ли $(\mathcal{R}_2^0)$ образуют достаточно регулярную систему. Тогда существует целое $k \geq 0$ такое, что для всех достаточно малых ε всякое голоморфное решение системы $(\mathcal{R}_2^\varepsilon)$ (т. е. всякая точечная симметрия Ли системы $(\mathcal{S}_2^\varepsilon)$) однозначно определяется своей k -струей в фиксированной точке.

Это доказывается так же, как теорема 6.2. Именно, мы заменяем $(\mathcal{R}_2)$ на формально интегрируемую систему $(\mathcal{R}_q)$ с тем же пространством решений. По теореме 4.2 всякое решение этой системы есть алгебраическое отображение равномерно ограниченной степени. Следовательно, существует целое $k \geq 0$ такое, что всякое решение системы $(\mathcal{R}_2)$ однозначно определяется своей k -струей. Поэтому система $(\mathcal{R}_q)$ имеет конечный тип в силу предыдущего рассуждения, использующего теорему Картана–Кэлера, и то же самое верно для малых возмущений.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Теоремы 6.2 и 6.3 можно применить для изучения широких классов систем и, в частности, семейств Сегре CR-многообразий и их отображе-

ний. Условие достаточной регулярности восходит к работам М. Кураниши [14] и школы Спенсера [27]. Поскольку это условие использует бесконечное число продолжений, естественно возникает вопрос: будет ли некоторое продолжение данной системы формально интегрируемо (и инволютивно в смысле Картана–Спенсера) на открытом по Зарискому множестве? Связанный с этим результат был недавно анонсирован Б. Мальгранжем [19].

Список литературы

1. *Абросимов А. В.* Описание локально биголоморфных автоморфизмов стандартных квадрик коразмерности два // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 10. С. 3–52.
2. *Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P.* CR-automorphisms of real analytic CR manifolds in complex space // Comm. Anal. Geom. 1998. V. 6. P. 291–315.
3. *Бедфорд Э., Пинчук С. И.* Выпуклые области с некомпактными группами автоморфизмов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 5. С. 3–26.
4. *Белошанка В. К.* Теорема единственности для автоморфизмов невырожденной поверхности в комплексном пространстве // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 17–22.
5. *Белошанка В. К.* О голоморфных преобразованиях квадррики // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 2. С. 203–219.
6. *Bluman G. W., Kumei S.* Symmetries and differential equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
7. *Бохнер С., Мартин У. Т.* Функции многих комплексных переменных. М.: ИЛ, 1951.
8. *Cartan E.* Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes // Ann. Math. Pura Appl. 1932. V. 11. P. 17–90.
9. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. P. 219–271.
10. *Chern S. S.* On the projective structure of a real hypersurface in $\mathbb{C}^{n+1}$ // Math. Scand. 1975. V. 36. P. 74–82.
11. *Coupet B., Meylan F., Sukhov A.* Holomorphic maps of algebraic CR manifolds // Internat. Math. Res. Notices. 1999. № 1. P. 1–29.
12. *Dickson L. E.* Differential equations from the group standpoint // Ann. Math. 1924. V. 25. P. 287–378.
13. *Faran J.* Segre families and real hypersurfaces // Invent. Math. 1980. V. 60. P. 135–172.
14. *Kuranishi M.* On E. Cartan's prolongation theorem of exterior differential systems // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 379–391.
15. *Lewy H.* On the boundary behavior of holomorphic mappings // Rend. Acad. Lincei. 1977. V. 35. P. 1–8.
16. *Lie S., Scheffers G.* Vorlesungen uber Continuierliche Gruppen. N.Y.: Chelsea, 1971.
17. *Лобода А. В.* Вещественно-аналитические порождающие подмногообразия коразмерности 2 в $\mathbb{C}^4$ и их биголоморфные отображения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 5. С. 970–990.
18. *Malgrange B.* Equation de Lie. I, II // J. Diff. Geom. 1972. V. 6. P. 503–522; V. 7. P. 117–141.
19. *Malgrange B.* L'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1998. V. 326. P. 863–866.
20. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
21. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. *Пинчук С. И.* Об аналитическом продолжении голоморфных отображений // Матем. сб. 1975. Т. 98. № 3. С. 416–436.
23. *Поммаре Ж.-Ф.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.

24. *Segre B.* Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudo-conforme // Rend. Acc. Lincei. 1931. V. 13. P. 676–683.
25. *Shiffman B.* Projective geometry and Poincaré's theorem on automorphisms of the ball // Enseign. Math. 1995. V. 41. P. 201–216.
26. *Sharipov R., Sukhov A.* On CR mappings between algebraic Cauchy–Riemann manifolds and separate algebraicity for holomorphic functions // Trans. AMS. 1996. V. 348. P. 767–780.
27. *Spencer D.* Overdetermined systems of linear partial differential equations // Bull. AMS. 1969. V. 75. P. 179–239.
28. *Stanton N.* Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces // Amer. J. Math. 1996. V. 118. P. 209–233.
29. *Sukhov A.* On CR mappings of real quadric manifolds // Mich. Math. J. 1994. V. 41. P. 143–150.
30. *Sukhov A.* Segre varieties and Lie symmetries // Math. Zeit. 2001. V. 238. P. 483–492.
31. *Sukhov A.* On maps of CR manifolds and transformations of differential equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 2001. V. 333. P. 545–550.
32. *Sukhov A.* CR maps and point Lie transformations // Mich. Math. J. 2002. V. 50. P. 369–379.
33. *Sukhov A.* Segre varieties, CR geometry and Lie symmetries of second order *PDE* systems. Preprint, February 2000, <http://xxx.lanl.gov/ps/math.CV/0002163>.
34. *Tresse A.* Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig: Hirzel, 1896.
35. *Tanaka N.* On infinitesimal automorphisms of Siegel domains // J. Math. Soc. Japan. 1970. V. 22. P. 180–212.
36. *Туманов А.Е.* Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №3. С. 651–659.
37. *Webster S. M.* On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces // Inv. Math. 1977. V. 43. P. 53–68.

E-mail: sukhov@agat.univ-lille1.fr

Поступило в редакцию
13.XI.2001

Перевод с английского А.В. Домрина