Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, О выпуклости N -чебышевских множеств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 19–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:55:14

УДК 517.982.256

П. А. Бородин

О выпуклости N -чебышевских множеств

Для произвольного натурального N определяются N -чебышевские множества в банаховом пространстве X (при $N = 1$ это обычные чебышевские множества) и исследуются условия выпуклости таких множеств. В частности, доказывается, что выпукло всякое N -чебышевское множество при четном N в равномерно выпуклом X и при нечетном $N \geq 3$ в гладком равномерно выпуклом X .

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: чебышевское множество, проблема выпуклости.

§ 1. Введение

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – действительное банахово пространство. Множество $M \subset X$ называется *чебышевским* [1], если для каждого $x \in X$ существует и единствен ближайший к x элемент в M , т. е. такой элемент $y \in M$, что $\|x - y\| = \rho(x, M) := \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$.

Известна сложная проблема выпуклости чебышевских множеств (Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, В. Кли; см. обзоры [2]–[5]). В частности, до сих пор нет ответа на вопрос: всякое ли чебышевское множество в гильбертовом пространстве выпукло?

В работе [6] было введено понятие 2-чебышевского множества. Именно, для двух произвольных элементов $x_1, x_2 \in X$ и непустого множества $M \subset X$ положим

$$\rho(x_1, x_2; M) = \inf\{\|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| : y \in M\},$$
$$P_M(x_1, x_2) = \{y \in M : \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| = \rho(x_1, x_2; M)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество M называется *2-чебышевским*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) $\rho(x_1, x_2; M) > \|x_1 - x_2\|$ и $P_M(x_1, x_2)$ состоит только из одного элемента;
- 2) $\rho(x_1, x_2; M) = \|x_1 - x_2\|$ и $P_M(x_1, x_2) \neq \emptyset$.

Всякое 2-чебышевское множество является чебышевским: для любого элемента $x \in X$ имеем $\rho(x, M) = \frac{1}{2}\rho(x, x; M)$, и для пары $x_1 = x, x_2 = x$ условие 1) в определении 1 означает, что $\rho(x, M) > 0$ и в M существует единственный элемент, ближайший к x , а условие 2) означает, что $x \in M$.

Нетрудно привести пример чебышевского, но не 2-чебышевского множества: подпространство констант $Y = \{f(t) \equiv \text{const}\}$ в пространстве $X = C[0, 1]$. Хорошо известно, что Y – чебышевское подпространство, однако оно не является 2-чебышевским: для функций $f_1(t) = t + 1$ и $f_2(t) = t - 1$ имеем

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00648-а).

$\rho(f_1, f_2; Y) = 3 > 2 = \|f_1 - f_2\|$ и $\|f_1 - c\| + \|f_2 - c\| = 3$ для любой константы $c \in [0, 1]$.

В [6] была доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть $X = H$ – гильбертово пространство. Множество $M \subset H$ является 2-чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.

Таким образом, в случае 2-чебышевских множеств проблема выпуклости имеет положительное решение. Этот факт, впрочем, становится более понятным, если принять во внимание следующую геометрическую интерпретацию свойства 2-чебышевости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [7]. Пусть E – произвольное замкнутое выпуклое ограниченное тело в банаховом пространстве X , содержащее точку 0 внутри себя. Тогда для элемента $x \in X$ и непустого множества $M \subset X$ задано E -расстояние $\rho_E(x, M) = \inf\{\lambda > 0: (x + \lambda E) \cap M \neq \emptyset\}$, определяемое функционалом Минковского тела E . Будем говорить, что множество $M \subset X$ является E -чебышевским, если для любого $x \in X$ пересечение $(x + \rho_E(x, M)E) \cap M$ состоит только из одной точки.

Нетрудно видеть, что если множество M является 2-чебышевским в смысле определения 1, то оно является $B(x, -x; 2)$ -чебышевским для любого невырожденного 2-шара $B(x, -x; 2) = \{y \in X: \|y - x\| + \|y + x\| \leq 2\}$, где x – произвольный элемент, $\|x\| < 1$.

Отметим, что сама по себе постановка задачи об исследовании свойств множеств, E -чебышевских относительно семейства тел E , далеко не нова: А. Р. Алимов [8] еще в 1995 г. в качестве такого семейства брал единичные шары произвольной системы норм (вообще говоря, несимметричных) в двумерном пространстве, а в дальнейшем рассматривал другие семейства (см., например, [9]).

При этой интерпретации утверждение теоремы А становится более понятным: среди указанного континуального семейства 2-шаров $B(x, -x; 2)$ содержится обычный единичный шар $B(0, 0; 2)$ пространства X , т. е. условие 2-чебышевости “в континуум раз сильнее” свойства обычной чебышевости. В случае гильбертова пространства это семейство 2-шаров содержит эллипсоиды, сколь угодно близкие к отрезкам, а ведь множество, “чебышевское” в смысле определения 2 (если не обращать внимания на то, что E в этом определении должно быть телом) относительно всех отрезков, является выпуклым просто по определению выпуклости.

При этом доказательство теоремы А существенно опирается на следующий известный результат Л. П. Власова [10].

ТЕОРЕМА В. Пусть X – локально равномерно выпуклое гладкое банахово пространство. Если множество $M \subset X$ чебышевское и для любого $x \notin M$ с метрической проекцией $P_M(x) = \{y\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} P_M(x + \lambda(x - y)) = y,$$

то M выпукло.

(Определения локальной равномерной выпуклости и гладкости см. далее в § 2. Отметим также, что в работе [10] теорема В в явном виде не сформулирована: она вытекает из теоремы 6 этой же работы и доказательства теоремы 6, в котором используется указанная радиальная непрерывность метрической проекции.)

Основная цель настоящей работы состоит в доказательстве аналога теоремы А для N -чебышевских множеств (где $N = 2, 3, \dots$; определение см. далее в § 2) и для возможно более широкого класса банаховых пространств X . Именно, доказывается (теорема 3), что при четном N в равномерно выпуклом X класс N -чебышевских множеств совпадает с классом выпуклых замкнутых множеств и при нечетном $N \geq 3$ в гладком равномерно выпуклом X эти классы также совпадают. При доказательстве теоремы 3 в случае четных N оказывается возможным обойтись без теоремы В, но в обоих случаях – и в четном, и в нечетном – существенно используется другая известная теорема Л. П. Власова о так называемой V -связности чебышевских множеств, которая по необходимости обобщается на несимметрично нормированные пространства (теорема 4).

Кроме того, в настоящей работе доказаны некоторые другие утверждения о выпуклости N -чебышевских множеств (теоремы 1, 6 и следствия из них), а также получен (теорема 5) положительный ответ на следующий вопрос В. В. Арестова: нельзя ли усилить теорему А, заменив в ней условие 2-чебышевности множества M на условие одноточечности метрической 2-проекции $P_M(x_1, x_2)$ для всех таких пар (x_1, x_2) , что $\|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon \rho(x_1, x_2; M)$, где $\varepsilon > 0$ – фиксированное число?

§ 2. Определения и вспомогательные утверждения

Для N произвольных элементов $x_1, \dots, x_N \in X$ и произвольного непустого множества $M \subset X$ положим

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \inf\{\|x_1 - y\| + \dots + \|x_N - y\| : y \in X\},$$

и пусть

$$\rho(x_1, \dots, x_N; M) = \inf\{\|x_1 - y\| + \dots + \|x_N - y\| : y \in M\}$$

– N -расстояние от точек $x_1, \dots, x_N$ до множества M ,

$$P_M(x_1, \dots, x_N) = \{y \in M : \|x_1 - y\| + \dots + \|x_N - y\| = \rho(x_1, \dots, x_N; M)\}$$

– метрическая N -проекция точек $x_1, \dots, x_N$ на множество M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество M назовем N -чебышевским, если для любых $x_1, \dots, x_N \in X$ выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) $\rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N)$ и $P_M(x_1, \dots, x_N)$ состоит только из одного элемента;
- 2) $\rho(x_1, \dots, x_N; M) = \rho(x_1, \dots, x_N)$ и $P_M(x_1, \dots, x_N) \neq \emptyset$.

В случае $N = 1$ определение 3 дает обычные чебышевские множества, а в случае $N = 2$ оно совпадает с определением 1. Условие 2) в определении 3 необходимо только для замкнутости множества M , а само по себе ниже нигде

не используется; возможно, его и следует заменить на (более слабое) условие замкнутости M .

Всякое N -чебышевское множество M является $B(x_1, \dots, x_N; R)$ -чебышевским для любого невырожденного N -шара $B(x_1, \dots, x_N; R) = \{y \in X : \|y - x_1\| + \dots + \|y - x_N\| \leq R\}$, $R > \rho(x_1, \dots, x_N)$, содержащего точку 0 внутри себя.

Всякое N -чебышевское множество является чебышевским и, вообще, d -чебышевским для любого натурального d – делителя N . Если натуральное N' не является делителем N , то из N -чебышевости, вообще говоря, не следует N' -чебышевость (см. пример чебышевского, но не 2-чебышевского множества в § 1, а также пример 2 в § 3).

Напомним, что банахово пространство X называется:

(i) *гладким*, если в каждой точке s единичной сферы $S(X) = \{s \in X : \|s\| = 1\}$ опорная гиперплоскость единственна (т.е. единствен такой функционал $f_s \in S(X^*)$, что $f_s(s) = 1$);

(ii) *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S(X)$ не содержит невырожденных отрезков;

(iii) *локально равномерно выпуклым*, если для всякого $s \in S(X)$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$x \in S(X), \quad \left\| \frac{x+s}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - s\| < \varepsilon;$$

(iv) *равномерно выпуклым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$x, y \in S(X), \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

ЛЕММА 1. *В строго выпуклом рефлексивном банаховом пространстве X всякое выпуклое замкнутое множество является N -чебышевским для любого натурального N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, \dots, x_N \in X$, $\{y_k\} \subset M$ и $\sum_{j=1}^N \|x_j - y_k\| \rightarrow \rho(x_1, \dots, x_N; M)$ при $k \rightarrow \infty$. Последовательность $\{y_k\}$ ограничена, а значит, по теореме Банаха–Алаоглу она имеет предельную относительно слабой топологии точку y . Найдутся такие элементы $y'_n \in \text{Conv}(\{y_k\}_{k=n}^\infty)$ (здесь $\text{Conv}(E)$ обозначает выпуклую оболочку множества E), что $y'_n \rightarrow y$ в норме пространства X (см., например, [11, гл. 5, § 3]). В силу неравенства треугольника имеем $\sum_{j=1}^N \|x_j - y'_n\| \rightarrow \rho(x_1, \dots, x_N; M)$, в силу выпуклости и замкнутости множества M имеем $y \in M$, откуда $y \in P_M(x_1, \dots, x_N)$.

Если $\rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N)$ и два разных элемента y, y' принадлежат $P_M(x_1, \dots, x_N)$, то хотя бы одна из точек $x_1, \dots, x_N$ не лежит на одной прямой с y и y' . Положим $m = \frac{y+y'}{2}$. Тогда в силу строгой выпуклости пространства X имеем

$$\sum_{j=1}^N \|x_j - m\| < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\|x_j - y\| + \|x_j - y'\|) = \rho(x_1, \dots, x_N; M),$$

что невозможно, поскольку $m \in M$. Таким образом, в случае $\rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N)$ множество $P_M(x_1, \dots, x_N)$ одноточечно.

Как и в случае $N = 1$, нетрудно показать, что условия рефлексивности и строгой выпуклости в лемме 1 существенны для любого натурального N .

ЛЕММА 2. Пусть Y – замкнутое линейное подпространство банахова пространства X и $x_1, \dots, x_N \in X$. Элемент $y_0 \in Y$ принадлежит множеству $P_Y(x_1, \dots, x_N)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, \dots, f_N \in X^*$, что:

- 1) $\sum_{j=1}^N f_j \in Y^\perp$;
- 2) $\max \|f_j\| = 1$;
- 3) $f_j(x_j - y_0) = \|x_j - y_0\|$, $j = 1, \dots, N$.

Равенство 3) в лемме 2 означает, что либо $\|f_j\| = 1$, либо $x_j = y_0$.

Лемма 2 вытекает из более общей теоремы работы [12] и является обобщением хорошо известного критерия элемента наилучшего приближения для случая $N = 1$ (см., например, [13]). Приведем доказательство для полноты картины.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Включение $y_0 \in P_Y(x_1, \dots, x_N)$ означает, что в декартовом произведении $X_N = \underbrace{X \times \dots \times X}_N$ с нормой $\|(x_1, \dots, x_N)\| =$

$\|x_1\| + \dots + \|x_N\|$ элемент $\bar{y}_0 = (y_0, \dots, y_0)$ является элементом наилучшего приближения для элемента $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ в подпространстве $Y_N = \{(y, \dots, y) : y \in Y\}$. По упомянутому критерию элемента наилучшего приближения в случае $N = 1$ это равносильно существованию такого функционала $F = (f_1, \dots, f_N) \in X_N^*$, что выполнены следующие три условия:

- 1) $F \in Y_N^\perp \iff \sum_{j=1}^N f_j(y) = 0 \quad \forall y \in Y \iff \sum_{j=1}^N f_j \in Y^\perp \text{ в } X^*$;
- 2) $\|F\| = \max \|f_j\| = 1$;
- 3) $F(\bar{x} - \bar{y}_0) = \|\bar{x} - \bar{y}_0\| \iff \sum_{j=1}^N f_j(x_j - y_0) = \sum_{j=1}^N \|x_j - y_0\| \iff f_j(x_j - y_0) = \|x_j - y_0\|$, $j = 1, \dots, N$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть X – произвольное банахово пространство, $M \subset X$ и $y \in P_M(x_1, \dots, x_N)$. Тогда $y \in P_M(x'_1, \dots, x'_N)$ для любых точек $x'_1, \dots, x'_N$, лежащих соответственно на отрезках $[y, x_k]$, $k = 1, \dots, N$. Если $\rho(x_1, \dots, x_N; M) = \rho(x_1, \dots, x_N)$, то $y \in P_M(x'_1, \dots, x'_N)$ для любых точек $x'_1, \dots, x'_N$, лежащих соответственно на лучах $\{y + \lambda(x_k - y) : \lambda \geq 0\}$, $k = 1, \dots, N$ (при $x_k = y$ такой луч вырождается в точку).

В случае $N = 1$ утверждение леммы 3 хорошо известно (см., например, [2, предложение 0.3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Первое утверждение следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \sum \|x'_k - z\| &\geq \sum \|x_k - z\| - \sum \|x'_k - x_k\| \\ &\geq \sum \|x_k - y\| - \sum \|x'_k - x_k\| = \sum \|x'_k - y\|, \end{aligned}$$

справедливой для любого $z \in M$ (суммирование ведется по $k = 1, \dots, N$).

Если $\rho(x_1, \dots, x_N; M) = \rho(x_1, \dots, x_N)$, то по лемме 2 найдутся такие функционалы $f_1, \dots, f_N \in X^*$, что $f_1 + \dots + f_N = 0$, $\max \|f_j\| = 1$ и $f_k(x_k - y) = \|x_k - y\|$, $k = 1, \dots, N$. Но тогда и $f_k(x'_k - y) = \|x'_k - y\|$ для любых x'_k на лучах

$\{y + \lambda(x_k - y) : \lambda \geq 0\}$, $k = 1, \dots, N$, и по лемме 2 получаем $y \in P_X(x'_1, \dots, x'_N)$, откуда $y \in P_M(x'_1, \dots, x'_N)$.

Следующее определение обобщает понятие солнца, введенное Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество M назовем N -солнцем, если для любых $x_1, \dots, x_N \in X$ найдется такой элемент $y \in P_M(x_1, \dots, x_N)$, что $y \in P_M(x'_1, \dots, x'_N)$ для любых точек x'_k , лежащих соответственно на лучах $\{y + \lambda(x_k - y) : \lambda \geq 0\}$, $k = 1, \dots, N$ (при $x_k = y$ такой луч вырождается в точку).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показывает последнее утверждение леммы 3, существование нужного y в определении 4 достаточно требовать лишь для тех наборов $x_1, \dots, x_N$, для которых $\rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N)$.

§ 3. Выпуклость 2-чебышевских множеств при условии непрерывности метрической 2-проекции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что банахово пространство X имеет узкие 2-шары, если для любых $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $\|z - x\| + \|z - y\| \leq \|x - y\| + \delta$ влечет $\rho(z, [x, y]) \leq \varepsilon$.

Это свойство означает, что для любых двух точек $x, y \in X$ 2-шары $B(x, y; \|x - y\| + t)$ при $t \rightarrow 0$ сходятся к отрезку $[x, y]$ в хаусдорфовой метрике.

ТЕОРЕМА 1. Пусть банахово пространство X имеет узкие 2-шары и 2-чебышевское множество $M \subset X$ таково, что метрическая 2-проекция $P_M(\cdot, \cdot)$ непрерывна на множестве $\{(x_1, x_2) \in X \times X : \rho(x_1, x_2; M) > \|x_1 - x_2\|\}$. Тогда M выпукло.

Данный результат является аналогом многочисленных (см. обзоры [2]–[4]) теорем о выпуклости обычных чебышевских множеств при условии того или иного вида непрерывности обычной метрической проекции. Примером теоремы такого типа служит приведенная в § 1 теорема В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что M не выпукло, т. е. для некоторых двух различных точек a, b имеем $[a, b] \cap M = \{a, b\}$. Пусть $\alpha = \|b - a\|$, $a' = a + \frac{b-a}{10}$, $b' = b + \frac{a-b}{10}$, $r = \min\{\rho(x, M) : x \in [a', b']\}$. Ясно, что $0 < r \leq \frac{\alpha}{10}$.

По условию найдется такое $\delta > 0$, что при каждом $t \in (0, \delta)$ всякая точка 2-шара $B(a', b'; \|a' - b'\| + t)$ отстоит от отрезка $[a', b']$ меньше чем на $\frac{r}{2}$. Можно считать, что $\delta < \frac{\alpha}{5}$.

Для любых двух точек $u \in (a, b) \cap B(a, \frac{\delta}{2})$ и $v \in (a, b) \cap B(b, \frac{\delta}{2})$ имеем $\rho = \rho(u, v; M) \leq \|u - v\| + \delta$ и 2-шар $B(u, v; \rho)$ подобен 2-шару $B(a', b'; \|a' - b'\| + t)$, где

$$t = \rho \frac{\|a' - b'\|}{\|u - v\|} - \|a' - b'\| \leq \frac{\|a' - b'\|}{\|u - v\|} \delta < \delta,$$

с коэффициентом подобия $\frac{\|u - v\|}{\|a' - b'\|} \in (1, \frac{\|a - b\|}{\|a' - b'\|}) = (1, \frac{5}{4})$. Поэтому всякая точка 2-шара $B(u, v; \rho)$ отстоит от отрезка $[u, v]$ меньше, чем на $\frac{5}{4} \frac{r}{2} < r$. Следовательно, 2-проекция $P_M(u, v) = B(u, v; \rho) \cap M$, состоящая из единственной точки, отстоит от одной из точек разности $[u, v] \setminus [a', b']$ не более чем на r , так что

$P_M(u, v)$ отстоит либо от точки a , либо от точки b не более чем на $\frac{\alpha}{10} + r < \frac{\alpha}{3}$. Шары $B(a, \frac{\alpha}{3})$ и $B(b, \frac{\alpha}{3})$ не пересекаются.

Пусть для каких-то конкретных u_0, v_0 выполняется $P_M(u_0, v_0) \in B(b, \frac{\alpha}{3})$. При стремлении точки u к a имеем $\rho(u, v_0; M) - \|u - v_0\| \rightarrow 0$, а суммы $\|z - u\| + \|z - v_0\| = \|z - a\| + \|z - v_0\| + o(1)$ для всех точек $z \in M \cap B(b, \frac{\alpha}{3})$ больше $\|u - v_0\| = \|a - v_0\| + o(1)$ на некоторую положительную величину, так что $P_M(u, v_0) \in B(a, \frac{\alpha}{3})$ при всех u , достаточно близких к a . Таким образом, при указанном стремлении u к a точка $P_M(u, v_0)$ в какой-то момент “перескакивает” из $B(b, \frac{\alpha}{3})$ в $B(a, \frac{\alpha}{3})$, что противоречит условию непрерывности $P_M(\cdot, \cdot)$ на множестве $\{(x_1, x_2) \in X \times X: \rho(x_1, x_2; M) > \|x_1 - x_2\|\}$ (все рассматриваемые пары (u, v) принадлежат этому множеству). Теорема доказана.

Выясним теперь, как связано свойство банаховых пространств иметь узкие 2-шары с другими свойствами этих пространств.

ТЕОРЕМА 2. 1) *Банахово пространство X имеет узкие 2-шары тогда и только тогда, когда для любого $s \in S(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$u, v \in S(X), \quad \|u + v - 2s\| < \delta \implies \|u - s\| < \varepsilon, \quad \|v - s\| < \varepsilon.$$

2) *Если X имеет узкие 2-шары, то оно строго выпукло.*

3) *Если X локально равномерно выпукло, то оно имеет узкие 2-шары.*

4) *Банахово пространство X имеет равномерно узкие 2-шары, т. е.*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall R \geq 0 \quad \exists \delta > 0: \|x - y\| \leq R, \\ \|z - x\| + \|z - y\| \leq \|x - y\| + \delta \implies \rho(z, [x, y]) < \varepsilon, \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда X равномерно выпукло.

По-видимому, существуют не локально равномерно выпуклые банаховы пространства, имеющие узкие 2-шары.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1) Пусть X имеет узкие 2-шары, $s \in S(X)$ и $\varepsilon > 0$. Найдется такое $\delta > 0$, что из $\|z - s\| + \|z - (-s)\| \leq 2 + \delta$ следует $\rho(z, [-s, s]) < \varepsilon/2$. Пусть $u, v \in S(X)$ и $\|u + v - 2s\| < \delta$. Тогда для $z = u - s$ имеем

$$\|z - s\| + \|z - (-s)\| = \|u - 2s\| + \|u\| \leq \|u + v - 2s\| + \|v\| + \|u\| < 2 + \delta.$$

Отсюда $\rho(u - s, [-s, s]) < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. найдется такое $\lambda \in (0, 1)$, что

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &> \|u - s - \lambda s - (1 - \lambda)(-s)\| = \|u - 2\lambda s\| \geq |2\lambda - 1| \\ \implies \|u - s\| &\leq \|u - 2\lambda s\| + \|(2\lambda - 1)s\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично имеем $\|v - s\| < \varepsilon$.

Обратно, пусть $x, y \in X$, $\|x - y\| = R > 0$, $\varepsilon > 0$ и есть такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что

$$u, v \in S(X), \|u + v - 2\sigma(y - x)\| \leq \frac{2\delta}{R} \implies \|u - \sigma(y - x)\| < \frac{\varepsilon}{R} \quad (1)$$

(здесь и ниже для любого ненулевого вектора $v \in X$ через $\sigma(v)$ обозначается единичный вектор, сонаправленный с v : $\sigma(v) = \frac{v}{\|v\|}$).

Пусть $\|z - x\| + \|z - y\| \leq R + \delta$. На ломаной xzy найдется такая точка z' , что $\|z' - x\| = \|z' - y\| =: r$, $R \leq 2r \leq R + \delta$. Без ограничения общности считаем, что $z' \in [x, z]$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\sigma(z' - x) + \sigma(y - z') - 2\sigma(y - x)\| &= \frac{\|R(z' - x) + R(y - z') - 2r(y - x)\|}{Rr} \\ &= \frac{(2r - R)R}{Rr} \leq \frac{\delta}{r} \leq \frac{2\delta}{R}, \end{aligned}$$

откуда в силу (1) получаем

$$\|\sigma(z' - x) - \sigma(y - x)\| < \frac{\varepsilon}{R}, \quad \text{т. е. } \|R(z' - x) - r(y - x)\| \leq \varepsilon r.$$

Для элемента z имеем либо $\|z - y\| < \delta < \varepsilon$, либо $\|z - x\| \leq \|x - y\| = R$, и тогда

$$\begin{aligned} &\left\| z - \left(\frac{\|z - x\|}{R} y + \left(1 - \frac{\|z - x\|}{R} \right) x \right) \right\| \\ &= \left\| x + \frac{\|z - x\|}{r} (z' - x) - \left(\frac{\|z - x\|}{R} y + \left(1 - \frac{\|z - x\|}{R} \right) x \right) \right\| \\ &= \frac{\|z - x\|}{rR} \|R(z' - x) - r(y - x)\| \leq \frac{\|z - x\|\varepsilon}{R} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. $\rho(z, [x, y]) \leq \varepsilon$.

2) Если X не строго выпукло, т. е. существуют такие $x, y \in S(X)$, $x \neq y$, что $\|x + y\| = 2$, то 2-шар $B(0, x + y; \|x + y\| + t)$ содержит точки x и y при любом $t \geq 0$ и эти точки не лежат на отрезке $[0, x + y]$.

3) Пусть X локально равномерно выпукло, $s \in S(X)$, $\varepsilon > 0$ и δ такое, как в п. (iii) из § 2. Пусть $u, v \in S(X)$ таковы, что $\|u + v - 2s\| < \delta$. Тогда для функционала $f_s \in S(X^*)$, опорного к сфере $S(X)$ в точке s , имеем

$$\begin{aligned} 2 - f_s(u) - f_s(v) < \delta &\implies f_s(u) > 1 - \delta \\ &\implies \|s + u\| \geq f_s(s + u) \geq 2 - \delta \implies \|s - u\| < \varepsilon \end{aligned}$$

и, аналогично, $\|s - v\| < \varepsilon$. В силу уже доказанного утверждения 1), X имеет узкие 2-шары.

4) Нетрудно доказать, повторив общий ход рассуждений из первой части доказательства утверждения 1), что свойство банахова пространства иметь равномерно узкие 2-шары влечет следующее свойство этого пространства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \quad s, u, v \in S(X), \quad \|u + v - 2s\| < \delta \implies \|u - s\| < \varepsilon, \quad \|v - s\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Обратно, если выполнено свойство (2), то, повторяя рассуждения из второй части доказательства утверждения 1), получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0, \forall R \geq 0 \exists \delta_0 = \delta_0(R, \varepsilon) > 0: \quad \|x - y\| = R, \quad \|z - x\| + \|z - y\| \leq R + \delta_0 \\ \implies \rho(z, [x, y]) < \varepsilon.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$, $R > 0$ и $\|x - y\| \leq R$. Положим $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon\delta_0}{R}\}$, и пусть $\|z - x\| + \|z - y\| \leq \|x - y\| + \delta$. Если $\|x - y\| < \varepsilon$, то одна из норм $\|z - x\|$ или $\|z - y\|$ меньше ε , откуда $\rho(z, [x, y]) < \varepsilon$. Если же $\|x - y\| \in [\varepsilon, R]$, то, полагая $\alpha = \frac{R}{\|x - y\|}$, для элементов $x' = \alpha x$, $y' = \alpha y$, $z' = \alpha z$ имеем

$$\|x' - y'\| = R, \quad \|z' - x'\| + \|z' - y'\| \leq R + \delta\alpha \leq R + \frac{\delta R}{\varepsilon} \leq R + \delta_0,$$

откуда $\rho(z', [x', y']) < \varepsilon$, а значит, и $\rho(z, [x, y]) < \varepsilon$.

Таким образом, свойство банахова пространства иметь равномерно узкие 2-шары равносильно свойству (2).

Пусть теперь X удовлетворяет свойству (2), $u, v \in S(X)$ и $\|u + v\| \geq 2 - \delta$. Для элемента $s = \sigma(\frac{u+v}{2})$ имеем $\|u + v - 2s\| < \delta$, что вместе с (2) влечет $\|u - v\| < 2\varepsilon$, т.е. X равномерно выпукло.

Вывод свойства (2) из равномерной выпуклости осуществляется точно так же, как в доказательстве утверждения 3), только δ выбирается из определения равномерной выпуклости пространства и не зависит от s .

Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 и леммы 1 вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть натуральное число N четно. В локально равномерно выпуклом банаховом пространстве всякое ограниченно компактное N -чебышевское множество выпукло.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть натуральное число N четно. В локально равномерно выпуклом рефлексивном банаховом пространстве ограниченно компактное множество является N -чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть натуральное число N четно. В конечномерном строго выпуклом банаховом пространстве множество является N -чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.

Было бы интересно описать все конечномерные банаховы пространства, в которых всякое 2-чебышевское множество выпукло. Как показывает следствие 3, уже в двумерном случае это описание должно отличаться от соответствующей характеристики в случае чебышевских множеств: в двумерном банаховом пространстве X всякое чебышевское множество выпукло тогда и только тогда, когда X гладкое [14].

Приведем пример невыпуклого 2-чебышевского множества

ПРИМЕР 1. Рассмотрим двумерное пространство l_1^2 с нормой $\|(\xi, \eta)\| = |\xi| + |\eta|$. Для любых $x_1 = (\xi_1, \eta_1)$, $x_2 = (\xi_2, \eta_2)$ 2-шар

$$B(x_1, x_2; R) = \{(\xi, \eta) : |\xi - \xi_1| + |\eta - \eta_1| + |\xi - \xi_2| + |\eta - \eta_2| \leq R\}$$

на декартовой координатной плоскости $O\xi\eta$ представляет собой выпуклый многоугольник, стороны которого могут быть или горизонтальны, или вертикальны, или параллельны прямым $\eta = \pm\xi$. Множество $M = \{(\xi, \eta) : \eta \geq \min\{2\xi, 3\xi\}\}$ невыпукло и является 2-чебышевским, поскольку любой 2-шар – многоугольник указанного вида – может касаться множества M лишь одной вершиной.

Аналогично можно построить пример невыпуклого N -чебышевского множества для любого заданного натурального N .

Приведем пример невыпуклого 3-чебышевского множества в строго выпуклом пространстве и одновременно пример 3-чебышевского, но не 2-чебышевского множества. Он показывает, что условие четности N в следствиях 1–3 существенно.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим двумерное пространство X_2 со строго выпуклой нормой, единичная сфера которой в декартовой системе координат состоит из четырех одинаковых круговых дуг достаточно большого радиуса, соединяющих точки $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ (рис. 1).

Рис. 1

Данная сфера имеет четыре точки негладкости. Считаем, что угловые коэффициенты касательных в нижней точке равны соответственно $1 - \delta$ и $-1 + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

Нетрудно видеть, что норма с такой единичной сферой удовлетворяет неравенству $\|(\xi, \eta)\| \leq |\xi| + |\eta|$.

Докажем, что угол $\Lambda(\varepsilon) = \{(\xi, \varepsilon|\xi|) : \xi \in \mathbb{R}\}$ является 3-чебышевским множеством в пространстве X_2 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Прямая $l_+ = \{(\xi, \varepsilon\xi) : \xi \in \mathbb{R}\}$ является 3-чебышевским множеством в X_2 по лемме 1. Для любой точки $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$ функция $f_0(\xi) = \|x_0 - x(\xi)\|$, где $x(\xi) = (\xi, \varepsilon\xi)$, выпукла вниз, достигает минимума в точке ξ_0 , причем производная $f'_0(\xi)$ возрастает на всей оси и имеет разрыв в точке ξ_0 , и $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0+} f'_0(\xi) = 1 - \delta - \varepsilon$, $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0-} f'_0(\xi) = -1 + \delta - \varepsilon$.

Поскольку $f_0(\xi) \leq |\xi - \xi_0| + |\varepsilon\xi - \eta_0|$ при всех ξ , то при $\xi > \xi_0$ получаем $1 - \delta - \varepsilon \leq f'_0(\xi) \leq 1 + \varepsilon$, а при $\xi < \xi_0$ получаем $-1 - \varepsilon \leq f'_0(\xi) \leq -1 + \delta - \varepsilon$.

Поэтому для любых трех точек $x_k = (\xi_k, \eta_k)$, $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$, функция $F(\xi) = \sum_{k=1}^3 \|x_k - x(\xi)\|$ при $\xi > \xi_2$ имеет производную $F'(\xi) \geq 2(1 - \delta - \varepsilon) + (-1 - \varepsilon) =$

$1 - 2\delta - 3\varepsilon > 0$, а при $\xi < \xi_2$ — производную $F'(\xi) \leq 2(-1 + \delta - \varepsilon) + 1 + \varepsilon = -1 + 2\delta - \varepsilon < 0$, т. е. $F(\xi)$ имеет единственный минимум в точке ξ_2 .

Отсюда следует, что для любых трех точек x_1, x_2, x_3 , у которых $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$, метрическая 3-проекция $P_{l_+}(x_1, x_2, x_3)$ имеет абсциссу ξ_2 .

Аналогично доказывается, что для прямой $l_- = \{(\xi, -\varepsilon\xi) : \xi \in \mathbb{R}\}$ и любых трех точек x_1, x_2, x_3 , у которых $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$, метрическая 3-проекция $P_{l_-}(x_1, x_2, x_3)$ имеет абсциссу ξ_2 .

Пусть для каких-то трех точек x_1, x_2, x_3 проекция $P_{\Lambda(\varepsilon)}(x_1, x_2, x_3)$ содержит две различные точки a и b . Обе эти точки не могут лежать на l_+ или на l_- , поскольку эти прямые являются 3-чебышевскими множествами. Пусть, скажем, $a \in l_+$, $b \in l_-$, но тогда $a \in P_{l_+}(x_1, x_2, x_3)$, $b \in P_{l_-}(x_1, x_2, x_3)$, откуда a и b имеют одинаковые абсциссы, а значит, совпадают. Следовательно, угол $\Lambda(\varepsilon)$ является 3-чебышевским множеством. При этом по следствию 3 угол $\Lambda(\varepsilon)$ не является N -чебышевским множеством ни при каком четном N .

§ 4. Выпуклость N -чебышевских множеств в равномерно выпуклом пространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть E — выпуклое замкнутое ограниченное тело в банаховом пространстве X . Назовем тело E *равномерно выпуклым*, если для любого тела E' , получаемого из E параллельным переносом и содержащего точку 0 внутри себя, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$x, y \in \partial E', \quad x + y \notin (2 - \delta)E' \implies \|x - y\| < \varepsilon$$

(здесь $(2 - \delta)E'$ обозначает $(2 - \delta)$ -раздутье тела E' относительно точки 0).

Ясно, что указанное в определении 6 тело E' задает в X норму, вообще говоря, несимметричную, которая в случае симметричности E' относительно 0 является обычной равномерно выпуклой нормой, эквивалентной исходной норме пространства X .

ЛЕММА 4. В равномерно выпуклом банаховом пространстве X всякий замкнутый невырожденный N -шар $B = B(a_1, \dots, a_N; R)$, $R > \rho(a_1, \dots, a_N)$, является равномерно выпуклым телом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$ и $0 \in \mathring{B}$ (как обычно, $\mathring{E}$ обозначает внутренность множества E), т. е. $\rho := \rho(a_1, \dots, a_N) \leq \sum_{k=1}^N \|a_k\| < 1$.

Возьмем произвольное положительное

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{4}{N}, \sqrt{\frac{1 - \rho}{2N}} \right\} < 1.$$

По теореме 2 найдется такое $\delta > 0$, что

$$u, v, z \in X, \quad \|u - v\| \leq 2, \quad \|z - u\| + \|z - v\| \leq \|u - v\| + 2\delta \implies \rho(z, [u, v]) < \varepsilon^3. \quad (3)$$

Пусть $x, y \in \partial B$ и $x + y \notin (2 - \delta)B = B((2 - \delta)a_1, \dots, (2 - \delta)a_N; 2 - \delta)$, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \|x - a_k\| = \sum_{k=1}^N \|y - a_k\| = 1, \quad \sum_{k=1}^N \|x + y - (2 - \delta)a_k\| > 2 - \delta.$$

Имеем $\|x\| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\|x - a_k\| + \|a_k\|) < \frac{2}{N}$, аналогично, $\|y\| < \frac{2}{N}$ и

$$2 - \delta < \sum_{k=1}^N \|x + y - (2 - \delta)a_k\| < \sum_{k=1}^N (\|x - a_k\| + \|y - a_k\| + \delta\|a_k\|) < 2 + \delta.$$

Отсюда для каждого $k = 1, \dots, N$ получаем

$$\begin{aligned} & \|x - a_k\| + \|a_k - y\| - \|(x - a_k) - (a_k - y)\| \\ & \leq \|x - a_k\| + \|a_k - y\| + \delta\|a_k\| - \|x + y - (2 - \delta)a_k\| < 2\delta. \end{aligned}$$

Поскольку $\|(x - a_k) - (a_k - y)\| \leq \|x - a_k\| + \|y - a_k\| \leq 2$, в силу (3) получаем $\rho(0, [x - a_k, a_k - y]) < \varepsilon^3$. Таким образом, для каждого $k = 1, \dots, N$ найдется такое число $\lambda_k \in (0, 1)$, что

$$\|\lambda_k(x - a_k) + (1 - \lambda_k)(a_k - y)\| < \varepsilon^3. \quad (4)$$

Если $|2\lambda_k - 1| < \varepsilon$ для какого-нибудь k , то из (4) получаем

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= 2 \left\| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right\| \leq 2 \left(\left\| \left(\frac{1}{2} - \lambda_k \right) x \right\| + \left\| \left(\frac{1}{2} - \lambda_k \right) y \right\| \right. \\ &\quad \left. + \|\lambda_k x - (1 - \lambda_k)y - (2\lambda_k - 1)a_k\| + \|(2\lambda_k - 1)a_k\| \right) \\ &< 2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{2}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{2}{N} + \varepsilon^3 + \varepsilon \right) < 8\varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть теперь $|2\lambda_k - 1| \geq \varepsilon$ для всех k и $\|x - y\| \geq 8\varepsilon$. Из (4) получаем

$$\left\| \frac{\lambda_k}{2\lambda_k - 1} x + \frac{\lambda_k - 1}{2\lambda_k - 1} y - a_k \right\| < \frac{\varepsilon^3}{|2\lambda_k - 1|} \leq \varepsilon^2.$$

Точка $b_k = \frac{\lambda_k}{2\lambda_k - 1} x + \frac{\lambda_k - 1}{2\lambda_k - 1} y$ лежит на прямой xy вне отрезка $[x, y]$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \|x - b_k\| &\leq \sum_{k=1}^N (\|x - a_k\| + \|a_k - b_k\|) < 1 + N\varepsilon^2, \\ \sum_{k=1}^N \|x - b_k\| &\geq \sum_{k=1}^N (\|x - a_k\| - \|a_k - b_k\|) > 1 - N\varepsilon^2 \end{aligned}$$

и, аналогично, $1 - N\varepsilon^2 < \sum_{k=1}^N \|y - b_k\| < 1 + N\varepsilon^2$. Следовательно, суммы $\sum_{k=1}^N \|x - b_k\|$ и $\sum_{k=1}^N \|y - b_k\|$ отличаются друг от друга менее чем на $2N\varepsilon^2$. Поскольку $\|x - y\| \geq 8\varepsilon \geq 2N\varepsilon^2$, это означает, что на прямой xy точки b_k поровну распределяются по разные стороны отрезка $[x, y]$ (при нечетных N сразу имеем противоречие). Однако тогда для любой точки $z \in X$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \|z - a_k\| &\geq \sum_{k=1}^N (\|z - b_k\| - \|b_k - a_k\|) > \rho(b_1, \dots, b_N) - N\varepsilon^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \|x - b_k\| - N\varepsilon^2 > \sum_{k=1}^N \|x - a_k\| - 2N\varepsilon^2 = 1 - 2N\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Отсюда $\rho = \rho(a_1, \dots, a_N) > 1 - 2N\varepsilon^2$, а это противоречит условию $\varepsilon < \sqrt{\frac{1-\rho}{2N}}$.

Итак, при любом положительном $\varepsilon < \min\{\frac{4}{N}, \sqrt{\frac{1-\rho}{2N}}\}$ мы нашли такое $\delta > 0$, что при $x, y \in \partial B$, $x + y \notin (2 - \delta)B$, выполнено неравенство $\|x - y\| < 8\varepsilon$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть N четно и X – равномерно выпуклое банахово пространство. Множество $M \subset X$ является N -чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.

2) Пусть $N \geq 3$ нечетно и X – гладкое равномерно выпуклое банахово пространство. Множество $M \subset X$ является N -чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло и замкнуто.

Как показывает пример 2, условие гладкости пространства в утверждении 2) теоремы 3 убрать нельзя.

В связи с теоремой 3 следует напомнить о результатах Н. В. Ефимова, С. Б. Стечкина, Л. П. Власова и других авторов, доказывавших выпуклость чебышевского множества M в равномерно выпуклом гладком пространстве при различных ограничениях, налагаемых на структуру множества M или на свойства метрической проекции $P_M(\cdot)$ (см. обзоры [2]–[4]). Приведем здесь один результат Л. П. Власова [15]: всякое локально компактное чебышевское множество в равномерно выпуклом гладком пространстве выпукло (множество M локально компактно, если для любого $x \in M$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что пересечение M с шаром $B(x, \varepsilon)$ компактно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточность в утверждениях 1), 2) следует из леммы 1. Докажем необходимость.

1) Достаточно рассмотреть случай $N = 2$. Пусть M – 2-чебышевское множество в равномерно выпуклом пространстве X . Тогда M является чебышевским, а значит, замкнутым. По теореме 2 пространство X имеет узкие 2-шары.

Предположим, что M не выпукло, т. е. для некоторых двух различных точек y, y' имеем $[y, y'] \cap M = \{y, y'\}$. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, что ε -окрестность точки $m = \frac{y+y'}{2}$ не пересекается с M .

Выберем такое $\theta > 0$, что любая точка 2-шара $B_2 = \{z: \|z - y\| + \|z - y'\| \leq \|y - y'\| + \theta\}$ отстоит от отрезка $[y, y']$ менее чем на $\frac{\varepsilon}{2}$.

2-шар B_2 является центрально-симметричным относительно m выпуклым телом, равномерно выпуклым по лемме 4. Его сдвиг $B_2 - m$ является единичным шаром некоторой равномерно выпуклой нормы $\|\cdot\|'$, эквивалентной исходной норме $\|\cdot\|$ пространства X . Поскольку множество M является 2-чебышевским, оно является $(B_2 - m)$ -чебышевским в смысле определения 2, т. е. чебышевским в пространстве $(X, \|\cdot\|')$.

Напомним еще один результат Л. П. Власова [15].

ТЕОРЕМА С. В равномерно выпуклом банаховом пространстве X всякое P -связное (в частности, чебышевское) множество V -связно.

Здесь P -связность множества M означает непустоту и связность метрической проекции $P_M(x)$ для любого $x \in X$, а V -связность множества M означает, что пересечение M с любым замкнутым шаром пространства X или пусто, или связно.

Согласно теореме С множество M должно быть V -связным в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. В частности, пересечение $M \cap B_2$ (оно не пусто, поскольку содержит точки y и y') должно быть связным. Тогда найдется такая точка $z \in M \cap B_2$, что $\|z - y\| = \|z - y'\|$.

Согласно изложенному выше найдется такая точка $p \in [y, y']$, что $\|z - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Имеем

$$\|p - m\| = \frac{1}{2} \|\|p - y\| - \|p - y'\|\| \leq \frac{1}{2} (\|z - y\| - \|z - y'\| + 2\|p - z\|) = \|p - z\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда $\|z - m\| \leq \|z - p\| + \|p - m\| < \varepsilon$, так что z не лежит в M .

Полученное противоречие показывает, что предположение о невыпуклости M было не верным.

2) Пусть $N \geq 3$ нечетно и M — N -чебышевское множество в гладком равномерно выпуклом пространстве X . Тогда M является чебышевским, а значит, замкнутым.

Предположим, что M не выпукло. Тогда по теореме В существуют такой элемент $x \notin M$, $P_M(x) = \{y\}$, и такое $\alpha > 0$, что в любой близости от x на луче $\{x + \lambda(x - y) : \lambda > 0\}$ найдется элемент x' , $P_M(x') = y'$, для которого $\alpha < \|y - y'\| < 2\alpha$.

Рис. 2

На рис. 2 изображена двумерная плоскость, содержащая точки x, y, x', y' . Считаем, что $\rho = \|x - y\| = 1$, и обозначаем $\|x' - y'\| = \rho'$, $\|x - x'\| = t$. Нетрудно видеть, что $1 - t < \rho' < 1 + t$, $\|x - y'\| < 1 + 2t$. Обозначим также $m := \frac{y + y'}{2}$.

Оценим величину

$$\|m - x\| = \frac{1}{2} \|(y - x) + (y' - x)\| \leq \frac{1}{2} \|(y - x) + \sigma(y' - x)\| + t \quad (5)$$

(здесь $\sigma(y' - x) = \frac{y' - x}{\|y' - x\|}$). Поскольку единичные векторы $y - x$ и $\sigma(y' - x)$ отделены друг от друга:

$$\|(y - x) - \sigma(y' - x)\| \geq \|y - y'\| - \|(y' - x) - \sigma(y' - x)\| \geq \alpha - 2t,$$

при $t < t_0$ для некоторого $\varepsilon > 0$ из равномерной выпуклости пространства X и соотношения (5) получаем

$$\|m - x\| < 1 - \varepsilon. \quad (6)$$

По теореме 2 найдется такое $\theta > 0$, что любая точка z , удовлетворяющая неравенству $\|z - y\| + \|z - y'\| \leq \|y - y'\| + \theta$, отстоит от отрезка $[y, y']$ менее чем на $\frac{\varepsilon}{4}$ (напомним, что при любом из рассматриваемых t выполнено неравенство $\|y - y'\| < 2\alpha$).

Зафиксируем какое-нибудь положительное $t < \min\{t_0, \frac{\theta}{2N-4}\}$. Тем самым мы фиксируем x' , y' и m . На отрезке $[x, x']$ возьмем такую точку a , что $\|a - y\| = \|a - y'\| = r \in (1, 1 + t)$. N -шар

$$B_N = \{z \in X : (N - 2)\|z - a\| + \|z - y\| + \|z - y'\| \leq (N - 2)r + \|y - y'\|\}$$

невырожден, поскольку

$$\underbrace{\rho(a, \dots, a, y, y')}_{N-2} \leq (N - 2)\|m - a\| + \|m - y\| + \|m - y'\| < (N - 2)r + \|y - y'\|.$$

Пересечение $M \cap B_N$ непусто, так как содержит точки y и y' . Если бы оно было связным, то нашлась бы такая точка $z \in M \cap B_N$, что $|\|z - y\| - \|z - y'\|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} (N - 2)\|z - a\| + \|z - y\| + \|z - y'\| &\leq (N - 2)r + \|y - y'\|, \\ \|z - a\| &\geq \|z - x\| - \|x - a\| > 1 - t > r - 2t, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\|z - y\| + \|z - y'\| \leq \|y - y'\| + 2(N - 2)t \leq \|y - y'\| + \theta.$$

Следовательно, в силу выбора θ найдется такая точка $p \in [y, y']$, что $\|z - p\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Имеем

$$\|p - m\| = \frac{1}{2}|\|p - y\| - \|p - y'\|| \leq \frac{1}{2}(|\|z - y\| - \|z - y'\|| + 2\|p - z\|) < \frac{\varepsilon}{2},$$

что вместе с (6) влечет $\|z - x\| \leq \|z - p\| + \|p - m\| + \|m - x\| < 1$, т. е. $\|z - x\| < \rho(x, M)$ и $z \notin M$. Полученное противоречие показывает, что пересечение $M \cap B_N$ несвязно.

Множество B_N не является, вообще говоря, центрально-симметричным относительно какой-либо своей внутренней точки b . Поэтому сдвиг $B_N - b$ является единичным шаром некоторой *несимметричной* равномерно выпуклой (в силу леммы 4) нормы $\|\cdot\|'$, эквивалентной исходной норме $\|\cdot\|$ пространства X . Поскольку множество M является N -чебышевским, оно является $(B_N - b)$ -чебышевским в смысле определения 2, т. е. чебышевским в пространстве $(X, \|\cdot\|')$.

Для завершения доказательства теоремы, т. е. для получения противоречия с доказанной несвязностью пересечения $M \cap B_N$, нужен аналог теоремы С для несимметрично нормированных пространств. Этот аналог оказывается справедливым и доказывается в следующем параграфе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При дополнительном предположении о равномерной гладкости (см. [16, гл. 2, § 4]) пространства X можно доказать, что указанный выше N -шар B_N при достаточно малых $t > 0$ содержится в объединении $B(x, 1) \cup B(x', \rho')$ обычных шаров, и тогда $P_M(\underbrace{a, \dots, a}_{N-2}, y, y') = \{y, y'\}$, что влечет противоречие с N -чебышевостью множества M , без привлечения V -связности и аналога теоремы С.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Идея использования теоремы С в доказательстве теоремы 3 принадлежит И. Г. Царькову.

§ 5. Доказательство теоремы Л. П. Власова о V -связности чебышевских множеств в случае несимметричной нормы

Напомним, что функция $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, +\infty)$ на линейном пространстве X называется *несимметричной нормой*, если она удовлетворяет всем аксиомам обычной нормы, за исключением того, что равенство $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ выполняется только при $\lambda \geq 0$ (см. [17, гл. 9, § 3], где введены понятия “несимметричная норма” и обозначение $\|\cdot\|$; конечномерные несимметрично нормированные пространства встречаются и в более ранних работах: см., например, [18, разд. 5]).

Открытые шары $\mathring{V}(x, r) = \{y \in X: \|y - x\| < r\}$ составляют по определению базу топологии в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Пространство X с такой топологией не является, вообще говоря, линейным топологическим пространством: в X может нарушаться аксиома непрерывности умножения на скаляр (более подробно см., например, [19]).

В каждом пространстве с несимметричной нормой $\|\cdot\|$ можно ввести согласованную с ней симметричную норму $\|x\|_{\text{sym}} := \max\{\|x\|, \|-x\|\}$. Очевидно, $\|x\| \leq \|x\|_{\text{sym}}$. Если выполнено обратное неравенство $\|x\|_{\text{sym}} \leq c\|x\|$ с некоторой абсолютной константой $c \geq 1$, то нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\text{sym}}$ эквивалентны, порождают одну и ту же топологию, и тогда $(X, \|\cdot\|)$ является линейным топологическим пространством. Покажем, что в случае равномерно выпуклой нормы $\|\cdot\|$ она эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\text{sym}}$.

Пространство $(X, \|\cdot\|)$ будем называть *равномерно выпуклым* (или норму $\|\cdot\|$ *равномерно выпуклой*), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$x, y \in S(X) := \{z: \|z\| = 1\}, \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon$$

(а значит, и $\|y - x\| < \varepsilon$).

Нетрудно видеть, что замкнутое тело в банаховом пространстве X , содержащее точку 0 внутри себя и равномерно выпуклое в смысле определения 6, порождает в X равномерно выпуклую несимметричную норму.

ЛЕММА 5. В равномерно выпуклом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ нормы $\|\cdot\|_{\text{sym}}$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны. Более точно, если существует такое $\delta > 0$, что

$$x, y \in S(X), \quad \|x + y\| > 2 - \delta \implies \|x - y\| < 1,$$

то $\|x\|_{\text{sym}} \leq \frac{\|x\|}{\delta}$ для любого x . В частности, $(X, \|\cdot\|)$ является линейным топологическим пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, нашелся такой вектор $x \in S(X)$, что $\alpha = \|-x\| > \frac{1}{\delta}$. Рассмотрим какое-нибудь двумерное сечение пространства X , содержащее 0 и x . В этом сечении найдутся точки $a, b \in S(X)$, $b - a = -\frac{x}{\alpha}$. Пусть $m = \frac{a+b}{2}$, e – точка пересечения прямых $0m$ и xa (рис. 3).

Рис. 3

Имеем $\|e\| \geq 1$ в силу выпуклости шара $\{\|x\| \leq 1\}$ и

$$\|m\| = \|e\| \frac{\|m\|}{\|e\|} = \|e\| \frac{\|x\| - \|a - m\|}{\|x\|} = \|e\| \left(1 - \left\| \frac{x}{2\alpha} \right\| \right) \geq 1 - \frac{1}{2\alpha} > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Таким образом, $\|a + b\| > 2 - \delta$, и по условию леммы должно быть $\|b - a\| < 1$, однако мы имеем $\|b - a\| = \left\| -\frac{x}{\alpha} \right\| = 1$. Лемма доказана.

На пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с несимметричной нормой определены линейные ограниченные функционалы [17, гл. 9, § 5], которые образуют сопряженное пространство X^* с нормой $\|f\| = \sup\{\frac{f(x)}{\|x\|} : x \neq 0\}$. Это сопряженное пространство является, вообще говоря, не линейным пространством, а конусом (если функционал f ограничен, то функционал $-f$ необязательно ограничен; см. пример в [19]). В случае, когда нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\text{sym}}$ эквивалентны (в частности, если норма $\|\cdot\|$ равномерно выпукла – см. лемму 5), X^* является линейным пространством. Во всяком случае, для любых $f \in X^*$, $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq \|f\|\|x\|$, которое будет применяться далее.

Для пространств с несимметричной нормой справедлива теорема Хана–Банаха [17, гл. 9, § 5], и, в частности, для любой точки $s \in S(X) = \{x : \|x\| = 1\}$ найдется такой опорный функционал f_s , что $\|f_s\| = 1$, $f_s(s) = 1$.

Аналогично симметричному случаю, для элемента $x \in (X, \|\cdot\|)$ и множества $M \subset X$ положим $\rho(x, M) = \inf\{\|y - x\| : y \in M\}$, $P_M(x) = \{y \in M : \|y - x\| = \rho(x, M)\}$. Будем называть M *чебышевским*, если метрическая проекция $P_M(x)$ одноточечна для любого $x \in X$ (впервые чебышевские множества в несимметрично нормированных пространствах рассматривались, по-видимому, А. Брэнстедом [7]). Будем называть M *P-связным*, если метрическая проекция $P_M(x)$ не пуста и связна для любого $x \in X$, и *V-связным*, если пересечение M с каждым замкнутым шаром $V(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$ связно.

Определим диаметр множества M как $\text{diam} M = \sup\{\|y - z\|_{\text{sym}} : y, z \in M\}$, а также величину

$$d_M(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \text{diam}(M \cap V(x, \rho(x, M) + \delta)).$$

Ясно, что если множество M замкнуто и $d_M(x) = 0$, то $P_M(x)$ состоит из одной точки, и если при этом $y \in [x, P_M(x)]$, то $d_M(y) = 0$.

Теперь можно сформулировать и доказать теорему C в несимметричном случае.

ТЕОРЕМА 4. *В полном равномерно выпуклом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ всякое P-связное (в частности, чебышевское) множество V-связно.*

Приведем доказательство теоремы 4 по трем причинам: во-первых, для полноты изложения, во-вторых, потому, что доказательство Л. П. Власова не совсем подходит для несимметричного случая, а в-третьих, потому, что ниже это доказательство Л. П. Власова (приведенное в [15], а не в [2]) изменяется и сокращается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В силу леммы 5 найдется такое $c > 1$, что $\|x\|_{\text{sym}} \leq c\|x\|$ для всякого $x \in X$.

1. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Если пространство $(X, \|\cdot\|)$ равномерно выпукло, то для любых $R > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$a, b \in X, \|b - a\| \in [\alpha R, R] \implies \text{diam}(V(b, R - \|b - a\| + \delta) \setminus \mathring{V}(a, R)) < \varepsilon.$$

В симметричном случае лемма 6 доказывалась С. Б. Стечкиным в [20]. Наше доказательство отлично от доказательства С. Б. Стечкина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Достаточно доказать лемму для случая $R = 1$ и $a = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию найдется такое $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{4c})$, что

$$x, y \in S(X), \|x + y\| > 2 - \frac{\delta}{\alpha} \implies \|y - x\| < \frac{\varepsilon}{4c}. \quad (7)$$

Полагаем $a = 0$, $\|b\| \in [\alpha, 1]$, $x = \sigma(b) := \frac{b}{\|b\|}$, и пусть $z \in V(b, 1 - \|b\| + \delta) \setminus \mathring{V}(0, 1)$, а f_y , $\|f_y\| = 1$, — опорный функционал к $S(X)$ в точке $y = \sigma(z)$. Имеем

$$1 \leq \|z\| = f_y(z) = f_y(b) + f_y(z - b) \leq f_y(b) + 1 - \|b\| + \delta,$$

т. е. $f_y(b) \geq \|b\| - \delta$, откуда $f_y(x) = f_y(\sigma(b)) \geq 1 - \frac{\delta}{\|b\|} \geq 1 - \frac{\delta}{\alpha}$. Следовательно, $\|y + x\| \geq f_y(y + x) \geq 2 - \frac{\delta}{\alpha}$, что в силу (7) влечет $\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{4c}$. Отсюда имеем $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = \|z\| - 1 + \|y - x\| < \delta + \frac{\varepsilon}{4c} < \frac{\varepsilon}{2c}$.

Таким образом, для любых точек $z_1, z_2 \in V(b, 1 - \|b\| + \delta) \setminus \mathring{V}(0, 1)$ получаем

$$\|z_1 - z_2\|_{\text{sym}} \leq \|z_1 - x\|_{\text{sym}} + \|z_2 - x\|_{\text{sym}} \leq c(\|z_1 - x\| + \|z_2 - x\|) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

2. Далее понадобится

ЛЕММА 7. Если пространство $(X, \|\cdot\|)$ равномерно выпукло, то для любого замкнутого $M \subset X$ множество $\{x \in X: d_M(x) = 0\}$ является дополнением к множеству первой категории в X .

В случае симметричной нормы это утверждение доказано С. Б. Стечкиным в [20] и мы лишь повторяем его доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Множество $\{x \in X: d_M(x) = 0\}$ является дополнением к объединению множеств $F_n = \{x \in X: d_M(x) \geq \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \dots$. Нетрудно видеть, что каждое F_n замкнуто. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что в любой окрестности $U(a)$ точки $a \in F_n$ найдется точка $b \notin F_n$. Пусть $R = \rho(a, M) > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ таково, что $V(a, \alpha R) \subset U(a)$. Возьмем какой-нибудь элемент $p \in M$, для которого $\|p - a\| < R + \delta$, и пусть $b = a + \alpha R(p - a)/\|p - a\| \in U(a)$. Имеем $\rho(b, M) \leq R(1 - \alpha) + \delta$, и для любого $\delta > 0$ выполнено

$$M \cap V(b, \rho(b, M) + \delta) \subset V(b, R(1 - \alpha) + 2\delta) \setminus \mathring{V}(a, R).$$

По лемме 6 значение δ можно выбрать так, что диаметр последней разности шаров меньше $\frac{1}{n}$, а значит, $d_M(b) < \frac{1}{n}$ и $b \notin F_n$.

3. Если $x, y \in X$, $M \subset X$, то $\rho(x, M) \leq \rho(y, M) + \|y - x\|$. Это следует из неравенства треугольника $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\|$.

4. Включение $V(y, r) \subset V(x, R)$ эквивалентно неравенству $\|y - x\| \leq R - r$. Это просто и доказывается так же, как в симметричном случае.

5. Докажем основную лемму.

ЛЕММА 8. Пусть пространство $(X, \|\cdot\|)$ равномерно выпукло и пересечение замкнутого множества $M \subset X$ с некоторым шаром $V(x, R)$ является объединением непустых, замкнутых и непересекающихся множеств A и B . Если при этом $\rho(x, A) < \rho(x, B) < R$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x' \in X$ и $R' > 0$, что $V(x', R') \subset \mathring{V}(x, R)$, множества $A' = V(x', R') \cap A$ и $B' = V(x', R') \cap B$ не пусты, замкнуты и не пересекаются; $\text{diam} A' < \varepsilon$ и $R' - \varepsilon < \rho(x', B') < \rho(x', A') < R'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим какую-нибудь такую точку $b \in B$, что $R_0 := \|b - x\| < \rho(x, B) + \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, R - \rho(x, B)\}$, $\rho(x, B) \leq R_0 < R$. Можно считать, что $[x, b] \cap B = \{b\}$.

Возьмем положительное $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{R - R_0}{2}, \rho(b, A)\}$.

Пусть $z(\theta) = x + \theta(b - x)$,

$$\theta_0 := \sup\{\theta \in [0, 1]: V(z(\theta), R_0 - \|z(\theta) - x\| + \delta) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Имеем $\theta_0 > 0$, поскольку для всех достаточно малых θ

$$\rho(z(\theta), A) \leq \rho(x, A) + \|x - z(\theta)\| < \rho(x, B) - \|z(\theta) - x\| \leq R_0 - \|z(\theta) - x\|,$$

и $\theta_0 < 1$, поскольку $\rho(b, A) > \delta$.

Положим $x_1 = z(\theta_0)$, $R_1 = R_0 - \|x_1 - x\| + 2\delta < R - \|x_1 - x\|$. Согласно п. 4 доказательства имеем $V(x_1, R_1) \subset \overset{\circ}{V}(x, R)$. Множества $A_1 = V(x_1, R_1) \cap A$, $B_1 = V(x_1, R_1) \cap B$ замкнуты и не пересекаются. Они не пусты: A_1 – по определению числа θ_0 , а B_1 – в силу того, что содержит точку b . При этом

$$\begin{aligned} 0 < \rho(x_1, A_1) &= \rho(x_1, A) = R_0 - \|x_1 - x\| + \delta = R_1 - \delta, \\ 0 < \rho(x_1, B_1) &\leq \|b - x_1\| = R_0 - \|x_1 - x\| = R_1 - 2\delta < \rho(x_1, A_1) \end{aligned}$$

и согласно п. 3 доказательства

$$\begin{aligned} \rho(x_1, B_1) &\geq \rho(x, B_1) - \|x_1 - x\| \geq \rho(x, B) - \|x_1 - x\| \\ &> R_0 - \frac{\varepsilon}{2} - \|x_1 - x\| = R_1 - 2\delta - \frac{\varepsilon}{2} > R_1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

так что $R_1 - \varepsilon < \rho(x_1, B_1) < \rho(x_1, A_1) < R_1$.

Итак, точка x_1 , число R_1 и множества A_1 и B_1 удовлетворяют свойствам из условия леммы, требуемым для x' , R' , A' и B' , кроме свойства $\text{diam} A_1 < \varepsilon$.

Если теперь, пользуясь леммой 7, в достаточной близости от точки x_1 взять такую точку x' , что $d_{A_1}(x') = 0$, в качестве R' взять число, чуть большее $\rho(x', A_1) \approx \rho(x, A_1) = R_1 - \delta$, а также взять $A' = A_1 \cap V(x', R')$, $B' = B_1 \cap V(x', R')$, то мы получим $V(x', R') \subset V(x_1, R_1)$, $V(x', R') \cap M = A' \cup B'$, и тогда все требуемые свойства будут выполнены.

6. Если применить лемму 8 дважды: сначала к данным в ее условии x , R , A и B , а затем к x' , R' , B' и A' , то получим такие x'' , R'' , $A'' \subset A$ и $B'' \subset B$, что $V(x'', R'') \subset \overset{\circ}{V}(x, R)$, $V(x'', R'') \cap M = A'' \cup B''$, A'' и B'' непустые, замкнутые и непересекающиеся, $\text{diam} A'' < \varepsilon$, $\text{diam} B'' < \varepsilon$ и $R'' - \varepsilon < \rho(x'', A'') < \rho(x'', B'') < R''$.

7. Продолжим доказательство теоремы. Предположим, что P -связное множество M не является V -связным, т. е. пересечение множества M с некоторым шаром $V(x, R)$ является объединением непустых, замкнутых и непересекающихся множеств A и B .

Покажем, что неравенство $\rho(x, A) < \rho(x, B) < R$ можно считать выполненным с самого начала доказательства.

Из P -связности следует, что метрическая проекция $P_M(y)$ непуста для любого $y \in X$ (отсюда, в частности, вытекает замкнутость множества M). Пусть $\rho(x, A) = \rho(x, B) = \rho$. Тогда $\rho > 0$ (иначе $A \cap B \ni x$) и $\rho < R$ (иначе $P_M(x) = A \cup B$ – несвязное множество). Кроме того, $P_M(x) = P_A(x) \cup P_B(x)$, поэтому одна из проекций $P_A(x)$ или $P_B(x)$ непуста. Пусть, скажем, $a \in P_A(x)$. Взяв точку x_1 на отрезке $[a, x]$ достаточно близко к x и положив $R_1 = R - \|x_1 - x\|$, $A_1 = A \cap V(x_1, R_1)$, $B_1 = B \cap V(x_1, R_1)$, получим $V(x_1, R_1) \subset V(x, R)$ (согласно п. 4), $V(x_1, R_1) \cap M = A_1 \cup B_1$, A_1 и B_1 замкнуты и не пересекаются, A_1 непусто, поскольку $a \in A_1$, B_1 непусто, поскольку в силу п. 3 и неравенства $\rho < R$ имеем

$$\rho(x_1, B) \leq \rho(x, B) + \|x - x_1\| \leq \rho + c\|x_1 - x\| < R - \|x_1 - x\| = R_1$$

при $\|x_1 - x\| < (R - \rho)/(c + 1)$. Покажем, кроме того, что $\rho(x_1, A_1) < \rho(x_1, B_1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(x_1, A_1) &= \|a - x_1\| = \rho - \|x_1 - x\|, \\ \rho(x_1, B_1) &\geq \rho(x, B_1) - \|x_1 - x\| \geq \rho(x, B) - \|x_1 - x\| = \rho - \|x_1 - x\|, \end{aligned}$$

и если все же существуют такие $y_n \in B_1$, что $\|y_n - x_1\| \rightarrow \rho - \|x_1 - x\|$, то эти y_n сходятся к точке a :

$$y_n \in V(x_1, \|y_n - x_1\|) \setminus \mathring{V}(x, \rho) = V(x_1, \rho - \|x_1 - x\| + o(1)) \setminus \mathring{V}(x, \rho),$$

а эти разности сжимаются к точке a по лемме 6.

Итак, с самого начала можно считать, что $\rho(x, A) < \rho(x, B)$. Если при этом $\rho(x, B) = R$, то на границе шара $V(x, R)$ есть точка $b \in B$ (иначе $V(x, R)$ не пересекается с B). На отрезке $[x, b]$ возьмем такую точку x_2 , что $\|x_2 - x\| < (R - \rho(x, A))/(1 + c)$. Возьмем также такое число R_2 , чуть большее $R - \|x_2 - x\|$, чтобы выполнялось неравенство $\text{diam}(V(x_2, R_2) \setminus \mathring{V}(x, R)) < \rho(b, A)$. Имеем

$$\rho(x_2, A) \leq \rho(x, A) + \|x - x_2\| \leq \rho(x, A) + c\|x_2 - x\| < R - \|x_2 - x\| = \rho(x_2, B) < R_2.$$

Положим

$$A_2 = V(x_2, R_2) \cap A, \quad B_2 = [V(x_2, R_2) \cap B] \cup [V(x_2, R_2) \cap M \setminus \mathring{V}(x, R)].$$

Множества A_2 и B_2 непусты, замкнуты, $V(x_2, R_2) \cap M = A_2 \cup B_2$, и $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, так как иначе найдется точка $a \in A$, $a \in V(x_2, R_2) \setminus \mathring{V}(x, R)$, откуда $\|a - b\| \leq \text{diam}(V(x_2, R_2) \setminus \mathring{V}(x, R)) < \rho(b, A)$. Противоречие. При этом $\rho(x_2, A_2) = \rho(x_2, A) < \rho(x_2, B) = \rho(x_2, B_2) < R_2$.

Итак, с самого начала можно считать, что $\rho(x, A) < \rho(x, B) < R$.

Рассмотрим последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и, пользуясь утверждением из п. 6, построим последовательность шаров $V(x_n, R_n) \subset \mathring{V}(x_{n-1}, R_{n-1})$ и множеств $A_n \subset A_{n+1}$, $\text{diam} A_n < \varepsilon_n \rightarrow 0$, и $B_n \subset B_{n+1}$, $\text{diam} B_n < \varepsilon_n \rightarrow 0$. В силу монотонности последовательности R_n существует $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n =: \bar{R} > 0$ (иначе A и B пересекаются). Поскольку $\|x_m - x_n\| < R_n - R_m$ при $m > n$, последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $\bar{x}$. Имеем

$$\rho(\bar{x}, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, M) = \bar{R},$$

так как $R_n - \varepsilon_n < \rho(x_n, M) < R_n$. Метрическая проекция $P_M(\bar{x})$ состоит из пересечений $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, каждое из которых одноточечно. Это противоречит P -связности множества M .

Теорема 4, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

§ 6. Выпуклость множеств в гильбертовом пространстве при условии одноточечности метрической 2-проекции для пар близких точек

Следующее утверждение является ответом на вопрос В. В. Арестова, сформулированный в конце § 1.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X = H$ – гильбертово пространство, $N \geq 2$ и для множества $M \subset H$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых точек $x_1, \dots, x_N \in H$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_1, \dots, x_N) \leq \varepsilon \rho(x_1, \dots, x_N; M)$, метрическая N -проекция $P_M(x_1, \dots, x_N)$ состоит из одной точки. Тогда M выпукло.

Отметим, что внимание автора на возможность доказательства такой теоремы обратил именно И. Г. Царков.

Тогда N -шар $B_N = B(p, -p, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2}; \mu - \frac{\theta_0}{2})$ содержит точки y и y' из множества M , но его пересечение с M не связно, поскольку сечение $B_N \cap \Pi$ лежит внутри S и не пересекается с M , а точки y и y' лежат по разные стороны от этого сечения.

В то же время

$$\mu - \frac{\theta_0}{2} > \mu - \theta_0 = N - 2 + \|y - p\| + \|y + p\| > N > \varepsilon^{-1} \cdot 2\delta = \varepsilon^{-1} \rho(p, -p, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2})$$

и B_N содержит 0 внутри себя, так что множество M должно быть B_N -чебышевским, т.е. чебышевским в пространстве $(H, \|\cdot\|')$, где $\|\cdot\|'$ – равномерно выпуклая норма с единичным шаром B_N , который центрально-симметричен относительно нуля и равномерно выпукл по лемме 4.

По теореме C множество M должно быть V -связным в пространстве $(X, \|\cdot\|')$, но, как мы только что видели, $M \cap B_N$ не связно. Полученное противоречие показывает, что предположение о невыпуклости M было неверным. Теорема доказана.

Для произвольного единичного вектора $e \in H$ и произвольного числа $k > 0$ обозначим через $A_{e,k}$ линейный оператор, производящий растяжение пространства H в k раз вдоль направления e : $A_{e,k}(x) = x + (k - 1)(x, e)e$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если чебышевское множество $M \subset H$ устойчиво в том смысле, что образы $A_{e,k}(M)$ являются чебышевскими множествами для любого $e \in S(H)$ и любого $k \in [1 - \varepsilon, 1]$, где $\varepsilon \in (0, 1)$ – некоторое фиксированное число, то M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие означает, что множество M является E -чебышевским в смысле определения 2 для любого тела $E = E(e, k) = A_{e,k}^{-1}(B)$, где B – единичный шар пространства H . Однако, как нетрудно проверить, тело $E(e, k)$ является 2-шаром $B(\sqrt{1 - k^2 \frac{e}{k}}, -\sqrt{1 - k^2 \frac{e}{k}}; \frac{2}{k})$, который гомотетичен 2-шару $B(\sqrt{1 - k^2 \frac{e}{2}}, -\sqrt{1 - k^2 \frac{e}{2}}; 1)$. Расстояние между фокусами этого эллипсоида равно $\sqrt{1 - k^2}$ и меняется от 0 до $\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$ при $k \in [1 - \varepsilon, 1]$. Следовательно, $P_M(x_1, x_2)$ состоит из одной точки для любых x_1, x_2 , $\|x_1 - x_2\| \leq \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} \rho(x_1, x_2; M)$, т.е. M удовлетворяет условиям теоремы 5, а значит, выпукло.

Было бы интересно обобщить теорему 5 для равномерно выпуклых банаховых пространств.

§ 7. Выпуклость множеств, N -чебышевских для бесконечно многих N

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – произвольное банахово пространство и множество $M \subset X$ является N -чебышевским и N -солнцем для бесконечной последовательности натуральных N . Тогда M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что множество M является чебышевским, а значит, замкнутым. Пусть M не выпукло. Тогда найдутся такие

точки $a, b \in M$, что $[a, b] \cap M = \{a, b\}$ и любая точка интервала (a, b) находится на положительном расстоянии от множества M .

Положим $m = \frac{a+b}{2}$, $e = b - a$. Без ограничения общности считаем $\|e\| = 1$. Возьмем такое $\delta > 0$, что $\rho(m, M) > 5\delta$. Тогда $\delta < \frac{\|m-a\|}{5} = \frac{1}{10}$ и для любой точки x из отрезка $[m, m + \delta e] \subset [a, b]$ имеем $\rho(x, M) > 4\delta$.

Возьмем такое натуральное $n > \frac{1}{\delta}$, что M является $(n+1)$ -чебышевским и $(n+1)$ -солнцем. На отрезке $[m, m + \delta e]$ рассмотрим точки $x_k = m + (\frac{\delta k}{n})e$, $k = 0, \dots, n$. Без ограничения общности можно считать, что $P_M(x_0, \dots, x_n) = 0 \in M$ (рис. 5). При этом $a \neq 0$ и $b \neq 0$, иначе сразу получается противоречие с $(n+1)$ -солнечностью множества M .

Рис. 5

Положим $\theta = \frac{\delta}{2n} < \frac{1}{20}$ и докажем неравенство

$$\sum_{k=0}^n (\|x_k - \theta b\| + \|x_k - \theta a\| - 2\|x_k\|) < 0. \quad (8)$$

Из неравенства (8) будет следовать, что либо θa , либо θb принадлежит открытому $(n+1)$ -шару $\tilde{B}(x_0, \dots, x_n; \rho(x_0, \dots, x_n; M))$. Но тогда $(n+1)$ -шар $\tilde{B}(x_0\theta^{-1}, \dots, x_n\theta^{-1}; \rho(x_0, \dots, x_n; M)\theta^{-1})$ содержит либо точку a , либо точку b , а это противоречит равенству $\rho(x_0, \dots, x_n; M)\theta^{-1} = \rho(x_0\theta^{-1}, \dots, x_n\theta^{-1}; M)$, вытекающему из $(n+1)$ -солнечности множества M .

Итак, докажем (8). Имеем

$$\theta b = \theta x_k + (1 - \theta)\lambda_k e, \quad \theta a = \theta x_k - (1 - \theta)\mu_k e,$$

где

$$\lambda_k = \frac{\theta}{1 - \theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta k}{n} \right), \quad \mu_k = \frac{\theta}{1 - \theta} \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta k}{n} \right), \quad k = 0, \dots, n,$$

кроме того,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n (\|x_k - \theta b\| + \|x_k - \theta a\| - 2\|x_k\|) \\
&= \sum_{k=0}^n ((1 - \theta)\|x_k - \lambda_k e\| + (1 - \theta)\|x_k + \mu_k e\| - 2\|x_k\|) \\
&= (1 - \theta) \sum_{k=0}^n (\|x_k - \lambda_k e\| + \|x_k + \mu_k e\| - 2\|x_k\|) - 2\theta \sum_{k=0}^n \|x_k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^n (\|x_k - \mu_k e\| + \|x_k + \mu_k e\| - 2\|x_k\|) + \sum_{k=0}^n |\mu_k - \lambda_k| - 2\theta \sum_{k=0}^n \rho(x_k, M) \\
&\leq \sum_{k=0}^n (\|x_k - \mu_k e\| + \|x_k + \mu_k e\| - 2\|x_k\|) + 2\theta \cdot 2\delta n - 2\theta \cdot 4\delta n \\
&= \sum_{k=0}^n (\|x_k - \mu_k e\| + \|x_k + \mu_k e\| - 2\|x_k\|) - 2\delta^2 =: I.
\end{aligned}$$

Функция $f(\lambda) = \|x_k - \lambda e\| + \|x_k + \lambda e\|$ (нестрого) возрастает при $\lambda \in [0, \infty)$, и при этом

$$\mu_k < 2\theta \left(\frac{1}{2} + \delta \right) = \theta(1 + 2\delta) = \frac{\delta}{2n}(1 + 2\delta) < \frac{\delta}{n},$$

откуда получаем

$$\|x_k - \mu_k e\| + \|x_k + \mu_k e\| \leq \left\| x_k - \frac{\delta}{n} e \right\| + \left\| x_k + \frac{\delta}{n} e \right\| = \|x_{k-1}\| + \|x_{k+1}\|,$$

где $k = 0, \dots, n$, $x_{-1} := m - \frac{\delta e}{n}$, $x_{n+1} := m + (n+1) \frac{\delta e}{n}$, и

$$\begin{aligned}
I &\leq \sum_{k=0}^n (\|x_{k-1}\| + \|x_{k+1}\| - 2\|x_k\|) - 2\delta^2 \\
&= \|x_{-1}\| - \|x_1\| + \|x_{n+1}\| - \|x_n\| - 2\delta^2 \leq 2 \left\| \frac{\delta}{n} e \right\| - 2\delta^2 = \frac{2\delta}{n} - 2\delta^2 < 0
\end{aligned}$$

в силу выбора n . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть в банаховом пространстве X существуют замкнутое множество M и такие точки a, b , что $[a, b] \cap M = \{a, b\}$. Тогда M не может быть одновременно N -чебышевским и N -солнцем ни для какого натурального

$$N > \frac{5\|b - a\|}{\rho((a + b)/2, M)} + 1.$$

В связи с теоремой 6 возникает вопрос: существует ли для заданного $N \geq 2$ N -чебышевское множество, которое не является N -солнцем? Для $N = 1$ примеры таких множеств имеются в [21]. Невыпуклые 2-чебышевское и

3-чебышевское множества, построенные в примерах 1, 2 в § 3, являются соответственно 2-солнцем и 3-солнцем.

Выделим дополнительные условия, при которых N -чебышевское множество является N -солнцем и формулировка теоремы 6 упростится.

ЛЕММА 9. *В произвольном банаховом пространстве всякое локально компактное N -чебышевское множество, метрическая N -проекция на которое непрерывна на множестве $\{(x_1, \dots, x_N) \in X \times \dots \times X : \rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N)\}$, является N -солнцем.*

В случае $N = 1$ это результат Л. П. Власова [15, теорема 5], и мы лишь переносим доказательство на случай произвольного N . Следует отметить, что первым это сделал И. С. Логинов в своей курсовой работе весной 2009 г.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9. Если M не N -солнце, то можно найти такие точки $x_1, \dots, x_N$, что $\rho(x_1, \dots, x_N; M) > \rho(x_1, \dots, x_N)$ (см. замечание 1), $P_M(x_1, \dots, x_N) = y$, и для какого-то k

$$P_M(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \lambda(x_k - y), x_{k+1}, \dots, x_N) \neq y$$

при всех $\lambda > 0$ (отсюда, в частности, следует, что $x_k \neq y$). Без ограничения общности считаем $x_k = 0$.

Из локальной компактности множества M и непрерывности P_M на указанном в условии множестве следует, что найдется такой шар $B = B(0, R)$, что образ $P_M(x_1, \dots, x_{k-1}, B, x_{k+1}, \dots, x_N)$ предкомпактен и не содержит нуля. Отображение

$$\varphi: x \rightarrow \frac{-P_M(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_N)}{\|P_M(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_N)\|} R$$

непрерывно отображает шар B в его компактную часть. По теореме Шаудера–Тихонова существует неподвижная точка $u = \varphi(u) = -\frac{Ry'}{\|y'\|}$, где $y' = P_M(x_1, \dots, x_{k-1}, u, x_{k+1}, \dots, x_N)$. Поскольку нуль лежит на отрезке $[u, y']$, имеем $y = P_M(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_N) = y'$, что противоречит выбору точки $x_k = 0$: точка u лежит на луче $\{y + \lambda(-y) : \lambda > 0\}$ дальше, чем нуль. Лемма доказана.

Из леммы 9 и теоремы 6 вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть X – произвольное банахово пространство. Если ограниченно компактное множество $M \subset X$ является N -чебышевским для некоторой бесконечной последовательности натуральных N , то оно выпукло.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Пусть X – конечномерное банахово пространство. Если множество $M \subset X$ является N -чебышевским для некоторой бесконечной последовательности натуральных N , то оно выпукло.*

§ 8. Заключение

Помимо задач, упомянутых в настоящей работе и непосредственно связанных с ее результатами, естественно возникают другие задачи, не имеющие прямого отношения к проблеме выпуклости, а именно можно исследовать вопросы N -существования и N -единственности, N -чебышевские подпространства в функциональных пространствах, N -аппроксимативную компактность,

N -антипроксиминальные множества и различные другие свойства оператора метрического N -проектирования.

Однако, как представляется автору, круг возникающих задач не ограничивается рамками геометрической теории приближений: ведь эти, условно говоря, N -приближения (когда в заданном множестве ищется элемент с наименьшей суммой расстояний до заданных N элементов) допускают все основные постановки задач теории приближений: получение прямых и обратных теорем, сходимостъ различных методов приближения, оценки поперечников и т. д.

При этом вместо суммы расстояний до заданных N элементов можно брать их максимум или вообще любую подходящую функцию от этих расстояний.

Автор глубоко благодарен И. Г. Царькову, подсказавшему идею использования теоремы Л. П. Власова о V -связности чебышевских множеств (теорема С). Без этой идеи теорема 3 была бы менее общей, а теоремы 5 не было бы вовсе.

Автор благодарен также А. Р. Алимову и О. Л. Ромаскевич за ценные замечания.

Список литературы

1. Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, "Некоторые свойства чебышевских множеств", *Докл. АН СССР*, **118**:1 (1958), 17–19.
2. Л. П. Власов, "Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах", *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66; англ. пер.: L. P. Vlasov, "Approximative properties of sets in normed linear spaces", *Russian Math. Surveys*, **28**:6 (1973), 1–66.
3. В. С. Балаганский, Л. П. Власов, "Проблема выпуклости чебышевских множеств", *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188; англ. пер.: V. S. Balaganskii, L. P. Vlasov, "The problem of convexity of Chebyshev sets", *Russian Math. Surveys*, **51**:6 (1996), 1127–1190.
4. М. И. Карлов, И. Г. Царьков, "Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц", *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 967–978.
5. А. Р. Алимов, "Всякое ли чебышевское множество выпукло?", *Матем. просв.*, сер. 3, 1998, № 2, 155–172.
6. П. А. Бородин, "Выпуклость 2-чебышевских множеств в гильбертовом пространстве", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 3, 16–19; англ. пер.: P. A. Borodin, "Convexity of 2-Chebyshev sets in a Hilbert space", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **63**:3 (2008), 96–98.
7. A. Brøndsted, "Convex sets and Chebyshev sets", *Math. Scand.*, **17**:1 (1965), 5–16.
8. А. Р. Алимов, "Чебышевские множества в линейных пространствах с несимметричной сферой", *Теория функций и приближений*, Тр. 7-й Саратовской зимней школы, посвященной памяти проф. А. А. Привалова, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1995, 91–93.
9. А. Р. Алимов, "Выпуклость чебышевских множеств, содержащихся в подпространстве", *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 3–15; англ. пер.: A. R. Alimov, "Convexity of Chebyshev sets contained in a subspace", *Math. Notes*, **78**:1 (2005), 3–13.
10. Л. П. Власов, "О чебышевских и аппроксимативно выпуклых множествах", *Матем. заметки*, **2**:2 (1967), 191–200; англ. пер.: L. P. Vlasov, "Chebyshev sets and approximately convex sets", *Math. Notes*, **2**:2 (1967), 600–605.
11. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. I. Общая теория*, УРСС, М., 2004; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1988.

12. Г. Ш. Рубинштейн, “Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **6**:3 (1965), 711–714.
13. I. Singer, *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
14. Th. Motzkin, “Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes”, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, **21** (1935), 562–567.
15. Л. П. Власов, “Чебышевские множества и некоторые их обобщения”, *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 59–69; англ. пер.: L. P. Vlasov, “Chebyshev sets and some generalizations of them”, *Math. Notes*, **3**:1 (1968), 36–41.
16. Дж. Дистель, *Геометрия банаховых пространств*, Виша школа, Киев, 1980; пер. с англ.: J. Diestel, *Geometry of Banach spaces-selected topics*, Lecture Notes in Math., **485**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.
17. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973; англ. пер.: M. G. Krein, A. A. Nudel'man, *The Markov moment problem and extremal problems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
18. Е. М. Zaustinsky, *Spaces with non-symmetric distance*, Mem. Amer. Math. Soc., **34**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
19. П. А. Бородин, “Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе”, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 329–337; англ. пер.: P. A. Borodin, “The Banach–Mazur theorem for spaces with asymmetric norm”, *Math. Notes*, **69**:3 (2001), 298–305.
20. С. Б. Стечкин, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *Acad. Republ. Popul. Roum., Rev. Math. Pur. Appl.*, **8**:1 (1963), 5–18.
21. С. В. Dunham, “Chebyshev sets in $C[0, 1]$ which are not suns”, *Canad. Math. Bull.*, **18**:1 (1975), 35–37.

П. А. Бородин (P. A. BORODIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступило в редакцию
29.12.2009
03.06.2010